KB PEKAN 15-16 APLIKASI KOMPUTER

BAB LaTeX dan Markdown

Nisrina Octaviani
22305144011
Matematika B 2022

PRODI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2023

DAFTAR ISI

BAB 1

KB PEKAN 2 : PENGENALAN SOFTWARE EULER MATH TOOLBOX

[a4paper,10pt]article eumat

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.

- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.

- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.

- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.

Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.

Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.

Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].

Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$$

maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google
image: hati.png

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.

Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.

EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.

- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).

Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

```
>s=24; s^2
```

```
576
```

```
>alas=10; tinggi=12; 0.5*alas*tinggi
```

```
60
```

```
>p=15; l=20; 2*(p+l)
```

```
70
```

```
>a=7; b=24; c=25; a+b+c
```

```
56
```

```
>r=5; 4*pi*r^2, 2*pi*r
```

```
314.159265359
31.4159265359
```

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.

- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.

Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.

EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)

Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

```
>factor(gcd(11^4*123*1237, 11^2*123^2))
```

```
[3,  11,  11,  41]
```

```
>gammai(3,4)
```

```
0.352768111218
```

```
>iterate("cos",1)// solves cos(x)=x, iterating from 1
```

```
0.739085133216
```

```
>&factor(x^6+x^2+1)
```

```
                          6    2
                         x  + x  + 1
```

```
>A=redim(2:10,3,3)
```

```
            2             3             4
            5             6             7
            8             9            10
```

```
>integrate("x^x",0,1)
```

```
0.783430510712
```

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.

kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;

days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;

Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
    3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
2.71828182846
      3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "defformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

```
r                   1.25
a                   4
b                   15
c                   2
D                   1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.

Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".

Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m$".

```
>listvar m$
```

```
km$                 1000
cm$                 0.01
mm$                 0.001
nm$                 1853.24496
gram$               0.001
m$                  1
hquantum$           6.62606957e-34
atm$                101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D
>D
```

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.

Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.

Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,  0.193585,
0.463387,  0.095153,  0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,  -0.733427,
-0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).

Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
          1             2             3
          4             5             6
          7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.

Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.

Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).

Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.

Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

```
         2
(b + a)
```

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

```
 2             2
b  + 2 a b + a

(x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                     2                            2
           (- sqrt(b  - 4 a c)) - b       sqrt(b  - 4 a c) - b
      [x = ------------------------, x = --------------------]
                    2 a                           2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
                                 2    2
                                a  - b
                                -------
                                 b + a


                                 a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

```
3628800
```

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

```
                                3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
[2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
                                  3  3
                                 2  5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18  8  4  2
2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
(m - 3) (m - 2) (m - 1) m
-------------------------
           24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

```
            4
sin(x) + cos (x)
----------------
       3
    cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
 3
x  + 1
------
x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
 2
x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
       3
(b + a)  + 1
------------
 b + a + 1
```

```
 2                  2
b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
   2      3
3 x      x  + 1
----- - --------
x + 1          2
        (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
         3      2
      2 x  - 3 x  + 6 x
      -----------------
              6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.

Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.

- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.

Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.

---

1. Bita memiliki sebuah jam dinding dengan jari-jari 15 cm. Hitunglah luas permukaan, keliling, dan diameter jam dinding Bita!

```
>r=15; pi*r^2
```

```
706.858347058
```

```
>r=15; 2*pi*r
```

```
94.2477796077
```

```
>r=15; 2*r
```

```
30
```

2. Terdapat dua buah matriks berukuran 2x2, matriks A=[1,2;3,4] dan matriks B=[9,10;11,12]. Berapa jumlah dari kedua matriks tersebut?

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
            1             2
            3             4
```

```
>B=[9,10;11,12]
```

```
            9            10
           11            12
```

```
>hasil=A+B; hasil
```

```
           10            12
           14            16
```

3. Dalam sebuah kelas, terdapat 8 orang yang akan mengikuti sebuah lomba cerdas cermat yang terdiri dari 3 orang. Berapa banyak cara yang mungkin untuk mengikuti lomba cerdas cermat itu?

```
>::: binomial(8,3); // nilai C(8,3)
```

```
56
```

Cara Menyisipkan Baris Perintah Baru pada Teks Komentar:
1. Pilih baris komentar yang ingin disisipkan, lalu klik pada baris perintah yang ada di bawah baris komentar tersebut.
2. Setelah itu, pilih "Extras" lalu pilih "Edit komentar", atau klik F5.
3. Pilih bagian yang akan disisipkan baris komentar:
contoh
Latihan anda...
(Bagian yang ingin anda sisipkan)
Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.
...
4. Blok ke bawah pada baris 'Beberapa catatan yang harus Anda...' sampai ke bawah, klik ctrl+c untuk menyalin teks tersebut, lalu hapus.
5. Keluar dari extras. Lalu, klik baris perintah tadi lakukan ctrl+shift+enter di depan kalimat perintah. Maka, otomatis akan membuat baris perintah baru.
6. Setelah itu, edit komentar lagi pada baris perintah yang lama.
7. Paste kalimat yang sudah disalin sebelumnya. Lalu OK, maka otomatis akan ada baris perintah yang tersisipkan antara teks komentar.

BAB 2

KB PEKAN 3-4 : PENGGUNAAN SOFTWARE EMT UNTUK ALJABAR

[a4paper,10pt]article eumat

Translate

Nama : Nisrina Octaviani
NIM : 22305144011
Kelas: Matematika B 2022

EMT untuk Perhitungan Aljabar

Pada notebook ini Anda belajar menggunakan EMT untuk melakukan berbagai perhitungan terkait dengan materi atau topik dalam Aljabar. Kegiatan yang harus Anda lakukan adalah sebagai berikut:

- Membaca secara cermat dan teliti notebook ini;
- Menerjemahkan teks bahasa Inggris ke bahasa Indonesia;
- Mencoba contoh-contoh perhitungan (perintah EMT) dengan cara meng-ENTER setiap perintah EMT yang ada (pindahkan kursor ke baris perintah)
- Jika perlu Anda dapat memodifikasi perintah yang ada dan memberikan keterangan/penjelasan tambahan terkait hasilnya.
- Menyisipkan baris-baris perintah baru untuk mengerjakan soal-soal Aljabar dari file PDF yang saya berikan;
- Memberi catatan hasilnya.
- Jika perlu tuliskan soalnya pada teks notebook (menggunakan format LaTeX).
- Gunakan tampilan hasil semua perhitungan yang eksak atau simbolik dengan format LaTeX. (Seperti contoh-contoh pada notebook ini.)

Contoh pertama

Menyederhanakan bentuk aljabar:

$$6x^{-3}y^5 \times -7x^2y^{-9}$$

```
>$&6*x^(-3)*y^5*-7*x^2*y^(-9)
```

$$-\frac{42}{x\,y^4}$$

Menjabarkan:

$$(6x^{-3}+y^5)(-7x^2-y^{-9})$$

```
>$&showev('expand((6*x^(-3)+y^5)*(-7*x^2-y^(-9))))
```

$$expand\left(\left(-\frac{1}{y^9}-7\,x^2\right)\,\left(y^5+\frac{6}{x^3}\right)\right)=-7\,x^2\,y^5-\frac{1}{y^4}-\frac{6}{x^3\,y^9}-\frac{42}{x}$$

Baris Perintah

Baris perintah Euler terdiri dari satu atau beberapa perintah Euler diikuti dengan titik koma ";" atau koma ",". Titik koma mencegah pencetakan hasil. Koma setelah perintah terakhir dapat dihilangkan.

Baris perintah berikut hanya akan mencetak hasil ekspresi, bukan tugas atau perintah format.

```
>r:=2; h:=4; pi*r^2*h/3
```

```
16.7551608191
```

Perintah harus dipisahkan dengan tanda kosong. Baris perintah berikut mencetak dua hasilnya.

```
>pi*2*r*h, %+2*pi*r*h // Ingat tanda % menyatakan hasil perhitungan terakhir sebelumnya
```

```
50.2654824574
100.530964915
```

Baris perintah dieksekusi dalam urutan yang ditekan pengguna kembali. Jadi, Anda mendapatkan nilai baru setiap kali menjalankan baris kedua.

```
>x := 1;
>x := cos(x) // nilai cosinus (x dalam radian)
```

```
0.540302305868
```

```
>x := cos(x)
```

```
0.857553215846
```

Jika dua baris dihubungkan dengan "..." kedua baris akan selalu dijalankan secara bersamaan.

```
>x := 1.5; ...
>x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2, x := (x+2/x)/2,
```

```
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
```

Ini juga cara yang baik untuk menyebarkan perintah panjang ke dua baris atau lebih. Anda dapat menekan Ctrl + Return untuk membagi garis menjadi dua pada posisi kursor saat ini, atau Ctlr + Back untuk menggabungkan garis.

Untuk melipat semua multi-garis tekan Ctrl + L. Kemudian garis-garis berikutnya hanya akan terlihat, jika salah satunya memiliki fokus. Untuk melipat satu garis banyak, mulailah baris pertama dengan "% +".

```
>%+ x=4+5; ...
```

Garis yang dimulai dengan %% akan benar-benar tidak terlihat.

```
81
```

Euler mendukung loop dalam baris perintah, asalkan sesuai dengan satu baris atau beberapa baris. Dalam program, pembatasan ini tentu saja tidak berlaku. Untuk informasi lebih lanjut, lihat pengantar berikut.

```
>x=1; for i=1 to 5; x := (x+2/x)/2, end; // menghitung akar 2
```

```
1.5
1.41666666667
1.41421568627
1.41421356237
1.41421356237
```

Tidak apa-apa menggunakan multi-garis. Pastikan baris diakhiri dengan "...".

```
>x := 1.5; //komentar diletakkan di sini sebelum ...
>repeat xnew:=(x+2/x)/2; until xnew~=x; ...
>   x := xnew; ...
>end; ...
>x,
```

Struktur bersyarat juga berfungsi.

```
>if E^pi>pi^E; then "Thought so!", endif;
```

```
Thought so!
```

Saat Anda menjalankan perintah, kursor dapat berada di posisi mana pun di baris perintah. Anda dapat kembali ke perintah sebelumnya atau melompat ke perintah berikutnya dengan tombol panah. Atau Anda dapat mengklik bagian komentar di atas perintah untuk membuka perintah.

Saat Anda menggerakkan kursor di sepanjang garis, pasangan buka dan tutup tanda kurung atau tanda kurung akan disorot. Juga, perhatikan baris statusnya. Setelah kurung buka dari fungsi sqrt (), baris status akan menampilkan teks bantuan untuk fungsi tersebut. Jalankan perintah dengan tombol kembali.

```
>sqrt(sin(10°)/cos(20°))
```

```
0.429875017772
```

Untuk melihat bantuan untuk perintah terbaru, buka jendela bantuan dengan F1. Di sana, Anda dapat memasukkan teks untuk dicari. Pada baris kosong, bantuan untuk jendela bantuan akan ditampilkan. Anda dapat menekan escape untuk menghapus garis, atau untuk menutup jendela bantuan.

Anda dapat mengklik dua kali pada perintah apa pun untuk membuka bantuan untuk perintah ini. Coba klik dua kali perintah exp di bawah ini di baris perintah.

```
>exp(log(2.5))
```

```
2.5
```

Anda dapat menyalin dan menempel di Euler ke. Gunakan Ctrl-C dan Ctrl-V untuk ini. Untuk menandai teks, seret mouse atau gunakan shift bersama dengan tombol kursor apa pun. Selain itu, Anda dapat menyalin tanda kurung yang disorot.

Sintaks Dasar

Euler mengetahui fungsi matematika biasa. Seperti yang Anda lihat di atas, fungsi trigonometri bekerja dalam radian atau derajat. Untuk mengonversi menjadi derajat, tambahkan simbol derajat (dengan tombol F7) ke nilainya, atau gunakan fungsi rad (x). Fungsi akar kuadrat disebut akar di Euler. Tentu saja, x ^ (1/2) juga dimungkinkan.

Untuk menyetel variabel, gunakan "=" atau ": =". Demi kejelasan, pendahuluan ini menggunakan bentuk yang terakhir. Spasi tidak penting. Tapi jarak antar perintah diharapkan.

Beberapa perintah dalam satu baris dipisahkan dengan "," atau ";". Titik koma menekan keluaran dari perintah. Di akhir baris perintah, "," diasumsikan, jika ";" hilang.

```
>g:=9.81; t:=2.5; 1/2*g*t^2
```

```
30.65625
```

EMT menggunakan sintaks pemrograman untuk ekspresi. Memasuki

$$e^2 \cdot \left(\frac{1}{3+4\log(0.6)}+\frac{1}{7}\right)$$

Anda harus mengatur tanda kurung yang benar dan menggunakan / untuk pecahan. Perhatikan tanda kurung yang disorot untuk bantuan. Perhatikan bahwa konstanta Euler e dinamai E dalam EMT.

```
>E^2*(1/(3+4*log(0.6))+1/7)
```

```
8.77908249441
```

Untuk menghitung ekspresi yang rumit seperti

$$\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)^2\pi$$

Anda harus memasukkannya dalam bentuk baris.

```
>((1/7 + 1/8 + 2) / (1/3 + 1/2))^2 * pi
```

```
23.2671801626
```

Tempatkan tanda kurung dengan hati-hati di sekitar sub-ekspresi yang perlu dihitung terlebih dahulu. EMT membantu Anda dengan menyoroti ekspresi bahwa kurung tutup selesai. Anda juga harus memasukkan nama "pi" untuk huruf Yunani pi.

Hasil dari perhitungan ini adalah bilangan floating point. Ini secara default dicetak dengan akurasi sekitar 12 digit. Di baris perintah berikut, kita juga belajar bagaimana kita bisa merujuk ke hasil sebelumnya dalam baris yang sama.

```
>1/3+1/7, fraction %
```

```
0.47619047619
10/21
```

Perintah Euler bisa berupa ekspresi atau perintah primitif. Ekspresi dibuat dari operator dan fungsi. Jika perlu, itu harus berisi tanda kurung untuk memaksa urutan eksekusi yang benar. Jika ragu, menetapkan braket adalah ide yang bagus. Perhatikan bahwa EMT menampilkan tanda kurung buka dan tutup saat mengedit baris perintah.

```
>(cos(pi/4)+1)^3*(sin(pi/4)+1)^2
```

```
14.4978445072
```

Operator numerik Euler termasuk

```
+ unary atau operator plus
- unary atau operator minus
*, /
. produk matriks
a ^ b pangkat untuk positif a atau bilangan bulat b (a ** b bekerja
```

juga)

```
n! operator faktorial
```

dan masih banyak lagi.

Berikut beberapa fungsi yang mungkin Anda perlukan. Masih banyak lagi.

```
sin, cos, tan, atan, asin, acos, rad, deg
log, exp, log10, sqrt, logbase
bin, logbin, logfac, mod, floor, ceil, round, abs, sign
konj, re, im, arg, konj, nyata, kompleks
beta, betai, gamma, complexgamma, ellrf, ellf, ellrd, elle
bitand, bitor, bitxor, bitnot
```

Beberapa perintah memiliki alias, mis. ln untuk log.

```
>ln(E^2), arctan(tan(0.5))
```

```
2
0.5
```

```
>sin(30°)
```

```
0.5
```

Pastikan untuk menggunakan tanda kurung (tanda kurung bulat), setiap kali ada keraguan tentang urutan eksekusi! Berikut ini tidak sama dengan (2 ^ 3) ^ 4, yang merupakan default untuk 2 ^ 3 ^ 4 di EMT (beberapa sistem numerik melakukannya dengan cara lain).

```
>2^3^4, (2^3)^4, 2^(3^4)
```

```
2.41785163923e+24
4096
2.41785163923e+24
```

Bilangan Real

Tipe data utama di Euler adalah bilangan real. Real direpresentasikan dalam format IEEE dengan akurasi sekitar 16 digit desimal.

```
>longest 1/3
```

```
     0.3333333333333333
```

Representasi ganda internal membutuhkan 8 byte.

```
>printdual(1/3)
```

```
1.0101010101010101010101010101010101010101010101010101*2^-2
```

```
>printhex(1/3)
```

```
5.5555555555554*16^-1
```

String

Sebuah string di Euler didefinisikan dengan "...".

```
>"Sebuah string bisa berisi apa saja."
```

```
Sebuah string bisa berisi apa saja.
```

String bisa digabungkan dengan | atau dengan +. Ini juga berfungsi dengan angka, yang diubah menjadi string dalam kasus itu.

```
>"Luas lingkaran berjari-jari " + 2 + " cm adalah " + pi * 4 + " cm ^ 2."
```

```
Luas lingkaran berjari-jari 2 cm adalah 12.5663706144 cm ^ 2.
```

Fungsi print juga mengubah angka menjadi string. Ini bisa mengambil sejumlah digit dan sejumlah tempat (0 untuk output padat), dan secara optimal satu unit.

```
>"Golden Ratio : " + print((1+sqrt(5))/2,5,0)
```

```
Golden Ratio : 1.61803
```

Tidak ada string khusus, yang tidak dicetak. Itu dikembalikan oleh beberapa fungsi, ketika hasilnya tidak penting. (Ini dikembalikan secara otomatis, jika fungsi tidak memiliki pernyataan pengembalian.)

```
>none
```

Untuk mengonversi string menjadi angka, cukup evaluasi. Ini berfungsi untuk ekspresi juga (lihat di bawah).

```
>"1234.5"()
```

```
1234.5
```

Untuk mendefinisikan vektor string, gunakan notasi vektor [...].

```
>v:=["affe","charlie","bravo"]
```

```
affe
charlie
bravo
```

Vektor string kosong dilambangkan dengan [tidak ada]. Vektor string dapat digabungkan.

```
>w:=[none]; w|v|v
```

```
affe
charlie
bravo
affe
charlie
bravo
```

String dapat berisi karakter Unicode. Secara internal, string ini berisi kode UTF-8. Untuk menghasilkan string seperti itu, gunakan u "..." dan salah satu entitas HTML.

String unicode dapat digabungkan seperti string lainnya.

```
>u"&alpha; = " + 45 + u"&deg;" // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
 = 45°
```

I

Dalam komentar, entitas yang sama seperti, dll. Dapat digunakan. Ini mungkin alternatif cepat untuk Latex. (Keterangan lebih lanjutpada komentar di bawah).

Ada beberapa fungsi untuk membuat atau menganalisis string unicode. Fungsi strtochar () akan mengenali Unicodestring, dan terjemahkan dengan benar.

```
>v=strtochar(u"&Auml; is a German letter")
```

```
[196,  32,  105,  115,  32,  97,  32,  71,  101,  114,  109,  97,  110,
32,  108,  101,  116,  116,  101,  114]
```

Hasilnya adalah vektor bilangan Unicode. Fungsi kebalikannya adalah chartoutf ().

```
>v[1]=strtochar(u"&Uuml;")[1]; chartoutf(v)
```

```
Ü is a German letter
```

Fungsi utf () dapat menerjemahkan string dengan entitas dalam variabel menjadi string Unicode.

```
>s="We have &alpha;=&beta;."; utf(s) // pdfLaTeX mungkin gagal menampilkan secara benar
```

```
We have =.
```

Dimungkinkan juga untuk menggunakan entitas numerik.

```
>u"&#196;hnliches"
```

```
Ähnliches
```

Nilai Boolean

Nilai Boolean diwakili dengan 1 = true atau 0 = false di Euler. String dapat dibandingkan, seperti halnya angka.

```
>2<1, "apel"<"banana"
```

```
0
1
```

"dan" adalah operator "&&" dan "atau" adalah operator "||", seperti dalam bahasa C. (Kata "dan" dan "atau" bisahanya digunakan dalam kondisi untuk "jika".)

```
>2<E && E<3
```

```
1
```

Operator Boolean mematuhi aturan bahasa matriks.

```
>(1:10)>5, nonzeros(%)
```

```
[0,  0,  0,  0,  0,  1,  1,  1,  1,  1]
[6,  7,  8,  9,  10]
```

Anda dapat menggunakan fungsi nonzeros () untuk mengekstrak elemen tertentu dari vektor. Dalam contoh, kami menggunakan fileisprime bersyarat (n)

```
>N=2|3:2:99 // N berisi elemen 2 dan bilangan2 ganjil dari 3 s.d. 99
```

```
[2,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29,
31,  33,  35,  37,  39,  41,  43,  45,  47,  49,  51,  53,  55,  57,
59,  61,  63,  65,  67,  69,  71,  73,  75,  77,  79,  81,  83,  85,
87,  89,  91,  93,  95,  97,  99]
```

```
>N[nonzeros(isprime(N))] //pilih anggota2 N yang prima
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47,
53,  59,  61,  67,  71,  73,  79,  83,  89,  97]
```

Format Keluaran

Format keluaran default EMT mencetak 12 digit. Untuk memastikan bahwa kami melihat default, kami mengatur ulang format.

```
>defformat; pi
```

```
3.14159265359
```

Secara internal, EMT menggunakan standar IEEE untuk bilangan ganda dengan sekitar 16 digit desimal. Untuk melihat secara lengkapjumlah digit, gunakan perintah "longestformat", atau kita menggunakan operator "terpanjang" untuk menampilkan hasilnyaformat terpanjang.

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

Berikut adalah representasi heksadesimal internal dari bilangan ganda

```
>printhex(pi)
```

```
3.243F6A8885A30*16^0
```

Format keluaran dapat diubah secara permanen dengan perintah format.

```
>format(12,5); 1/3, pi, sin(1)
```

```
0.33333
3.14159
0.84147
```

defaultnya adalah format (12).

```
>format(12); 1/3
```

```
0.333333333333
```

Fungsi seperti "shortestformat", "shortformat", "longformat" bekerja untuk vektor dengan cara berikut.

```
>shortestformat; random(3,8)
```

```
0.66     0.2    0.89    0.28    0.53    0.31    0.44     0.3
0.28    0.88    0.27     0.7    0.22    0.45    0.31    0.91
0.19    0.46   0.095     0.6    0.43    0.73    0.47    0.32
```

Format default untuk skalar adalah format (12). Tapi ini bisa diubah.

```
>setscalarformat(5); pi
```

```
3.1416
```

Fungsi "format terpanjang" mengatur format skalar juga.

```
>longestformat; pi
```

```
3.141592653589793
```

Untuk referensi, berikut adalah daftar format keluaran yang paling penting.

```
shortestformat shortformat longformat, longestformat
format(panjang,digit) goodformat(panjang)
fracformat(panjang)
defformat
```

Akurasi internal EMT adalah sekitar 16 tempat desimal, yang merupakan standar IEEE. Angka disimpan dalamformat internal ini.

Tetapi format keluaran EMT dapat diatur dengan cara yang fleksibel.

```
>longestformat; pi,
```

```
3.141592653589793
```

```
>format(10,5); pi
```

```
   3.14159
```

defaultnya adalah defformat().

```
>defformat; // default
```

Ada operator pendek yang hanya mencetak satu nilai. Operator "terpanjang" akan mencetak semua digit valid dari ajumlah.

```
>longest pi^2/2
```

```
        4.934802200544679
```

Ada juga operator singkat untuk mencetak hasil dalam format pecahan. Kami telah menggunakannya di atas.

```
>fraction 1+1/2+1/3+1/4
```

```
25/12
```

Karena format internal menggunakan cara biner untuk menyimpan angka, nilai 0.1 tidak akan direpresentasikan dengan tepat. Itukesalahan bertambah sedikit, seperti yang Anda lihat dalam perhitungan berikut.

```
>longest 0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
 -1.110223024625157e-16
```

Tetapi dengan "longformat" default Anda tidak akan melihat ini. Untuk kenyamanan, keluaran angka sangat kecil adalah 0.

```
>0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1+0.1-1
```

```
0
```

Ekspresi

String atau nama dapat digunakan untuk menyimpan ekspresi matematika, yang dapat dievaluasi oleh EMT. Untuk ini, gunakantanda kurung setelah ekspresi. Jika Anda ingin menggunakan string sebagai ekspresi, gunakan konvensi untuk menamainya"fx" atau "fxy" dll. Ekspresi lebih diutamakan daripada fungsi.Variabel global dapat digunakan dalam evaluasi.

```
>r:=2; fx:="pi*r^2"; longest fx()
```

```
        12.56637061435917
```

Parameter ditetapkan ke x, y, dan z dalam urutan itu. Parameter tambahan dapat ditambahkan menggunakan ditugaskanparameter.

```
>fx:="a*sin(x)^2"; fx(5,a=-1)
```

```
  -0.919535764538
```

Perhatikan bahwa ekspresi akan selalu menggunakan variabel global, meskipun ada variabel dalam fungsi yang samanama. (Jika tidak, evaluasi ekspresi dalam fungsi dapat memberikan hasil yang sangat membingungkan bagi penggunayang disebut fungsi.)

```
>at:=4; function f(expr,x,at) := expr(x); ...
>f("at*x^2",3,5) // computes 4*3^2 not 5*3^2
```

```
  36
```

Jika Anda ingin menggunakan nilai lain untuk "at" daripada nilai global, Anda perlu menambahkan "at = value".

```
>at:=4; function f(expr,x,a) := expr(x,at=a); ...
>f("at*x^2",3,5)
```

```
  45
```

Sebagai referensi, kami berkomentar bahwa koleksi panggilan (dibahas di tempat lain) dapat berisi ekspresi. Jadi kita bisa membuatnyacontoh di atas sebagai berikut

```
>at:=4; function f(expr,x) := expr(x); ...
>f({{"at*x^2",at=5}},3)
```

```
  45
```

Ekspresi dalam x sering digunakan seperti fungsi.Perhatikan bahwa mendefinisikan fungsi dengan nama yang sama seperti ekspresi simbolik global menghapus variabel ini menjadihindari kebingungan antara ekspresi dan fungsi simbolik.

```
>f &= 5*x;
>function f(x) := 6*x;
>f(2)
```

```
  12
```

Dengan cara konvensi, ekspresi simbolik atau numerik harus diberi nama fx, fxy dll. Skema penamaan initidak boleh digunakan untuk fungsi.

```
>fx &= diff(x^x,x); $&fx
```

$$x^x\,\left(\log x+1\right)$$

Bentuk ekspresi khusus memungkinkan variabel apa pun sebagai parameter tanpa nama untuk evaluasi ekspresision, bukan hanya "x", "y" dll. Untuk ini, mulailah ekspresi dengan "@ (variabel) ...".

```
>"@(a,b) a^2+b^2", %(4,5)
```

```
@(a,b) a^2+b^2
41
```

Hal ini memungkinkan untuk memanipulasi ekspresi dalam variabel lain untuk fungsi EMT yang membutuhkan ekspresi dalam "x".

Cara paling dasar untuk mendefinisikan fungsi sederhana adalah dengan menyimpan rumusnya dalam ekspresi simbolis atau numerik.sion. Jika variabel utamanya adalah x, ekspresi tersebut dapat dievaluasi seperti fungsi.

Seperti yang Anda lihat pada contoh berikut, variabel global terlihat selama evaluasi

```
>fx &= x^3-a*x;  ...
>a=1.2; fx(0.5)
```

```
-0.475
```

Semua variabel lain dalam ekspresi dapat ditentukan dalam evaluasi menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>fx(0.5,a=1.1)
```

```
-0.425
```

Ekspresi tidak perlu simbolis. Ini diperlukan, jika ekspresi berisi fungsi, yang hanyadikenal di kernel numerik, bukan di Maxima.

Matematika Simbolik

EMT melakukan matematika simbolis dengan bantuan Maxima. Untuk detailnya, mulailah dengan tutorial berikut, atau telusurireferensi untuk Maxima. Para ahli di Maxima harus memperhatikan bahwa ada perbedaan dalam sintaks antara filesintaks asli Maxima dan sintaks default ekspresi simbolik di EMT.

Matematika simbolik terintegrasi mulus ke dalam Euler dengan &. Ekspresi apa pun yang dimulai dengan & adalah simbolikekspresi. Itu dievaluasi dan dicetak oleh Maxima.

Pertama-tama, Maxima memiliki aritmatika "tak terbatas" yang dapat menangani angka yang sangat besar.

```
>$&44!
```

$$2658271574788448768043625811014615890319638528000000000$$

Dengan cara ini, Anda dapat menghitung hasil yang besar dengan tepat. Mari kita hitung

$$C(44,10)=\frac{44!}{34!\cdot 10!}$$

```
>$& 44!/(34!*10!) // nilai C(44,10)
```

$$2481256778$$

Tentu saja, Maxima memiliki fungsi yang lebih efisien untuk ini (seperti halnya bagian numerik EMT).

```
>$binomial(44,10) //menghitung C(44,10) menggunakan fungsi binomial()
```

$$2481256778$$

Untuk mempelajari lebih lanjut tentang fungsi tertentu, klik dua kali di atasnya. Misalnya, coba klik dua kali pada "& binomial" dibaris perintah sebelumnya. Ini membuka dokumentasi Maxima yang disediakan oleh penulis program itu.

