Логистическое отображение
Лабораторная работа 1

Иванов Денис

1 Easy level

1.1 Задание 1

Доказать: $\forall n \in N,\ \forall r \in [0;1]$

$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

Доказательство:

Используем индукцию по n.

1. **База:** $n = 1$. $x_1 = rx_0(1-x_0)$. Так как $0 < x_0 < 1$, то $0 < 1-x_0 < 1$. При $0 < r < 1$ получаем $0 < x_1 < x_0(1-x_0) < 1$.

2. **Предположение:** Пусть $0 < x_k < 1$ для некоторого k.

3. **Шаг:** $x_{k+1} = rx_k(1-x_k)$. Так как $0 < x_k < 1$, то $0 < (1-x_k) < 1$ При $0 < r < 1$ получаем $0 < x_{k+1} < x_k(1-x_k) < 1$ Таким образом, утверждение доказано.

1.2 Задание 2

Условие: Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1}? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

Ответ:

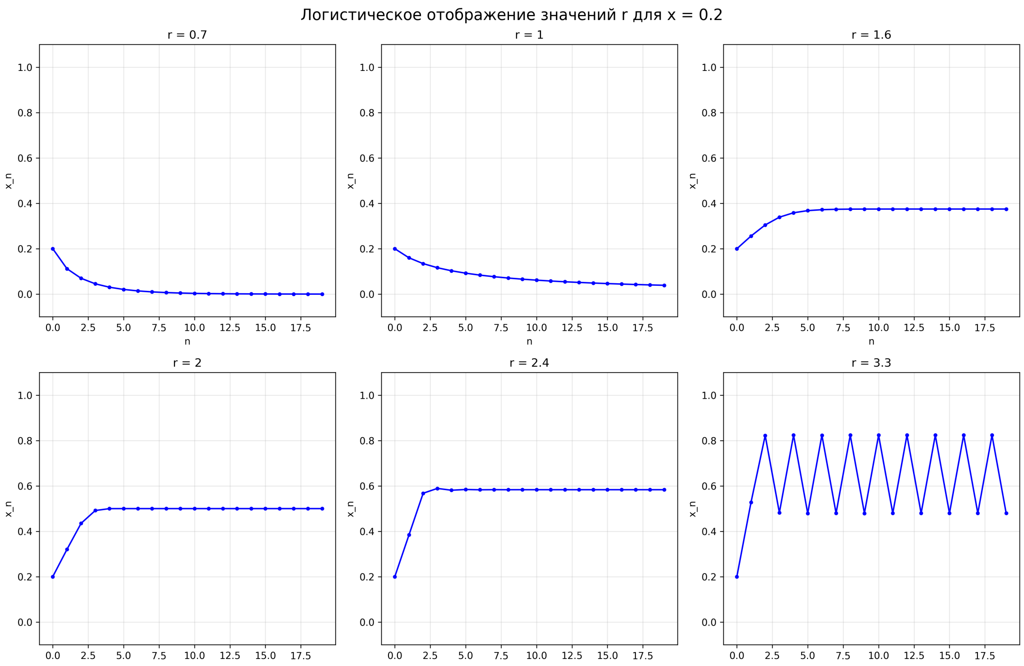
Параметр r в логистическом отображении $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ определяет скорость роста популяции.

1. **При** $r \leq 1$**:** Популяция вымирает. Последовательность x_n монотонно убывает и стремится к 0.

2. **При** $1 < r < 3$**:** Популяция стремится стабилизироваться.

3. **При** $r \geq 3$**:** Изменение численности популяции либо становитсе циклическим, чередуя рост и вымирание, либо ведёт себя полностью хаотично.

Для визуализации построены графики зависимости x_n от n при различных r:



