Логистическое отображение
Лабораторная работа 1

Иванов Денис

1 Easy level

1.1 Задание 1

Доказать: $\forall n \in N,\ \forall r \in [0;1]$

$$0 < x_0 < 1 \implies 0 < x_n < 1$$

Доказательство:

Используем индукцию по n.

1. **База:** $n = 1$. $x_1 = rx_0(1-x_0)$. Так как $0 < x_0 < 1$, то $0 < 1-x_0 < 1$. При $0 < r < 1$ получаем $0 < x_1 < x_0(1-x_0) < 1$.

2. **Предположение:** Пусть $0 < x_k < 1$ для некоторого k.

3. **Шаг:** $x_{k+1} = rx_k(1-x_k)$. Так как $0 < x_k < 1$, то $0 < (1-x_k) < 1$ При $0 < r < 1$ получаем $0 < x_{k+1} < x_k(1-x_k) < 1$ Таким образом, утверждение доказано.

1.2 Задание 2

Условие: Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1}? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

Ответ:

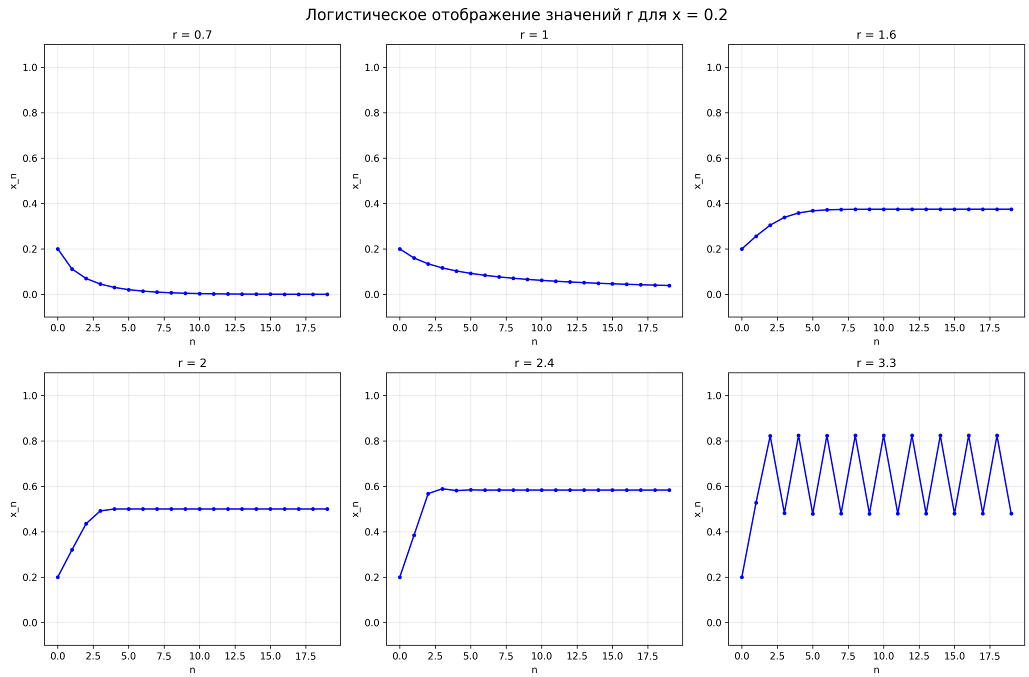
Параметр r в логистическом отображении $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ определяет скорость роста популяции.

1. **При** $r \leq 1$**:** Популяция вымирает. Последовательность x_n монотонно убывает и стремится к 0.

2. **При** $1 < r < 3$**:** Популяция стремится стабилизироваться.

3. **При** $r \geq 3$**:** Изменение численности популяции либо становитсе циклическим, чередуя рост и вымирание, либо ведёт себя полностью хаотично.

Для визуализации построены графики зависимости x_n от n при различных r:



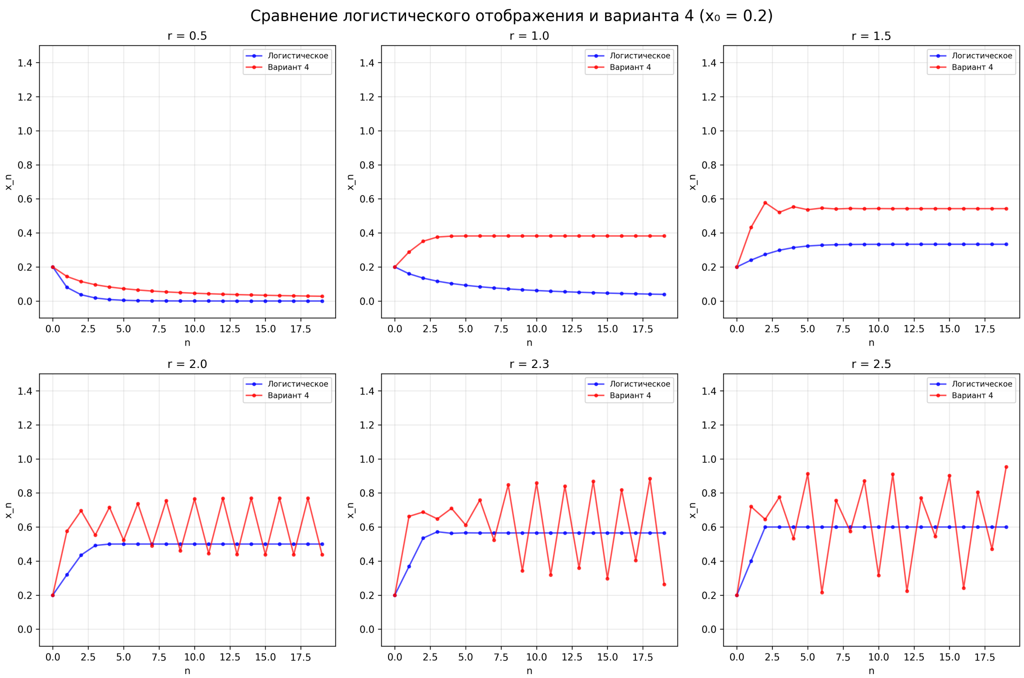
1.3 Задание 3

Условие: Для заданной функции $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$:

1. Постройте графики зависимости x_n от x_{n-1} для нескольких различных значений r.