Anda akan belajar bahwa yang berikut ini juga berfungsi

$$C(x,3)=\frac{x!}{(x-3)!3!}=\frac{(x-2)(x-1)x}{6}$$

```
>$binomial(x,3) // C(x,3)
```

$$\frac{(x-2)\,(x-1)\,x}{6}$$

Jika Anda ingin mengganti x dengan nilai tertentu, gunakan "dengan".

```
>$&binomial(x,3) with x=10 // substitusi x=10 ke C(x,3)
```

$$120$$

Dengan begitu, Anda bisa menggunakan solusi persamaan di persamaan lain.

Ekspresi simbolik dicetak oleh Maxima dalam bentuk 2D. Alasan untuk ini adalah bendera simbolis khusus ditali.

Seperti yang akan Anda lihat pada contoh sebelumnya dan berikut, jika Anda menginstal LaTeX, Anda dapat mencetak simbolekspresi bolic dengan Latex. Jika tidak, perintah berikut akan mengeluarkan pesan kesalahan.

Untuk mencetak ekspresi simbolik dengan LaTeX, gunakan $ infront dari & (atau Anda dapat menghapus &) sebelum perintah. jangan menjalankan perintah Maxima dengan $, jika Anda belum menginstal LaTeX

```
>$(3+x)/(x^2+1)
```

$$\frac{x+3}{x^2+1}$$

Ekspresi simbolik diurai oleh Euler. Jika Anda membutuhkan sintaks kompleks dalam satu ekspresi, Anda dapat menyertakanekspresi dalam "...". Menggunakan lebih dari sekedar ekspresi sederhana dimungkinkan, tetapi sangat tidak disarankan.

```
>&"v := 5; v^2"
```

```
25
```

Untuk kelengkapan, kami menyatakan bahwa ekspresi simbolik dapat digunakan dalam program, tetapi perlu diapittanda kutip. Selain itu, jauh lebih efektif untuk memanggil Maxima pada waktu kompilasi jika memungkinkan.

```
>$&expand((1+x)^4), $&factor(diff(%,x)) // diff: turunan, factor: faktor
```

$$x^4+4\,x^3+6\,x^2+4\,x+1$$

$$4\,\left(x+1\right)^3$$

Sekali lagi,% mengacu pada hasil sebelumnya.Untuk mempermudah, kami menyimpan solusi ke variabel simbolik. Variabel simbolik didefinisikan dengan "& =".

```
>fx &= (x+1)/(x^4+1); $&fx
```

$$\frac{x+1}{x^4+1}$$

Ekspresi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&factor(diff(fx,x))
```

$$\frac{-3\,x^4-4\,x^3+1}{\left(x^4+1\right)^2}$$

Masukan langsung dari perintah Maxima juga tersedia. Mulai baris perintah dengan "::". Sintaks Maximadiadaptasi ke sintaks EMT (disebut "mode kompatibilitas").

```
>&factor(20!)
```

```
2432902008176640000
```

```
>::: factor(10!)
```

```
 8  4  2
2  3  5  7
```

```
>:: factor(20!)
```

```
 18  8  4  2
2   3  5  7  11 13 17 19
```

Jika Anda ahli dalam Maxima, Anda mungkin ingin menggunakan sintaks asli Maxima. Anda dapat melakukan ini dengan ":::".

```
>::: av:g$ av^2;
```

```
 2
g
```

```
>fx &= x^3*exp(x), $fx
```

```
 3  x
x  E
```

$$x^3\,e^x$$

Variabel semacam itu dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya. Perhatikan, bahwa dalam perintah berikut ini tangan kanansisi & = dievaluasi sebelum penugasan ke Fx.

```
>&(fx with x=5), $%, &float(%)
```

```
                     5
                125 E
```

$$125\,e^5$$

```
18551.64488782208
```

```
>fx(5)
```

```
18551.6448878
```

Untuk evaluasi ekspresi dengan nilai variabel tertentu, Anda dapat menggunakan operator "dengan".

Baris perintah berikut juga menunjukkan bahwa Maxima dapat mengevaluasi ekspresi secara numerik denganmengapung().

```
>&(fx with x=10)-(fx with x=5), &float(%)
```

```
      10         5
1000 E   - 125 E
```

```
2.20079141499189e+7
```

```
>$factor(diff(fx,x,2))
```

$$x\,\left(x^2+6\,x+6\right)\,e^{x}$$

Untuk mendapatkan kode Latex untuk ekspresi, Anda dapat menggunakan perintah tex.

```
>tex(fx)
```

```
x^3\,e^{x}
```

Ekspresi simbolik dapat dievaluasi seperti ekspresi numerik.

```
>fx(0.5)
```

```
0.206090158838
```

Dalam ekspresi simbolik, ini tidak berfungsi, karena Maxima tidak mendukungnya. Sebagai gantinya, gunakan sintaks "with"(bentuk yang lebih bagus dari perintah at (...) dari Maxima).

```
>$&fx with x=1/2
```

$$\frac{\sqrt{e}}{8}$$

Penugasan juga bisa bersifat simbolis.

```
>$&fx with x=1+t
```

$$\left(t+1\right)^3\,e^{t+1}$$

Pemecahan perintah memecahkan ekspresi simbolik untuk variabel di Maxima. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>$&solve(x^2+x=4,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{17}-1}{2} , x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right]$$

Bandingkan dengan perintah numerik "selesaikan" di Euler, yang membutuhkan nilai awal, dan secara opsional targetnilai.

```
>solve("x^2+x",1,y=4)
```

```
1.56155281281
```

Nilai numerik dari solusi simbolik dapat dihitung dengan evaluasi hasil simbolik. Eulerakan membaca tugas x = dll. Jika Anda tidak memerlukan hasil numerik untuk perhitungan lebih lanjut Andadapat juga membiarkan Maxima menemukan nilai numerik.

```
>sol &= solve(x^2+2*x=4,x); $&sol, sol(), $&float(sol)
```

$$\left[x=-\sqrt{5}-1 , x=\sqrt{5}-1 \right]$$

```
[-3.23607,  1.23607]
```

$$\left[x=-3.23606797749979 , x=1.23606797749979 \right]$$

Untuk mendapatkan solusi simbolis tertentu, seseorang dapat menggunakan "dengan" dan indeks.

```
>$&solve(x^2+x=1,x), x2 &= x with %[2]; $&x2
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} , x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan, gunakan vektor persamaan. Hasilnya adalah vektor solusi.

```
>sol &= solve([x+y=3,x^2+y^2=5],[x,y]); $&sol, $&x*y with sol[1]
```

$$\left[\left[x=2 , y=1 \right] , \left[x=1 , y=2 \right] \right]$$

$$2$$

Ekspresi simbolis dapat memiliki bendera, yang menunjukkan perlakuan khusus dalam Maxima. Beberapa bendera dapat digunakan sebagaiperintah juga, orang lain tidak bisa. Bendera ditambahkan dengan "|" (a nicer form of "ev(...,flags)")

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) //turunan bentuk pecahan
```

$$\frac{3\,x^2}{x+1}-\frac{x^3-1}{\left(x+1\right)^2}$$

```
>$& diff((x^3-1)/(x+1),x) | ratsimp //menyederhanakan pecahan
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{x^2+2\,x+1}$$

```
>$&factor(%)
```

$$\frac{2\,x^3+3\,x^2+1}{\left(x+1\right)^2}$$

Fungsi

Dalam EMT, fungsi adalah program yang ditentukan dengan perintah "fungsi". Ini bisa menjadi fungsi satu baris atau multiline fungsi.

Fungsi satu baris dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik ditentukan oleh ": =".

```
>function f(x) := x*sqrt(x^2+1)
```

Untuk gambaran umum, kami menunjukkan semua kemungkinan definisi untuk fungsi satu baris. Suatu fungsi dapat dievaluasi seperti fungsi Euler bawaan apa pun.

```
>f(2)
```

```
4.472135955
```

Fungsi ini akan bekerja untuk vektor juga, mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalamfungsi adalah vektorisasi.

```
>f(0:0.1:1)
```

```
[0,  0.100499,  0.203961,  0.313209,  0.430813,  0.559017,  0.699714,
0.854459,  1.0245,  1.21083,  1.41421]
```

Fungsi dapat diplot. Sebagai ganti ekspresi, kita hanya perlu memberikan nama fungsi.

Berbeda dengan ekspresi simbolik atau numerik, nama fungsi harus diberikan dalam string.

```
>solve("f",1,y=1)
```

```
0.786151377757
```

Secara default, jika Anda perlu menimpa fungsi built-in, Anda harus menambahkan kata kunci "overwrite". Menimpafungsi built-in berbahaya dan dapat menyebabkan masalah pada fungsi lain tergantung pada fungsinya.

Anda masih bisa memanggil fungsi built-in sebagai "_...", jika itu berfungsi di inti Euler.

```
>function overwrite sin (x) := _sin(x°) // redine sinus dalam derajat
>sin(45)
```

```
0.707106781187
```

Lebih baik kita menghapus definisi ulang sin ini.

```
>forget sin; sin(pi/4)
```

```
0.707106781187
```

Parameter Default

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default.

```
>function f(x,a=1) := a*x^2
```

Menghilangkan parameter ini menggunakan nilai default.

```
>f(4)
```

```
16
```

Menyetelnya menimpa nilai default.

```
>f(4,5)
```

```
80
```

Parameter yang ditetapkan juga menimpanya. Ini digunakan oleh banyak fungsi Euler seperti plot2d, plot3d.

```
>f(4,a=1)
```

```
16
```

Jika variabel bukan parameter, itu harus global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function f(x) := a*x^2
>a=6; f(2)
```

```
24
```

Tetapi parameter yang ditetapkan menggantikan nilai global.
Jika argumen tidak ada dalam daftar parameter yang telah ditentukan sebelumnya, itu harus dideklarasikan dengan ": ="!

```
>f(2,a:=5)
```

```
20
```

Fungsi simbolik didefinisikan dengan "& =". Mereka didefinisikan di Euler dan Maxima, dan bekerja di kedua dunia. Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function g(x) &= x^3-x*exp(-x); $&g(x)
```

$$x^3 - x\,e^{-x}$$

Fungsi simbolik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik.

```
>$&diff(g(x),x), $&% with x=4/3
```

$$x\,e^{-x}-e^{-x}+3\,x^2$$

$$\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3}+\frac{16}{3}$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menafsirkan semua yang ada di dalam fungsi tersebut.

```
>g(5+g(1))
```

```
178.635099908
```

Mereka dapat digunakan untuk mendefinisikan fungsi atau ekspresi simbolik lainnya.

```
>function G(x) &= factor(integrate(g(x),x)); $&G(c) // integrate: mengintegralkan
```

$$\frac{e^{-c}\,\left(c^4\,e^{c}+4\,c+4\right)}{4}$$

```
>solve(&g(x),0.5)
```

```
0.703467422498
```

Cara berikut juga berfungsi, karena Euler menggunakan ekspresi simbolik dalam fungsi g, jika tidak menemukan variabel simbolis g, dan jika terdapat fungsi simbolik g.

```
>solve(&g,0.5)
```

```
0.703467422498
```

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$\left(2\,x-1\right)^{n}$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$\left(x+2\right)^{n}$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4$$

$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

```
>P(3,4)
```

```
625
```

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4+(x+2)^3$$

$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(2\,x-1)^4-(x+2)^3$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

```
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(x+2)^3\,(2\,x-1)^4$$

$$16\,x^7+64\,x^6+24\,x^5-120\,x^4-15\,x^3+102\,x^2-52\,x+8$$

$$(x+2)^3\,(2\,x-1)^4$$

```
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2x-1)^4}{x+2}$$

```
>function f(x) &= x^3-x; $&f(x)
```

$$x^3-x$$

With &= the function is symbolic, and can be used in other symbolic expressions.

```
>$&integrate(f(x),x)
```

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

Dengan: = fungsinya adalah numerik. Contoh yang baik adalah seperti integral pasti

$$f(x)=\int_1^x t^t\,dt,$$

yang tidak dapat dievaluasi secara simbolis.

Jika kita mendefinisikan ulang fungsi dengan kata kunci "map", ini dapat digunakan untuk vektor x. Secara internal, fungsi ini dipanggil untuk semua nilai x satu kali, dan hasilnya disimpan dalam vektor.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
>f(0:0.5:2)
```

```
[-0.783431,  -0.410816,  0,  0.676863,  2.05045]
```

Fungsi dapat memiliki nilai default untuk parameter.

```
>function mylog (x,base=10) := ln(x)/ln(base);
```

Sekarang fungsi tersebut dapat dipanggil dengan atau tanpa parameter "base".

```
>mylog(100), mylog(2^6.7,2)
```

```
2
6.7
```

Selain itu, dimungkinkan untuk menggunakan parameter yang ditetapkan.

```
>mylog(E^2,base=E)
```

```
2
```

Seringkali, kami ingin menggunakan fungsi untuk vektor di satu tempat, dan untuk elemen individu di tempat lain. Ini dimungkinkan dengan parameter vektor.

```
>function f([a,b]) &= a^2+b^2-a*b+b; $&f(a,b), $&f(x,y)
```

$$b^2 - a\,b + b + a^2$$

$$y^2 - x\,y + y + x^2$$

Fungsi simbolik seperti itu dapat digunakan untuk variabel simbolik.
Tetapi fungsinya juga dapat digunakan untuk vektor numerik.

```
>v=[3,4]; f(v)
```

```
17
```

Ada juga fungsi simbolik murni, yang tidak dapat digunakan secara numerik.

```
>function lapl(expr,x,y) &&= diff(expr,x,2)+diff(expr,y,2)//turunan parsial kedua
```

```
                diff(expr, y, 2) + diff(expr, x, 2)
```

```
>$&realpart((x+I*y)^4), $&lapl(%,x,y)
```

$$y^4 - 6\,x^2\,y^2 + x^4$$

$$0$$

Tetapi tentu saja, mereka dapat digunakan dalam ekspresi simbolik atau dalam definisi fungsi simbolik.

```
>function f(x,y) &= factor(lapl((x+y^2)^5,x,y)); $&f(x,y)
```

$$10\,\left(y^2 + x\right)^3\,\left(9\,y^2 + x + 2\right)$$

Untuk meringkas
- & = mendefinisikan fungsi simbolik,
-: = mendefinisikan fungsi numerik,
- && = mendefinisikan fungsi simbolik murni.

Memecahkan Ekspresi

Ekspresi dapat diselesaikan secara numerik dan simbolik.

Untuk menyelesaikan ekspresi sederhana dari satu variabel, kita dapat menggunakan fungsi Solving (). Diperlukan nilai awal untuk memulai pencarian. Secara internal, Solving () menggunakan metode garis potong.

```
>solve("x^2-2",1)
```

```
1.41421356237
```

Ini bekerja untuk ekspresi simbolik juga. Ambil fungsi berikut.

```
>$&solve(x^2=2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2},x=\sqrt{2}\right]$$

```
>$&solve(x^2-2,x)
```

$$\left[x=-\sqrt{2},x=\sqrt{2}\right]$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c=0,x)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a},x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$$

```
>$&solve([a*x+b*y=c,d*x+e*y=f],[x,y])
```

$$\left[\left[x=-\frac{c\,e}{b\,\left(d-5\right)-a\,e},y=\frac{c\,\left(d-5\right)}{b\,\left(d-5\right)-a\,e}\right]\right]$$

```
>px &= 4*x^8+x^7-x^4-x; $&px
```

$$4\,x^8+x^7-x^4-x$$

Sekarang kita mencari titik, di mana polinomialnya adalah 2. Dalam Solving (), nilai target default y = 0 dapat diubah dengan variabel yang ditetapkan.
Kami menggunakan y = 2 dan memeriksa dengan mengevaluasi polinomial pada hasil sebelumnya.

```
>solve(px,1,y=2), px(%)
```

```
0.966715594851
2
```

Memecahkan ekspresi simbolis dalam bentuk simbolik mengembalikan daftar solusi. Kami menggunakan penyelesaian pemecah simbolik () yang disediakan oleh Maxima.

```
>sol &= solve(x^2-x-1,x); $&sol
```

$$\left[x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$$

Cara termudah untuk mendapatkan nilai numerik adalah dengan mengevaluasi solusi secara numerik seperti ekspresi.

```
>longest sol()
```

```
      -0.6180339887498949       1.618033988749895
```

Untuk menggunakan solusi secara simbolis dalam ekspresi lain, cara termudah adalah "dengan".

```
>$&x^2 with sol[1], $&expand(x^2-x-1 with sol[2])
```

$$\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}$$

$$0$$

Sistem pemecahan persamaan secara simbolis dapat dilakukan dengan vektor persamaan dan penyelesaian pemecah simbolik (). Jawabannya adalah daftar persamaan.

```
>$&solve([x+y=2,x^3+2*y+x=4],[x,y])
```

$$[[x=-1,y=3]\,,[x=1,y=1]\,,[x=0,y=2]]$$

Fungsi f () dapat melihat variabel global. Namun seringkali kita ingin menggunakan parameter lokal.

$$a^x-x^a=0,1$$

dengan a = 3.

```
>function f(x,a) := x^a-a^x;
```

Salah satu cara untuk meneruskan parameter tambahan ke f () adalah dengan menggunakan daftar dengan nama fungsi dan parameternya (cara lainnya adalah parameter titik koma).

```
>solve({{"f",3}},2,y=0.1)
```

```
  2.54116291558
```

Ini juga bekerja dengan ekspresi. Tapi kemudian, elemen daftar bernama harus digunakan. (Lebih lanjut tentang daftar di tutorial tentang sintaks EMT).

```
>solve({{"x^a-a^x",a=3}},2,y=0.1)
```

```
2.54116291558
```

Menyelesaikan Pertidaksamaan

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukan, melainkan dengan bantuan Maxima, yaitu secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim (), yang harus dipanggil dengan perintah "load (fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1>0],[x]) // x^2-1 > 0
```

$$[1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1<0],[x]) // x^2-1 < 0
```

$$[-1 < x, x < 1]$$

```
>$&fourier_elim([x^2 - 1 # 0],[x]) // x^-1 <> 0
```

$$[-1 < x, x < 1] \vee [1 < x] \vee [x < -1]$$

```
>$&fourier_elim([x # 6],[x])
```

$$[x < 6] \vee [6 < x]$$

```
>$&fourier_elim([x < 1, x > 1],[x]) // tidak memiliki penyelesaian
```

$$emptyset$$

```
>$&fourier_elim([minf < x, x < inf],[x]) // solusinya R
```

$$universalset$$

```
>$&fourier_elim([x^3 - 1 > 0],[x])
```

$$\left[1<x,x^2+x+1>0\right]\vee\left[x<1,-x^2-x-1>0\right]$$

```
>$&fourier_elim([cos(x) < 1/2],[x]) // ??? gagal
```

$$[1-2\cos x>0]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[y-5<x,x<y+7,10<y]$$

```
>$&fourier_elim([y-x < 5, x - y < 7, 10 < y],[y,x])
```

$$[max\left(10,x-7\right)<y,y<x+5,5<x]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y >8),[x,y])
```

$$\left[y+8<x,x<5-y,y<-\frac{3}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim(((x + y < 5) and x < 1) or  (x - y >8),[x,y])
```

$$[y+8<x]\vee[x<min\left(1,5-y\right)]$$

```
>&fourier_elim([max(x,y) > 6, x # 8, abs(y-1) > 12],[x,y])
```

```
        [6 < x, x < 8, y < - 11] or [8 < x, y < - 11]
 or [x < 8, 13 < y] or [x = y, 13 < y] or [8 < x, x < y, 13 < y]
 or [y < x, 13 < y]
```

```
>$&fourier_elim([(x+6)/(x-9) <= 6],[x])
```

$$[x = 12] \vee [12 < x] \vee [x < 9]$$

Bahasa Matriks

Dokumentasi inti EMT berisi diskusi terperinci tentang bahasa matriks Euler.

Vektor dan matriks dimasukkan dengan tanda kurung siku, elemen dipisahkan dengan koma, baris dipisahkan dengan titik koma.

```
>A=[1,2;3,4]
```

```
              1              2
              3              4
```

Produk matriks dilambangkan dengan titik.

```
>b=[3;4]
```

```
              3
              4
```

```
>b' // transpose b
```

```
[3,  4]
```

```
>inv(A) //inverse A
```

```
             -2              1
            1.5           -0.5
```

```
>A.b //perkalian matriks
```

```
             11
             25
```

```
>A.inv(A)
```

```
              1              0
              0              1
```

Poin utama dari bahasa matriks adalah bahwa semua fungsi dan operator mengerjakan elemen untuk elemen.

```
>A.A
```

```
              7             10
             15             22
```

```
>A^2 //perpangkatan elemen2 A
```

```
              1              4
              9             16
```

```
>A.A.A
```

```
             37             54
             81            118
```

```
>power(A,3) //perpangkatan matriks
```

```
             37             54
             81            118
```

```
>A/A //pembagian elemen-elemen matriks yang seletak
```

```
              1              1
              1              1
```

```
>A/b //pembagian elemen2 A oleh elemen2 b kolom demi kolom (karena b vektor kolom)
```

```
       0.333333       0.666667
           0.75              1
```

```
>A\b // hasilkali invers A dan b, A^(-1)b
```

```
             -2
            2.5
```

```
>inv(A).b
```

```
             -2
            2.5
```

```
>A\A   //A^(-1)A
```

```
              1              0
              0              1
```

```
>inv(A).A
```

```
              1             0
              0             1
```

```
>A*A //perkalin elemen-elemen matriks seletak
```

```
              1             4
              9            16
```

Ini bukan hasil perkalian matriks, tetapi perkalian elemen dengan elemen. Pekerjaan yang sama untuk vektor.

```
>b^2 // perpangkatan elemen-elemen matriks/vektor
```

```
              9
             16
```

Jika salah satu operan adalah vektor atau skalar, itu diperluas dengan cara alami.

```
>2*A
```

```
              2             4
              6             8
```

Misalnya, jika operan adalah vektor kolom, elemennya diterapkan ke semua baris A.

```
>[1,2]*A
```

```
              1             4
              3             8
```

Jika itu adalah vektor baris, itu diterapkan ke semua kolom A.

```
>A*[2,3]
```

```
              2             6
              6            12
```

Dapat dibayangkan perkalian ini seolah-olah vektor baris v telah diduplikasi untuk membentuk matriks dengan ukuran yang sama dengan A.

```
>dup([1,2],2) // dup: menduplikasi/menggandakan vektor [1,2] sebanyak 2 kali (baris)
```

```
              1             2
              1             2
```

```
>A*dup([1,2],2)
```

```
              1             4
              3             8
```

Ini juga berlaku untuk dua vektor di mana satu adalah vektor baris dan yang lainnya adalah vektor kolom. Kami menghitung i * j untuk i, j dari 1 sampai 5. Triknya adalah mengalikan 1: 5 dengan transposenya. Bahasa matriks Euler secara otomatis menghasilkan tabel nilai.

```
>(1:5)*(1:5)' // hasilkali elemen-elemen vektor baris dan vektor kolom
```

```
              1             2             3             4             5
              2             4             6             8            10
              3             6             9            12            15
              4             8            12            16            20
              5            10            15            20            25
```

Sekali lagi, ingatlah bahwa ini bukan hasil perkalian matriks!

```
>(1:5).(1:5)' // hasilkali vektor baris dan vektor kolom
```

```
  55
```

```
>sum((1:5)*(1:5)) // sama hasilnya
```

```
  55
```

Bahkan operator seperti <atau == bekerja dengan cara yang sama.

```
>(1:10)<6 // menguji elemen-elemen yang kurang dari 6
```

```
  [1,  1,  1,  1,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Misalnya, kita dapat menghitung jumlah elemen yang memenuhi kondisi tertentu dengan fungsi sum ().

```
>sum((1:10)<6) // banyak elemen yang kurang dari 6
```

```
  5
```

Euler memiliki operator perbandingan, seperti "==", yang memeriksa kesetaraan.
Kami mendapatkan vektor 0 dan 1, di mana 1 berarti benar.

```
>t=(1:10)^2; t==25 //menguji elemen2 t yang sama dengan 25 (hanya ada 1)
```

```
  [0,  0,  0,  0,  1,  0,  0,  0,  0,  0]
```

Dari vektor seperti itu, "nonzeros" memilih elemen bukan nol.

Dalam hal ini, kami mendapatkan indeks dari semua elemen yang lebih besar dari 50.

```
>nonzeros(t>50) //indeks elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[8,  9,  10]
```

Tentu saja, kita dapat menggunakan vektor indeks ini untuk mendapatkan nilai t yang sesuai.

```
>t[nonzeros(t>50)] //elemen2 t yang lebih besar daripada 50
```

```
[64,  81,  100]
```

Sebagai contoh, mari kita cari semua kuadrat dari angka 1 sampai 1000, yaitu 5 modulo 11 dan 3 modulo 13.

```
>t=1:1000; nonzeros(mod(t^2,11)==5 && mod(t^2,13)==3)
```

```
[4,  48,  95,  139,  147,  191,  238,  282,  290,  334,  381,  425,
433,  477,  524,  568,  576,  620,  667,  711,  719,  763,  810,  854,
862,  906,  953,  997]
```

EMT tidak sepenuhnya efektif untuk perhitungan integer. Ini menggunakan titik mengambang presisi ganda secara internal. Namun, seringkali ini sangat berguna.

Kita bisa memeriksa keutamaan. Mari kita cari tahu, berapa banyak kuadrat ditambah 1 yang merupakan bilangan prima.

```
>t=1:1000; length(nonzeros(isprime(t^2+1)))
```

```
112
```

Fungsi nonzeros () hanya berfungsi untuk vektor. Untuk matriks, ada mnonzeros ().

```
>seed(2); A=random(3,4)
```

```
     0.765761      0.401188      0.406347      0.267829
      0.13673      0.390567      0.495975      0.952814
     0.548138      0.006085      0.444255      0.539246
```

Ini mengembalikan indeks elemen, yang bukan nol.

```
>k=mnonzeros(A<0.4) //indeks elemen2 A yang kurang dari 0,4
```

```
            1             4
            2             1
            2             2
            3             2
```

Indeks ini dapat digunakan untuk mengatur elemen ke nilai tertentu.

```
>mset(A,k,0) //mengganti elemen2 suatu matriks pada indeks tertentu
```

```
      0.765761      0.401188      0.406347             0
             0             0      0.495975      0.952814
      0.548138             0      0.444255      0.539246
```

Fungsi mset () juga dapat menyetel elemen pada indeks ke entri beberapa matriks lainnya.

```
>mset(A,k,-random(size(A)))
```

```
      0.765761      0.401188      0.406347     -0.126917
     -0.122404     -0.691673      0.495975      0.952814
      0.548138     -0.483902      0.444255      0.539246
```

Dan dimungkinkan untuk mendapatkan elemen dalam vektor.

```
>mget(A,k)
```

```
  [0.267829,  0.13673,  0.390567,  0.006085]
```

Fungsi berguna lainnya adalah extrema, yang mengembalikan nilai minimal dan maksimal di setiap baris matriks dan posisinya.

```
>ex=extrema(A)
```

```
      0.267829             4      0.765761             1
       0.13673             1      0.952814             4
      0.006085             2      0.548138             1
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak nilai maksimal di setiap baris.

```
>ex[,3]'
```

```
  [0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Ini, tentu saja, sama dengan fungsi max ().

```
>max(A)'
```

```
  [0.765761,  0.952814,  0.548138]
```

Tetapi dengan mget (), kita dapat mengekstrak indeks dan menggunakan informasi ini untuk mengekstrak elemen pada posisi yang sama dari matriks lain.

```
>j=(1:rows(A))'|ex[,4], mget(-A,j)
```

```
              1             1
              2             4
              3             1
  [-0.765761,  -0.952814,  -0.548138]
```

Fungsi Matriks Lainnya (Building Matrix)

Untuk membangun matriks, kita dapat menumpuk satu matriks di atas matriks lainnya. Jika keduanya tidak memiliki jumlah kolom yang sama, kolom yang lebih pendek diisi dengan 0.