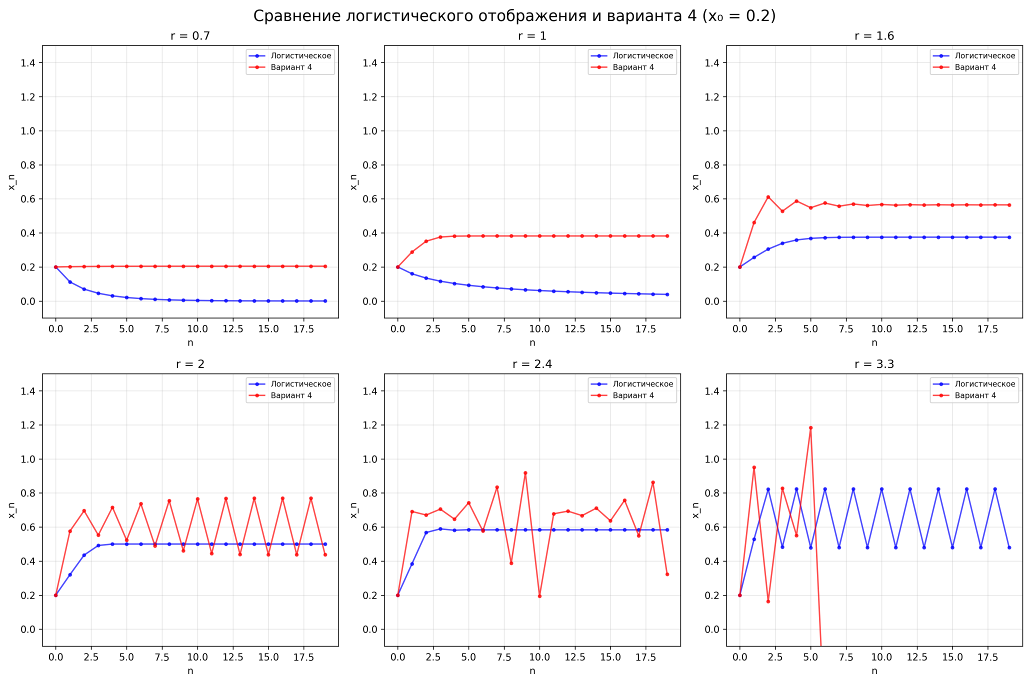
1.3 Задание 3

Условие: Для заданной функции $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$:

1. Постройте графики зависимости x_n от x_{n-1} для нескольких различных значений r.

2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Предположите: чем могут быть вызваны сходства/различия?

Ответ: 1. Графики построены для $r = 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.3,\ 2.5$ (все значения лежат в допустимом диапазоне $r \in \left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$



Сходста: Функции схожи тем что при $1 \le r < 2$ обе функции показывают стремление кстабилизации численности популяции

Различия: При $2 \le r$ функция логистического отображения показывает хаотичное развитие численности популяции.

Причины: Множитель $(2 - x_n)$ При малой численности поппуляции очень сильно её разгоняет, а при очень высокой наоборот начинает сильно тормозить, тем самым создавая колебания.

2 Normal level

2.1 Неподвижные точки

Условие:

1. Найдите все неподвижные точки логистического отображения.

2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?

3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

2.1.1 1. Все неподвижные точки

Решаем уравнение: $x = rx(1-x)$

$$x = rx - rx^2$$
$$rx^2 - rx + x = 0$$
$$x(rx - r + 1) = 0$$

Получаем:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1 - \frac{1}{r} \quad \text{при } r \neq 0$$

2.1.2 2. Количество точек в зависимости от r

- **Одна точка** $x = 0$: при $r < 1$ (включая $r = 0$)
- **Две точки**: при $r > 1$

2.1.3 3. Максимальное количество

Логистическое отображение может иметь максимум две неподвижные точки.

Причина: уравнение $x = rx(1-x)$ квадратное, квадратное уравнение имеет не более двух корней.

Условие: Докажите, что при $x_0 \in (0;1)$ и $r \in (0;1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0;1]$? Докажите. Покажите графически.

2.1.4 1. Доказательство монотонного убывания

Рассмотрим разность двух последовательных членов:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n(1-x_n) - x_n = x_n[r(1-x_n) - 1]$$

Так как:

- $x_n > 0$
- $r \leq 1$ и $0 < x_n < 1$ то $1 - x_n > 0$
- $r(1 - x_n) \leq 1 \cdot (1 - x_n) < 1$

Получаем $r(1 - x_n) - 1 < 0$, значит $x_{n+1} - x_n < 0$.

Следовательно, $x_{n+1} < x_n$ для всех n — последовательность монотонно убывает.

2.1.5 2. Существование предела

Последовательность:

- Монотонно убывает (доказано выше)
- Ограничена снизу: $x_n > 0$ (следует из $x_0 > 0$ и вида отображения)

По теореме о монотонной ограниченной последовательности предел существует.

Найдём его: пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Переходя к пределу:

$$L = rL(1 - L)$$
$$L(1 - r + rL) = 0$$

Решения: $L = 0$ или $L = 1 - \frac{1}{r}$.

При $r \leq 1$ вторая точка $L \leq 0$, не подходит (так как $x_n > 0$).