2. Сделайте вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из вашего варианта. Предположите: чем могут быть вызваны сходства/различия?

Ответ: 1. Графики построены для $r = 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.3,\ 2.5$ (все значения лежат в допустимом диапазоне $r \in \left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$



Сходста: Функции схожи тем что при $1 \leq r < 2$ обе функции показывают стремление кстабилизации численности популяции

Различия: При $2 \leq r$ функция логистического отображения показывает хаотичное развитие численности популяции.

Причины: Множитель $(2 - x_n)$ При малой численности поппуляции очень сильно её разгоняет, а при очень высокой наоборот начинает сильно тормозить, тем самым создавая колебания.

2 Normal level

2.1 Неподвижные точки

Условие:

1. Найдите все неподвижные точки логистического отображения.

2. При каких r отображение имеет одну неподвижную точку? Несколько?

3. Какое максимальное количество неподвижных точек может иметь логистическое отображение? Почему?

2.1.1 1. Все неподвижные точки

Решаем уравнение: $x = rx(1-x)$

$$x = rx - rx^2$$
$$rx^2 - rx + x = 0$$
$$x(rx - r + 1) = 0$$

Получаем:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1 - \frac{1}{r} \quad \text{при } r \neq 0$$

2.1.2 2. Количество точек в зависимости от r

- **Одна точка** $x = 0$: при $r < 1$ (включая $r = 0$)
- **Две точки**: при $r > 1$

2.1.3 3. Максимальное количество

Логистическое отображение может иметь максимум две неподвижные точки.

Причина: уравнение $x = rx(1-x)$ квадратное, квадратное уравнение имеет не более двух корней.

Условие: Докажите, что при $x_0 \in (0;1)$ и $r \in (0;1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0;1]$? Докажите. Покажите графически.

2.1.4 1. Доказательство монотонного убывания

Рассмотрим разность двух последовательных членов:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n(1-x_n) - x_n = x_n[r(1-x_n) - 1]$$

Так как:

- $x_n > 0$
- $r \leq 1$ и $0 < x_n < 1$ то $1 - x_n > 0$
- $r(1 - x_n) \leq 1 \cdot (1 - x_n) < 1$

Получаем $r(1 - x_n) - 1 < 0$, значит $x_{n+1} - x_n < 0$.

Следовательно, $x_{n+1} < x_n$ для всех n — последовательность монотонно убывает.

2.1.5 2. Существование предела

Последовательность:

- Монотонно убывает (доказано выше)
- так как $x_0 \in (0, 1)$ и $r \in (0, 1]$ то по индукции $0 < x_n < 1$ для всех n. Следовательно последовательность ограничена снизу 0

Так как последовательность монотонно убывает и ограничена снизу, то по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

2.1.6 3. Графическое подтверждение

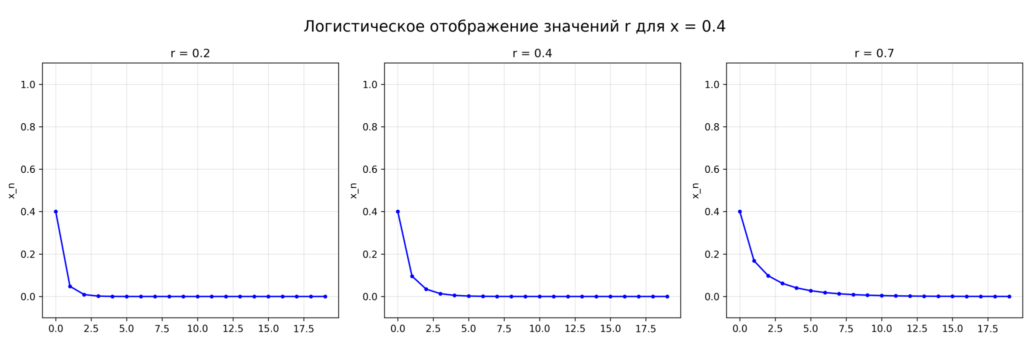


График показывает что при $x_0 \in (0; 1)$ и $r \in (0; 1]$ последовательность монотонно убывает.

2.1.7

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad r \in (2; 3).$$

Неподвижная точка данного отображения имеет вид

$$x^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Покажем, что если $x > x^*$, то $f(x) < x^*$.

Рассмотрим разность:

$$f(x) - x^* = rx(1 - x) - \left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Преобразуем:

$$f(x) - x^* = r(x - x^*)\big(1 - (x + x^*)\big).$$

Так как $r > 2$, то $x^* = 1 - \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$. Следовательно, при $x > x^*$ имеем $x + x^* > 1$, а значит

$$1 - (x + x^*) < 0.$$

Поскольку $x - x^* > 0$, получаем

$$f(x) - x^* < 0,$$

то есть $f(x) < x^*$.

Аналогично доказывается, что если $x < x^*$, то $f(x) > x^*$.

Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{2n}\}$. По условию задачи $x_{2n} > x^*$, поэтому

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) < x^*.$$

Применяя отображение ещё раз, получаем

$$x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) < x_{2n}.$$

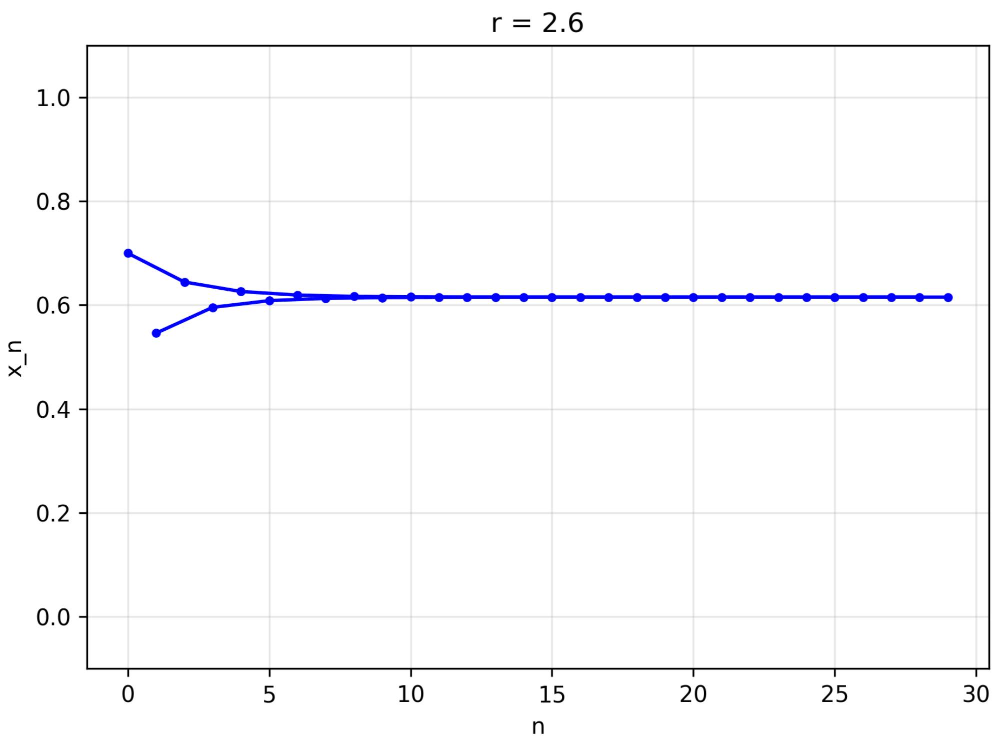
Следовательно, подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ монотонно убывает.

Аналогично, из неравенства $x_{2n+1} < x^*$ следует, что

$$x_{2n+3} = f(x_{2n+2}) > x_{2n+1},$$

поэтому подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$ монотонно возрастает.

2.1.8



2.2

Условие: Для отображения $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$:

1. Аналитически найдите неподвижную точку.
2. Найдите или оцените диапазон параметра r, при котором последовательность монотонно сходится к нулю.
3. Постройте графики зависимости x_n от n для нескольких различных значений параметра r.

2.2.1 1. Неподвижная точка

Решаем уравнение $x = rx(1 - x)(2 - x)$:

$$x = rx(1-x)(2-x)$$
$$rx(1-x)(2-x) - x = 0$$
$$x[r(1-x)(2-x) - 1] = 0$$

Первое решение: $x_1^* = 0$.
Второе уравнение: $r(1-x)(2-x) = 1$.
Раскрываем скобки: $(1-x)(2-x) = 2 - 3x + x^2$.
Получаем квадратное уравнение:

$$x^2 - 3x + \left(2 - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Дискриминант: $D = 9 - 4\left(2 - \frac{1}{r}\right) = 1 + \frac{4}{r}$.
Корни:

$$x_{2,3}^* = \frac{3 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{r}}}{2}$$

При $r > 0$ точка $x_3^* > 1$ не имеет биологического смысла.

Итог: в диапазоне [0,1] неподвижные точки: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = \frac{3-\sqrt{1+\frac{4}{r}}}{2}$ (при $r > 0.5$).

2.2.2 2. Диапазон r для монотонной сходимости к нулю

Рассмотрим отображение

$$x_{n+1} = g(x_n) = rx_n(1-x_n)(2-x_n), \quad x_0 \in (0;1).$$

Покажем, при каких значениях параметра r последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю.

Для $x_n \in (0;1)$ имеем оценки:

$$0 < (1-x_n)(2-x_n) < 2.$$

Следовательно,

$$0 < x_{n+1} = rx_n(1-x_n)(2-x_n) < 2rx_n.$$

Если

$$2r < 1 \quad \leftrightarrow \quad r < \frac{1}{2},$$

то из неравенства следует:

$$0 < x_{n+1} < x_n,$$

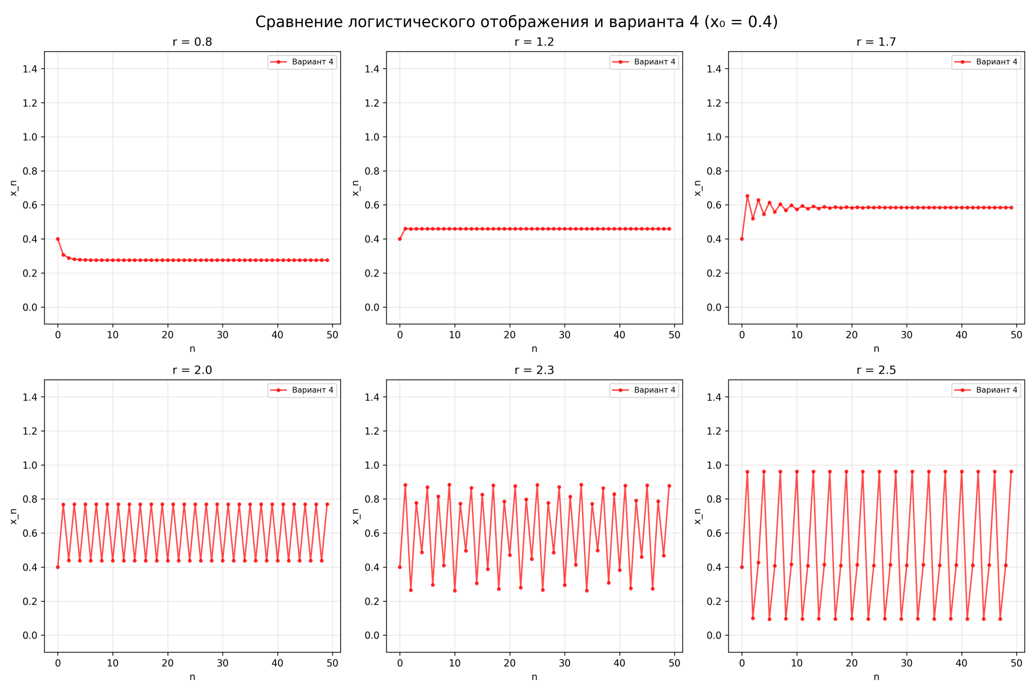
то есть последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает.

Кроме того, при $r < \frac{1}{2}$ других неподвижных точек в интервале $(0; 1]$ не существует, поскольку решение уравнения

$$r(1 - x)(2 - x) = 1$$

при этом условии даёт $x < 0$.

Таким образом, при $0 \leq r < \frac{1}{2}$ последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает, ограничена снизу нулём и, следовательно, сходится к нулю.



3 Hard level

Условие:

1. Положим $r_\infty \approx 3.5699456\ldots$. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?

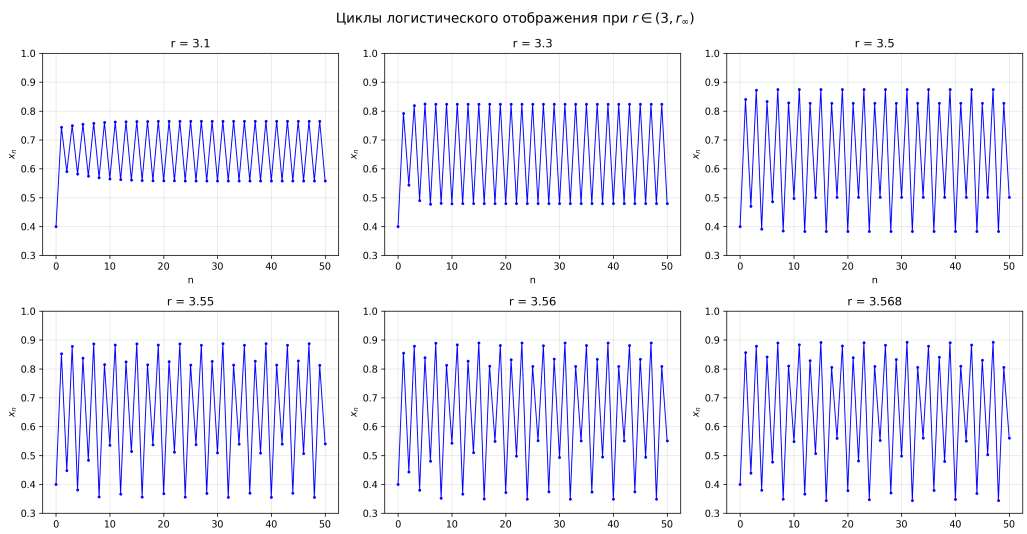
2. Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения действуют на m?

3.0.1 1. Изменение длины цикла

При увеличении r от 3 до r_∞ длина цикла m постепенно увеличивается. Чем ближе r к r_∞, тем больше период цикла m.

3.0.2 2. Ограничения на m

При $r \in (3; r_\infty)$ длина цикла m всегда является степенью двойки:



3.1 Лестница Ламерея

Условие:

1. Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея.

2. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

Ответ:

3.1.1 1. Функция построения лестницы

```
def lamerey_stairs(r, x0=0.2, steps=20):
    x = np.linspace(0, 1, 400)
    y = r * x * (1 - x)

    # Инициализация
    x_points = [x0, x0]
    y_points = [0, r*x0*(1-x0)]

    # Построение лестницы
    for i in range(steps-1):
        # Горизонтальный шаг
        new_x = y_points[-1]
        x_points.extend([new_x, new_x])
        y_points.extend([y_points[-1], y_points[-1]])

        # Вертикальный шаг
        new_y = r * new_x * (1 - new_x)
        x_points.extend([new_x, new_x])
        y_points.extend([y_points[-1], new_y])

    return x_points, y_points
```