```
>v=1:3; v_v
```

```
              1             2             3
              1             2             3
```

Demikian juga, kita dapat melampirkan matriks ke sisi lain secara berdampingan, jika keduanya memiliki jumlah baris yang sama.

```
>A=random(3,4); A|v'
```

```
       0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
        0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             2
      0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             3
```

Jika mereka tidak memiliki jumlah baris yang sama, matriks yang lebih pendek diisi dengan 0.

Ada pengecualian untuk aturan ini. Bilangan real yang melekat pada matriks akan digunakan sebagai kolom yang diisi dengan bilangan real tersebut.

```
>A|1
```

```
       0.032444     0.0534171      0.595713      0.564454             1
        0.83916      0.175552      0.396988       0.83514             1
      0.0257573      0.658585      0.629832      0.770895             1
```

Dimungkinkan untuk membuat matriks vektor baris dan kolom.

```
>[v;v]
```

```
              1             2             3
              1             2             3
```

```
>[v',v']
```

```
              1             1
              2             2
              3             3
```

Tujuan utamanya adalah untuk menafsirkan vektor ekspresi untuk vektor kolom.

```
>"[x,x^2]"(v')
```

```
              1             1
              2             4
              3             9
```

Untuk mendapatkan ukuran A, kita bisa menggunakan fungsi-fungsi berikut.

```
>C=zeros(2,4); rows(C), cols(C), size(C), length(C)
```

```
2
4
[2,  4]
4
```

Untuk vektor, ada length().

```
>length(2:10)
```

```
9
```

Ada banyak fungsi lain yang menghasilkan matriks.

```
>ones(2,2)
```

```
              1             1
              1             1
```

Ini juga dapat digunakan dengan satu parameter. Untuk mendapatkan vektor dengan angka selain 1, gunakan yang berikut ini.

```
>ones(5)*6
```

```
[6,  6,  6,  6,  6]
```

Juga matriks bilangan acak dapat dihasilkan dengan acak (distribusi seragam) atau normal (distribusi Gauß).

```
>random(2,2)
```

```
       0.66566      0.831835
         0.977      0.544258
```

Berikut adalah fungsi berguna lainnya, yang menyusun kembali elemen-elemen matriks menjadi matriks lain.

```
>redim(1:9,3,3) // menyusun elemen2 1, 2, 3, ..., 9 ke bentuk matriks 3x3
```

```
              1              2              3
              4              5              6
              7              8              9
```

Dengan fungsi berikut, kita dapat menggunakan this dan fungsi dup untuk menulis fungsi rep (), yang mengulang vektor sebanyak n kali.

```
>function rep(v,n) := redim(dup(v,n),1,n*cols(v))
```

Mari kita uji.

```
>rep(1:3,5)
```

```
[1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3,  1,  2,  3]
```

Fungsi multdup () menduplikasi elemen vektor.

```
>multdup(1:3,5), multdup(1:3,[2,3,2])
```

```
[1,  1,  1,  1,  1,  2,  2,  2,  2,  2,  3,  3,  3,  3,  3]
[1,  1,  2,  2,  2,  3,  3]
```

Fungsi flipx () dan flipy () mengembalikan urutan baris atau kolom matriks. Yaitu, fungsi flipx () membalik secara horizontal.

```
>flipx(1:5) //membalik elemen2 vektor baris
```

```
[5,  4,  3,  2,  1]
```

Untuk rotasi, Euler memiliki rotleft () dan rotright ().

```
>rotleft(1:5) // memutar elemen2 vektor baris
```

```
[2,  3,  4,  5,  1]
```

Fungsi khusus adalah drop (v, i), yang menghilangkan elemen dengan indeks di i dari vektor v.

```
>drop(10:20,3)
```

```
[10,  11,  13,  14,  15,  16,  17,  18,  19,  20]
```

Perhatikan bahwa vektor i dalam drop (v, i) mengacu pada indeks elemen di v, bukan nilai elemen. Jika Anda ingin menghapus elemen, Anda harus menemukan elemennya terlebih dahulu. Indeks fungsi (v, x) dapat digunakan untuk mencari elemen x dalam vektor yang diurutkan v.

```
>v=primes(50), i=indexof(v,10:20), drop(v,i)
```

```
[2,  3,  5,  7,  11,  13,  17,  19,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
[0,  5,  0,  6,  0,  0,  0,  7,  0,  8,  0]
[2,  3,  5,  7,  23,  29,  31,  37,  41,  43,  47]
```

Seperti yang Anda lihat, tidak ada salahnya untuk menyertakan indeks di luar rentang (seperti 0), indeks ganda, atau indeks yang tidak disortir.

```
>drop(1:10,shuffle([0,0,5,5,7,12,12]))
```

```
[1,  2,  3,  4,  6,  8,  9,  10]
```

Ada beberapa fungsi khusus untuk mengatur diagonal atau untuk menghasilkan matriks diagonal.

Kami mulai dengan matriks identitas.

```
>A=id(5) // matriks identitas 5x5
```

```
1    0    0    0    0
0    1    0    0    0
0    0    1    0    0
0    0    0    1    0
0    0    0    0    1
```

Kemudian kami mengatur diagonal bawah (-1) menjadi 1: 4.

```
>setdiag(A,-1,1:4) //mengganti diagonal di bawah diagonal utama
```

```
1    0    0    0    0
1    1    0    0    0
0    2    1    0    0
0    0    3    1    0
0    0    0    4    1
```

Perhatikan bahwa kami tidak mengubah matriks A. Kami mendapatkan matriks baru sebagai hasil dari setdiag ().

Berikut adalah fungsi yang mengembalikan matriks tri-diagonal.

```
>function tridiag (n,a,b,c) := setdiag(setdiag(b*id(n),1,c),-1,a); ...
>tridiag(5,1,2,3)
```

```
2    3    0    0    0
1    2    3    0    0
0    1    2    3    0
0    0    1    2    3
0    0    0    1    2
```

Diagonal matriks juga dapat diekstraksi dari matriks. Untuk mendemonstrasikan ini, kami merestrukturisasi vektor 1: 9 menjadi matriks 3x3.

```
>A=redim(1:9,3,3)
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Sekarang kita bisa mengekstrak diagonal.

```
>d=getdiag(A,0)
```

```
[1,  5,  9]
```

Misalnya. Kita dapat membagi matriks dengan diagonalnya. Bahasa matriks memperhatikan bahwa vektor kolom d diterapkan ke matriks baris demi baris.

```
>fraction A/d'
```

```
        1         2         3
      4/5         1       6/5
      7/9       8/9         1
```

Vektorisasi

Hampir semua fungsi di Euler bekerja untuk matriks dan input vektor juga, jika memungkinkan.

Misalnya, fungsi sqrt () menghitung akar kuadrat dari semua elemen vektor atau matriks.

```
>sqrt(1:3)
```

```
[1,  1.41421,  1.73205]
```

Jadi Anda dapat dengan mudah membuat tabel nilai. Ini adalah salah satu cara untuk memplot fungsi (alternatifnya menggunakan ekspresi).

```
>x=1:0.01:5; y=log(x)/x^2; // terlalu panjang untuk ditampikan
```

Dengan ini dan operator titik dua a: delta: b, vektor nilai fungsi dapat dibuat dengan mudah.

Dalam contoh berikut, kami menghasilkan vektor nilai t [i] dengan jarak 0,1 dari -1 hingga 1. Kemudian kami menghasilkan vektor nilai fungsi

$$s = t^3 - t$$

```
>t=-1:0.1:1; s=t^3-t
```

```
[0,  0.171,  0.288,  0.357,  0.384,  0.375,  0.336,  0.273,  0.192,
0.099,  0,  -0.099,  -0.192,  -0.273,  -0.336,  -0.375,  -0.384,
-0.357,  -0.288,  -0.171,  0]
```

EMT memperluas operator untuk skalar, vektor, dan matriks dengan cara yang jelas.

Misalnya, vektor kolom dikali vektor baris mengembang menjadi matriks, jika operator diterapkan. Berikut ini, v 'adalah vektor yang dialihkan (vektor kolom).

```
>shortest (1:5)*(1:5)'
```

```
      1       2       3       4       5
      2       4       6       8      10
      3       6       9      12      15
      4       8      12      16      20
      5      10      15      20      25
```

Perhatikan, ini sangat berbeda dari hasil perkalian matriks. Produk matriks dilambangkan dengan titik "." di EMT.

```
>(1:5).(1:5)'
```

```
55
```

Secara default, vektor baris dicetak dalam format kompak.

```
>[1,2,3,4]
```

```
[1,  2,  3,  4]
```

Untuk matriks, operator khusus. menunjukkan perkalian matriks, dan AN 'menunjukkan transposing. Matriks 1x1 dapat digunakan seperti bilangan real.

```
>v:=[1,2]; v.v', %^2
```

```
5
25
```

Untuk mentranpose matriks, kami menggunakan apostrof.

```
>v=1:4; v'
```

```
              1
              2
              3
              4
```

Sehingga kita dapat menghitung matriks A dikali vektor b.

```
>A=[1,2,3,4;5,6,7,8]; A.v'
```

```
             30
             70
```

Perhatikan bahwa v masih merupakan vektor baris. Jadi v'.v berbeda dari v.v '.

```
>v'.v
```

```
            1             2             3             4
            2             4             6             8
            3             6             9            12
            4             8            12            16
```

v.v 'menghitung norma v kuadrat untuk vektor baris v. Hasilnya adalah vektor 1x1, yang bekerja seperti bilangan real.

```
>v.v'
```

```
 30
```

Ada juga norma fungsi (bersama dengan banyak fungsi lain dari Aljabar Linear).

```
>norm(v)^2
```

```
 30
```

Operator dan fungsi mematuhi bahasa matriks Euler.

Berikut adalah ringkasan aturannya.

- Fungsi yang diterapkan ke vektor atau matriks diterapkan ke setiap elemen.

- Seorang operator yang beroperasi pada dua matriks dengan ukuran yang sama diterapkan berpasangan ke elemen matriks.

- Jika kedua matriks memiliki dimensi yang berbeda, keduanya diperluas dengan cara yang masuk akal, sehingga memiliki ukuran yang sama.

Mis., Nilai skalar dikalikan vektor mengalikan nilai dengan setiap elemen vektor. Atau matriks dikalikan dengan vektor (dengan *, bukan.) Memperluas vektor ke ukuran matriks dengan menduplikasinya.

Berikut ini adalah kasus sederhana dengan operator ^.

```
>[1,2,3]^2
```

```
 [1,  4,  9]
```

Ini kasus yang lebih rumit. Vektor baris dikalikan vektor kolom mengembang keduanya dengan menduplikasi.

```
>v:=[1,2,3]; v*v'
```

```
            1             2             3
            2             4             6
            3             6             9
```

Perhatikan bahwa produk skalar menggunakan produk matriks, bukan *!

```
>v.v'
```

```
14
```

Ada banyak fungsi untuk matriks. Kami memberikan daftar singkat. Anda harus membaca dokumentasi untuk informasi lebih lanjut tentang perintah ini.

```
sum, prod menghitung jumlah dan produk dari baris
cumsum, cumprod melakukan hal yang sama secara kumulatif
menghitung nilai ekstrem dari setiap baris
extrema mengembalikan vektor dengan informasi ekstrem
diag (A, i) mengembalikan diagonal ke-i
setdiag (A, i, v) mengatur diagonal ke-i
id (n) matriks identitas
det (A) determinan
charpoly (A) polinomial karakteristik
eigenvalues (A) eigenvalues
```

```
>v*v, sum(v*v), cumsum(v*v)
```

```
[1,  4,  9]
14
[1,  5,  14]
```

Operator: menghasilkan vektor baris spasi yang sama, secara opsional dengan ukuran langkah.

```
>1:4, 1:2:10
```

```
[1,  2,  3,  4]
[1,  3,  5,  7,  9]
```

Untuk menggabungkan matriks dan vektor ada operator "|" dan "_".

```
>[1,2,3]|[4,5], [1,2,3]_1
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
            1             2             3
            1             1             1
```

Unsur-unsur matriks disebut dengan "A [i, j]".

```
>A:=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; A[2,3]
```

```
6
```

Untuk vektor baris atau kolom, v [i] adalah elemen ke-i dari vektor. Untuk matriks, ini mengembalikan baris ke-i lengkap dari matriks tersebut.

```
>v:=[2,4,6,8]; v[3], A[3]
```

```
6
[7,  8,  9]
```

Indeks juga dapat berupa vektor baris indeks. : menunjukkan semua indeks.

```
>v[1:2], A[:,2]
```

```
[2,  4]
             2
             5
             8
```

Bentuk singkat dari: adalah menghilangkan indeks sepenuhnya.

```
>A[,2:3]
```

```
             2             3
             5             6
             8             9
```

Untuk tujuan vektorisasi, elemen-elemen matriks dapat diakses seolah-olah mereka adalah vektor.

```
>A{4}
```

```
4
```

Matriks juga bisa diratakan, menggunakan fungsi redim (). Ini diimplementasikan dalam fungsi flatten ().

```
>redim(A,1,prod(size(A))), flatten(A)
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9]
```

Untuk menggunakan matriks untuk tabel, mari kita reset ke format default, dan menghitung tabel nilai sinus dan cosinus. Perhatikan bahwa sudut dalam radian secara default.

```
>defformat; w=0°:45°:360°; w=w'; deg(w)
```

```
             0
            45
            90
           135
           180
           225
           270
           315
           360
```

Sekarang kami menambahkan kolom ke matriks.

```
>M = deg(w)|w|cos(w)|sin(w)
```

```
           0           0           1           0
          45    0.785398    0.707107    0.707107
          90      1.5708           0           1
         135     2.35619   -0.707107    0.707107
         180     3.14159          -1           0
         225     3.92699   -0.707107   -0.707107
         270     4.71239           0          -1
         315     5.49779    0.707107   -0.707107
         360     6.28319           1           0
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menghasilkan beberapa tabel dari beberapa fungsi sekaligus.

Dalam contoh berikut, kami menghitung t [j] ^ i untuk i dari 1 ke n. Kami mendapatkan matriks, di mana setiap baris adalah tabel t ^ i untuk satu i. Yaitu, matriks memiliki elemen

$$a_{i,j} = t_j^i,\ quad1\ lej\ le101,\ quad1\ lei\ len$$

Fungsi yang tidak bekerja untuk input vektor harus di-vectorisasi. Hal ini dapat dicapai dengan kata kunci "peta" dalam definisi fungsi. Kemudian fungsi tersebut akan dievaluasi untuk setiap elemen dari parameter vektor.

Integrasi numerik integ () hanya berfungsi untuk batas interval skalar. Jadi kita perlu melakukan vektorisasi.

```
>function map f(x) := integrate("x^x",1,x)
```

Kata kunci "map" membuat fungsi menjadi vektor. Fungsi tersebut sekarang akan bekerja
untuk vektor angka.

```
>f([1:5])
```

```
[0,  2.05045,  13.7251,  113.336,  1241.03]
```

Sub-Matriks dan Elemen-Matriks

Untuk mengakses elemen matriks, gunakan notasi braket.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9], A[2,2]
```

```
           1           2           3
           4           5           6
           7           8           9
5
```

Kita dapat mengakses baris matriks yang lengkap.

```
>A[2]
```

```
[4,  5,  6]
```

Dalam kasus vektor baris atau kolom, ini mengembalikan elemen vektor.

```
>v=1:3; v[2]
```

```
2
```

Untuk memastikan, Anda mendapatkan baris pertama untuk matriks 1xn dan mxn, tentukan semua kolom menggunakan indeks kedua yang kosong.

```
>A[2,]
```

```
[4,  5,  6]
```

Jika indeks adalah vektor indeks, Euler akan mengembalikan baris yang sesuai dari matriks.

Di sini kita ingin baris pertama dan kedua dari A.

```
>A[[1,2]]
```

```
            1            2            3
            4            5            6
```

Kami bahkan dapat menyusun ulang A menggunakan vektor indeks. Tepatnya, kami tidak mengubah A di sini, tetapi menghitung versi A.

```
>A[[3,2,1]]
```

```
            7            8            9
            4            5            6
            1            2            3
```

Trik indeks juga bekerja dengan kolom.

Contoh ini memilih semua baris A dan kolom kedua dan ketiga.

```
>A[1:3,2:3]
```

```
            2            3
            5            6
            8            9
```

Untuk singkatan ":" menunjukkan semua indeks baris atau kolom.

```
>A[:,3]
```

```
          3
          6
          9
```

Cara lainnya, biarkan indeks pertama kosong.

```
>A[,2:3]
```

```
          2          3
          5          6
          8          9
```

Kita juga bisa mendapatkan baris terakhir A.

```
>A[-1]
```

```
[7,   8,   9]
```

Sekarang mari kita ubah elemen A dengan menetapkan submatrix dari A ke beberapa nilai. Ini sebenarnya mengubah matriks A yang disimpan.

```
>A[1,1]=4
```

```
          4          2          3
          4          5          6
          7          8          9
```

Kami juga dapat menetapkan nilai ke baris A.

```
>A[1]=[-1,-1,-1]
```

```
         -1         -1         -1
          4          5          6
          7          8          9
```

Kami bahkan dapat menetapkan ke sub-matriks jika memiliki ukuran yang sesuai.

```
>A[1:2,1:2]=[5,6;7,8]
```

```
          5          6         -1
          7          8          6
          7          8          9
```

Selain itu, beberapa pintasan diperbolehkan.

```
>A[1:2,1:2]=0
```

```
              0             0            -1
              0             0             6
              7             8             9
```

Peringatan: Indeks di luar batas menampilkan matriks kosong, atau pesan kesalahan, bergantung pada pengaturan sistem. Standarnya adalah pesan kesalahan. Ingat, bagaimanapun, bahwa indeks negatif dapat digunakan untuk mengakses elemen matriks yang dihitung dari akhir.

```
>A[4]
```

```
Row index 4 out of bounds!
Error in:
A[4] ...
    ^
```

Sorting and Shuffling

Fungsi sort () mengurutkan vektor baris.

```
>sort([5,6,4,8,1,9])
```

```
[1,  4,  5,  6,  8,  9]
```

Seringkali perlu untuk mengetahui indeks dari vektor yang diurutkan dalam vektor asli. Ini dapat digunakan untuk menyusun ulang vektor lain dengan cara yang sama.

Mari kita mengacak vektor.

```
>v=shuffle(1:10)
```

```
[4,  5,  10,  6,  8,  9,  1,  7,  2,  3]
```

Indeks tersebut berisi urutan v.

```
>{vs,ind}=sort(v); v[ind]
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>s=["a","d","e","a","aa","e"]
```

```
a
d
e
a
aa
e
```

```
>{ss,ind}=sort(s); ss
```

```
a
a
aa
d
e
e
```

Seperti yang Anda lihat, posisi entri ganda agak acak.

```
>ind
```

```
[4,  1,  5,  2,  6,  3]
```

Fungsi unik mengembalikan daftar elemen unik vektor yang diurutkan.

```
>intrandom(1,10,10), unique(%)
```

```
[4,  4,  9,  2,  6,  5,  10,  6,  5,  1]
[1,  2,  4,  5,  6,  9,  10]
```

Ini bekerja untuk vektor string juga.

```
>unique(s)
```

```
a
aa
d
e
```

Aljabar linier

EMT memiliki banyak fungsi untuk menyelesaikan masalah sistem linier, sistem jarang, atau regresi.

Untuk sistem linier Ax = b, Anda dapat menggunakan algoritma Gauss, matriks invers atau fit linier. Operator A \ b menggunakan versi algoritma Gauss.

```
>A=[1,2;3,4]; b=[5;6]; A\b
```

```
         -4
        4.5
```

Untuk contoh lain, kami menghasilkan matriks 200x200 dan jumlah barisnya. Kemudian kita menyelesaikan Ax = b menggunakan matriks invers. Kami mengukur kesalahan sebagai deviasi maksimal semua elemen dari 1, yang tentu saja merupakan solusi yang tepat.

```
>A=normal(200,200); b=sum(A); longest totalmax(abs(inv(A).b-1))
```

```
  8.790745908981989e-13
```

Jika sistem tidak memiliki solusi, kesesuaian linier meminimalkan norma kesalahan Ax-b.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Determinan dari matriks ini adalah 0.

```
>det(A)
```

```
0
```

Matriks Simbolik

Maxima memiliki matriks simbolis. Tentu saja, Maxima dapat digunakan untuk soal-soal aljabar linier sederhana. Kita dapat mendefinisikan matriks untuk Euler dan Maxima dengan &: =, dan kemudian menggunakannya dalam ekspresi simbolik. Bentuk [...] biasa untuk mendefinisikan matriks dapat digunakan di Euler untuk mendefinisikan matriks simbolik.

```
>A &= [a,1,1;1,a,1;1,1,a]; $A
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

```
>$&det(A), $&factor(%)
```

$$a\,\left(a^2-1\right)-2\,a+2$$

$$\left(a-1\right)^2\,\left(a+2\right)$$

```
>$&invert(A) with a=0
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
>A &= [1,a;b,2]; $A
```

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Seperti semua variabel simbolik, matriks ini dapat digunakan dalam ekspresi simbolik lainnya.

```
>$&det(A-x*ident(2)), $&solve(%,x)
```

$$(1-x)\,(2-x)-a\,b$$

$$\left[x=\frac{3-\sqrt{4\,a\,b+1}}{2},x=\frac{\sqrt{4\,a\,b+1}+3}{2}\right]$$

Nilai eigen juga dapat dihitung secara otomatis. Hasilnya adalah vektor dengan dua vektor nilai eigen dan kelipatannya.

```
>$&eigenvalues([a,1;1,a])
```

$$[[a-1,a+1]\,,[1,1]]$$

Untuk mengekstrak vektor eigen tertentu, perlu pengindeksan yang cermat.

```
>$&eigenvectors([a,1;1,a]), &%[2][1][1]
```

$$[[[a-1,a+1]\,,[1,1]]\,,[[[1,-1]]\,,[[1,1]]]]$$

```
[1, - 1]
```

Matriks simbolik dapat dievaluasi dalam Euler secara numerik seperti ekspresi simbolik lainnya.

```
>A(a=4,b=5)
```

```
            1             4
            5             2
```

Dalam ekspresi simbolik, gunakan dengan.

```
>$&A with [a=4,b=5]
```

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

Akses ke baris matriks simbolik berfungsi seperti halnya dengan matriks numerik.

```
>$&A[1]
```

$$[1,a]$$

Ekspresi simbolis dapat berisi tugas. Dan itu mengubah matriks A.

```
>&A[1,1]:=t+1; $&A
```

$$\begin{pmatrix} t+1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

Ada fungsi simbolik dalam Maxima untuk membuat vektor dan matriks. Untuk ini, lihat dokumentasi Maxima atau tutorial tentang Maxima di EMT.

```
>v &= makelist(1/(i+j),i,1,3); $v
```

$$\left[\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+2}, \frac{1}{j+3}\right]$$

```
>B &:= [1,2;3,4]; $B, $&invert(B)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hasilnya dapat dievaluasi secara numerik di Euler. Untuk informasi lebih lanjut tentang Maxima, lihat pengantar Maxima.

```
>$&invert(B)()
```

```
           -2              1
          1.5           -0.5
```

Euler juga memiliki fungsi xinv () yang kuat, yang membuat upaya lebih besar dan mendapatkan hasil yang lebih tepat.

Perhatikan, bahwa dengan &: = matriks B telah didefinisikan sebagai simbolik dalam ekspresi simbolik dan numerik dalam ekspresi numerik. Jadi kita bisa menggunakannya di sini.

```
>longest B.xinv(B)
```

```
                        1                       0
                        0                       1
```

Misalnya. nilai eigen dari A dapat dihitung secara numerik.

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]; real(eigenvalues(A))
```

```
[16.1168,  -1.11684,  0]
```

Atau secara simbolis. Lihat tutorial tentang Maxima untuk detailnya.

```
>$&eigenvalues(@A)
```

$$\left[\left[\frac{15-3\,\sqrt{33}}{2} , \frac{3\,\sqrt{33}+15}{2} , 0 \right] , \left[1 , 1 , 1 \right] \right]$$

Nilai Numerik dalam Ekspresi simbolik

Ekspresi simbolik hanyalah string yang mengandung ekspresi. Jika kita ingin mendefinisikan nilai untuk ekspresi simbolik dan ekspresi numerik, kita harus menggunakan "&: =".

```
>A &:= [1,pi;4,5]
```

```
              1         3.14159
              4               5
```

Masih terdapat perbedaan antara bentuk numerik dan simbolik. Saat mentransfer matriks ke bentuk simbolis, pendekatan pecahan untuk real akan digunakan.

```
>$&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1146408}{364913} \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Untuk menghindarinya, ada fungsi "mxmset (variabel)".

```
>mxmset(A); $&A
```

$$\begin{pmatrix}1 & 3.141592653589793 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Maxima juga dapat menghitung dengan angka floating point, dan bahkan dengan angka mengambang besar dengan 32 digit. Namun, evaluasinya jauh lebih lambat.

```
>$&bfloat(sqrt(2)), $&float(sqrt(2))
```

$$1.4142135623730950488016887242097_B \times 10^{0}$$

$$1.414213562373095$$

Ketepatan angka floating point besar dapat diubah.

```
>&fpprec:=100; &bfloat(pi)
```

```
          3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494\
  459230781640628620899862803482534211706 8b0
```

Variabel numerik dapat digunakan dalam ekspresi simbolik apa pun yang menggunakan "@var".

Perhatikan bahwa ini hanya diperlukan, jika variabel telah ditentukan dengan ": =" atau "=" sebagai variabel numerik.

```
>B:=[1,pi;3,4]; $&det(@B)
```

$$-5.424777960769379$$

Demo - Suku Bunga

Di bawah ini, kami menggunakan Euler Math Toolbox (EMT) untuk menghitung suku bunga. Kami melakukannya secara numerik dan simbolis untuk menunjukkan kepada Anda bagaimana Euler dapat digunakan untuk memecahkan masalah kehidupan nyata.

Asumsikan Anda memiliki modal awal 5000 (katakanlah dalam dolar).

```
>K=5000
```

```
5000
```

Sekarang kami mengasumsikan tingkat bunga 3% per tahun. Mari kita tambahkan satu tingkat sederhana dan hitung hasilnya.

```
>K*1.03
```

```
5150
```

Euler akan memahami sintaks berikut juga.

```
>K+K*3%
```

```
5150
```

Tapi lebih mudah menggunakan faktornya

```
>q=1+3%, K*q
```

```
1.03
5150
```

Selama 10 tahun, kita cukup mengalikan faktor-faktor dan mendapatkan nilai akhir dengan suku bunga majemuk.

```
>K*q^10
```

```
6719.58189672
```

Untuk tujuan kami, kami dapat mengatur format menjadi 2 digit setelah titik desimal.

```
>format(12,2); K*q^10
```

```
    6719.58
```

Mari kita cetak yang dibulatkan menjadi 2 digit itu dalam kalimat lengkap.

```
>"Starting from " + K + "$ you get " + round(K*q^10,2) + "$."
```

```
Starting from 5000$ you get 6719.58$.
```

Bagaimana jika kita ingin mengetahui hasil antara dari tahun 1 sampai tahun ke 9? Untuk ini, bahasa matriks Euler sangat membantu. Anda tidak harus menulis satu lingkaran, tetapi cukup masukkan

```
>K*q^(0:10)
```

```
Real 1 x 11 matrix

    5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Bagaimana keajaiban ini bekerja? Pertama, ekspresi 0:10 mengembalikan vektor bilangan bulat.

```
>short 0:10
```

```
[0,  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

Kemudian semua operator dan fungsi di Euler dapat diterapkan ke elemen vektor untuk elemen. Begitu

```
>short q^(0:10)
```

```
[1,  1.03,  1.0609,  1.0927,  1.1255,  1.1593,  1.1941,  1.2299,
1.2668,  1.3048,  1.3439]
```

adalah vektor faktor q ^ 0 hingga q ^ 10. Ini dikalikan dengan K, dan kita mendapatkan nilai vektor.

```
>VK=K*q^(0:10);
```

Tentu saja, cara realistis untuk menghitung suku bunga ini adalah dengan membulatkan ke sen terdekat setiap tahun. Mari kita tambahkan fungsi untuk ini.

```
>function oneyear (K) := round(K*q,2)
```

Mari kita bandingkan kedua hasil tersebut, dengan dan tanpa pembulatan.

```
>longest oneyear(1234.57), longest 1234.57*q
```

```
                 1271.61
               1271.6071
```

Sekarang tidak ada rumus sederhana untuk tahun ke-n, dan kita harus mengulang selama bertahun-tahun. Euler memberikan banyak solusi untuk ini.