Итог: $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2.1.6 3. Графическое подтверждение

График показывает что при $x_0 \in (0; 1)$ и $r \in (0; 1]$ последовательность монотонно убывает.

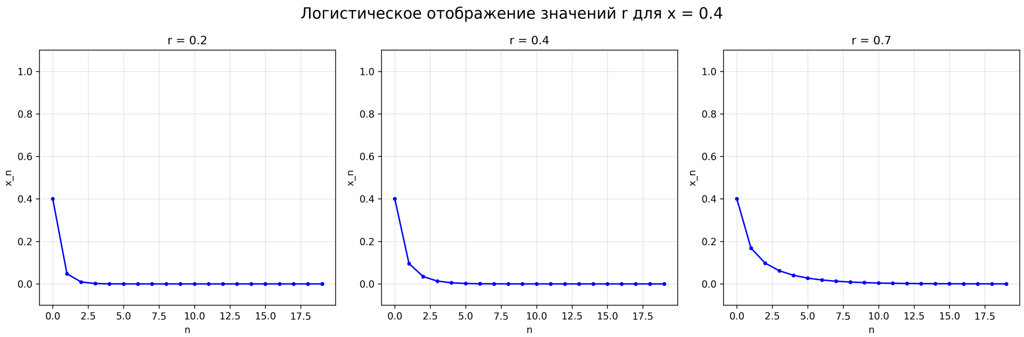
2.1.7

Рассмотрим двойную итерацию $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = rx(1 - x)$.

Шаг 1: При $x > x^*$ выполняется $f(x) < x^*$.

Доказательство:

$$f(x) - x^* = rx(1 - x) - \left(1 - \frac{1}{r}\right) = r(x - x^*)[1 - (x + x^*)]$$



Так как $x > x^* > 0.5$ (при $r > 2$), то $x + x^* > 1$, значит $1 - (x + x^*) < 0$, поэтому $f(x) < x^*$.

Шаг 2: Для $g(x) = f(f(x))$ в точке x^*:

$$g(x^*) = x^*, \quad g'(x^*) = [f'(x^*)]^2 = (2 - r)^2 < 1 \text{ при } 2 < r < 3$$

Значит $g(x)$ — сжимающее отображение в окрестности x^*.

Шаг 3: При $x > x^*$:

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}) < x_{2n}$$

Таким образом, $\{x_{2n}\}$ монотонно убывает.

Шаг 4: Аналогично для $x < x^*$:

$$x_{2n+3} = g(x_{2n+1}) > x_{2n+1}$$

Таким образом, $\{x_{2n+1}\}$ монотонно возрастает.

Обе подпоследовательности ограничены и монотонны, следовательно, сходятся к x^*.