3.1.2 2. Вид циклов на графике

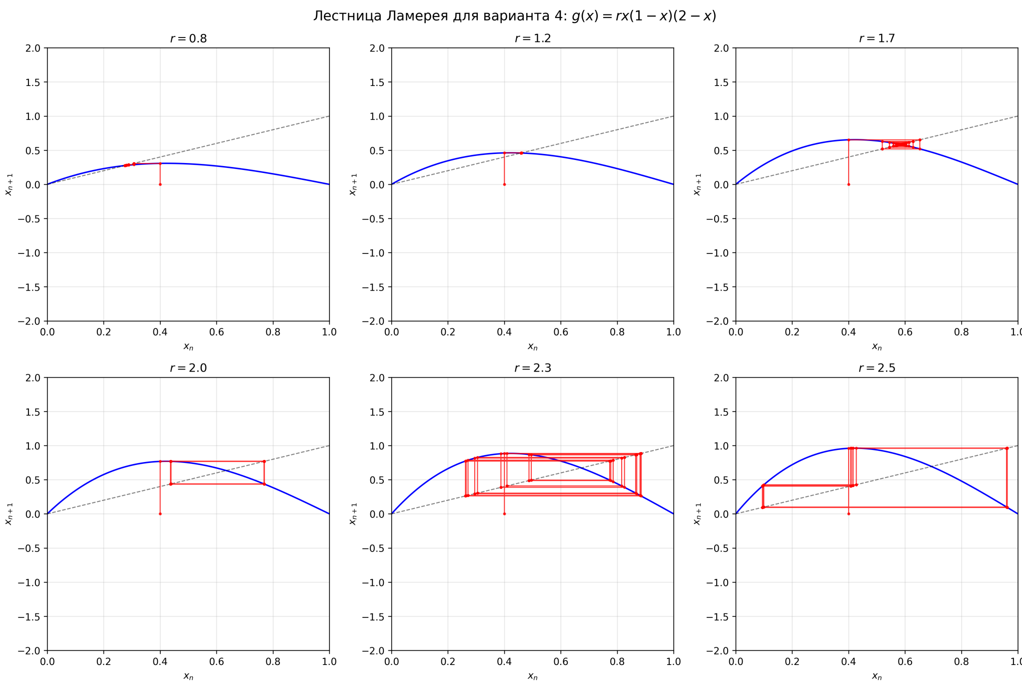
- **Цикл порядка 1** (неподвижная точка): лестница сходится в одну точку
- **Цикл порядка 2**: лестница образует прямоугольник
- **Цикл порядка 4**: образует два прямоугольника

3.2

Условие: Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного вариантом отображения $g(x_n) = rx_n(1 - x_n)(2 - x_n)$ с изменением параметра r? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

Для заданного вариантом отображения ($r \in [0, \frac{3\sqrt{3}}{2}] \approx [0, 2.598]$):

Длина цикла увеличивается с ростом r, но значительно медленнее, чем у логистического отображения



4 Expert level

4.1 Асимптотическая устойчивость x* из условия

$$\exists \delta_0 > 0 : |x_0 - x^*| < \delta_0 \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*.$$

Условие гарантирует лишь сходимость траектории при $n \to \infty$, но не накладывает ограничений на поведение последовательности при конечных n. В частности, возможно, что траектория сначала существенно удаляется от точки x^*, а затем возвращается к ней.

Следовательно, из данного условия не следует устойчивость по Ляпунову, а значит, не следует и асимптотическая устойчивость.

Устойчивость и асимптотическая устойчивость точки $x^* = 0$ при $r \in (0, 1)$

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad r \in (0, 1).$$

Неподвижная точка данного отображения равна $x^* = 0$.

Так как $x_n \in (0, 1)$, то $1 - x_n \in (0, 1)$ и следовательно,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) < rx_n.$$

Итерируя данное неравенство, получаем

$$0 < x_n < r^n x_0.$$

Поскольку $0 < r < 1$, последовательность r^n стремится к нулю, откуда

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta = \varepsilon$, и тогда из условия $|x_0| < \delta$ следует

$$|x_n| \leq |x_0| < \varepsilon \quad \forall n.$$

Следовательно, неподвижная точка $x^* = 0$ является устойчивой и асимптотически устойчивой.

Неустойчивость неподвижной точки $x^* = 0$ при $r \in (2, 3)$

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \qquad r \in (2, 3).$$

Точка $x^* = 0$ является неподвижной, так как $g(0) = 0$.

Покажем, что данная точка неустойчива. Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и пусть $\delta > 0$ — произвольное число. Положим

$$x_0 = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Тогда $0 < x_0 < \delta$.

Пока $x_n \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, выполнено неравенство

$$1 - x_n \geq \frac{1}{2},$$

и, следовательно,

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \geq \frac{r}{2}x_n.$$

Так как $r \in (2, 3)$, имеем $\frac{r}{2} > 1$. Отсюда следует, что последовательность x_n строго возрастает, и