Cara termudah adalah fungsi iterasi, yang mengulang fungsi tertentu beberapa kali.

```
>VKr=iterate("oneyear",5000,10)
```

```
 Real 1 x 11 matrix

     5000.00     5150.00     5304.50     5463.64     ...
```

Kami dapat mencetaknya dengan cara yang ramah, menggunakan format kami dengan tempat desimal tetap.

```
>VKr'
```

```
     5000.00
     5150.00
     5304.50
     5463.64
     5627.55
     5796.38
     5970.27
     6149.38
     6333.86
     6523.88
     6719.60
```

Untuk mendapatkan elemen tertentu dari vektor, kami menggunakan indeks dalam tanda kurung siku.

```
>VKr[2], VKr[1:3]
```

```
     5150.00
     5000.00     5150.00     5304.50
```

Anehnya, kita juga bisa menggunakan indeks vektor. Ingat bahwa 1: 3 menghasilkan vektor [1,2,3].

Mari kita bandingkan elemen terakhir dari nilai yang dibulatkan dengan nilai penuh.

```
>VKr[-1], VK[-1]
```

```
     6719.60
     6719.58
```

Perbedaannya sangat kecil.

Memecahkan Persamaan

Sekarang kita ambil fungsi yang lebih maju, yang menambahkan jumlah uang tertentu setiap tahun.

```
>function onepay (K) := K*q+R
```

Kami tidak harus menentukan q atau R untuk definisi fungsi. Hanya jika kita menjalankan perintah, kita harus menentukan nilai-nilai ini. Kami memilih R = 200.

```
>R=200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
 Real 1 x 11 matrix

     5000.00     5350.00     5710.50     6081.82     ...
```

Bagaimana jika kita menghapus jumlah yang sama setiap tahun?

```
>R=-200; iterate("onepay",5000,10)
```

```
 Real 1 x 11 matrix

     5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Kami melihat bahwa uang berkurang. Jelas, jika kita hanya mendapatkan 150 bunga di tahun pertama, tetapi menghapus 200, kita kehilangan uang setiap tahun.

Bagaimana kita bisa menentukan berapa tahun uang itu akan bertahan? Kami harus menulis loop untuk ini. Cara termudah adalah melakukan iterasi cukup lama.

```
>VKR=iterate("onepay",5000,50)
```

```
 Real 1 x 51 matrix

     5000.00     4950.00     4898.50     4845.45     ...
```

Dengan menggunakan bahasa matriks, kita dapat menentukan nilai negatif pertama dengan cara berikut.

```
>min(nonzeros(VKR<0))
```

```
        48.00
```

Alasan untuk ini adalah bahwa nonzeros (VKR <0) mengembalikan vektor indeks i, di mana VKR [i] <0, dan min menghitung indeks minimal.

Karena vektor selalu dimulai dengan indeks 1, jawabannya adalah 47 tahun.

Fungsi iterate () memiliki satu trik lagi. Ini bisa mengambil kondisi akhir sebagai argumen. Maka itu akan mengembalikan nilai dan jumlah iterasi.

```
>{x,n}=iterate("onepay",5000,till="x<0"); x, n,
```

```
-19.83
 47.00
```

Mari kita coba menjawab pertanyaan yang lebih ambigu. Asumsikan kita tahu bahwa nilainya 0 setelah 50 tahun. Berapa tingkat bunganya?

Ini adalah pertanyaan yang hanya bisa dijawab secara numerik. Di bawah ini, kami akan mendapatkan rumus yang diperlukan. Maka Anda akan melihat bahwa tidak ada rumus mudah untuk suku bunga. Tetapi untuk saat ini, kami bertujuan untuk solusi numerik.

Langkah pertama adalah menentukan fungsi yang melakukan iterasi sebanyak n kali. Kami menambahkan semua parameter ke fungsi ini.

```
>function f(K,R,P,n) := iterate("x*(1+P/100)+R",K,n;P,R)[-1]
```

Iterasinya sama seperti di atas

$$x_{n+1} = x_n\ cdot\ kiri(1 + \ fracP100\ kanan) + R$$

Tapi kami lebih lama menggunakan nilai global R dalam ekspresi kami. Fungsi seperti iterate () memiliki trik khusus di Euler. Anda dapat meneruskan nilai variabel dalam ekspresi sebagai parameter titik koma. Dalam hal ini P dan R.

Apalagi kami hanya tertarik pada nilai terakhir. Jadi kami mengambil indeks [-1].

Mari kita coba tes.

```
>f(5000,-200,3,47)
```

```
-19.83
```

Sekarang kita bisa menyelesaikan masalah kita.

```
>solve("f(5000,-200,x,50)",3)
```

```
3.15
```

Rutin menyelesaikan memecahkan ekspresi = 0 untuk variabel x. Jawabannya adalah 3,15% per tahun. Kami mengambil nilai awal 3% untuk algoritme. Fungsi Solving () selalu membutuhkan nilai awal.

Kita dapat menggunakan fungsi yang sama untuk menjawab pertanyaan berikut: Berapa banyak yang dapat kita keluarkan per tahun sehingga modal awal habis setelah 20 tahun dengan asumsi tingkat bunga 3% per tahun.

```
>solve("f(5000,x,3,20)",-200)
```

```
-336.08
```

Perhatikan bahwa Anda tidak dapat menyelesaikan jumlah tahun, karena fungsi kami mengasumsikan n sebagai nilai integer.

Solusi Simbolis untuk Masalah Suku Bunga

Kita dapat menggunakan bagian simbolik Euler untuk mempelajari masalahnya. Pertama kita mendefinisikan fungsi onepay () secara simbolis.

```
>function op(K) &= K*q+R; $&op(K)
```

$$R + q\,K$$

Sekarang kita dapat mengulang ini.

```
>$&op(op(op(op(K)))), $&expand(%)
```

$$q\,\left(q\,\left(q\,\left(R + q\,K\right) + R\right) + R\right) + R$$

$$q^3\,R + q^2\,R + q\,R + R + q^4\,K$$

Kami melihat sebuah pola. Setelah n periode yang kita miliki

$$K_n = q^n K + R(1 + q + \ ldots + q^{n-1}) = q^n K + \ fracq^n - 1q - 1R$$

Rumusnya adalah rumus jumlah geometris, yang dikenal dengan Maxima.

```
>&sum(q^k,k,0,n-1); $& % = ev(%,simpsum)
```

$$\sum_{k=0}^{n-1}{q^{k}} = \frac{q^{n} - 1}{q - 1}$$

Ini agak rumit. Jumlahnya dievaluasi dengan bendera "simpsum" untuk menguranginya menjadi hasil bagi.

Mari kita buat fungsi untuk ini.

```
>function fs(K,R,P,n) &= (1+P/100)^n*K + ((1+P/100)^n-1)/(P/100)*R; $&fs(K,R,P,n)
```

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100} + 1\right)^{n} - 1\right)\,R}{P} + K\,\left(\frac{P}{100} + 1\right)^{n}$$

Fungsinya sama dengan fungsi f kita sebelumnya. Tapi itu lebih efektif.

```
>longest f(5000,-200,3,47), longest fs(5000,-200,3,47)
```

```
-19.82504734650985
-19.82504734652684
```

Sekarang kita dapat menggunakannya untuk menanyakan waktu n. Kapan modal kita habis? Tebakan awal kami adalah 30 tahun.

```
>solve("fs(5000,-330,3,x)",30)
```

```
20.51
```

Jawaban ini mengatakan bahwa itu akan menjadi negatif setelah 21 tahun.

Kita juga dapat menggunakan sisi simbolis Euler untuk menghitung rumus pembayaran.

Asumsikan kita mendapat pinjaman sebesar K, dan membayar n pembayaran R (dimulai setelah tahun pertama) meninggalkan sisa utang Kn (pada saat pembayaran terakhir). Rumusnya jelas

```
>equ &= fs(K,R,P,n)=Kn; $&equ
```

$$\frac{100\,\left(\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}-1\right)\,R}{P}+K\,\left(\frac{P}{100}+1\right)^{n}=Kn$$

Biasanya rumus ini diberikan dalam bentuk

$$i=\frac{P}{100}$$

```
>equ &= (equ with P=100*i); $&equ
```

$$\frac{\left(\left(i+1\right)^{n}-1\right)\,R}{i}+\left(i+1\right)^{n}\,K=Kn$$

Kita bisa mencari nilai R secara simbolis.

```
>$&solve(equ,R)
```

$$\left[R=\frac{i\,Kn-i\,\left(i+1\right)^{n}\,K}{\left(i+1\right)^{n}-1}\right]$$

Seperti yang Anda lihat dari rumusnya, fungsi ini mengembalikan kesalahan titik mengambang untuk i = 0. Euler tetap merencanakannya.

Tentu saja, kami memiliki batasan berikut.

```
>$&limit(R(5000,0,x,10),x,0)
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{R\left(5000 , 0 , x , 10\right)}$$

Jelas, tanpa bunga kita harus membayar kembali 10 bunga dari 500.

Persamaan ini juga bisa diselesaikan untuk n. Ini terlihat lebih bagus, jika kita menerapkan beberapa penyederhanaan padanya.

```
>fn &= solve(equ,n) | ratsimp; $&fn
```

$$\left[n=\frac{\log \left(\frac{R+i\,K\,n}{R+i\,K}\right)}{\log \left(i+1\right)} \right]$$

Soal-soal Aljabar

Pilih minimal 5 soal dari setiap Latihan atau tipe soal (misalnya, di antara soal-soal yang sudah saya blok) yang sesuai dengan materi (subtopik). Jangan lupa tuliskan soalnya di teks komentar (dengan format LaTeX) dan beri penjelasan hasil output-nya.

R.2

$$\left(\frac{24a^{10}b^{-8}c^7}{12a^6b^{-3}c^5}\right)^{-5}$$

Jawab:

```
>$&((24*a^10*b^-8*c^7)/(12*a^6*b^-3*c^5))^-5
```

$$\frac{b^{25}}{32\,a^{20}\,c^{10}}$$

$$\left(\frac{125p^{12}q^{-14}r^{22}}{25p^8q^6r^{-15}}\right)^{-4}$$

Jawab:

```
>$&((125*p^12*q^-14*r^22)/(25*p^8*q^6*r^-15))^-4
```

$$\frac{q^{80}}{625\,p^{16}\,r^{148}}$$

$$2^6 \cdot 2^{-3} : 2^{10} : 2^{-8}$$

Jawab:

```
>2^6*2^-3/2^10/2^-8
```

```
2.00
```

$$\frac{4(8-6)^2 - 4\cdot 3 + 2\cdot 8}{3^1 + 19^0}$$

Jawab:

```
>((4*(8-6)^2 - 4*3 + 2*8)/(3^1+19^0))
```

```
5.00
```

$$\frac{[4(8-6)^2 + 4](3 - 2\cdot 8)}{2^2(2^3+5)}$$

Jawab:

```
>(((4*(8-6)^2 + 4)*(3 - 2*8))/(2^2*(2^3+5)))
```

```
-5.00
```

R.3

$$(x+6)(x+3)$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((x+6)*(x+3)))
```

$$expand\left((x+3)\;(x+6)\right) = x^2+9\,x+18$$

$$(2a+3)(a+5)$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((2*a+3)*(a+5)))
```

$$expand\left((a+5)\;(2\,a+3)\right) = 2\,a^2+13\,a+15$$

$$(2x+3y)(2x+y)$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((2*x+3*y)*(2*x+y)))
```

$$expand\left((y+2\,x)\;(3\,y+2\,x)\right) = 3\,y^2+8\,x\,y+4\,x^2$$

$$(x+3)^2$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((x+3)^2))
```

$$expand\left((x+3)^2\right) = x^2+6\,x+9$$

$$(y-5)^2$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((y-5)^2))
```

$$expand\left((y-5)^2\right) = y^2 - 10\,y + 25$$

R.4

$$t^2 + 8t + 15$$

Jawab:

```
>$&showev('factor((t^2+8*t+15)))
```

$$factor\left(t^2 + 8\,t + 15\right) = (t+3)\ (t+5)$$

$$z^2 - 81$$

Jawab:

```
>$&showev('factor(z^2-81))
```

$$factor\left(z^2 - 81\right) = (z-9)\ (z+9)$$

$$3a^5 - 24a^2$$

Jawab:

```
>$&showev('factor(3*a^5-24*a^2))
```

$$factor\left(3\,a^5 - 24\,a^2\right) = 3\ (a-2)\ a^2\ \left(a^2 + 2\,a + 4\right)$$

$$18a^2b - 15ab^2$$

Jawab:

```
>$&showev('factor(18*a^2*b-15*a*b^2))
```

$$factor\left(18\,a^2\,b-15\,a\,b^2\right)=-3\,a\,b\,\left(5\,b-6\,a\right)$$

$$p - 64p^4$$

Jawab:

```
>$&showev('factor(p-64*p^4))
```

$$factor\left(p-64\,p^4\right)=-p\,\left(4\,p-1\right)\,\left(16\,p^2+4\,p+1\right)$$

R.5

$$7(3x + 6) = 11 - (x + 2)$$

Jawab:

```
>$solve(7*(3*x+6)=11-(x+2),x)
```

$$\left[x=-\frac{3}{2}\right]$$

$$9(2x + 8) = 20 - (x + 5)$$

Jawab:

```
>$solve(9*(2*x+8)=20-(x+5),x)
```

$$\left[x=-3\right]$$

$$12z^2 + z = 6$$

Jawab:

```
>$solve(12*(z^2)+z=6,z)
```

$$\left[z = -\frac{3}{4}, z = \frac{2}{3}\right]$$

$$x^2 - 36 = 0$$

Jawab:

```
>$solve(x^2-36=0,x)
```

$$[x = -6, x = 6]$$

$$3y^2 - 15 = 0$$

Jawab

```
>$solve(3*y^2-15=0,y)
```

$$\left[y = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}\right]$$

R.6

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}\right)$$

Jawab:

```
>$&showev('factor((x^2-4)/(x^2-4*x+4)))
```

$$factor\left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4\,x + 4}\right) = \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$\frac{7}{5x}+\frac{3}{5x}$$

```
>$&showev('factor((7/(5*x))+ (3/(5*x))))
```

$$factor\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{x}$$

$$\frac{4}{3a+4}+\frac{3a}{3a+4}$$

Jawab:

```
>$&showev('factor(4/(3*a+4)+(3*a)/(3*a+4)))
```

$$factor\left(\frac{3\,a}{3\,a+4}+\frac{4}{3\,a+4}\right)=1$$

$$\frac{x}{2x-3y}-\frac{y}{3y-2x}$$

Jawab:

```
>$&showev('factor((x)/(2*x-3*y)-y/(3*y-2*x)))
```

$$factor\left(\frac{x}{2\,x-3\,y}-\frac{y}{3\,y-2\,x}\right)=\frac{-y-x}{3\,y-2\,x}$$

$$\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1+x}$$

Jawab:

```
>$&showev('factor((1-x)/x+x/(1+x)))
```

$$factor\left(\frac{x}{x+1}+\frac{1-x}{x}\right)=\frac{1}{x\,(x+1)}$$

Review Exercises

$$(t^a + t^{-a})^2$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((t^a+t^(-a))^2))
```

$$expand\left(\left(t^a+\frac{1}{t^a}\right)^2\right)=t^{2\,a}+\frac{1}{t^{2\,a}}+2$$

$$(y^b - z^c)(y^b + z^c)$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((y^b-z^c)*(y^b+z^c)))
```

$$expand\left(\left(y^b-z^c\right)\,\left(z^c+y^b\right)\right)=y^{2\,b}-z^{2\,c}$$

$$(a^n - b^n)^3$$

Jawab:

```
>$&showev('expand((a^n-b^n)^3))
```

$$expand\left(\left(a^n-b^n\right)^3\right)=-b^{3\,n}+3\,a^n\,b^{2\,n}-3\,a^{2\,n}\,b^n+a^{3\,n}$$

$$y^{2n} + 16y^n + 64$$

Jawab:

```
>$&showev('factor((y^(2*n)+16*y^n+64)))
```

$$factor\left(y^{2\,n}+16\,y^n+64\right)=\left(y^n+8\right)^2$$

$$m^{6n} - m^{3n}$$

Jawab:

```
>$&showev('factor((m^(6*n)-m^(3*n))))
```

$$factor\left(m^{6\,n}-m^{3\,n}\right)=m^{3\,n}\,\left(m^{n}-1\right)\,\left(m^{2\,n}+m^{n}+1\right)$$

2.3 latex: f(x)=3x+1 , g(x)=x$^2 - 2x - 6, h(x) = x^3$

find each of the following

```
>function f(x):= 3*x+1;
>function g(x):= x^2-2*x-6;
>function h(x):= x^3;
```

$$(fog)(-1)$$

Jawab:

```
>f(g(-1))
```

```
-8.00
```

$$(gof)(-2)$$

Jawab:

```
>g(f(-2))
```

```
29.00
```

$$(hof)(1)$$

Jawab:

```
>h(f(1))
```

64.00

$$(goh)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Jawab:

```
>g(h(1/2))
```

-6.23

$$(gof)(5)$$

Jawab:

```
>g(f(5))
```

218.00

3.1

$$(-5+3i)+(7+8i)$$

Jawab:

```
>$(-5+3*i)+(7+8*i)
```

$$11\,i+2$$

$$(-6-5i)+(9+2i)$$

Jawab:

```
>$(-6-5*i)+(9+2*i)
```

$$3 - 3\,i$$

$$(4 - 9i) + (1 - 3i)$$

Jawab:

```
>$(4-9*i)+(1-3*i)
```

$$5 - 12\,i$$

$$(7 - 2i) + (4 - 5i)$$

Jawab:

```
>$ (7-2*i)+(4-5*i)
```

$$11 - 7\,i$$

$$(12 + 3i) + (-8 + 5i)$$

Jawab:

```
>$(12+3*i)+(-8+5*i)
```

$$8\,i + 4$$

3.4

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{t}$$

Jawab:

```
>$solve((1/4)+(1/5)=(1/t),t)
```

$$\left[t = \frac{20}{9}\right]$$

$$x + \frac{6}{x} = 5$$

Jawab:

```
>$solve(x+6/x=5,x)
```

$$[x = 3, x = 2]$$

$$\frac{6}{y+3} + \frac{2}{y} = \frac{5y-3}{y^2-9}$$

Jawab:

```
>$solve(6/(y+3)+2/y=(5*y-3)/(y^2-9),y)
```

$$[y = 6, y = -1]$$

$$\sqrt{3x-4} = 1$$

Jawab:

```
>$solve(sqrt(3*x-4)=1,x)
```

$$\left[x = \frac{5}{3}\right]$$

$$\sqrt{7-x}=2$$

Jawab:

```
>$solve(sqrt(7-x)=2,x)
```

$$[x=3]$$

3.5

$$|x+3|-2=8$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([abs(x+3)-2=8],[x])
```

$$[x=7] \vee [x=-13]$$

$$|3x+1|-4=-1$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([abs(3*x+1)-4=-1],[x])
```

$$\left[x=\frac{2}{3}\right] \vee \left[x=-\frac{4}{3}\right]$$

$$|4x-3|+1=7$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([abs(4*x-3)+1=7],[x])
```

$$\left[x=\frac{9}{4}\right] \vee \left[x=-\frac{3}{4}\right]$$

$$12-|x+6|=5$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([12-abs(x+6)=5],[x])
```

$$[x=1] \vee [x=-13]$$

$$7-|2x-1|=6$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([7-abs(2*x-1)=6],[x])
```

$$[x=1] \vee [x=0]$$

Chapter 3 Test

Solve. Find exact solutions.

$$x+5\sqrt{x}-36=0$$

Jawab:

```
>$&solve(x+5*sqrt(x)-36=0,x)
```

$$\left[x=36-5\,\sqrt{x}\right]$$

$$\frac{3}{3x+4}+\frac{2}{x-1}=2$$

Jawab:

```
>$&solve(3/(3*x+4)+2/(x-1)=2,x)
```

$$\left[x=\frac{13}{6},x=-1\right]$$

$$\sqrt{x+4}-2=1$$

jawab:

```
>$&solve(sqrt(x+4)-2=1,x)
```

$$[x=5]$$

$$|x+4|=7$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([abs(x+4)=7],[x])
```

$$[x=3]\vee[x=-11]$$

$$|4y-3|=5$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([abs(4*y-3)=5],[y])
```

$$[y=2]\vee\left[y=-\frac{1}{2}\right]$$

$$|x+5| > 2$$

Jawab:

```
>$&fourier_elim([abs(x+5)>2],[x])
```

$$[x < -7] \vee [-3 < x]$$

4.1

Use substitution to determine whether 4, 5, and -2 are zeros of

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 14x + 24$$

Jawab:

```
>function f(x):= x^3-9*x^2+14*x+24
>f(4)
```

```
0.00
```

```
>f(5)
```

```
-6.00
```

```
>f(-2)
```

```
-48.00
```

Use substitution to determine whether 2, 3, and -1 are zeros of

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 6$$

Jawab:

```
>function f(x):=2*x^3-3*x^2+x+6
>f(2)
```

```
12.00
```

```
>f(3)
```

```
36.00
```

```
>f(-1)
```

```
0.00
```

Use substitution to determine whether 2, 3, and -1 are zeros of

$$g(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$$

Jawab:

```
>function g(x):=x^4-6*x^3+8*x^2+6*x-9
>g(2)
```

```
3.00
```

```
>g(3)
```

```
0.00
```

```
>g(-1)
```

```
0.00
```

---

tentukan pembuat nol dari polinomial berikut

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$$

Jawab:

```
>function f(x):=x^4-4*x^2+3
>$&solve(x^4-4*x^2+3=0,x)
```

$$\left[x = -1, x = 1, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}\right]$$

Tentukan Pembuat nol dari polinomial berikut

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$$

Jawab:

```
>function f(x):=x^4-10*x^2+9
>$&solve(x^4-10*x^2+9=0,x)
```

$$[x = -1, x = 1, x = -3, x = 3]$$

4.3

For the function

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20$$

determine whether each of the following is a factor of f(x)
a)x+1 b)x-2 c)x+5
Jawab:

```
>$&showev('factor(x^4-6*x^3+x^2+24*x-20))
```

$$factor\left(x^4 - 6\,x^3 + x^2 + 24\,x - 20\right) = (x-5)\,(x-2)\,(x-1)\,(x+2)$$

jadi, yang merupakan faktor dari f(x) adalah b) x-2

---

for the function

$$h(x) := x^3 - x^2 - 17x - 15$$

determine whether each of the following is a factor of h(x)
a)x+5 b)x+1 c)x+3
Jawab:

```
>$&showev('factor(x^3-x^2-17*x-15))
```

$$factor\left(x^3 - x^2 - 17\,x - 15\right) = (x-5)\,(x+1)\,(x+3)$$

jadi, yang merupakan faktor dari h(x) adalah (x+1) dan (x+3

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

find f(1),f(-2), dan f(3)
Jawab:

```
>function f(x):=x^3-6*x^2+11*x-6
>f(1)
```

```
         0.00
```

```
>f(-2)
```

```
       -60.00
```

```
>f(3)
```

```
         0.00
```

$$f(x) = x^3 + 7x^2 - 12x - 3$$

find f(-3), f(-2), dan f(1)
Jawab:

```
>function f(x):=x^3+7*x^2-12*x-3
>f(-3)
```

```
        69.00
```

```
>f(-2)
```

```
        41.00
```

```
>f(1)
```

```
        -7.00
```

$$f(x) = x^4 = 3x^3 + 2x + 8$$

find f(-1), f(4), dan f(-5)

Jawab:

```
>function f(x):=x^4+3*x^3+2*x+8
>f(-1)
```

```
         4.00
```

```
>f(4)
```

```
       464.00
```

```
>f(-5)
```

```
       248.00
```

Mid-Chapter Mixed Review

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 4x - 10$$

find g(-5)

Jawab:

```
>function g(x):=x^3-9*x^2+4*x-10
>g(-5)
```

```
      -380.00
```

$$f(x) = 20x^2 - 40x$$

$$findf\left(\frac{1}{2}\right)$$

Jawab:

```
>function f(x):=20*x^2-40*x
>f(1/2)
```

```
       -15.00
```

$$f(x) = 5x^4 + x^3 - x$$

$$find, f(-\sqrt{2})$$

Jawab:

```
>function f(x):= 5*x^4+x^3-x
>f(-sqrt(2))
```

```
        18.59
```

---

faktorkan fungsi h(x) berikut lalu tentukan solusi dari h(x)=0

$$h(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 36$$

Jawab:

```
>function h(x):=x^3-4*x^2+9*x-36
>$&factor(x^3-4*x^2+9*x-36)
```

$$(x-4)\,\left(x^2+9\right)$$

```
>$&solve(x^3-4*x^2+9*x-36=0,x)
```

$$[x=-3\,i, x=3\,i, x=4]$$

---

faktorkan fungsi g(x) berikut lalu tentukan solusi dari g(x)=0

$$g(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$$

Jawab:

```
>function g(x):=x^4-2*x^3-13*x^2+14*x+24
>$&factor(x^4-2*x^3-13*x^2+14*x+24)
```

$$(x-4)\,(x-2)\,(x+1)\,(x+3)$$

```
>$&solve(x^4-2*x^3-13*x^2+14*x+24=0,x)
```

$$[x = -3, x = -1, x = 2, x = 4]$$

BAB 3

KB PEKAN 5-6: PENGGUNAAN SOFTWARE EMT UNTUK PLOT 2D

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Nisrina Octaviani
NIM : 22305144011
Kelas : Matematika B 2022

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagai kurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Terdapat fungsi-fungsi plot yang sangat mendasar. Ada koordinat layar yang selalu berkisar dari 1 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya pesergi atau tidak. Dan ada koordinat plot yang dapat diatur dengan setplot (). Pemetaan antara koordinat tergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.

Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis yang beragam warna. Untuk lebih detail pada fungsi-fungsi tersebut, pelajari fungsi inti dari EMT.

```
>clg; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // get random points
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-001.png

```
>reset;
```

Grafik perlu ditahan karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.

Untuk membersihkan semuanya kita dapat menggunakan reset().

Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.

Contoh lainnya, kita menggambar sebuah plot sebagagi sisipan di plot lain. Ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kita menyimpan dan memulihkan jendela penuh dan menahan plot saat kita memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-002.png

```
>hold off;
>window(ow);
```

Sebuah plot dengan beberapa angka dicapai dengan cara yang sama. Untuk hal ini ada fungsi utility figure().

Plot Aspek

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubahnya dengan fungsi aspect(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspeknya nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafis saat ini.

Tapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini berubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-003.png

```
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk aspek rasio.

2D Plot di Eluer

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.

Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.

Euler dapat memplot plot 2D dari

- ekspresi,
- fungsi, veraibel, atau kurva parameter,
- vektor dari nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang dan plot berbayang.

Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (mis. "4*x^2") atau nama fungsi (mis. "f") menghasilkan grafik fungsi.

Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.

Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

```
>plot2d("x^2"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-004.png

```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-005.png

```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-006.png

Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.

Rentang plot diatur dengan parameter yang ditetapkan berikut:

- a,b: rentang-x (default -2,2)
- c,d: rentang-y (default: skala dengan nilai)
- r: sebagai alternatif radius di sekitar pusat plot
- cx,cy: koordinat pusat plot (default 0,0)

```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-007.png

```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-008.png

```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-009.png

Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.

Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul

- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.

Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.

Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kami memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-010.png

Di plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kami menunjukkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya kisi=0 tidak disertakan. Ini menunjukkan tidak ada grid dan tidak ada bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-011.png

Jika argumen ke plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.

Atau, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.

Dalam contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-012.png

```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-013.png

Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n = ... Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-014.png

```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-015.png

Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai merencanakan segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN keluar dari jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-016.png

Parameter square=true (atau >square) memilih y-range secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-017.png

```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-018.png

Jika Anda membutuhkan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil shrinkwindow() dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-019.png

Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-020.png

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-021.png

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-022.png

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-023.png

```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-024.png

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-025.png

```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-026.png

```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-027.png

Fungsi Pada Satu Parameter

Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat di awal program.