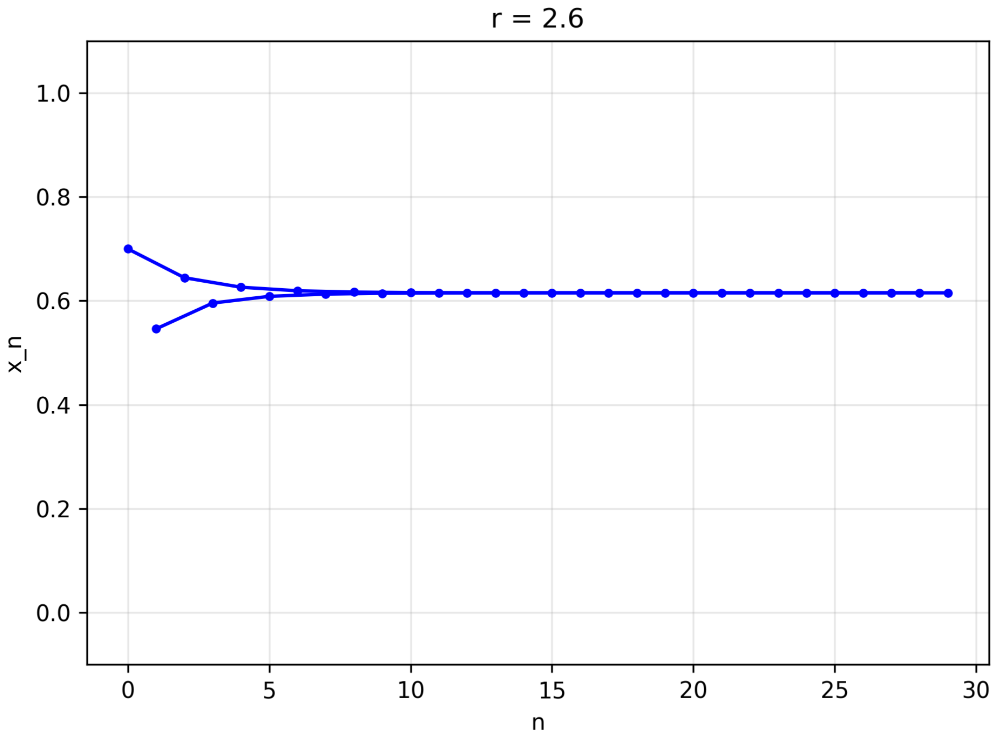
2.1.8

2.2

Условие: Для отображения $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$:

1. Аналитически найдите неподвижную точку.

2. Найдите или оцените диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю.



3. Постройте графики зависимости x_n от n для нескольких различных значений параметра r.

2.2.1 1. Неподвижная точка

Решаем уравнение $x = rx(1-x)(2-x)$:

$$x = rx(1-x)(2-x)$$

$$rx(1-x)(2-x) - x = 0$$

$$x[r(1-x)(2-x) - 1] = 0$$

Первое решение: $x_1^* = 0$.
Второе уравнение: $r(1-x)(2-x) = 1$.
Раскрываем скобки: $(1-x)(2-x) = 2 - 3x + x^2$.

Получаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 3x + \left(2 - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Дискриминант: $D = 9 - 4\left(2 - \frac{1}{r}\right) = 1 + \frac{4}{r}$.
Корни:

$$x^*_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{r}}}{2}$$

При $r > 0$ точка $x^*_3 > 1$ не имеет биологического смысла.

Итог: в диапазоне [0,1] неподвижные точки: $x^*_1 = 0$ и $x^*_2 = \frac{3-\sqrt{1+\frac{4}{r}}}{2}$ (при $r > 0.5$).

2.2.2 2. Диапазон r для монотонной сходимости к нулю

Последовательность монотонно сходится к нулю, если:

1. Точка $x = 0$ устойчива
2. Других неподвижных точек в (0,1] нет

Условие устойчивости $x = 0$: $|g'(0)| < 1$.
Вычисляем производную:

$$g'(x) = r[(1-x)(2-x) - x(2-x) - x(1-x)]$$

$$g'(0) = r \cdot (1 \cdot 2) = 2r$$

Условие: $|2r| < 1 \quad r < 0.5$.

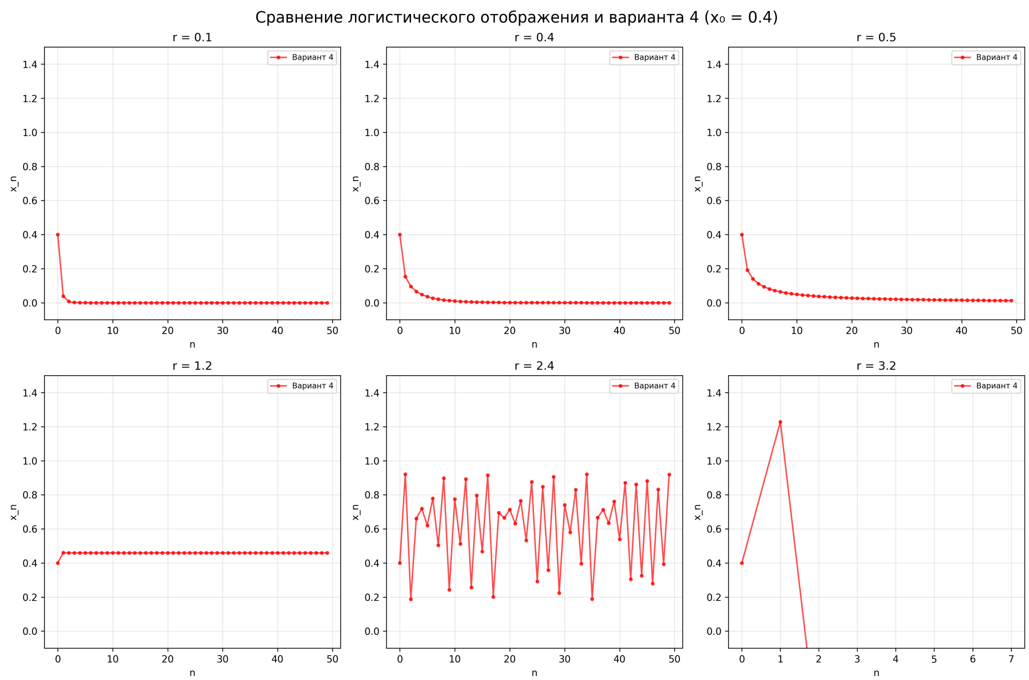
При $r < 0.5$ точка $x^*_2 = \frac{3-\sqrt{1+\frac{4}{r}}}{2} < 0$, значит в [0,1] только точка $x = 0$.