$$x_n \geq \left(\frac{r}{2}\right)^n x_0.$$

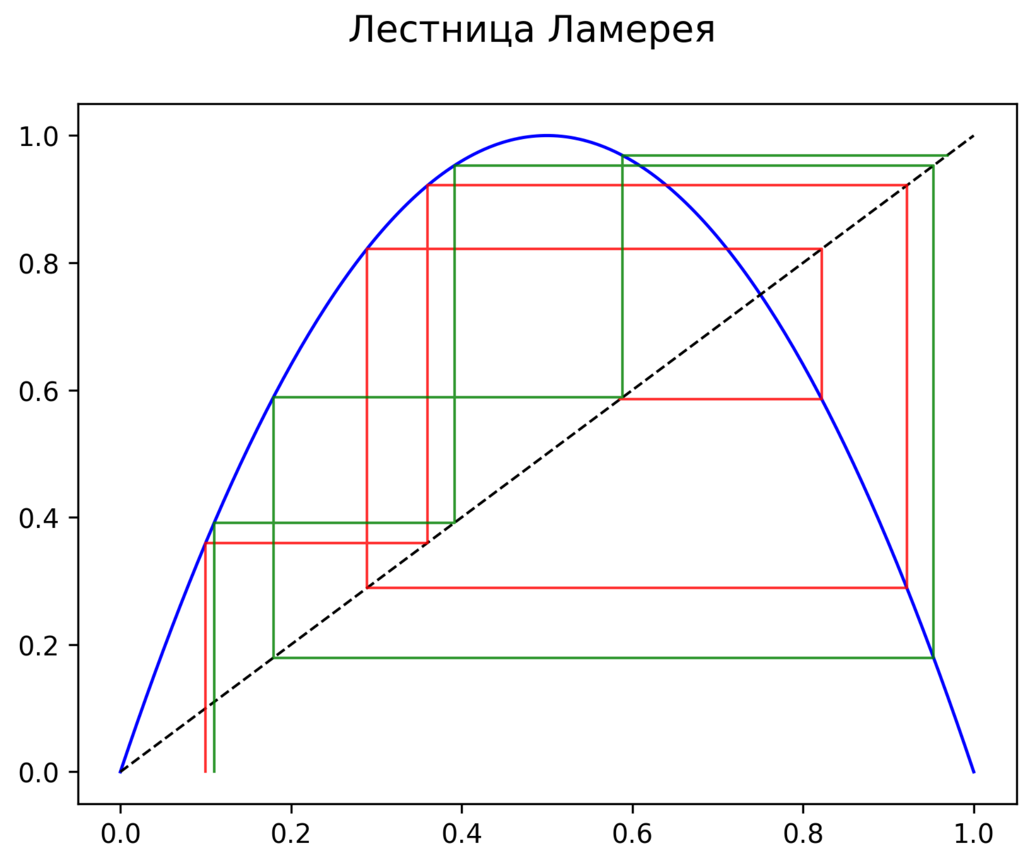
Следовательно, существует номер n, для которого

$$x_n \geq \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

То есть траектория выходит за ε-окрестность точки $x^* = 0$.

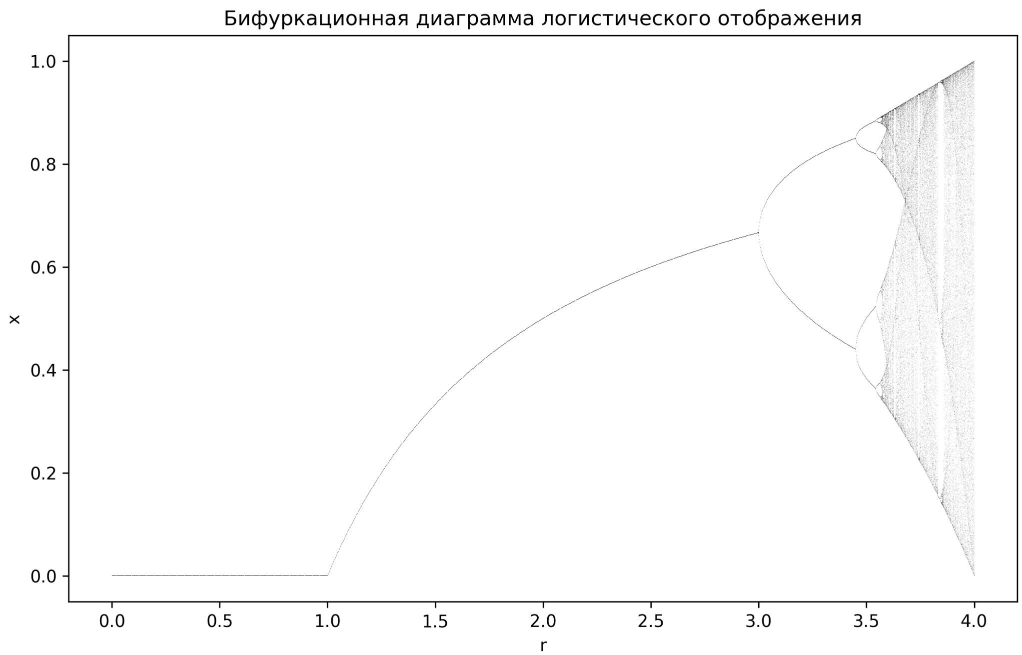
Таким образом, для любого $\delta > 0$ существует начальное условие $|x_0| < \delta$, при котором траектория покидает ε-окрестность неподвижной точки. Следовательно, точка $x^* = 0$ является неустойчивой при $r \in (2, 3)$.

лестница ламерея при $r = 4$



При значении параметра $r = 4$ построенная лестница Ламерея демонстрирует сильную чувствительность к начальным условиям: траектории, начинающиеся из сколь угодно близких точек, быстро расходятся по мере роста номера итерации.

бифуркационная диаграмма



При малых значениях r все траектории сходятся к одной точке, что означает наличие устойчивого стационарного состояния. При увеличении r это состояние теряет устойчивость, и появляются колебания с периодом 2, затем 4, 8 и так далее.