Berikut adalah beberapa contoh menggunakan fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-028.png

```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-029.png

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-030.png

```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-031.png

```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-032.png

Berikut adalah ringkasan dari fungsi yang diterima

- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
- fungsi atau fungsi simbolis dengan nama sebagai "f"
- fungsi simbolis hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolis. Untuk fungsi simbolis, nama saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
  x
 x   (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-033.png

Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
  - x
 E    sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-034.png

```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-035.png

Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.

- gaya="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Default adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.

- 0.15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye terang, kuning
- rgb(merah, hijau, biru): parameter adalah real dalam [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-036.png

Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-037.png

Tapi Anda bisa menggunakan warna apa saja.

```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-038.png

Menggambar Beberapa Kurva Pada Bidang Koordinat yang Sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metode menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, tetapi panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini dalam contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-039.png

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-040.png

Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-041.png

Kami menambahkan titik persimpangan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan memasukkan hasilnya ke dalam notebook. Kami juga menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-042.png

Dalam demo berikut, kami memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolis.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan yang ketiga memiliki set flag >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.

Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-044.png

Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Bernstein-Polinomial.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-045.png

Metode kedua menggunakan pasangan matriks nilai-x dan matriks nilai-y yang berukuran sama.

Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-046.png

Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan larik warna, larik gaya, dan larik ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-047.png

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```

Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                 10              9                8   2              7   3
         [(1 - x)   , 10 (1 - x)   x, 45 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
               6   4              5   5              4   6              3   7
  210 (1 - x)   x , 252 (1 - x)   x , 210 (1 - x)   x , 120 (1 - x)   x ,
              2   8               9    10
  45 (1 - x)   x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

```
 (1-x)^10
 10*(1-x)^9*x
 45*(1-x)^8*x^2
 120*(1-x)^7*x^3
 210*(1-x)^6*x^4
 252*(1-x)^5*x^5
 210*(1-x)^4*x^6
 120*(1-x)^3*x^7
 45*(1-x)^2*x^8
 10*(1-x)*x^9
 x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-048.png

Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.

Jika ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot ke dalam satu plot.

Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan, itu akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-049.png

Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.

Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh kita meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-050.png

Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke fungsi yang dengan sendirinya diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.

Dalam contoh berikut, kami menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-051.png

Kami dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-052.png

Label Teks

Dekorasi sederhana bisa

- judul dengan judul="..."
- x- dan y-label dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)

Perintah label akan memplot ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Itu bisa mengambil argumen posisi.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-053.png

```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-054.png

Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-055.png

Kotak ditambatkan di kanan atas secara default, tetapi > kiri menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor flag, satu untuk setiap label.

Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-056.png

Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-057.png

Fitur serupa adalah fungsi textbox().

Lebar secara default adalah lebar maksimal dari baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-058.png

Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-059.png

Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-060.png

LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.

Perhatikan, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).

Dalam plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-061.png

Seringkali, kami menginginkan spasi dan label teks non-konformal pada sumbu x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.

Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Dalam contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-062.png

Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

```
>function map f(x) ...
```

```
  if x>0 then return x^4
  else return x^2
  endif
  endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, itu tidak perlu. Tetapi untuk mendemonstrasikan vektorisasi itu berguna, kami menambahkan beberapa poin kunci ke plot di x=-1, x=0 dan x=1.

Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya akan dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-063.png

Interaksi Pengguna

Saat memplot fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna dapat

- perbesar dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali

Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.

Saat memplot data, flag >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-064.png

```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-065.png

Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu event mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, mouse dipindahkan atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita interpolasi dalam 5 titik dengan polinomial. Fungsi harus diplot ke area plot tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.

Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret poin.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-066.png

Ada juga fungsi, yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.

Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita membutuhkan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional baris judul.

Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-067.png

Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor derajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
  plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
  plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
  textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
  endfunction
```

Sekarang kami mengizinkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 pemberhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-068.png

Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak poin.

```
>function dragtest ...
```

```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-069.png

Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame ke warna biru.

Jika Anda ingin centang sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-070.png

Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-071.png

Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-072.png

Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

$$x^3 - x$$

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-073.png

Ada juga kotak teks.

```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-074.png

```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-075.png

```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-076.png

Untuk kontrol lebih, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.

Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-077.png

Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-078.png

Merencanakan Data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat x dan y dari suatu kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Atau, >persegi dapat diatur untuk menjaga rasio aspek persegi.

Memplot ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai-x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis campuran dan titik gunakan ">tambahan".

Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.

- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.

Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-079.png

Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan poin=true untuk ini. Plotnya bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudut-sudutnya.

- style="...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[]", "< >", "o", "..", "", "|".

Untuk memplot set poin gunakan >points. Jika warna adalah vektor warna, setiap titik
mendapat warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-080.png

```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-081.png

Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data benar-benar poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.

- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.

Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali yang default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-082.png

Dalam contoh berikut kami memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-083.png

```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-084.png

```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-085.png

Contoh lainnya adalah segi empat, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-086.png

Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-087.png

Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kami sekarang memiliki vektor x dan y nilai. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini menghasilkan hasil yang bagus karena aturan lilitan, yang digunakan untuk isi.

```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-088.png

Sebuah vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai daerah terisi
antara nilai interval bawah dan atas.

Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa
juga digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-089.png

Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi dalam bidang. Gaya isian sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-090.png

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-091.png

Kita juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-093.png

```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-094.png

Grafik Fungsi Parametrik

Nilai-x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik fungsi.

Dalam contoh berikut, kita memplot spiral

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-096.png

Atau, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-097.png

```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-098.png

Dalam contoh berikutnya, kita memplot kurva

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-101.png

Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Array bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan terhubung. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.

Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai kisi di bidang kompleks.

Dalam contoh berikut, kami memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-102.png

```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-103.png

```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-104.png

Sebuah vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian real dan bagian imajiner.

Dalam contoh, kita memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-106.png

Plot Statistik

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.

Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi 0-1-normal menghasilkan jalan acak.

```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-107.png

Menggunakan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-108.png

```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-109.png

Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-110.png

```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-111.png

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-112.png

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-113.png

```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-114.png

```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-115.png

Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-116.png

Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-117.png

Fungsi statplot() menyetel gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-118.png

```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-119.png

Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Bilah akan memanjang dari x[i] ke x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.

Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-120.png

Data untuk plot batang (bar=1) dan histogram (histogram=1) dapat dinyatakan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >genap ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-121.png

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-122.png

```
>columnsplot(m,k):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-123.png

```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-124.png

Untuk distribusi, ada parameter distribusi=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-125.png

Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval integer.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-126.png

Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik, yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-127.png

```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-128.png

Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali kisaran 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-129.png

Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan f(x,y)=level, di mana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level="auto", akan ada garis level nc, yang akan menyebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi dari parameter x dan y, atau, sebagai alternatif, xv dapat berupa matriks nilai.

Euler dapat menandai garis level

$$f(x,y)=c$$

dari fungsi apapun.

Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya di dalam bidang. Parameter untuk c adalah level=c, di mana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi untuk setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-131.png

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-132.png

```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-133.png

```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-134.png

Ini berfungsi untuk plot data juga. Tetapi Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-135.png

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-136.png

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-137.png

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-138.png

```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-139.png

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-140.png

```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-141.png

Juga dimungkinkan untuk mengisi set

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

dengan rentang tingkat.

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-143.png

Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Kemudian level harus berupa matriks 2xn dari interval level, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua adalah akhir dari setiap interval. Atau, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-144.png

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-145.png

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-146.png

```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-147.png

Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>  style="#",color=red,<outline, ...
>  level=[-2;0],n=100):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-149.png

Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-151.png

```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
  endfunction
```

Tidak ada kotak atau sumbu kutu di sini. Selain itu, kita menggunakan jendela penuh untuk plot.

Kita memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu, jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-152.png

Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang tidak dapat dilakukan plot2d, tetapi hampir.

Dalam fungsi berikut, kita melakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-153.png

Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke jendela plot. setplot(a,b,c,d) mengatur jendela ini.

Fungsi wait(0) memaksa plot untuk muncul di jendela grafik. Jika tidak, menggambar ulang terjadi dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
```

```
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
  end;
  framecolor(c);
  linewidth(l);
  endfunction
```

Tekan sembarang tombol untuk menghentikan animasi ini.

```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

```
Function animliss not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER ...
             ^
```

Plot Logaritmik

EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritma dapat diplot baik menggunakan skala logaritma dalam y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma dalam x dan y dengan logplot=2, atau dalam x dengan logplot=3.

```
- logplot=1: y-logaritma
- logplot=2: x-y-logaritma
- logplot=3: x-logaritma
```

```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-154.png

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-155.png

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-156.png

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-157.png

```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-158.png

Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-159.png

Rujukan Lengkap Fungsi plot2d()

function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n, ..
logplot, grid, frame, framecolor, square, color, thickness, style, ..
auto, add, user, delta, points, addpoints, pointstyle, bar, histogram, ..
distribution, even, steps, own, adaptive, hue, level, contour, ..
nc, filled, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral, ..
cgrid, vertical, smaller, dl, niveau, levels)

Multipurpose plot function for plots in the plane (2D plots). This function can do plots of functions of one variables, data plots, curves in the plane, bar plots, grids of complex numbers, and implicit plots of functions of two variables.

Parameters

x,y : equations, functions or data vectors
a,b,c,d : Plot area (default a=-2,b=2)
r : if r is set, then a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r can be a vector [rx,ry] or a vector [rx1,rx2,ry1,ry2].
```

xmin,xmax : range of the parameter for curves
auto : Determine y-range automatically (default)
square : if true, try to keep square x-y-ranges
n : number of intervals (default is adaptive)
grid : 0 = no grid and labels,

```
1 = axis only,
2 = normal grid (see below for the number of grid lines)
3 = inside axis
4 = no grid
5 = full grid including margin
6 = ticks at the frame
7 = axis only
8 = axis only, sub-ticks
```

frame : 0 = no frame
framecolor: color of the frame and the grid
margin : number between 0 and 0.4 for the margin around the plot
color : Color of curves. If this is a vector of colors,

```
it will be used for each row of a matrix of plots. In the
```

case of

```
point plots, it should be a column vector. If a row vector
```

or a

```
full matrix of colors is used for point plots, it will be
```

used for

```
each data point.
```

thickness : line thickness for curves

```
This value can be smaller than 1 for very thin lines.
```

style : Plot style for lines, markers, and fills.

```
For points use
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (filled shapes)
"[]w", "<>w", "ow" (non-transparent)
For lines use
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
For filled polygons or bar plots use
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

points : plot single points instead of line segments
addpoints : if true, plots line segments and points
add : add the plot to the existing plot
user : enable user interaction for functions
delta : step size for user interaction
bar : bar plot (x are the interval bounds, y the interval values)
histogram : plots the frequencies of x in n subintervals
distribution=n : plots the distribution of x with n subintervals
even : use inter values for automatic histograms.
steps : plots the function as a step function (steps=1,2)
adaptive : use adaptive plots (n is the minimal number of steps)
level : plot level lines of an implicit function of two variables
outline : draws boundary of level ranges.

If the level value is a 2xn matrix, ranges of levels will be drawn in the color using the given fill style. If outline is true, it will be drawn in the contour color. Using this feature, regions of f(x,y) between limits can be marked.

hue : add hue color to the level plot to indicate the function value
contour : Use level plot with automatic levels
nc : number of automatic level lines
title : plot title (default "")
xl, yl : labels for the x- and y-axis
smaller : if >0, there will be more space to the left for labels.
vertical :

```
Turns vertical labels on or off. This changes the global variable
verticallabels locally for one plot. The value 1 sets only vertical
text, the value 2 uses vertical numerical labels on the y axis.
```

filled : fill the plot of a curve
fillcolor : fill color for bar and filled curves
outline : boundary for filled polygons
logplot : set logarithmic plots

```
1 = logplot in y,
2 = logplot in xy,
3 = logplot in x
```

own :

```
A string, which points to an own plot routine. With >user, you get
the same user interaction as in plot2d. The range will be set
before each call to your function.
```

maps : map expressions (0 is faster), functions are always mapped.
contourcolor : color of contour lines
contourwidth : width of contour lines
clipping : toggles the clipping (default is true)
title :

```
This can be used to describe the plot. The title will appear above
the plot. Moreover, a label for the x and y axis can be added with
xl="string" or yl="string". Other labels can be added with the
functions label() or labelbox(). The title can be a unicode
string or an image of a Latex formula.
```

cgrid :

```
Determines the number of grid lines for plots of complex grids.
Should be a divisor of the the matrix size minus 1 (number of
subintervals). cgrid can be a vector [cx,cy].
```

Overview

```
The function can plot
```

- expressions, call collections or functions of one variable,
- parametric curves,
- x data against y data,
- implicit functions,
- bar plots,
- complex grids,
- polygons.

If a function or expression for xv is given, plot2d() will compute values in the given range using the function or expression. The expression must be an expression in the variable x. The range must be defined in the parameters a and b unless the default range should be used. The y-range will be computed automatically, unless c and d are specified, or a radius r, which yields the range
r,r
for x and y. For plots of functions, plot2d will use an adaptive evaluation of the function by default. To speed up the plot for complicated functions, switch this off with <adaptive, and optionally decrease the number of intervals n. Moreover, plot2d() will by default use mapping. I.e., it will compute the plot element for element. If your expression or your functions can handle a vector x, you can switch that off with <maps for faster evaluation.

Note that adaptive plots are always computed element for element. If functions or expressions for both xv and for yv are specified, plot2d() will compute a curve with the xv values as x-coordinates and the yv values as y-coordinates. In this case, a range should be defined for the parameter using xmin, xmax. Expressions contained in strings must always be expressions in the parameter variable x.

1. Nilai fungsi berikut ketika x nya bernilai 4 adalah?

$$f(x) = 2x + 4$$

```
>plot2d("2*x+4",0,5):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-161.png

Dari grafik tersebut terlihat bahwa ketika x bernilai 4 maka fungsi tersebut bernilai 12.
2. Gambarkan grafik fungsi trigonometri berikut

$$f(x) = sin(x) + cos(x)$$

```
>plot2d("sin(x)+cos(x)",-1,2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-163.png

Dari grafik di atas terlihat bahwa ketika x bernilai 90 derajat, maka fungsi tersebut bernilai 1.

3. Berapa nilai fungsi berikut ketika x nya bernilai 2

$$f(x) = 2^x + 4$$

```
>plot2d("2^x+4",0,3):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-165.png

Dari grafik di atas terlihat bahwa ketika x bernilai 2 maka fungsi tersebut bernilai 8.

4. Berapa nilai fungsi berikut ketika x nya bernilai 1

$$f(x) = x^2 + 2 * x + 4$$

```
>plot2d("x^2+2*x+4",0,2):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-167.png

Dari grafik di atas terlihat bahwa ketika x bernilai 1 maka fungsi tersebut bernilai 7.

5. Gambarkan grafik fungsi logaritma berikut

$$f(x) = log x^2$$

```
>plot2d("log(x^2)",0,4):
```

images/KB Pekan 5&6_Nisrina Octaviani_22305144011-169.png

Dari grafik di atas terlihat bahwa ketika x bernilai 10 maka fungsi tersebut bernilai 2.

BAB 4

KB PEKAN 7-8: PENGGUNAAN SOFTWARE EMT UNTUK PLOT 3D

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Nisrina Octaviani
NIM : 22305144011
Kelas : Matematika B 2022

Menggambar Plot 3D dengan EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah.

Euler dapat merencanakan
- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

```
>aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-001.png

Fungsi dua Variabel

Untuk grafik fungsi, gunakan

- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabel
- atau matriks data.

Standarnya adalah kotak kawat yang diisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah default interval grid adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default 40x40 persegi panjang untuk membangun permukaan. Ini bisa diubah.

- n=40, n=[40,40]: jumlah garis grid di setiap arah
- grid=10, grid=[10,10]: jumlah garis grid di setiap arah.

Kita menggunakan default n=40 dan grid=10.

```
>plot3d("x^2+y^2"):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-002.png

Interaksi pengguna dimungkinkan dengan >parameter pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.

- kiri, kanan, atas, bawah: putar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya (lihat di bawah)

- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-003.png

Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan

- a,b: rentang-x
- c,d: rentang-y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.

fscale: skala ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
scale: angka atau vektor 1x2 untuk skala ke arah x dan y.
frame: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-004.png

Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.

- distance: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- angle: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- height: ketinggian pandangan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

```
>view
```

```
  [5,  2.6,  2,  0.4]
```

Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.

Dalam contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 terlihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-005.png

Plot terlihat selalu ke pusat kubus plot. Anda dapat memindahkan pusat dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-006.png

Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung pada ukuran plot. Namun, label mengacu pada ukuran sebenarnya.

Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda perlu berhati-hati, bahwa plot masih cocok dengan jendela plot, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan pusat.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>  center=[0,0,-2],frame=3):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-007.png

Sebuah plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot polar. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skala sendiri. Jika tidak, fungsi diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-008.png

```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=2pi,frame=3,zoom=4):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-009.png

Rotasi parameter memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.

- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-010.png

Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-011.png

Plot Kontur

Untuk plot, Euler menambahkan garis grid. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/sian.

-> hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.

-> conture: Memplot garis kontur otomatis pada plot.

- level=... (atau level): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.

Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.

Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-012.png

```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-013.png

Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.

-> spectral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral

Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-014.png

Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=220°,level=-1:0.2:1,color=redgreen):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-015.png

Dalam plot berikut, kita menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.

Selain itu, kita melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>  >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-016.png

Dalam contoh berikut, kita memplot himpunan, di mana

$$f(x,y)=x^y-y^x=0$$

Kita menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-017.png

Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-018.png

Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kita selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan grid.

```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-019.png

Ada beberapa skema spektral lainnya, bernomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai

- spectral: untuk rentang dari biru ke merah
- white: untuk rentang yang lebih redup
- yellowblue,purplegreen,blueyellow,greenred
- blueyellow, greenpurple,yellowblue,redgreen

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-020.png

Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.

- light: arah untuk cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l  and cursor keys (return to exit)"):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-021.png

Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>  zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-022.png

Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-023.png

Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-024.png

Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot-plot ini menunjukkan himpunan nol dari suatu fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x, y, z) = 0$$

dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang x-y-, x-z- dan y-z.

- implisit=1: potong sejajar dengan bidang y-z
- implisit=2: potong sejajar dengan bidang x-z
- implisit=4: potong sejajar dengan bidang x-y

Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda suka. Dalam contoh kita plot

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 + zy = 1\}$$

```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-027.png

```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-028.png

Merencanakan Data 3D

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melalui sebuah kotak persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.

Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.

Dalam contoh berikut, kita menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-030.png

Berikut adalah contoh, yang merupakan grafik fungsi.

```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-031.png

Namun, kita bisa membuat segala macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama dengan fungsi

$$x = y\,z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-033.png

Dengan lebih banyak usaha, kita dapat menghasilkan banyak permukaan.

Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t,s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kita mendistorsi ini dengan sebuah faktor

$$d(t,s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)’; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-037.png

Tentu saja, titik cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.

Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-038.png

Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva. Untuk kurva di pesawat kita menggunakan urutan koordinat dan parameter wire=true.

```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-039.png

```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-040.png

```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-041.png

EMT juga dapat memplot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata merah/sian.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-042.png

Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsi.

```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-043.png

Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, ketika parameternya adalah nilai x-, y-, dan z dari gambar kotak persegi panjang dalam ruang.

Untuk demo berikut, kita mengatur parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-044.png

Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/sian.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-045.png

Plot Statistik

Plot bar juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan

- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.

Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-046.png

Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua atau lebih bagian.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-047.png

Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-048.png

```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-049.png

Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-050.png

```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kita ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut adalah ungkapan, yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

$$x=r.cos(a),\quad y=r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-055.png

Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kita mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-056.png

Plot 3D Khusus

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka.

Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kita mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=0:0.01:1; x=(0.1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan frame, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[0.1,1,0,1,0,1],angle=-45°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=6):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-057.png

Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() menyetel jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() mengasumsikan itu.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-058.png

Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk menghitung animasi terlebih dahulu.

Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya itu menjiwai plot.

Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-059.png

Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.

Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/, dan meletakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke jalur lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan path lengkap yang menunjuk ke "pvengine.exe".

Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().

Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.

Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.

Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.

Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, a nd x,y,z sumbu dalam arti tangan kanan.
Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori bin Povray ada di jalur. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.

Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog awal Povray.

```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-060.png

Kita dapat membuat fungsi menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kami juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=20°, ...
>  look=povlook(blue,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-061.png

Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan.

Kita memplot himpunan titik di bidang kompleks, di mana produk dari jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=1.5, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-062.png

Merencanakan dengan Koordinat

Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.

Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-063.png

Dalam contoh berikut, kita memplot gelombang teredam. Kita menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.

Kita juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...
>  w=500,h=300);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-064.png

Dengan metode bayangan canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.

Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

```
                                 2  3
                                x  y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kita menghitung dua turunan ke x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

Kita mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

```
                               3         2  2
                        [- 2 x y , - 3 x  y , 1]
```

Kita hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-065.png

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

Lihat: Contoh\Trefoil Simpul | Simpul trefoil

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kita menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kita sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(parameters). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(gray), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-066.png

Kita juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-067.png

Dengan povgrid(), kurva dimungkinkan.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-068.png

Objek Povray

Di atas, kita menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray.

Kita memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.

Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(green)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c1
```

```
  cylinder { <-1,0,0>, <1,0,0>, 1
   texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451> }  }
   finish { ambient 0.2 }
   }
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.

Itu dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kami juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

```
   texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
   finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan, jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-069.png

Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.

Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
    if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
    else
      h=h/3;
      fractal(x,y,z,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
      fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
      fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
      fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
    endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-070.png

Perbedaan memungkinkan memotong satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kita mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi ditulis ke file segera.

Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita dapat menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kita menghasilkan kubus kedua, dan memutar dan menskalakannya sedikit.

```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-071.png

Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.

Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-072.png

Objek Jala

Dalam contoh ini, kita menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.

Kita ingin memaksimalkan xy di bawah kondisi x+y=1 dan menunjukkan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kita tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Itu dapat menerima vektor normal seperti pov3d().

Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaan dikurangi dua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tulis dua persimpangan.

```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis titik maksimum.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-073.png

Anaglyph di Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/sian, Povray harus berjalan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().

Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.

Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglyphs.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-074.png

Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-075.png

Mendefinisikan Objek sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Tapi Anda tidak terbatas pada ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau objek yang sama sekali baru.

Kami mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kita mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Inilah torus pertama kita.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
  torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
object { torus {0.8,0.2}
 rotate 90 *x
 translate <0.8,0,0>
 }
```

Sekarang kita menempatkan objek-objek ini ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilan, kita menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

>povend();

memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, itu tidak menampilkan kesalahan. Karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<keluar);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-076.png

Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kita memecahkan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \to \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini memiliki solusi sama sekali.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,   1,   0.5]
```

Ya, sudah.

Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
    return povplane(a,b,look)
  endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan persimpangan dari semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
    ol=[];
    loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
    ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
    return povintersection(ol,look);
  endfunction
```

Kita sekarang dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah yang optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kita menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya menurut pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=125°)); ...
>povend();
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-079.png

Lebih Banyak Contoh

Anda dapat menemukan beberapa contoh lagi untuk Povray di Euler di file berikut.

Lihat: Examples/Dandelin Spheres
Lihat: Examples/Donat Math
Lihat: Examples/Trefoil Knot
Lihat: Examples/Optimization by Affine Scaling

Contoh Soal

1. Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

```
>plot3d("2*x^2+3*y^2",n=40,grid=2):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-081.png

2. Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x,y)=\frac{\sin x\sin y}{xy}$$

```
>function m(x,y):=(sin(x)*sin(y))/x*y;
>plot3d("m",r=10,angle=90°,fscale=-1,>user,>polar,color=red,>hue):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-083.png

3. Gambarkan grafik fungsi logaritma dua variabel berikut.

$$g(x,y)=log(x.2y)$$

basis 10

```
>function g(x,y)&=log(x*2*y);
>plot3d("g"):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-085.png

4. Buatlah animasi plot 3D dari fungsi

$$x^3 + y^2$$

```
>plot3d("exp(-(x^3+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3,>user):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-087.png

5. Gambarlah grafik dari fungsi berikut.

$$f(x, y) = 8 - x$$

```
>function h(x,y):=8-x;
>plot3d("h"):
```

images/KB Pekan 7&8_Nisrina Octaviani_22305144011-089.png

BAB 5

KB PEKAN 9-10: MENGGUNAKAN EMT UNTUK KALKULUS

[a4paper,10pt]article eumat

Aplikasi Komputer

Nama : Nisrina Octaviani
NIM : 22305144011
Kelas: Matematika B 2022

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
   ^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
    ^
```

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534,  0.987596,  0.987657,  0.987718,  0.987778,  0.987837,
0.987896,  0.987954,  0.988012,  0.988069,  0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \le 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
  endfunction
```

```
>f(1)
```

```
  1
```

```
>f(-2)
```

```
  4
```

```
>f(-5:5)
```

```
  [25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-006.png

```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                                    x
                                 2 E
```

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2\,e^{a}$$

```
>f(E)
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E)
```

$$2\,e^{e}$$

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
                                 3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
                                   3 x + 1
                                2 E
```

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-009.png

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-sungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi - komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Nomor 1

$$a(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

```
>function a(x) &= (x^3+4*x^2+5*x-6) // fungsi simbolik
```

```
 3      2
x  + 4 x  + 5 x - 6
```

```
>function a(x) := (x^3+4*x^2+5*x-6) // fungsi numerik
>a(5)
```

```
244
```

```
>a(-5:5)
```

```
[-56,  -26,  -12,  -8,  -8,  -6,  4,  28,  72,  142,  244]
```

```
>aspect(2); plot2d("a(x)",-5,5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-011.png

Nomor 2

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

```
>function g(x) := (sqrt(x^2+4)) // fungsi numerik
>g(2)
```

```
2.82842712475
```

```
>g=(-2:2)
```

```
[-2,  -1,  0,  1,  2]
```

```
>aspect(2); plot2d("g(x)",-2,2):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-012.png

Nomor 3

$$d(x) = \frac{x^3 + 2}{3x}$$

```
>function d(x) := ((x^3+2)/(3*x)) // fungsi numerik
>d(4)
```

```
5.5
```

```
>d=(-4:4)
```

```
[-4,  -3,  -2,  -1,  0,  1,  2,  3,  4]
```

```
>aspect(2); plot2d("d(x)",-4,4):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-013.png

Nomor 4

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = \sin x$$

```
>function f(x) &= (cos(x)) // fungsi numerik
```

cos(x)

```
>f(pi)
```

-1

```
>f(2*pi)
```

1

```
>function g(x) &= (sin(x)) // fungsi numerik
```

sin(x)

```
>g(pi)
```

0

```
>g(2*pi)
```

0

```
>f(g(pi)) // komposisi fungsi
```

```
1
```

```
>g(f(pi))
```

```
-0.841470984808
```

```
>function h(x) &= f(g(pi))
```

$$1$$

```
>plot2d("h(x)",-2,2):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-016.png

Nomor 5

$$e(x) = \begin{cases} -x^2+4 & x \leq 1 \\ 3x & x > 1. \end{cases}$$

```
>function map e(x) ...
```

```
if x<=1 then return -x^2+4
else return 3*x
endif;
endfunction
```

```
>e(5)
```

```
15
```

```
>e=(-5:5)
```

```
[-5,  -4,  -3,  -2,  -1,  0,  1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>aspect(2); plot2d("e(x)",-5,5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-017.png

Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und' (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x\rightarrow\infty}{\frac{\sqrt{x^2-3\,x}}{x+1}}=1$$

```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\rightarrow 3}{\frac{x^3-13\,x^2+51\,x-63}{x^3-4\,x^2-3\,x+18}}=-\frac{4}{5}$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-021.png

```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

$$2\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\,\sin x}{1-\cos x}\right)=4$$

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-024.png

```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-026.png

```
>$showev('limit(((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8))
```

$$\lim_{x\to 8}\frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2}-1}{x-8}=\frac{1}{24}$$

```
>aspect(1.5); plot2d("((x/8)^(1/3)-1)/(x-8)",-1,1); plot2d(8,1/24,>points,style="ow",>add)
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-028.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\,x-1} = -1$$

```
>plot2d("1/(2*x-1)",-2,2); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-030.png

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-3\,x-10}{x-5} = 7$$

```
>plot2d("(x^2-3*x-10)/(x-5)",-8,8); plot2d(5,7,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-032.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$$