Итог: последовательность монотонно сходится к нулю при $0 \leq r < 0.5$.

2.2.3

3 Hard level

Условие:


Сравнение логистического отображения и варианта 4 (x_0 = 0.4)
r = 0.1
r = 0.4
r = 0.5
r = 1.2
r = 2.4
r = 3.2
Вариант 4
x_n
n

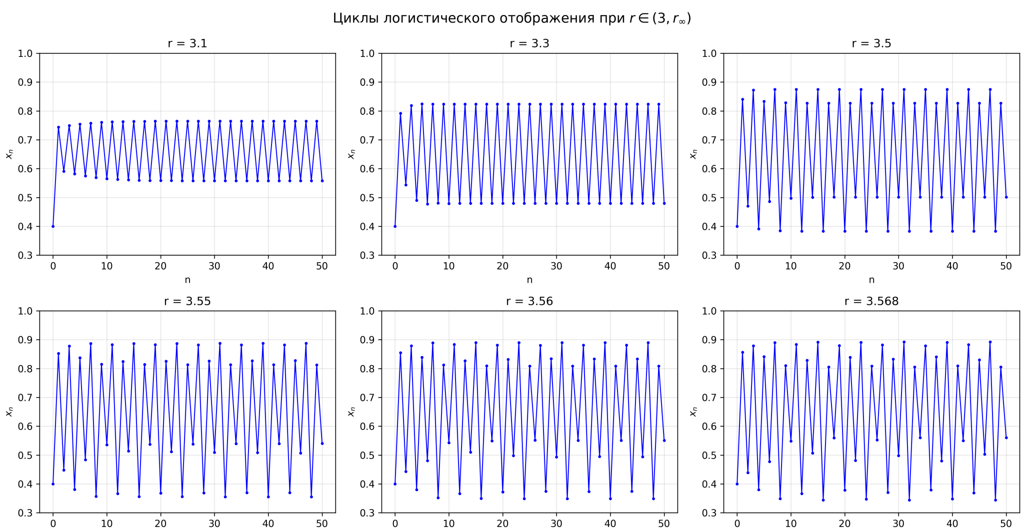
1. Положим $r_\infty \approx 3.5699456\ldots$. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?
2. Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения действуют на m?

3.0.1 1. Изменение длины цикла

При увеличении r от 3 до r_∞ длина цикла m постепенно увеличивается. Чем ближе r к r_∞, тем больше период цикла m.

3.0.2 2. Ограничения на m

При $r \in (3; r_\infty)$ длина цикла m всегда является степенью двойки:



3.1 Лестница Ламерея

Условие:

1. Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея.

2. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

Ответ:

3.1.1 1. Функция построения лестницы

```
def lamerey_stairs(r, x0=0.2, steps=20):
    x = np.linspace(0, 1, 400)
    y = r * x * (1 - x)

    # Инициализация
    x_points = [x0, x0]
    y_points = [0, r*x0*(1-x0)]

    # Построение лестницы
    for i in range(steps-1):
        # Горизонтальный шаг
        new_x = y_points[-1]
        x_points.extend([new_x, new_x])
        y_points.extend([y_points[-1], y_points[-1]])

        # Вертикальный шаг
        new_y = r * new_x * (1 - new_x)
        x_points.extend([new_x, new_x])
        y_points.extend([y_points[-1], new_y])

    return x_points, y_points
```

3.1.2 2. Вид циклов на графике

- **Цикл порядка 1** (неподвижная точка): лестница сходится в одну точку
- **Цикл порядка 2**: лестница образует прямоугольник
- **Цикл порядка 4**: образует два прямоугольника

3.2

Условие: Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного вариантом отображения $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$ с изменением параметра r? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

Для заданного вариантом отображения ($r \in [0, \frac{3\sqrt{3}}{2}] \approx [0, 2.598]$):

Длина цикла увеличивается с ростом r, но значительно медленнее, чем у логистического отображения