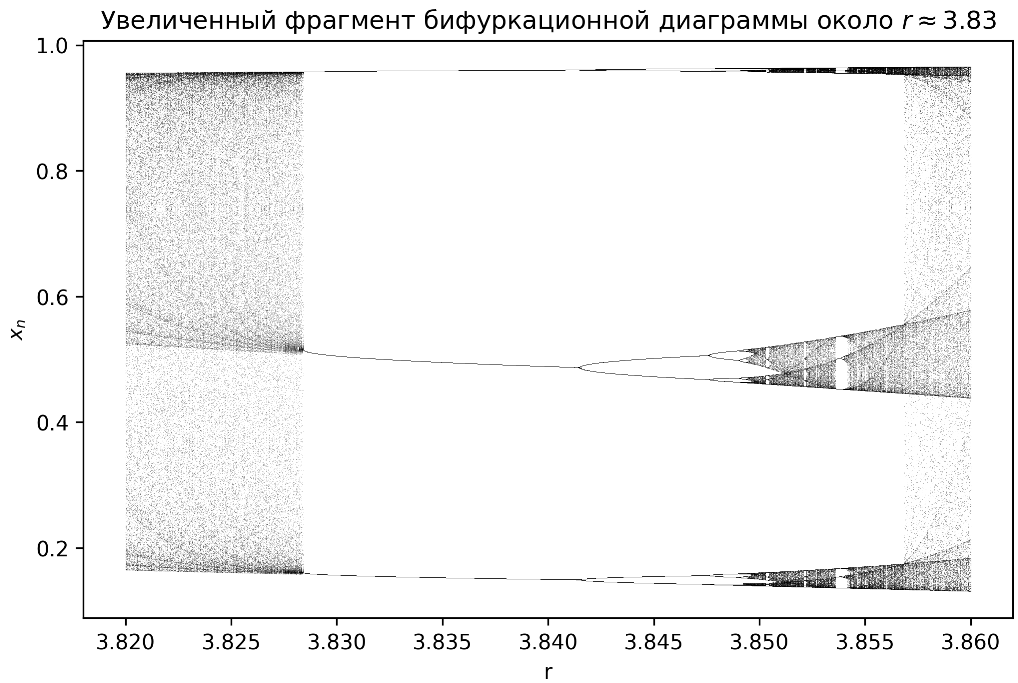
При дальнейшем увеличении r точки на диаграмме образуют плотное множество, что соответствует хаотическому поведению системы, когда малые изменения начальных условий приводят к существенно различным траекториям.

Точка r_∞ на бифуркационной диаграмме соответствует значению параметра r, после которого отдельные ветви периодических решений перестают различаться. Численно $r_\infty \approx 3.57$.

При $r < r_\infty$ система ведёт себя регулярно: траектории сходятся к устойчивым периодическим орбитам с конечным периодом (1, 2, 4, 8 и т.д.).

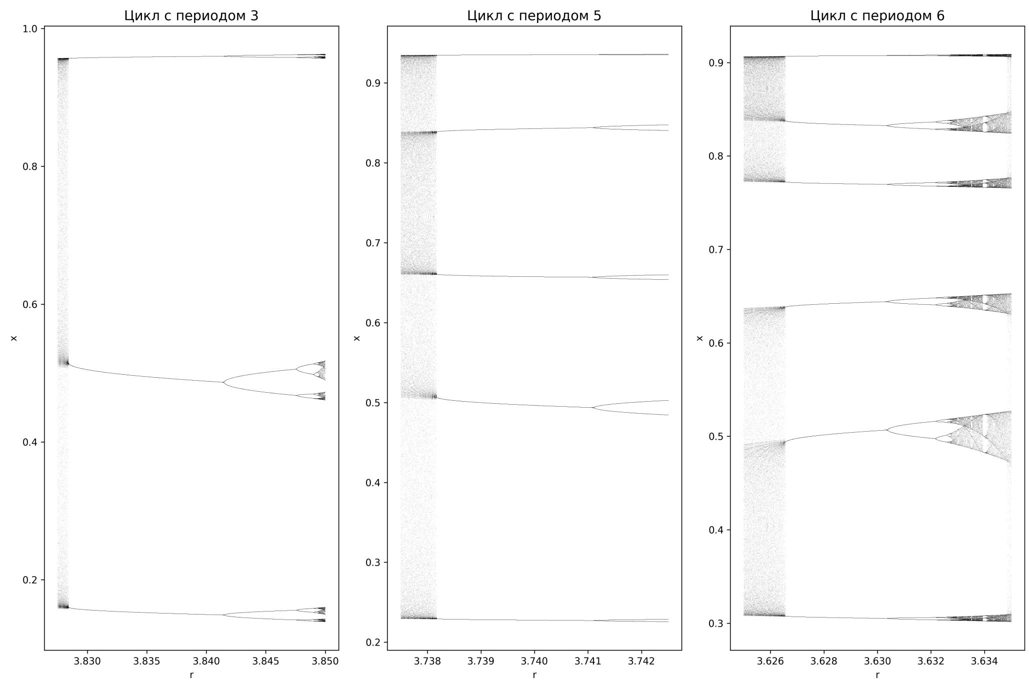
При $r > r_\infty$ система начинает вести себя хаотично, траектории становится чувствительным к начальным условиям. На диаграмме это проявляется в виде плотного множества точек, хотя при некоторых значениях r возможны окна периодического поведения.

Визуализация фрактальной структуры диаграммы при $r \approx 3.83$



Циклы с периодом 3, 5, 6

Цикл с периодом 3 возникает при $r \approx 3.835$ Цикл с периодом 5 возникает при $r \approx 3.74$ Цикл с периодом 6 возникает при $r \approx 3.628$



Границы для r

Рассмотрим отображение

$$g(x) = rx(1-x)(2-x), \quad r > 0.$$

Пусть $0 < x_n < 1$. Тогда

$$g(x_n) = rx_n(1-x_n)(2-x_n) < 2rx_n.$$

Если $0 < r < \frac{1}{2}$, то $2r < 1$, и, следовательно,

$$x_{n+1} < x_n,$$

то есть последовательность x_n убывает и стремится к нулю. Следовательно, точка $x^* = 0$ является устойчивой.