```
>plot2d("(sqrt(x^2+x)-x)",-1,1); plot2d(0,1/2,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-034.png

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 1}\frac{|x-1|}{x-1}=-1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-037.png

```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{\sin x^3}{x}}=0$$

```
>plot2d("sin(x^3)/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-039.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\to -\infty }{\log x}={\it infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}(-2)^{x}=\mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2}t-\sqrt{2-t}=2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5}t-\sqrt{2-t}=5-\sqrt{3}\,i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-044.png

```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}=\frac{6}{7}$$

```
>plot2d("(x^2-9)/(2*x^2-5*x-3)",-1,1); plot2d(3,6/7,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-046.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{1-\cos x}{x}}=0$$

```
>plot2d("(1-cos(x))/x",-pi,pi); plot2d(0,0,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-048.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{|x|+x^2}{x^2-|x|}}=-1$$

```
>plot2d("(x^2+abs(x))",-pi,pi); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-050.png

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-052.png

```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}}=e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}}=e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}{\frac{e^{x}-e^2}{x-2}}=e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\sin \left(\frac{1}{x}\right)}=ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\sin \left(\frac{1}{x}\right)}=0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-059.png

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

Nomor 1

```
>$showev('limit((x^2+2*x-1),x,2))
```

$$\lim_{x\rightarrow 2}{x^2+2\,x-1}=7$$

```
>$showev('limit((x^2+2*x-1),x,4))
```

$$\lim_{x\rightarrow 4}{x^2+2\,x-1}=23$$

```
>$showev('limit((x^2+2*x-1),x,inf))
```

$$\lim_{x\rightarrow \infty }{x^2+2\,x-1}=\infty$$

```
>plot2d("(x^2+2*x-1)",-8,8); plot2d(2,7,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-063.png

Nomor 2

```
>$showev('limit((x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=-1$$

```
>$showev('limit((x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,1))
```

$$\lim_{x\to 1}{\frac{x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=2$$

```
>$showev('limit((x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\frac{x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=\infty$$

```
>plot2d("(x^4 + 2*x^3 - x^2)",-1,1); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-067.png

Nomor 3

```
>$showev('limit(sqrt(3*x-5),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\sqrt{3\,x-5}}=\infty$$

```
>$showev('limit(sqrt(3*x-5),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\sqrt{3\,x-5}}=\sqrt{5}\,i$$

```
>$showev('limit(sqrt(3*x-5),x,2))
```

$$\lim_{x\rightarrow 2}{\sqrt{3\,x-5}}=1$$

```
>plot2d("sqrt(3*x-5)",-5,5); plot2d(2,1,>points,style="ow",>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-071.png

Nomor 4

```
>$showev('limit(((x^2)+(2*x)),x,0,plus))
```

$$\lim_{x\downarrow 0}{x^2+2\,x}=0$$

```
>$showev('limit(((x^2)+(2*x)),x,2,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 2}{x^2+2\,x}=8$$

```
>$showev('limit(((x^2)+(2*x)),x,inf))
```

$$\lim_{x\rightarrow \infty }{x^2+2\,x}=\infty$$

```
>plot2d("((x^2)+(2*x))",0,8):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-075.png

Nomor 5

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1-\cos x}{x^2}=0$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{4}-\frac{\cos 2}{4}$$

```
>plot2d("(1-cos(x))/x^2",-5,5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-079.png

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\, x^{n-1}$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2\, h\, x + h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2\, x + h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2\, x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n\, x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk

$$f(x) = x^n$$

maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + ...) - x^n}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{n.x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + ...}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}.x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.x^{n-3}h^2 + ...$$

$$f'(x) = n.x^{n-1} + 0 + 0 + ... + 0$$

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n.x^{n-1}$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk

$$f(x) = sin(x)$$

maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x)cos(h) + cos(x)sin(h) - sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x)(cos(h) - 1) + cos(x)sin(h)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} sin(x).\frac{cos(h) - 1}{h} + \lim_{h\to 0} cos(x).\frac{sin(h)}{h}$$

$$f'(x) = sin(x).0 + cos(x).1$$

$$f'(x) = cos(x)$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} = cos(x)$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log (x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut
benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

untuk

$$f(x) = log(x)$$

maka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log(x+h) - log(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} log(\frac{x+h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} log(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = log \lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x) = loge^{\frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}loge$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Jadi, terbukti bahwa

$$\lim_{h\to 0}\frac{log(x+h)-log(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0))// turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
 $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0))// turunan f(x)=e^x ...
                                     ^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{e^{h}-1}{h}}=1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$factor\left(e^{x+h}-e^{x}\right)=\left(e^{h}-1\right)\,e^{x}$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}{\frac{e^{h}-1}{h}}\right)\,e^{x}=e^{x}$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                               x
                              x
```

Silakan Anda gambar kurva

$$y=x^x.$$

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}=infinity$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{x+h}-x^{x}}{h}}=x^{x}\,\left(\log x+1\right)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar.
Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

[x > 0]

```
>&forget(x<0)
```

[x < 0]

```
>&facts()
```

[]

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar.
Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar.
Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

sinh(x)

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-130.png

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                       2      5
                    sin  (3 x  + 7)
```

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan diff dan diffc?

diff adalah fungsi diferensiasi numerik yang menghitung turunan suatu fungsi tertentu menggunakan perbedaan hingga. Ini dapat digunakan untuk memperkirakan turunan suatu fungsi pada titik tertentu atau pada interval.

diffc adalah fungsi diferensiasi numerik lain yang menghitung turunan dari fungsi tertentu menggunakan diferensiasi langkah kompleks. Ini lebih akurat daripada diff dan dapat digunakan untuk menghitung turunan suatu fungsi pada titik tertentu atau pada interval.

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right)=30\,x^4\,\cos\left(3\,x^5+7\right)\,\sin\left(3\,x^5+7\right)$$

```
>$% with x=3
```

$$\%at\left(\frac{d}{d\,x}\,\sin^2\left(3\,x^5+7\right),x=3\right)=2430\,\cos 736\,\sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at\left(\frac{d^{1.0}}{d\,x^{1.0}}\,\sin^2\left(3.0\,x^5+7.0\right),x=3.0\right)=1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-134.png

```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendifinisikan fungsi f
```

```
5 cos(2 x) - 2 x sin(2 x)
```

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

```
- 12 sin(2 x) - 4 x cos(2 x)
```

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$-0.2410081230863468$$

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_2230514401

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_2230514401

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_2230514401

```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

```
1.35822987384
```

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

```
0
-5.67530133759
```

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-139.png

Perhatikan titik-titik "puncak" grafik y=f(x) dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Nomor 1

```
>function f(x) := cos(x^2)
>$showev('limit((cos((x+h)^2)- cos(x^2))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\cos \left(x+h\right)^2-\cos x^2}{h}}=-2\,x\,\sin x^2$$

```
>plot2d(["f(x)","f(x)"], -pi, pi, color=[green,red]):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-141.png

Nomor 2

```
>function f(x) := sqrt(x^2+6)
>$showev('limit((sqrt((x+h)^2+6)-sqrt(x^2+6))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\rightarrow 0}{\frac{\sqrt{\left(x+h\right)^2+6}-\sqrt{x^2+6}}{h}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,red]):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-143.png

Nomor 3

```
>function f(x) :=(2-x)^4
>$showev('limit(((2-(x+h))^4-(2-x)^4)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(-x-h+2\right)^4-\left(2-x\right)^4}{h}=4\,x^3-24\,x^2+48\,x-32$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,red]):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-145.png

Nomor 4

```
>function f(x) :=2*sin(x)+3*cos(x)
>$showev('limit((2*sin(x+h)+3*cos(x+h)-(2*sin(x)+3*cos(x)))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\,\sin\left(x+h\right)+3\,\cos\left(x+h\right)-2\,\sin x-3\,\cos x}{h}=2\,\cos x-3\,\sin x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,red]):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-147.png

Nomor 5

```
>function f(x) :=5*x-4
>$showev('limit(((5*(x+h)-4)-(5*x-4))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\,(x+h)-5\,x}{h}=5$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,red]):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-149.png

Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log(x+1)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b}{\sin x\;dx}=\cos a-\cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b}{x^{n}\;dx}=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int {x^2\,\sqrt{2\,x+1}}{\;dx}=\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin \left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
                    2
                 - x
                E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x)=\int\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2}\,dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-166.png

Integral tentu

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2}\,dx$$

dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

$$\int_{0}^{\pi}e^{-x^2}\,dx = 0.8362196102528469$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

```
>function f(x) &= x^x
```

```
 x
x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}x^{x}\,dx = \int_{0}^{1}x^{x}\,dx$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-171.png

Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

$$\int_0^1 x^x\,dx = 0.7834935879025506$$

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                              2     5
                           sin  (3 x  + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
 0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

```
          1                          1               pi
          /                    gamma(-) sin(14) sin(--)
          [      2     5             5               10
          I   sin  (3 x  + 7) dx = ------------------------
          ]                                     1/5
          /                                 10 6
          0
         4/5                  1          4/5                  1
   - (((6    gamma_incomplete(-, 6 I) + 6    gamma_incomplete(-, - 6 I))
```

```
                              5                               5
            4/5                      1
   sin(14) + (6    I gamma_incomplete(-, 6 I)
                                     5
      4/5                     1                          pi
   - 6    I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--) - 60)/120
                              5                          10
```

```
>&float(%)
```

```
              1.0
             /
             [        2      5
             I     sin (3.0 x  + 7.0) dx =
             ]
             /
              0.0
  0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
   (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
   (4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
   - 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
   + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
   + 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1}{x\,e^ {- x }\;dx}=1-2\,e^ {- 1 }$$

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  ...
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurv
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-174.png

```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksa
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{5}-1}{2} , x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} , x=0\right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
```

$$\int_{0}^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{-x^3-x^2+x\;dx}=\frac{13-5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949}{-1.0\,x^3-1.0\,x^2+x\;dx}=0.07581917135421037$$

Panjang Kurva

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahul
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-180.png

```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$$r\left(t\right)=\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1$$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=\cos t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=\sin t\,\left(\frac{\sin \left(3\,t\right)}{2}+1\right)$$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2)));  $'ds(t)=ds(
```

$$ds\left(t\right)=\frac{\sqrt{4\,\cos\left(6\,t\right)+4\,\sin\left(3\,t\right)+9}}{2}$$

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

$$\frac{\int_{0}^{2\,\pi}{\sqrt{4\,\cos\left(6\,x\right)+4\,\sin\left(3\,x\right)+9}\;dx}}{2}$$

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.
Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
9.0749467823
```

Spiral Logaritmik

$$x=e^{ax}\cos x,\;y=e^{ax}\sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-187.png

```
>&kill(a) // hapus expresi a
```

done

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx\left(t\right)=e^{a\,t}\,\cos t$$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy\left(t\right)=e^{a\,t}\,\sin t$$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t
```

$$df\left(t\right)=\sqrt{a^2+1}\,e^{a\,t}$$

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S // panjang kurva (spiral)
```

$$\sqrt{a^2+1}\,\left(\frac{e^{2\,\pi\,a}}{a}-\frac{1}{a}\right)$$

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

```
8.78817491636
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah K=2.pi.r.
Akan ditunjukan persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dan berjari-jari R dalam koordinat kartesius adalah

$$x^2+y^2=R^2$$

(1)

Dengan menentukan turunan implisit dari persamaan (1), diperoleh

$$2xdx+2ydy=0(2)$$

jika hanya jika

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Keliling lingkaran adalah empat kali panjang kurva pada interval [0, R]. Dengan demikian, rumus keliling lingkaran dengan pusat (0,0) menggunakan integral dalam koordinat kartesius ditentukan sebagai berikut.

$$\frac{1}{4}K = \int_{0}^{R} \ \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \ dx$$

atex: = \int_{0}^{R} \ \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} \ dx (3)
Dengan menyubstitusikan (1) dan (2) ke dalam persamaan (3), diperoleh

$$\frac{1}{4}K = \int_{0}^{R} \ \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}} \ dx$$

Dengan memisalkan

$$\frac{x}{R} = sinu,$$

maka

$$dx = Rcosudu$$

$$x = 0$$

$$u = 0$$

dan

$$x = R$$

$$u = \frac{\pi}{2}$$

Oleh karena itu,

$$\frac{1}{4}K = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ \frac{1}{\sqrt{1-sin^2u}} Rcosu \ du$$

$$= \frac{1}{2}\pi R$$

sehingga rumus keliling lingkaran adalah
latex: K=2\pi R
Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-205.png

```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^{1}{\sqrt{4\,x^2+1}\;dx}=\frac{\mathrm{asinh}\;2+2\,\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0}{\sqrt{4.0\,x^2+1.0}\;dx}=2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  ...
>  plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-208.png

Panjang tersebut dapat dihampiri dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

$$y^3 - 3\,x\,y + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-211.png

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-212.png

Kita selesaikan persamaannya untuk x.

```
>$z with y=l*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x=\frac{3\,l}{l^3+1} , x=0\right]$$

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f\left(l\right)=\frac{3\,l}{l^3+1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai y=l*x, yakni x=f(l) dan y=l*f(l).

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-216.png

Elemen panjang kurva adalah:

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds\left(l\right)=\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}$$

```
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

$$\int_{0}^{1}{\frac{\sqrt{9\,l^8+36\,l^6-36\,l^5-36\,l^3+36\,l^2+9}}{\sqrt{l^{12}+4\,l^9+6\,l^6+4\,l^3+1}}\;dl}$$

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral etrsebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di datas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-220.png

```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
                 2               2
sqrt(diff (fy, x) + diff (fx, x))
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhi
```

$$\sqrt{\left(\cos x-x\,\sin x\right)^2+\left(\sin x+x\,\cos x\right)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\operatorname{asinh}\,\left(2\,\pi\right)+2\,\pi\,\sqrt{4\,\pi^2+1}}{2}$$

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-224.png

```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3\,x\,\sqrt{9\,x^2+4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x\,\sqrt{9.0\,x^2+4.0}\,dx = 2.337835372767141$$

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r. Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

$$(rt, r).$$

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

$$(r(t-\sin(t)), r(1-\cos(t))).$$

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika t=0, t=pi/2, t=r*pi.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
                          r (t - sin(t))
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
                          r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk r=1.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
>  plot2d("2+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2,ex(2)],[1,ey(2)],color=red,>add); ...
>  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
>  plot2d("2pi+cos(x)","1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
>  plot2d([2pi,ex(2pi)],[1,ey(2pi)],color=red,>add);  ...
>  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-230.png

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva s
```

$$\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x-2\,\cos x+1}=\sqrt{2-2\,\cos x}$$

```
>ds &= trigsimp(ds); $ds
```

$$\sqrt{2-2\,\cos x}$$

```
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)) // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
```

$$\int_{0}^{2\,\pi}{\sqrt{2-2\,\cos x}\;dx}=8$$

```
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

```
8
```

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

8

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

$$2\pi.$$

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

$$\kappa = \frac{1}{R}$$

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2pi sejauh 2piR.)
Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s:

$$\gamma(s) = (x(s),\ y(s)),$$

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} = 1.$$

Ini berarti bahwa vektor singgung

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s),\ y'(s))$$

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka T′(s) ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= \gamma'(s), \\ \mathbf{T}^2(s) &= 1 \text{ (konstanta)} \Rightarrow \mathbf{T}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0 \\ \kappa(s) &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}. \end{aligned}$$

Nilai

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

$$k(s) = \pm\kappa(s)$$

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panja
```

```
r t
```

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terha
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan
```

$$\frac{1}{r}$$

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \quad (\phi \text{ adalah sudut kemiringan garis singgung dan } s \text{ adalah panjang kurva}) \\ &= \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}} = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

$$\sec^2\phi\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tan\phi) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{1}{\sec^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2\phi}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}\frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2} \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.\end{aligned}$$

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

$$x = r(\theta)\cos\theta,\ y = r(\theta)\sin\theta,$$

maka rumus kurvaturnya adalah

$$\kappa(\theta) = \frac{r(\theta)^2 + 2r'(\theta)^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r'(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)
Contoh:
Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t.$$

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

$$y = f(x)$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

$$x = t,\ y = f(t),\ \text{ dengan } x'(t) = 1,\ x''(t) = 0,$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Contoh:
Akan ditentukan kurvatur parabola

$$y = ax^2 + bx + c.$$

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
```

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

$$k\left(x\right)=\frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x+b\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

```
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
```

$$y=x^2+x+1$$

```
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan p
```

$$k\left(x\right)=\frac{2}{\left(\left(2\,x+1\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

$$(-1/2,3/4),\ 1/k(2)=1/2,$$

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah (-1/2, 5/4).

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add)
>plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)","5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-262.png

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

$$F(x, y) = 0$$

dengan turunan-turunan parsial

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y},\ F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\ F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),$$

berlaku

$$F_x dx + F_y dy = 0 \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

sehingga kurvaturnya adalah

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{\left(F_x^2 + F_y^2\right)^{3/2}}.$$

(Silakan Anda turunkan sendiri!)
Contoh 1:
Parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

$$ax^2 + bx + c - y = 0.$$

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
```

$$-y + a\,x^2 + b\,x + c$$

```
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y)
```

```
                              2 a x + b

                                 2 a

                                 - 1

                                  0

                                  0
```

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvat
```

$$k\left(x\right)=\frac{2\,a}{\left(\left(2\,a\,x+b\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x)^2\, dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuaian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

Nomor 1

```
>function f(x):=sin(3x)
>$showev('integrate(sin(2*x),x))
```

$$\int \sin\left(2\,x\right)\,dx = -\frac{\cos\left(2\,x\right)}{2}$$

```
>$showev('integrate(sin(2*x),x,0,pi/2))
```

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2\,x\right)\;dx = 1$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-276.png

Nomor 2

```
>function f(x):=sqrt(2*x^3+3*x)
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int x^2+x+1\,dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$$

```
>$showev('integrate(sqrt(2*x^3+3*x),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}\sqrt{2\,x^3+3\,x}\,dx=\int_{0}^{2}\sqrt{2\,x^3+3\,x}\,dx$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-279.png

Nomor 3

```
>function f(x):=(x^5+x)
>$showev('integrate((x^5+x),x))
```

$$\int x^5 + x\,dx = \frac{x^6}{6} + \frac{x^2}{2}$$

```
>$showev('integrate(x^5+5,x,0,3))
```

$$\int_0^3 x^5 + 5\,dx = \frac{273}{2}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-282.png

Nomor 4

```
>function f(x):=cos(2x)
>$showev('integrate(cos(2*x),x))
```

$$\int \cos \left(2\,x\right)\;dx=\frac{\sin \left(2\,x\right)}{2}$$

```
>$showev('integrate(cos(2*x),x,0,pi/2))
```

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}{\cos \left(2\,x\right)\;dx}=0$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-285.png

Nomor 5

```
>function f(x):=5*x^3+4*x+2
>$showev('integrate(5*x^3+4*x+2,x))
```

$$\int 5\,x^3+4\,x+2\;dx=\frac{5\,x^4}{4}+2\,x^2+2\,x$$

```
>$showev('integrate(5*x^3+4*x+2,x,0,pi/2))
```

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 5\,x^3+4\,x+2\;dx=\frac{5\,\pi^4+32\,\pi^2+64\,\pi}{64}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-288.png

Nomor 6

```
>function f(x):=cos(x)
>$showev('integrate(cos(x),x))
```

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

```
>$showev('integrate(cos(x),x,0,pi/2))
```

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-291.png

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
  [1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

Iterasi dan Barisan

EMT menyediakan fungsi iterate("g(x)", x0, n) untuk melakukan iterasi

$$x_{k+1} = g(x_k),\ x_0 = x_0, k = 1, 2, 3, ..., n.$$

Berikut ini disajikan contoh-contoh penggunaan iterasi dan rekursi dengan EMT. Contoh pertama menunjukkan pertumbuhan dari nilai awal 1000 dengan laju pertambahan 5%, selama 10 periode.

```
>q=1.05; iterate("x*q",1000,n=10)'
```

```
           1000
           1050
         1102.5
        1157.63
        1215.51
        1276.28
         1340.1
         1407.1
        1477.46
        1551.33
        1628.89
```

Contoh berikutnya memperlihatkan bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan, tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=130)):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-293.png

Silakan Anda coba-coba, dengan tabungan minimal berapa agar tidak akan habis diambil oleh bank dengan ketentuan bunga dan biaya administrasi seperti di atas.

Berikut adalah perhitungan minimal tabungan agar aman di bank dengan bunga sebesar r dan biaya administrasi a, pajak bunga 20%.

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

$$[A = 2500.0]$$

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_2230514401

Berikut didefinisikan fungsi untuk menghitung saldo tabungan, kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=6)
```

```
[1000,  994,  987.98,  981.93,  975.86,  969.76,  963.64]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=6)
```

```
[2000,  1998,  1995.99,  1993.97,  1991.95,  1989.92,  1987.88]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2500,n=6)
```

```
[2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500,  2500]
```

Tabungan senilai 2,5 juta akan aman dan tidak akan berubah nilai (jika tidak ada penarikan), sedangkan jika tabungan awal kurang dari 2,5 juta, lama kelamaan akan berkurang meskipun tidak pernah dilakukan penarikan uang tabungan.

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},3000,n=6)
```

```
[3000,  3002,  3004.01,  3006.03,  3008.05,  3010.08,  3012.12]
```

Tabungan yang lebih dari 2,5 juta baru akan bertambah jika tidak ada penarikan.

Untuk barisan yang lebih kompleks dapat digunakan fungsi "sequence()". Fungsi ini menghitung nilai-nilai x[n] dari semua nilai sebelumnya, x[1],...,x[n-1] yang diketahui.
Berikut adalah contoh barisan Fibonacci.

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1$$

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],15)
```

```
[1,  1,  2,  3,  5,  8,  13,  21,  34,  55,  89,  144,  233,  377,  610]
```

Barisan Fibonacci memiliki banyak sifat menarik, salah satunya adalah akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen ke pecahan emas:

```
>$'(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749895$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]",[1,1],250)^(1/(1:250))):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-298.png

Barisan yang sama juga dapat dihasilkan dengan menggunakan loop.

```
>x=ones(500); for k=3 to 500; x[k]=x[k-1]+x[k-2]; end;
```

Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya. Pada contoh berikut, elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah 2^(n-2), untuk n=2, 4, 5, ...

```
>sequence("sum(x)",1,10)
```

```
[1,  1,  2,  4,  8,  16,  32,  64,  128,  256]
```

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.

Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]
>sequence("suku",[1;1],6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

            1            2            5           13     ...
            1            3            8           21     ...
```

Hasil yang sama juga dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak log_2(n).

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = ... = A^{n-1}.x_1.$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,6)
```

```
Real 2 x 6 matrix

            1             5            13            34       ...
            1             8            21            55       ...
```

Spiral Theodorus

image: Spiral_of_Theodorus.png
Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

yang menghasilkan barisan bilangan kompleks.

```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

Rekursinya dapat dijalankan sebanyak 17 untuk menghasilkan barisan 17 bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya.

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,17); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-302.png

Selanjutnya dihubungan titik 0 dengan titik-titik kompleks tersebut menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-303.png

```
>
```

Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memmerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini diigunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
w=[-v[2];v[1]];
return v+w/norm(w);
endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 16 kali dimulai dari [1;0] akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi.

```
>x=iterate("gstep",[1;0],16); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-304.png

Kekonvergenan

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan x(0)=1.
```

```
0.739085133216
```

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x).$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut.

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan x=cos(x).

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
1
```

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi x(n+1)=f(x(n)) akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237
1.41421356237
```

Jika pada perintah iterate diberikan tambahan parameter n, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-n.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2,  1.5,  1.41667,  1.41422,  1.41421,  1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~,  ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi ieval().

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil. Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Satu-satunya solusi adalah

$$x = \sqrt{2}.$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
2.60401
2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

```
1          3    2.61803    2.60403    2.60401
5    2.23607    2.59002    2.60399    2.60401
```

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

```
Interval 2 x 5 matrix

~0.99999999999999778,1.00000000000000022~      ...
~4.99999999999999911,5.00000000000000089~     ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2,  1.41421,  1.18921,  1.09051,  1.04427,  1.0219,  1.01089,
1.00543,  1.00271,  1.00135,  1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepatdengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888,  1.00028,  1,  1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1,  2,  6,  24,  120,  720,  5040,  40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-309.png

```
>A =[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...
>x,
```

```
      -7.09677
      -7.74194
```

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

```
  x=x0;
  maxiter=0;
  repeat
    xnew=f$(x);
    maxiter=maxiter+1;
    until xnew~=x;
    x=xnew;
  end;
  return maxiter;
  endfunction
```

Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

```
5
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...
>  plot2d(x,hasil):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-310.png

Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahnnya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4,  5,  5,  5,  5,  5,  6,  6,  6,  6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5,  2,  3.4,  6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

$$x - \frac{x^3 - 1}{3\,x^2}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
  loop 1 to n; x=f$(x); end;
  return x;
  endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
  [ -0.5+0.866025i,  -0.5-0.866025i,  1+0i  ]
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi plotrgb() menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

```
>C=rgb(max(abs(W-z[1]),1),max(abs(W-z[2]),1),max(abs(W-z[3]),1)); ...
>  plot2d(none,-r,r,-r,r); plotrgb(C):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-312.png

Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

$$\left[x+1,\frac{x^2}{2}+x+1,\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right]$$

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor eskpresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi ters
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-314.png

Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-316.png

```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\frac{\sin\left(5\,x\right)}{5}+\frac{\sin\left(4\,x\right)}{4}+\frac{\sin\left(3\,x\right)}{3}+\frac{\sin\left(2\,x\right)}{2}+\sin x$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y=\sin(x)+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots.$$

```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-319.png

Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \le x \le 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-321.png

Tabel Fungsi

Terdapat cara menarik untuk menghasilkan barisan dengan ekspresi Maxima. Perintah mxmtable() berguna untuk menampilkan dan menggambar barisan dan menghasilkan barisan sebagai vektor kolom.

Sebagai contoh berikut adalah barisan turunan ke-n x^x di x=1.

```
>mxmtable("diffat(x^x,x=1,n)","n",1,8,frac=1);
```

```
          1
          2
          3
          8
         10
         54
        -42
        944
```

images/KB Pekan 9&10_Nisrina Octaviani_22305144011-322.png

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,\left(n+1\right)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{3^{k}+k}}=\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{3^{k}+k}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{1}{x^{2}}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{k}}{2\,k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty}{\frac{\left(-1\right)^{k}}{2\,k-1}}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}{\frac{1}{n!}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forge
```

$$a\,\sum_{k=0}^{\infty}{x^{k}}=\frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

```
>$'sum(x^k/k!,k,0,inf)=ev(sum(x^k/k!,k,0,inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{x^{k}}{k!}}=\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{x^{k}}{k!}}$$

```
>$limit(sum(x^k/k!,k,0,n),n,inf)
```

$$\lim_{n\rightarrow \infty }{\sum_{k=0}^{n}{\frac{x^{k}}{k!}}}$$

```
>function d(n) &= sum(1/(k^2-k),k,2,n); $'d(n)=d(n)
```

$$d\left(n\right)=\sum_{k=2}^{n}{\frac{1}{k^2-k}}$$

```
>$d(10)=ev(d(10),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{10}{\frac{1}{k^2-k}}=\frac{9}{10}$$

```
>$d(100)=ev(d(100),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=2}^{100} \frac{1}{k^2 - k} = \frac{99}{100}$$

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

BAB 6

KB PEKAN 11-12: MENGGUNAKAN EMT UNTUK GEOMETRI

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Nisrina Octaviani
NIM : 22305144011
Kelas : Matematika B 2022

Aplikasi Komputer

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang
```

koordinat

```
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas
```

sumbu-x dan y adalah -r sd r

```
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label
```

"AB" sejauh d

```
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh.
```

ax+by=c.

```
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan
```

c2

```
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan
```

y dengan titik A pada

```
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni
```

sin(alpha)^2 dengan

```
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga
```

dengan panjang sisi a, b, c.

```
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk
```

suatu segitiga

```
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan
```

sa=sin(phi)^2 spread a.

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga poin dan plot mereka.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garis adalah [a,b,c], yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitunglah garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-001.png

Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

Sudut di C

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-003.png

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dal
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-004.png

Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,4.5,-2.5,4.5);
>A=[-2,1]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment(A,B,"c")
>plotSegment(B,C,"a")
>plotSegment(A,C,"b")
>aspect(1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-005.png

3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>l=angleBisector(A,C,B);
>g=angleBisector(C,A,B);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0.581139,  0.581139]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-006.png

Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-007.png

Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan perhitungan simbolis sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi memberikan perhitungan simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 2   6
[-, -]
 5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.178511301977579$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik potong.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-019.png

Begitu pula di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap busur yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-021.png

Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-022.png

Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita memecahkan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)}\times\frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)}=-1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad \text{dengan } s=(a+b+c)/2,$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2+y^2=b^2,\quad (x-a)^2+y^2=c^2.$$

```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                      2     2     2
                   - c  + b  + a
             [[x = ---------------, y = 
                        2 a
          4       2  2       2  2     4       2  2     4
   sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
 - --------------------------------------------------],
                              2 a
            2     2     2
         - c  + b  + a
   [x = ---------------, y = 
              2 a
         4       2  2       2  2     4       2  2     4
   sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
   --------------------------------------------------]]
                            2 a
```

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
>plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
>plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-030.png

```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                   2    2    2
                - c  + b  + a
          [[x = --------------, y = 
                     2 a
            4      2  2      2  2    4      2  2    4
    sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
  - ---------------------------------------------------],
                           2 a
          2    2    2
       - c  + b  + a
  [x = --------------, y = 
            2 a
          4      2  2      2  2    4      2  2    4
  sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
  ---------------------------------------------------]]
                         2 a
```

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $ysol
```

$$\frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a}$$

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , c\right)=\frac{\sqrt{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(3,4,5) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 3, 4, 5
```

$$Luas=6$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
6
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-034.png

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{b^2+a^2}, c=\sqrt{b^2+a^2}, c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{(d-c)^2-c^2+a^2}{2\,a}, y=\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}\right]$$

Dan buat fungsi ini.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d
```

$$\frac{\sqrt{-(d-c)^4+2\,c^2\,(d-c)^2+2\,a^2\,(d-c)^2-c^4+2\,a^2\,c^2-a^4}}{2\,a}$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-039.png

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$1$$

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d maksimal jika segitiga sama sisi. Kami ingin menurunkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,b)}{8}=0,\frac{d\,(d-2\,a)\,(d-2\,b)}{8}-\frac{(-d+2\,b+2\,a)\,d\,(d-2\,a)}{8}=0\right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
               d      d                 d           d
[[a = 0, b = -, c = -, la = 0], [a = -, b = 0, c = -, la = 0],
               2      2                 2           2
                                                          3
        d      d                        d      d      d      d
[a = -, b = -, c = 0, la = 0], [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
        2      2                        3      3      3     108
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama-tama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

$$\left[\frac{-c^2+b^2+a^2}{2\,a} , \frac{\sqrt{-c^4+2\,b^2\,c^2+2\,a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}}{2\,a} \right]$$

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[a,0]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-047.png

Plot segmen.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-048.png

Hitung tegak lurus tengah di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kami mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{c-b-a}\,\sqrt{c-b+a}\,\sqrt{c+b-a}\,\sqrt{c+b+a}}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-050.png

Menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2r$$

untuk radiusnya. Kami dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita kuadratkan.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke sana. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-053.png

Berikut adalah luas segitiga, menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401

Sekarang kita hitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Gambarkan lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-060.png

Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-063.png

Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-065.png

Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan untuk pusat incircle tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14},\frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-070.png

Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-072.png

Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita kuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
        [y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                              y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah

$$y=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

Menambahkan solusi pertama ke plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-074.png

```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$2.135605779339061$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} , \frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} \right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

2.135605779339061

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadrat dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".

Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk merencanakan geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-081.png

Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara yang biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, itu hanya jarak kuadrat. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadrat dari sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Pengertian kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Spread mengukur pembukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai:

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadrat dari sembarang segitiga siku-siku dengan salah satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan untuk sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c+b-a)^2 = 4bc\,(1-s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadrat dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.

Hukum ini diimplementasikan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^2 , \left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^2 , \left(bb-aa+\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)^2\right] = \left[\frac{14\,bb\,\left(1-saa\right)}{3} , \frac{14\,bb\,\left(1-saa\right)}{3} , \frac{5\,2^{\frac{3}{2}}\,bb\,\left(1-saa\right)}{3}\right]$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari spread di A. Untuk melakukan ini, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk spread yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukannya dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah memilikinya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011

Kita sudah tahu ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikan ini untuk umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga yang diberikan kuadrat dari ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168\,bb\,x+36\,bb^2+(-72\,aa-84)\;bb+36\,aa^2-84\,aa+49}{36}, \frac{168\,bb\,x+36\,bb^2+(-72\,aa-84)\;bb+36\,aa^2-84\,aa+49}{36}, \right.\right.$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak begitu mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-094.png

Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadran antara dua titik.

Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga itu bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$17$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan hasil kali titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a.c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a.c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011

Yaitu, apa yang dilakukan oleh penyebaran fungsi yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksanya. Itu menyelesaikan istilah sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki spread di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{16\,c}{65}$$

Gambar berikut telah dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadrat dan menyebar.

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-110.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadratnya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{4\,\sqrt{c}}{\sqrt{65}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berhadapan dengan kuadrat!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{\sqrt{17}\,\sqrt{ha}}{2}$$

Rumus determinan biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Bangau

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama kita hitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{(-c+b+a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)}{16}$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama.

Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sc+sb+sa)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk setiap tiga sudut yang menambah 180 °.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak menyebar

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Persamaan memiliki solusi kedua, bagaimanapun, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Sebaran 90° jelas 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, sebarannya menyelesaikan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$[x = 1 - y]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

Karena sebaran 180°-t sama dengan sebaran t, rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami membuat ini fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

$$\left[x = 4\,a - 4\,a^2, x = 0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-125.png

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, dengan menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbelah 180 °-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-130.png

Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a,b,c menunjukkan qudrances.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita dapatkan darinya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis-bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-135.png

Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadrat dari sisi.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya, spread CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut chord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya spreadnya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord dari chord b adalah setengah dari sudut pusat.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401l-139.png

dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401l-140.png

Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua poin

Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-141.png

Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-142.png

Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-143.png

Sekarang hal-hal yang kurang sederhana: Ini sedikit kurang terkenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimum pada satu titik pesawat tetapi untuk menentukan itu kurang sederhana:

1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (misalnya AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-144.png

```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-145.png

2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120 °, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120 °):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-146.png

```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-147.png

Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft yang ditulis di Jawa yang memiliki instruksi "garis kontur" ...

Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada dilettants lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat poin ini F...

Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-148.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-149.png

Masih ada minimum dan tidak tercapai di salah satu simpul A, B, C atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,  0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...
Sekarang ABCD adalah persegi, kami berharap bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-150.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-151.png

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.

Pertama kita hitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

Kemudian saya baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-152.png

Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-156.png

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-157.png

Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah/sian untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-158.png

Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi spherical).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini [pos,jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-So
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu pendek hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan vektor. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan vektor sadd.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan pendekatan yang baik.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan judul yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin menempuh jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti heading yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan pos yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak, menggunakan pos ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran garis lintang 30°, melainkan jalur terpendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
     79.69°
```

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti heading yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan pos setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kami menulis sebuah fungsi, yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
useglobal;
plotearth;
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-159.png

Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/sian.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-160.png

MENCOBA RUMUS-RUMUS PADA MATEI DI ATAS

Geometri Simbolik

```
>A &= [2,0]; B &= [0,2]; C &= [3,3]; // menentukan tiga titik A, B, C
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 3, 6]
```

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$\left[y=\frac{x}{3}+2\right]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
[3, 1, 6]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
 6  12
[-, --]
 5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{4},\frac{7}{4},\frac{5}{2^{\frac{3}{2}}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$1.767766952966368$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y=x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{10}+2}{4} , \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{10}+2}{4} \right]$$

```
>P() //
```

```
[1.61803,  1.61803]
```

Garis dan Lingkaran yang berpotongan

```
>A &:= [2,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [2,3]; C &:= [3,2]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

```
[5.89792,  -0.897916]
[1.10208,  3.89792]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-171.png

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

[2, 0, 4]

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

[1, 1, 5]

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\frac{\sqrt{23}+7}{2}, \frac{3-\sqrt{23}}{2}\right], \left[\frac{7-\sqrt{23}}{2}, \frac{\sqrt{23}+3}{2}\right]\right]$$

```
>C=A+normalize([-3,-4])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

57°58'20.06''

```
>C=A+normalize([-4,-5])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

57°58'20.06''

```
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-173.png

Garis Sumbu

```
>A=[3,3]; B=[-2,-3];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-174.png

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + {b_2}^2 + {b_1}^2 - {a_2}^2 - {a_1}^2}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y = \frac{\left(b_2 - a_2\right)\,x - a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{b_1 - a_1}\right]$$

Garis Euler dan Parabola

```
>A::=[-1.5,-1.5]; B::=[3,0]; C::=[1.5,3];
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-178.png

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{63}{8}$$

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
    3   9     9
[- -, -, - -]
    2   2     2
```

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$\frac{9\,y}{2}-\frac{3\,x}{2}=-\frac{9}{2}$$

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{21}{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{5}}$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_2230514401

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{15}{28}\right)^2+\left(x-\frac{9}{28}\right)^2=\frac{2925}{392}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{9}{28},\frac{15}{28}\right]$$

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-185.png

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{33}{14}, \frac{3}{7}\right]$$

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{57\,y}{28} - \frac{3\,x}{28} = -\frac{9}{8}$$

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-188.png

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{9}{8} = -\frac{9}{8}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-190.png

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

60°15’18.43’’

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(3\,2^{\frac{3}{2}}+3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-45\,\sqrt{2}+9}{28},\frac{\left(3\,\sqrt{2}-9\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+15\,2^{\frac{3}{2}}+15}{28}\right]$$

```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-369\,\sqrt{2}-279\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+1035\,\sqrt{2}+5526}}{7\,2^{\frac{3}{2}}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-195.png

contoh lain dari materi trigonometri rasional

```
>A&:=[2,3]; B&:=[5,4]; C&:=[0,5]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-196.png

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$26$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_223051440

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{14}{\sqrt{10}\,\sqrt{26}}\right)$$

```
29.7448812969
```

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$\left[x=\frac{4}{5}\right]$$

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{16}{65}$$

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{16}{65}$$

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{32}{13}$$

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{2^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{13}}$$

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{26}}{\sqrt{13}}$$

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$4$$

Aturan penyebaran 3 kali lipat

```
>setPlotRange(1); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-210.png

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

```
>periradius(a,b,c)
```

18

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-2,-2];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-214.png

dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-215.png

Ternyata setelah mencoba yang bisa hanya dengan memasukkan angka 1, karena ketika memakai angka 2, plot tidak membentuk kerucut diatas.

Dua poin

```
>B=[2,-2];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-216.png

Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-217.png

Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-218.png

Contoh:

```
>C=[-3,2];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-219.png

```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-220.png

Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120 °, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120 °):

```
>C=[-1,2];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-221.png

```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-222.png

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[2,21];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-223.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-224.png

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[2,a])
```

```
[- a, 2, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-2,a])
```

```
[- a, - 2, 0]
```

```
>g &= lineThrough([-2,0],[2,2])
```

```
[- 2, 4, 4]
```

```
>setPlotRange(-2,2,0,3);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-225.png

Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+4}-u\right)^2+\frac{4\,a^2\,u^2}{\left(a^2+4\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+4}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-2\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+4}+a^2+4}{a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

```
>u := sol()
```

```
 [0.558482,  4.77485]
```

```
>dd := d()
```

```
 [0.394906,  3.37633]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-229.png

Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

Penyelesaian :

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-230.png

```
>c=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c);
>plotPoint(O,"O");
>l=angleBisector(A,C,B);
>color(2); plotLine(l); color(1);
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-231.png

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

Penyelesaian :

```
>load geometry;
>setPlotRange(5); P=[2,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-232.png

```
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

Sehingga didapatkan nilai a = -1, b = 5 dan c = -4

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

```
     2
- x   + 5 x - 4
```

```
>plot2d("-x^2+5*x-4",-5,5,-5,5):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-233.png

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
  - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
  - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
  - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

```
  - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.
Penyelesaian :

```
>load geometry
```

```
 Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-4.5,4.5,-4.5,4.5);
>A=[-3,-3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-3]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C");
>D=[-3,3]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(A,D,"");
>aspect(1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-234.png

```
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-235.png

Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABCD"):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-236.png

Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.
Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

```
6
```

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

```
6
```

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

```
6
```

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

```
6
```

```
>AB.CD
```

```
36
```

```
>AD.BC
```

```
36
```

Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama yaitu 36. Jadi dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :
Diketahui kedua titik fokus P = [-1,-1] dan Q = [1,-1]

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-237.png

Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-238.png

Batasan ke garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-239.png

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

Penyelesaian :

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-240.png

Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-241.png

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/KB Pekan 11&12_Nisrina Octaviani_22305144011-242.png

BAB 7

KB PEKAN 13-14: MENGGUNAKAN EMT UNTUK STATISTIKA

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Nisrina Octaviani
NIM : 22305144011
Kelas : Matematika B 2022

EMT untuk Statistika

Dalam buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, tes, dan distribusi dalam Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukanlah sebuah pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan latar belakang untuk memahami detailnya.

Asumsikan pengukuran berikut. Kita ingin menghitung nilai rata-rata dan deviasi standar yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>median(M), mean(M), dev(M),
```

```
999
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak dan kumis untuk data tersebut. Dalam kasus kami, tidak ada pencilan.

```
>aspect(1.75); boxplot(M):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-001.png

Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan mengasumsikan nilai yang diukur dari distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi dalam Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} \, dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

```
3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut ini dalam rentang ukuran tertentu.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut ini adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-003.png

Kita dapat memasukkan data mentah tersebut ke dalam tabel.

Tabel adalah sebuah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal rentang, akhir rentang, jumlah orang dalam rentang.

Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["BB","BA","Frek"])
```

```
      BB        BA      Frek
   155.5     159.5        22
   159.5     163.5        71
   163.5     167.5       136
   167.5     171.5       169
   171.5     175.5       139
   175.5     179.5        71
   179.5     183.5        32
   183.5     187.5         8
```

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk hal ini.

Sumbol "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsi "labc" untuk menentukan judul kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
      157.5
      161.5
      165.5
      169.5
      173.5
      177.5
      181.5
      185.5
```

Tetapi akan lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2,1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
 [157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

```
 169.901234568
 5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai tersebut ke dalam diagram batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan rata-rata m dan deviasi standar d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada diagram batang, nilai tersebut harus dikalikan dengan 4 kali jumlah data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>  xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-005.png

Tabel

Dalam direktori buku catatan ini, Anda dapat menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online berbahasa Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Person Sex Age Titanic Evaluation Tip Problem
1 m 30 n . 1.80 n
2 f 23 y g 1.80 n
3 f 26 y g 1.80 y
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kita ingin membaca tabel tersebut dari file. Pertama, kita menggunakan terjemahan kita sendiri untuk token-token tersebut.

Untuk itu, kita mendefinisikan set token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.

Argumen tok2, tok4, dan lain-lain adalah terjemahan dari kolom-kolom tabel. Argumen-argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda harus menyediakannya dengan ":=".

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:10],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
   Person   Sex   Age  Titanic  Evaluation   Tip  Problem
        1     m    30        n           .   1.8        n
        2     f    23        y           g   1.8        n
        3     f    26        y           g   1.8        y
        4     m    33        n           .   2.8        n
        5     m    37        n           .   1.8        n
        6     m    28        y           g   2.8        y
        7     f    31        y          vg   2.8        n
        8     m    23        n           .   0.8        n
        9     f    24        y          vg   1.8        y
       10     m    26        n           .   1.8        n
```

Tanda titik "." mewakili nilai yang tidak tersedia.

Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan sebelumnya, kita hanya perlu menentukan kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan satu set token.

```
>tok
```

```
  m
  n
  f
  y
  g
  vg
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan menjadi angka.

String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
  [1,   1,   30,   2,   NAN,   1.8,   2]
```

Berikut ini adalah isi tabel dengan angka yang tidak diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
        1     1    30     2     .   1.8     2
        2     3    23     4     5   1.8     2
        3     3    26     4     5   1.8     4
        4     1    33     2     .   2.8     2
```

```
      5     1    37     2     .  1.8     2
      6     1    28     4     5  2.8     4
      7     3    31     4     6  2.8     2
      8     1    23     2     .  0.8     2
      9     3    24     4     6  1.8     4
     10     1    26     2     .  1.8     2
     11     3    23     4     6  1.8     4
     12     1    32     4     5  1.8     2
     13     1    29     4     6  1.8     4
     14     3    25     4     5  1.8     4
     15     3    31     4     5  0.8     2
     16     1    26     4     5  2.8     2
     17     1    37     2     .  3.8     2
     18     1    38     4     5    .     2
     19     3    29     2     .  3.8     2
     20     3    28     4     6  1.8     2
     21     3    28     4     1  2.8     4
     22     3    28     4     6  1.8     4
     23     3    38     4     5  2.8     2
     24     3    27     4     1  1.8     4
     25     1    27     2     .  2.8     4
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat menaruh output dari readtable() ke dalam sebuah daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};
```

Dengan menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```
  Person   Sex  Age Titanic Evaluation  Tip Problem
       1     m   30       n          .  1.8       n
       2     f   23       y          g  1.8       n
       3     f   26       y          g  1.8       y
       4     m   33       n          .  2.8       n
       5     m   37       n          .  1.8       n
       6     m   28       y          g  2.8       y
       7     f   31       y         vg  2.8       n
       8     m   23       n          .  0.8       n
       9     f   24       y         vg  1.8       y
      10     m   26       n          .  1.8       n
      11     f   23       y         vg  1.8       y
      12     m   32       y          g  1.8       n
      13     m   29       y         vg  1.8       y
      14     f   25       y          g  1.8       y
      15     f   31       y          g  0.8       n
      16     m   26       y          g  2.8       n
      17     m   37       n          .  3.8       n
      18     m   38       y          g    .       n
      19     f   29       n          .  3.8       n
      20     f   28       y         vg  1.8       n
      21     f   28       y          m  2.8       y
```

```
   22     f    28        y          vg   1.8        y
   23     f    38        y           g   2.8        n
   24     f    27        y           m   1.8        y
   25     m    27        n           .   2.8        y
```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom dari tabel, melewatkan setiap baris dengan nilai NAN ("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```
   Person Evaluation       Tip
        2          g       1.8
        3          g       1.8
        6          g       2.8
        7         vg       2.8
        9         vg       1.8
       11         vg       1.8
       12          g       1.8
       13         vg       1.8
       14          g       1.8
       15          g       0.8
       16          g       2.8
       20         vg       1.8
       21          m       2.8
       22         vg       1.8
       23          g       2.8
       24          m       1.8
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
  2.175
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen-elemen dalam sebuah vektor, dan jumlahnya. Kita menerapkannya pada nilai "m" dan "f" pada kolom kedua tabel kita.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
  [1,  3]
  [12,  13]
```

Kita bisa mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
           m         12
           f         13
```

Fungsi selecttable() mengembalikan sebuah tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama, kita mencari indeks dari dua nilai kita dalam tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
  [5,   6]
```

Sekarang kita dapat memilih baris-baris dari tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

```
   Person     Sex     Age Titanic Evaluation     Tip Problem
        2       f      23       y          g     1.8       n
        3       f      26       y          g     1.8       y
        6       m      28       y          g     2.8       y
       18       m      38       y          g       .       n
       16       m      26       y          g     2.8       n
       15       f      31       y          g     0.8       n
       12       m      32       y          g     1.8       n
       23       f      38       y          g     2.8       n
       14       f      25       y          g     1.8       y
        9       f      24       y         vg     1.8       y
        7       f      31       y         vg     2.8       n
       20       f      28       y         vg     1.8       n
       22       f      28       y         vg     1.8       y
       13       m      29       y         vg     1.8       y
       11       f      23       y         vg     1.8       y
```

Untuk statistik berikutnya, kita ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kita mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);  ...
>  writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
           m          n
           m          n
           m          n
           m          n
```

```
m           n
m           n
m           n
m           y
m           y
m           y
m           y
m           y
f           n
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
f           y
```

Dengan getstatistics(), kita juga dapat menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
            n          y
m           7          5
f           1         12
```

Tabel dapat ditulis ke sebuah file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

Kemudian kita dapat membaca tabel dari file tersebut.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

```
            n          y
m           7          5
f           1         12
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-006.png

Perhatikan perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi sesungguhnya). Masukkan kembali ketiga perintah tersebut untuk melihat hasil pengambilan sampel yang lain.

Berikut ini adalah perbandingan 10 simulasi dari 1000 nilai terdistribusi normal dengan menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, serta pencilan.

```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-007.png

Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrandom. Mari kita simulasikan pelemparan dadu dan memplot distribusinya.

Kita menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen-elemen dari v muncul di dalam x. Kemudian kita memplot hasilnya menggunakan columnsplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6);  ...
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,k));  ...
>ygrid(1000,color=red):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-008.png

Meskipun intrandom(n,m,k) menghasilkan bilangan bulat yang terdistribusi secara seragam dari 1 sampai k, adalah mungkin untuk menggunakan distribusi bilangan bulat yang lain dengan randpint().

Pada contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 adalah 0.4, 0.1, 0.5 secara berurutan.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
[378,  102,  520]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Lihatlah ke dalam referensi.

Misalnya, kita mencoba distribusi eksponensial. Sebuah variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

with parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-011.png

Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan kebalikannya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-012.png

Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6);  ...
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-013.png

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2}\ dt.$$

Probabilitas untuk berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Hal ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut ini.

$$\int_2^5 \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2}\, dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal dengan rata-rata dan deviasi yang sama. Fungsi invbindis() menyelesaikan interpolasi linier antara nilai bilangan bulat.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah densitas dari distribusi chi-square. Seperti biasa, Euler memetakan vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 hingga 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-016.png

Euler memiliki fungsi-fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi-distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan sebuah integral.

Penamaannya diusahakan untuk konsisten. Sebagai contoh,

- distribusi chi-kuadrat adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- densitasnya adalah qchidis().

Pelengkap dari distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.

Pertama, kita tetapkan fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0,   0.165,   0.335,   0.5,   0.666667,   0.833333,   1]
```

Artinya, dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.

Ini hampir merupakan distribusi yang seragam. Mari kita definisikan sebuah generator bilangan acak untuk ini. Fungsi find(v,x) menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga dapat digunakan untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahan ini sangat halus sehingga kita hanya bisa melihatnya setelah melakukan iterasi yang sangat banyak.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-017.png

Berikut ini adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai 1... K dalam v. Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left|f_i - \frac{1}{K}\right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsi ini menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

```
0
```

Dan ini menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama, ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

```
0.751401349654
```

Fungsi Beta invers digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat defaultnya adalah alpha.

Arti dari interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil yang diamati sebesar 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut ini adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tetapi untuk n yang besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Dalam Bridge, kita mengasumsikan 5 kartu yang terbuka (dari 52 kartu) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1, atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

```
          381          100          519
          376           91          533
          417           80          503
          440           94          466
          406          112          482
          408           94          498
          395          107          498
          399           96          505
          428           87          485
          400           99          501
```

Memplot Data

Untuk memplot data, kami mencoba hasil pemilihan umum Jerman sejak tahun 1990, yang diukur dalam kursi.

```
>BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk pesta, kami menggunakan serangkaian nama.

```
>P:=["CDU/CSU","SPD","FDP","Gr","Li"];
```

Mari kita cetak persentasenya dengan baik.

Pertama kita ekstrak kolom-kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah total kursi. kolom adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian kita mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kita menggunakan nama sebagai judul kolom, dan tahun sebagai judul baris. Lebar default untuk kolom adalah wc = 10, tetapi kami lebih suka output yang lebih padat. Kolom-kolom akan diperluas untuk label-label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

```
         CDU/CSU    SPD    FDP     Gr     Li
    1990      48     36     12      1      3
    1994      44     38      7      7      4
    1998      37     45      6      7      5
```

2002	41	42	8	9	0
2005	37	36	10	8	9
2009	38	23	15	11	12
2013	49	31	0	10	10

Perkalian matriks berikut ini mengekstrak jumlah persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh suara di parlemen hingga tahun 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29,  81.25,  81.1659,  82.7529,  72.9642,  61.8971,  79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kita menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatif lainnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-019.png

Tentukan beberapa warna untuk masing-masing bagian.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

Sekarang kita dapat memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya ke dalam satu plot menggunakan figure. Kita dapat menambahkan vektor kolom pada setiap plot.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP);  ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-020.png

Plot data menggabungkan baris data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP);  ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-021.png

Plot kolom 3D menunjukkan deretan data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. angle adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-022.png

Representasi lainnya adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom-kolom pada plot mewakili kolom-kolom pada matriks di sini. Karena panjangnya label CDU/CSU, kita mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller);  ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
>shrinkwindow():
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-023.png

Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena warna hitam dan kuning membentuk sebuah koalisi, kita menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-024.png

Berikut ini jenis plot yang lain.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-025.png

Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut ini adalah plot impuls dari data acak, yang terdistribusi secara seragam dalam [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-026.png

Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-027.png

Fungsi columnsplot() lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan sebuah vektor nilai. Selain itu, fungsi ini dapat mengatur labelnya menjadi apa pun yang kita inginkan, kita telah mendemonstrasikan hal ini dalam tutorial ini.

Berikut ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan memplot statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-028.png

Anda juga dapat menetapkan sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-029.png

Berikut ini adalah cara untuk memplot frekuensi angka dalam vektor.
Kami membuat vektor angka acak bilangan bulat 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8,  5,  8,  8,  6,  8,  8,  3,  5,  5]
```

Kemudian ekstrak nomor unik dalam v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[3,  5,  6,  8]
```

Dan memplot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-030.png

Kami ingin mendemonstrasikan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) membutuhkan larik nilai yang telah diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

Kemudian kita memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan ke dalam satu plot. Alih-alih plot batang untuk distribusi, kali ini kami menggunakan plot gigi gergaji.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar));  ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-031.png

Plot sebaran mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut ini menunjukkan bahwa X dan X+Y berkorelasi positif secara jelas.

```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-032.png

Sering kali, kita ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Hal ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.

Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-033.png

Plot ini dengan jelas menunjukkan bahwa nilai yang terdistribusi normal cenderung lebih kecil pada ujung yang ekstrim.

Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas distribusi yang lebih kecil atau memperkecil distribusi yang lebih besar. Fungsi berikut ini bagus untuk keduanya. Fungsi ini mengambil nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-034.png

Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi kecocokan.

Sebagai permulaan, kita mencari garis regresi untuk data univariat dengan polyfit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x’|y’,labc=["x","y"])
```

x	y
1	2
2	3
3	1
4	5
5	6
6	3
7	7
8	8
9	9
10	8

Kami ingin membandingkan kecocokan tanpa bobot dan dengan bobot. Pertama, koefisien dari kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
[0.733333,  0.812121]
```

Sekarang, koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami menempatkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik-titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-035.png

Untuk contoh lain, kita membaca survei tentang siswa, usia mereka, usia orang tua mereka, dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.

Tabel ini berisi "m" dan "f" pada kolom kedua. Kita menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat dan bukannya membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]);  ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);
```

Person	Sex	Age	Mother	Father	Siblings
1	m	29	58	61	1
2	f	26	53	54	2
3	m	24	49	55	1
4	f	25	56	63	3
5	f	25	49	53	0
6	f	23	55	55	2
7	m	23	48	54	2
8	m	27	56	58	1
9	m	25	57	59	1
10	m	24	50	54	1
11	f	26	61	65	1
12	m	24	50	52	1
13	m	29	54	56	1
14	m	28	48	51	2
15	f	23	52	52	1
16	m	24	45	57	1
17	f	24	59	63	0
18	f	23	52	55	1
19	m	24	54	61	2
20	f	23	54	55	1

Bagaimana usia saling bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-036.png

Jelas bahwa usia ayah dan ibu saling bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
[17.3789,  0.740964]
```

Ini jelas merupakan model yang salah. Garis regresinya adalah s = 17 + 0,74t, di mana t adalah usia ibu dan s adalah usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.

Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti s = a + t. Kemudian a adalah rata-rata dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
3.65
```

Mari kita plotkan ini ke dalam satu scatter plot.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points);  ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add);  ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-037.png

Berikut ini adalah plot kotak dari kedua usia tersebut. Ini hanya menunjukkan, bahwa usia keduanya berbeda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-038.png

Berikut ini adalah plot kotak dari kedua usia tersebut. Ini hanya menunjukkan, bahwa usia keduanya berbeda.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
1.5
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
0.7588307236
```

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama dalam kedua vektor. Korelasi ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
0.758925292358
```

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi kemiringan.

$$\text{sk}(x)=\frac{\sqrt{n}\sum_i(x_i-m)^3}{\left(\sum_i(x_i-m)^2\right)^{3/2}}$$

di mana m adalah rata-rata dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
-0.198710316203
```

Berikut ini adalah fungsi lain, yang disebut koefisien kemencengan Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

```
-0.0801873249135
```

Simulasi Monte Carlo

Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Berikut ini adalah contoh lainnya, yang mensimulasikan 1000 kali pelemparan 3 dadu, dan menanyakan distribusi dari jumlah tersebut.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))';  fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
 [5,  17,  35,  44,  75,  97,  114,  116,  143,  116,  104,  53,  40,
 22,  13,  6]
```

Kita bisa merencanakan ini sekarang.