Если же $r > \frac{1}{2}$, то для достаточно малых x_n выполняется неравенство

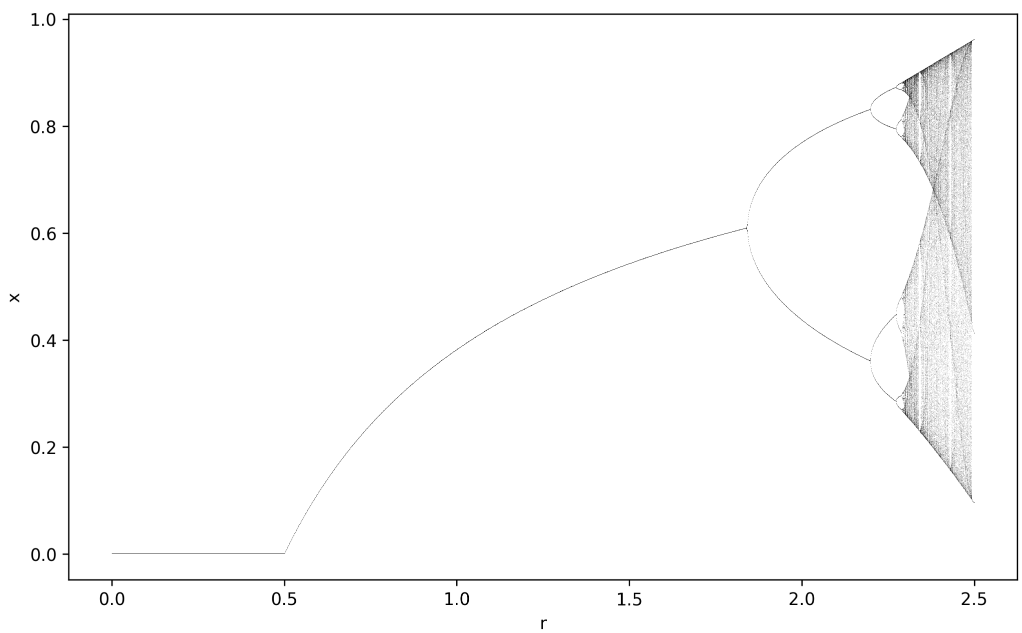
$$(1-x_n)(2-x_n) > \frac{3}{2},$$

и потому

$$x_{n+1} > x_n.$$

В этом случае траектория уходит от нуля, и точка $x^* = 0$ является неустойчивой.

Бифуркационная диаграмма отображения $g(x) = rx(1-x)(2-x)$



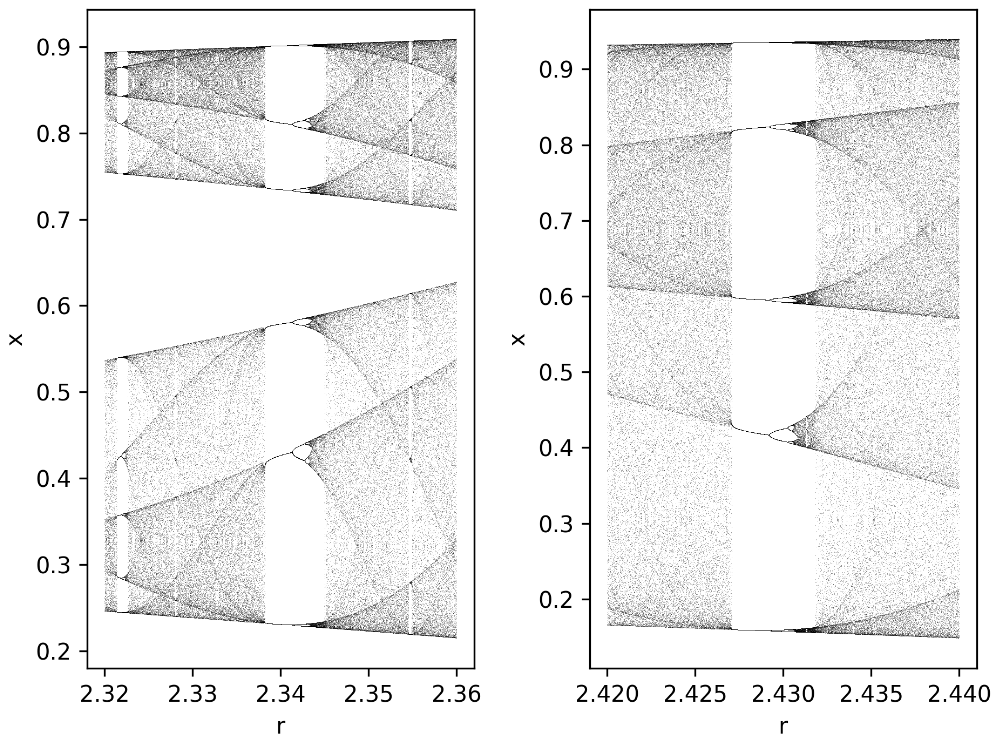
Бифуркационная диаграмма для отображения

$$g(x) = rx(1-x)(2-x)$$

Похожа на диаграмму классического логистического отображения. При изменении параметра r также наблюдаются устойчивая неподвижная точка, каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаотическому режиму.

Однако, рост значений и потеря устойчивости происходят при меньших значениях параметра r. Разделение на периодические режимы возникает раньше и происходит более интенсивно.

Окна периодичности для отображения $g(x) = rx(1 - x)(2 - x)$



самые заметные окна периодичности видны на $r \approx 2.34$ и $r \approx 2.43$