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-040.png

Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidaklah mudah. Kami menggunakan rekursi tingkat lanjut untuk hal ini.

Fungsi berikut ini menghitung jumlah cara angka k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n angka dalam rentang 1 hingga m. Fungsi ini bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
   if n==1 then return k>=1 && k<=m
   else
     sum=0;
     loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
     return sum;
   end;
 endfunction
```

Berikut ini adalah hasil dari tiga lemparan dadu.

```
>countways(5:25,5,5)
```

```
 [1,  5,  15,  35,  70,  121,  185,  255,  320,  365,  381,  365,  320,
 255,  185,  121,  70,  35,  15,  5,  1]
```

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1,  3,  6,  10,  15,  21,  25,  27,  27,  25,  21,  15,  10,  6,  3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-041.png

Untuk simulasi lainnya, deviasi nilai rata-rata dari n variabel acak berdistribusi normal 0-1 adalah 1/sqrt(n).

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

```
0.316227766017
```

Mari kita periksa dengan sebuah simulasi. Kami menghasilkan 10.000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.319493614817
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-042.png

Median dari 10 bilangan acak berdistribusi normal 0-1 memiliki deviasi yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

```
0.374460271535
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke-n dari proses-proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-043.png

Tes

Tes adalah alat yang penting dalam statistik. Dalam Euler, banyak tes yang diterapkan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kita terima jika kita menolak hipotesis nol.

Sebagai contoh, kita menguji lemparan dadu untuk distribusi yang seragam. Pada 600 lemparan, kita mendapatkan nilai berikut, yang kita masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Uji chi-square juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya seharusnya hampir sama. Parameter >p menginterpretasikan vektor y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.526
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kita adil. Tetapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.

Selanjutnya kita buat 1000 lemparan dadu dengan menggunakan generator bilangan acak, dan lakukan pengujian yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.528028118442
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.0218365848476
```

Fungsi ttest() membutuhkan nilai rata-rata, deviasi, jumlah data, dan nilai rata-rata untuk diuji.

Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kita tolak hipotesis bahwa kedua pengukuran tersebut memiliki nilai rata-rata yang sama, jika hasilnya < 0,05.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.38722000942
```

Jika kita menambahkan bias pada satu distribusi, kita akan mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
5.60009101758e-07
```

Pada contoh berikut, kita membuat 20 lemparan dadu secara acak sebanyak 100 kali dan menghitung jumlah dadu yang muncul. Rata-rata harus ada 20/6 = 3,3 mata dadu.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.28
```

Sekarang kita bandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama, kita memplot distribusi angka satu.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-044.png

```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kami harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-square menolak hipotesis bahwa distribusi kita adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.53921579764
```

Contoh berikut ini berisi hasil dari dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) yang memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76];  ...
>  writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
           1     2     3     4     5     6
     m    23    37    43    52    64    74
     f    27    39    41    49    63    76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Uji tabel chi^2 melakukan hal ini. Hasilnya terlalu besar untuk menolak independensi. Jadi kita tidak dapat mengatakan, jika pemungutan suara tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
          1     2     3     4     5     6
m      24.9  37.9  41.9  50.3  63.3  74.7
f      25.1  38.1  42.1  50.7  63.7  75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang telah dikoreksi. Karena koefisien ini sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak bergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```

Beberapa Tes Lainnya

Selanjutnya kita menggunakan analisis varians (uji F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi secara normal dengan nilai rata-rata yang sama. Metode ini disebut ANOVA (analisis varians). Dalam Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan sebesar 1,3%.

Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata yang berbeda dengan menguji median dari sampel gabungan.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Uji lain tentang kesetaraan adalah uji peringkat. Uji ini jauh lebih tajam daripada uji median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut ini, kedua distribusi memiliki rata-rata yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

```
0.129608141484
```

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perawatan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Uji signum memutuskan, apakah a lebih baik daripada b.

```
>signtest(a,b)
```

```
0.0546875
```

Ini adalah kesalahan yang terlalu besar. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.
Uji Wilcoxon lebih tajam daripada uji ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif dari perbedaan.

```
>wilcoxon(a,b)
```

```
0.0296680599405
```

Mari kita coba dua pengujian lagi dengan menggunakan rangkaian yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

```
0.0068706451766
```

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

```
0.275145971064
```

Bilangan Acak

Berikut ini adalah tes untuk generator bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan adanya masalah.

Pertama, kita akan membangkitkan sepuluh juta bilangan acak dalam [0,1].

```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya, kami menghitung jarak antara dua angka yang kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Terakhir, kami memplot berapa kali, setiap jarak yang terjadi, dan membandingkannya dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>  plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-045.png

Menghapus data.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai sebuah paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Buku ini diperuntukkan bagi Anda yang sudah terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran umum mengenai hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami juga membahas cara-cara untuk bertukar data di antara kedua sistem tersebut.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berlangsung.

Sintaks Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari dalam R adalah membuat sebuah vektor. Dalam EMT, perbedaan utamanya adalah operator : dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, operator ini memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0,  0.5,  1,  1.5,  2,  2.5,  3,  3.5,  4,  4.5,  5,  5.5,  6,  6.5,
7,  7.5,  8,  8.5,  9]
```

Fungsi c() tidak ada. Anda dapat menggunakan vektor untuk menggabungkan beberapa hal.

Contoh berikut ini, seperti banyak contoh lainnya, berasal dari "Interoduksi ke R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti alurnya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  0,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT digantikan oleh fungsi seq() dalam R. Kita dapat menulis fungsi ini dalam EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0,  -0.1,  -0.2,  -0.3,  -0.4,  -0.5,  -0.6,  -0.7,  -0.8,  -0.9,  -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada dalam EMT. Untuk input vektor, dapat dituliskan sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk penugasan. Operator "->" digunakan untuk unit dalam EMT.

```
>125km -> " miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator "<-" untuk penugasan menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 dalam EMT.

```
>a=2; a<-4
```

```
0
```

Dalam R, "a<-4<3" bisa digunakan, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga mengalami ambiguitas yang sama di EMT, tetapi saya mencoba untuk menghilangkannya.

EMT dan R memiliki vektor dengan tipe boolean. Tetapi dalam EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk merepresentasikan salah dan benar. Dalam R, nilai benar dan salah tetap dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti dalam EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0,   0,   1,   0,   0]
[0,   0,   3.1,   0,   0]
```

EMT memunculkan kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda "errors".

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

String sama saja dalam R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.

Dalam R ada paket-paket untuk Unicode. Dalam EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. Sebuah string Unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"&#169; Ren&eacut; Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar pada sistem Anda sebagai A dengan titik dan tanda hubung di atasnya. Hal ini tergantung pada jenis huruf yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Ini dapat menyertakan angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

Pengindeksan (Indexing)

Seringkali, ini akan berfungsi seperti di R.

Namun EMT akan menafsirkan indeks negatif dari belakang vektor, sementara R menafsirkan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[10.4,   5.6,   3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,   3.1,   6.4,   21.7]
```

Vektor logika tidak diperlakukan secara berbeda dengan indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda harus mengekstrak elemen-elemen yang bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[1,   1,   0,   1,   1]
[10.4,   5.6,   6.4,   21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4,   5.6,   5.6,   10.4]
```

Namun pemberian nama untuk indeks tidak dimungkinkan dalam EMT. Untuk paket statistik, hal ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen-elemen vektor.

Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan sebuah fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^

Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
                ^
[10.4,  3.1]
```

Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data yang tetap dibandingkan R. Jelas, dalam R terdapat vektor yang berkembang. Anda bisa mengatur sebuah vektor numerik kosong v dan memberikan sebuah nilai pada elemen v[17]. Hal ini tidak mungkin dilakukan dalam EMT.

Hal berikut ini sedikit tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i yang ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor tersebut kembali ke variabel global v.

Semakin efisien mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i  ]
```

Konversi ke string hanya dapat dilakukan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk penggabungan string sederhana. Tetapi ada fungsi-fungsi seperti print() atau frac().

Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";
loop 1 to length(v);
   s=s+print(v[#],2,0);
   if #<length(v) then s=s+","; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, ada sebuah fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex, perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R ada contoh yang disebut faktor.

Berikut ini adalah daftar wilayah 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kita ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Sebagai sebuah program statistik, R memiliki fungsi factor() dan tappy() untuk hal ini.

EMT dapat melakukan hal ini dengan mencari indeks dari wilayah-wilayah di dalam daftar unik dari wilayah-wilayah tersebut.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik ini, kita dapat menulis fungsi perulangan kita sendiri untuk melakukan berbagai hal untuk satu faktor saja.

Atau kita dapat meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini sedikit tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berfungsi.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini bekerja untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti halnya di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.

Jadi kita dapat mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang ramah.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.

Faktor-faktor tersebut harus disimpan dengan jelas dalam sebuah koleksi dengan jenis dan kategorinya (negara bagian dan wilayah dalam contoh kita). Untuk EMT, kita menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
  ## Factor data
  ## Returns a collection with data t, unique data, indices.
  ## See: tapply
  u=sort(unique(t));
  return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
  endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi ini akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
  [6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
  8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita dapat meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan sebuah tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
  ## Makes a table of data and factors
  ## tf : output of makef()
  ## See: makef
  uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
  for i=1 to length(uf);
     ind=nonzeros(f==i);
     if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
     else x[i]=f$(t[ind]);
     endif;
  end;
  return {{x,uf}};
  endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak pemeriksaan tipe di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan adalah kategori (faktor) yang tidak memiliki data. Tetapi kita harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.

Tabel ini bisa dicetak sebagai sebuah tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

```
     act      nsw       nt      qld       sa      tas      vic       wa
    44.5    57.33     55.5     53.6       55     60.5       56    52.25
```

Larik

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe data ini disebut matriks. Akan lebih mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.

R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R, larik adalah sebuah vektor dengan sebuah bidang dimensi.

Dalam EMT, sebuah vektor adalah sebuah matriks dengan satu baris. Ini bisa dibuat menjadi sebuah matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

```
           1           2           3           4           5
           6           7           8           9          10
          11          12          13          14          15
          16          17          18          19          20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sama seperti di R.

```
>X[,2:3]
```

```
           2           3
           7           8
          12          13
          17          18
```

Namun, dalam R dimungkinkan untuk mengatur daftar indeks tertentu dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama juga dapat dilakukan dalam EMT hanya dengan sebuah perulangan.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
  loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
     M[i{#},j{#}] = v{#};
  end;
  endfunction
```

Kami mendemonstrasikan hal ini untuk menunjukkan bahwa matriks diteruskan dengan referensi dalam EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

```
           1           2           0           4           5
           6           0           8           9          10
           0          12          13          14          15
          16          17          18          19          20
```

Hasil kali luar dalam EMT hanya dapat dilakukan di antara vektor. Hal ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus berupa vektor kolom dan vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

```
            1           2           3           4           5
            2           4           6           8          10
            3           6           9          12          15
            4           8          12          16          20
            5          10          15          20          25
```

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a, b, c, d yang dipilih dari 0 sampai n secara acak. Solusinya dalam R adalah membentuk sebuah matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.

Tentu saja, ini bisa dicapai dengan sebuah perulangan. Tetapi perulangan tidak efektif dalam EMT atau R. Dalam EMT, kita bisa menulis perulangan dalam C dan itu adalah solusi tercepat.

Tetapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat sebuah matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-046.png

Selain kelipatan yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
 [0,  23,  132,  316,  602,  801,  333,  141,  53,  0]
```

Cara yang paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

```
>plot2d(q,distribution=11):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-047.png

Tetapi juga memungkinkan untuk menghitung jumlah dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.

Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-048.png

Daftar

EMT memiliki dua jenis daftar. Pertama adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang kedua adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kita tidak peduli dengan daftar global di sini.

Tipe daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi dalam EMT. Ia berperilaku seperti struktur dalam C, tetapi elemen-elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini elemen-elemen tersebut tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Elemen-elemen tersebut diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

Input dan Output File (Membaca dan Menulis Data)

Anda mungkin sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini akan menjelaskan kepada Anda tentang berbagai cara untuk melakukan hal tersebut. Fungsi yang sederhana adalah writematrix() dan readmatrix().

Mari kita tunjukkan bagaimana cara membaca dan menulis sebuah vektor real ke sebuah file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.49815
0.28037
```

Untuk menulis data ke sebuah berkas, kita menggunakan fungsi writematrix().

Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada di sebuah direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, hal ini tidak diperlukan, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita tuliskan vektor kolom a' ke dalam file. Hal ini akan menghasilkan satu angka pada setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kita menggunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

Dan hapus file tersebut.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.49815
0.28037
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.

Sebagai contoh, jika Anda memiliki sistem bahasa Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda membutuhkan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan dengan koma). File "test.csv" berikut ini akan muncul di folder cuurent Anda.

```
>filename="test.csv"; ...
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f";  ...
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk menandai ini, kita mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
  f
  m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Write the table with the token headers.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

```
                 f       m
         1       6       7
         2       5       2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

File terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
A,B,C
0.7003664386138074,0.1875530821001213,0.3262339279660414
0.5926249243193858,0.1522927283984059,0.368140583062521
0.8065535209872989,0.7265910840408142,0.7332619844597152
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan sebuah koleksi nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke buku catatan, atau ke sebuah file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

```
         A         B         C
   0.70037   0.18755   0.32623
   0.59262   0.15229   0.36814
   0.80655   0.72659   0.73326
```

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris-baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.40472
0.37102
0.75547
```

File CSV

Pertama, mari kita tulis sebuah matriks ke dalam sebuah file. Untuk keluarannya, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv"; ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut ini adalah isi file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.8221197733097619,0.821531098722547,0.7771240608094004
0.8482947121863489,0.3237767724883862,0.6501422353377985
0.1482301827518109,0.3297459716109594,0.6261901074210923
```

CVS ini dapat dibuka di sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu pada sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal.

Namun, titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca sebuah matriks dari sebuah file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
    0.82212    0.82153    0.77712
    0.84829    0.32378    0.65014
    0.14823    0.32975    0.62619
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke dalam satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk menulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks-matriks tersebut dipisahkan oleh sebuah baris kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
          1          0          0
          0          1          0
          0          0          1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan dengan koma). Pada Excel 2007, gunakan "save as" dan "format lain", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.

Berikut ini adalah contohnya.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
  0;1000;1000
  1;1051,271096;1072,508181
  2;1105,170918;1150,273799
  3;1161,834243;1233,67806
  4;1221,402758;1323,129812
  5;1284,025417;1419,067549
  6;1349,858808;1521,961556
  7;1419,067549;1632,31622
  8;1491,824698;1750,6725
  9;1568,312185;1877,610579
  10;1648,721271;2013,752707
```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubahnya di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu untuk membaca matriks ke dalam EMT.

Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma digantikan oleh titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, hilangkan saja parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

```
         0      1000      1000
         1    1051.3    1072.5
         2    1105.2    1150.3
         3    1161.8    1233.7
         4    1221.4    1323.1
         5      1284    1419.1
         6    1349.9      1522
         7    1419.1    1632.3
         8    1491.8    1750.7
         9    1568.3    1877.6
        10    1648.7    2013.8
```

Mari kita rencanakan ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-049.png

Ada beberapa cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari sebuah baris data. Secara default, fungsi ini mengharapkan sebuah titik desimal. Tetapi fungsi ini juga dapat menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum menggunakan fungsi ini.

Fungsi berikut ini adalah contohnya. Fungsi ini akan berhenti pada akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
  open(file);
  M=[];
  repeat
     until eof();
     v=getvectorline(3);
     if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
  end;
  return M;
  close(file);
  endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
    0.82212    0.82153    0.77712
    0.84829    0.32378    0.65014
    0.14823    0.32975    0.62619
```

It would also be possible to read all numbers in that file with getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
    0.82212    0.82153    0.77712
    0.84829    0.32378    0.65014
    0.14823    0.32975    0.62619
```

Dengan demikian, sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
  0.50303
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
  0.50303
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kita menulis tabel dengan judul baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3);  ...
>open(file,"w");  ...
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]);  ...
>close(); ...
>printfile(file)
```

```
  one,two,three
        0.09,       0.39,       0.86
        0.39,       0.86,       0.71
         0.2,       0.02,       0.83
```

File ini dapat diimpor ke Excel.

Untuk membaca file di EMT, kita menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)
```

```
    one       two      three
   0.09      0.39       0.86
   0.39      0.86       0.71
    0.2      0.02       0.83
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki baris dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1'114.05"
```

```
2020-11-03,Tue,1'114.05
```

Pertama, kita dapat memberi tanda pada garis tersebut.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1'114.05
```

Kemudian, kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis dengan menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]),  ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])),  ...
>strrepl(vt[3],"'","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Dengan menggunakan ekspresi reguler, Anda dapat mengekstrak hampir semua informasi dari sebuah baris data.
Anggaplah kita memiliki baris dokumen HTML berikut ini.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kita menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

```
- tanda kurung tutup >,
- setiap string yang tidak mengandung tanda kurung dengan
```

sub-pencocokan "(...)",

```
- kurung pembuka dan kurung penutup menggunakan solusi terpendek,
- sekali lagi, semua string yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan sebuah kurung pembuka <.
```

Ekspresi reguler agak sulit untuk dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<>]+)<.+?>([^<>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-cocokan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut ini adalah fungsi yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
v=[]; cp=0;
repeat
   {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
   until pos==0;
   if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
   cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.

Dalam contoh, kita membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam judul.

```
>function readversion () ...
```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
  until urleof();
  s=urlgetline();
  k=strfind(s,"Version ",1);
  if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2022-05-18
```

Masukan dan Keluaran Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2),"M",file); ...
>printfile(file,3)
```

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
```

Sekarang kita dapat memuat file tersebut. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
M =
  0.59918   0.79603
  0.51672   0.29967
```

Sebagai catatan, jika writevar() digunakan pada sebuah variabel, maka ia akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel tersebut.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
M = [ ..
0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
inch$ = 0.0254;
```

Kita juga dapat membuka file baru atau menambahkan ke file yang sudah ada. Dalam contoh ini, kami menambahkan ke file yang telah dibuat sebelumnya.ed file.

```
>open(file,"a"); ...
>writevar(random(2,2),"M1"); ...
>writevar(random(3,1),"M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
M1 =
  0.30287   0.15372
   0.7504   0.75401
M2 =
  0.27213
 0.053211
  0.70249
```

Untuk menghapus file, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Sebuah vektor baris dalam sebuah file tidak membutuhkan koma, jika setiap angka berada dalam baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("];"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.344851384551
0.0807510017715
0.876519562911
0.754157709472
0.688392638934
];
```

```
> load(file); M
```

```
[0.34485,  0.080751,  0.87652,  0.75416,  0.68839]
```

Contoh Soal

Soal 1 (Mean)

Di bawah ini terdapat data jumlah siswa kelas 7 SMP Rukun. Terdapat 4 kelas 7 di SMP Rukun, dengan jumlah siswa laki-laki dan perempuan yang tidak merata.

Jenis Kelamin Kelas7A Kelas7B Kelas7C Kelas7D
Perempuan 18 17 11 10
Laki-laki 12 13 19 15

Hitung rata-rata jumlah siswa laki-laki dan rata-rata jumlah siswa perempuan kelas 7 SMP Rukun!

- Mean jumlah siswa laki-laki

```
>x=[12,13,19,15]; mean(x),
```

```
14.75
```

Penjelasan :

$$\sum x_i = 12 + 13 + 19 + 15 = 59$$

```
n = 4
```

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{59}{4}$$

$$\bar{X} = 14,75$$

Sehingga rata-rata jumlah anak laki-laki adalah 14,75
- Mean jumlah siswa perempuan

```
>x=[18,17,11,10]; mean(x),
```

```
14
```

Penjelasan :

$$\sum x_i = 18 + 17 + 11 + 10 = 56$$

```
n = 4
```

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{66}{4}$$

$$\bar{X} = 14$$

Sehingga rata-rata jumlah anak perempuan adalah 14

Soal 2 (Median Data Tunggal)

Data berat badan (kg) siswa kelas VI SD Suka Maju adalah sebagai berikut:
32, 34, 34, 33, 34, 33, 32, 35, 34, 32, 33, 34, 34, 32, 33, 34, 32, 33, 33, 34, 40
Tentukan median dari data di atas!

```
>data=[32, 34, 34, 33, 34, 33, 32, 35, 34, 32, 33, 34, 34, 32, 33, 34, 32, 33, 33, 34, 40]
>urut=sort(data)
```

```
[32,  32,  32,  32,  32,  33,  33,  33,  33,  33,  33,  34,  34,  34,
34,  34,  34,  34,  34,  35,  40]
```

Dalam menentukan median, langkah pertama yang harus dilakukan adalah dengan mengurutkan data tersebut dari yang terkecil sampai yang terbesar dengan fungsi sort(data). Fungsi sort(data) dalam EMT digunakan untuk mengurutkan elemen-elemen dalam suatu vektor atau matriks(dari nilai terkecil ke nilai terbesar).

```
>median(data)
```

```
33
```

Diketahui bahwa kasus ini merupakan data yang berjumlah ganjil, sehingga nilai median untuk kasus ini adalah sama dengan data yang memiliki nilai di urutan paling tengah yang memiliki nomor urut k.

$$k = \frac{n+1}{2}$$

$$k = \frac{21+1}{2}$$

$$k = 11$$

$$Me = X_(11) = 33$$

Jadi nilai tengah dari data berat badan siswa kelas VI SD Suka Maju adalah 33

```
>
```

Soal 3(Modus)

Berikut adalah data hasil dari pengukuran berat badan 40 siswa SD Negeri Tambakrejo. Dari ke 40 siswa, mayoritas siswa memiliki berat badan yang ideal.
Siswa yang mempunyai berat badan dalam rentang 21-25 kg sebanyak 3 orang,
yang mempunyai berat badan dalam rentang 26-30 kg sebanyak 10 orang,
yang mempunyai berat badan dalam rentang 31-35 kg sebanyak 7 orang,
yang mempunyai berat badan dalam rentang 36-40 kg sebanyak 8 orang,
yang mempunyai berat badan dalam rentang 41-45 kg sebanyak 7 orang,
dan yang mempunyai berat badan 46-50 kg sebanyak 5 orang.
Tentukan modus dari data hasil pengukuran berat badan 40 siswa di SD tersebut!
Penyelesaian:
Menentukan tepi bawah kelas yang terkecil

```
>21-0.5
```

```
20.5
```

Menentukan panjang kelas

```
>(25-21)+1
```

```
5
```

Menentukan tepi atas yang terbesar

```
>50+0.5
```

```
50.5
```

```
>r=20.5:5:50.5; v=[3,10,7,8,7,5];
>T:=r[1:6]' | r[2:7]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","frek"])
```

```
          TB          TA        frek
        20.5        25.5           3
        25.5        30.5          10
        30.5        35.5           7
        35.5        40.5           8
        40.5        45.5           7
        45.5        50.5           5
```

Berdasarkan data, modus berada pada kelas 35.5-30.5.

```
>Tb=25.5, p=5, d1=7, d2=3
```

```
25.5
5
7
3
```

```
>Tb+p*d1/(d1+d2)
```

```
29
```

Jadi modus dari data hasil pengukuran berat badan 40 siswa di SD Tambakrejo adalah 29

Soal 4 (Distribusi Frekuensi)

Disajikan data urut yaitu 45,48,49,50,52,52,52,53,53,54,54,54,54,54,56,56, 56,56,57,57,58,58,58,58,58,58,58,59,59,60,60,60, 62,62,62,63,63,64,64,65,67,68,69,70,70,71,73,74.
Buatlah distribusi frekuensi berdasarkan data diatas!
Penyelesaian:

```
- Menentukan range
  range= nilai maks-nilai min
       = 74-45
       = 29
- Menentukan banyak kelas dengan aturan
  struges.
  = 1+3,3 log n, n banyaknya data
  = 1+3,3 log 48
  = 6,64
  = 7
- Menentukan panjang kelas
```

$$p = \frac{range}{banyakkelas}$$

$$p = \frac{29}{7}$$

$$p = 4.14 = 5$$

Berdasarkan pertimbangan beberapa unsur dalam data urut diatas yaitu nilai minimum 45, nilai maksimum 74, banyak kelas yaitu 7, dan panjang kelas yaitu 5 maka dapat dibuat tabel distribusi frekuensi dengan batas bawah kelas pertama yaitu 43 dan batas atas kelas ketujuh yaitu 77. Sehingga dapat ditentukan tepi bawah kelas pertama yaitu 43-0.5=42.5 dan tepi atas kelas ketujuh yaitu 77+0.5=77.5.

```
>r=42.5:5:77.5; v=[1,6,13,15,6,5,2];
>T:=r[1:7]' | r[2:8]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","Frek"])
```

```
        TB        TA      Frek
      42.5      47.5         1
      47.5      52.5         6
      52.5      57.5        13
      57.5      62.5        15
      62.5      67.5         6
      67.5      72.5         5
      72.5      77.5         2
```

Mencari titik tengah

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
        45
        50
        55
        60
        65
        70
        75
```

Sajian dalam bentuk histogram

```
> plot2d(r,v,a=40,b=80,c=0,d=20,bar=1,style="\/"):
```

images/KB Pekan 13&14_Nisrina Octaviani_22305144011-065.png

Soal 5 (Median Data Kelompok)

Berikut adalah data hasil dari pengukuran berat badan 50 siswa SD Negeri Tambakrejo. Dari ke 50 siswa, mayoritas siswa memiliki berat badan yang ideal. Siswa yang mempunyai berat badan dalam rentang 21-26 kg sebanyak 5 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 27-32 kg sebanyak 10 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 33-38 kg sebanyak 12 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 39-44 kg sebanyak 14 orang, yang mempunyai berat badan dalam rentang 45-50 kg sebanyak 7 orang, dan yang mempunyai berat badan 51-56 kg sebanyak 2 orang. Tentukan median dari data hasil pengukuran berat badan 50 siswa di SD tersebut!
Penyelesaian:
Menentukan tepi bawah kelas yang terkecil

```
>21-0.5
```

```
20.5
```

Menentukan panjang kelas

```
>(26-21)+1
```

```
6
```

Menentukan tepi atas kelas yang terbesar

```
>56+0.5
```

```
56.5
```

```
>r=20.5:6:56.5; v=[5,10,12,14,7,2];
>T:=r[1:6]' | r[2:7]' | v'; writetable(T,labc=["TB","TA","frek"])
```

```
        TB        TA      frek
      20.5      26.5         5
      26.5      32.5        10
      32.5      38.5        12
```

```
38.5       44.5        14
44.5       50.5         7
50.5       56.5         2
```

Berdasarkan data, median berada pada urutan ke 25, maka median berada pada kelas 32.5-38.5.

```
>Tb=32.5, p=6, n=50, Fks=15, fm=12
```

```
32.5
6
50
15
12
```

```
>Tb+p*(1/2*n-Fks)/fm
```

```
37.5
```

Diketahui bahwa median berada di data ke 25

$$Me = Tb + \frac{\frac{1}{2}n - f_{ks}}{f_m}.p$$

$$Me = 32.5 + \frac{\frac{1}{2}(50) - 15}{12}.6$$

$$Me = 32.5 + 5$$

$$Me = 37.5$$

Jadi median dari data hasil pengukuran berat badan 50 siswa SD Tambakrejo adalah 37.5