

تمرین‌های درس هندسه‌ی محاسباتی

در هر یک از این دسته‌ها از هر رنگ فقط به یک مسئله پاسخ دهید.

دسته‌ی اول: مقدمات و مثلث‌بندی چندضلعی

- با استفاده از ضرب خارجی تعیین کنید که آیا دو پاره خط یکدیگر را قطع می‌کنند یا خیر.
- مساحت یک چندضلعی (که شاید محدب نباشد) را با استفاده از ضرب خارجی بدست آورید.
- آیا چندضلعی با n رأس (به ازای هر n دلخواه) وجود دارد که فقط یک مثلث‌بندی داشته باشد؟ اگر بله نمایش دهید و در غیر این صورت دلیل بیاورید.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که با گرفتن تعدادی نقطه، خطی را پیدا کند که از دو عدد از این نقطه‌ها می‌گذرد و سایر نقطه‌ها در یک سمت این خط قرار دارند.
- با گرفتن رأس‌های یک چند ضلعی، مشخص کنید که رأس‌ها در جهت یا خلاف جهت عقربه‌های ساعت داده شده‌اند.

دسته‌ی دوم: پوش محدب دو و سه بعدی

- چینی‌اشی از نقطه‌ها را بیابید که در آن الگوریتم QuickHull بدترین عملکرد را داشته باشد.
- دو چینی‌اشی از نقطه‌ها را بیابید که در آنها الگوریتم Incremental بهترین و بدترین عملکرد را از خود نشان می‌دهد.
- چرا در الگوریتم تقسیم و غلبه برای یافتن پوش محدب، در مرحله‌ی ترکیب، بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی هر بخش را در نظر نمی‌گیریم؟
- در الگوریتم Incremental برای یافتن پوش محدب در صورتی که سه نقطه یا بیشتر بتوانند روی یک خط ظاهر شوند، چه تغییری لازم است؟
- اگر مختصات همه‌ی نقطه‌های روی پوش محدب داده شده باشند، نشان دهید پیچیدگی بهترین الگوریتمی که می‌توان برای پیدا کردن پوش (ترتیب نقطه‌های پوش) ارائه داد چیست؟

دسته‌ی سوم: خط جاروب

- به عنوان ورودی n پاره خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که خطی عمودی بیابید که با بیشترین تعداد پاره خط‌ها برخورد می‌کند.
- تعدادی مثلث و تعدادی نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که نقطه‌هایی را گزارش کند که در هیچ مثلثی نیستند.

دسته‌ی چهارم: صفحه‌ی دوگان و چینش خطوط

- دوگان ناحیه‌ی بیرون یک مثلث چه می‌شود؟
- دوگان یک پاره خط، شکل دو گوهی (Double Wedge) افقی می‌شود. دوگان چه شکل (یا مجموعه‌ای از شکل‌ها) دو گوهی عمودی می‌شود؟
- فرض کنید تعدادی خط داده شده اند و قصد داریم بررسی کنیم که یک نقطه‌ی ورودی روی یکی از این خط‌ها قرار دارد یا خیر. این مسئله را در صفحه‌ی دوگان بیان کنید.
- به تعداد n نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از بیشترین تعداد این نقطه‌ها عبور می‌کند.
- به تعداد n پاره خط داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n^2)$ ارائه دهید که خطی را پیدا کند که از همه‌ی این پاره خط‌ها می‌گذرد.
- اگر دوگان نقطه‌ی (a, b) ، خط $y = ax + b$ تعریف شده باشد و دوگان خط $y = ax + b$ ، نقطه‌ی (a, b) ، نشان دهید این تعریف رابطه‌ی مجاورت و ترتیب را بین خط‌ها و نقطه‌ها حفظ می‌کند یا خیر.
- به تعداد n نقطه داده می‌شوند. الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n)$ ارائه دهید که برای هر یک از این نقطه‌ها تشخیص دهد که آیا روی پوش محدب آنها قرار دارد یا خیر.

دسته‌ی پنجم: نمودار ورونویی

- چینی‌ی از n نقطه را نمایش دهید که نمودار ورونویی آنها تنها یک رأس داشته باشد.
- وضعیتی برای سه نقطه تعیین کنید که رأس نمودار ورونویی برای آن سه نقطه، خارج از مثلثی باشد که از آنها تشکیل می‌شود.
- چینی‌ی برای n نقطه تعیین کنید که یکی از ناحیه‌های نمودار ورونویی آن $n - 1$ یال داشته باشد.
- با اضافه کردن یک رأس و وصل کردن آن به یال‌های نامحدود نمودار ورونویی یک گراف ساده ایجاد می‌شود. نشان دهید میانگین درجه‌ی رأس‌های این گراف حداکثر شش است.
- نشان دهید یک وجه نمودار ورونویی نامحدود است اگر و تنها اگر سایت متناظر آن جزء پوش محدب سایت‌ها باشد.
- نشان دهید که پیچیدگی بهترین الگوریتم برای محاسبه‌ی نمودار ورونویی $\Omega(n \log n)$ است.
- الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ ارائه دهید که با گرفتن n نقطه به عنوان ورودی، به ازای هر نقطه نزدیک‌ترین نقطه به آن را پیدا می‌کند.

دسته‌ی ششم: مثلث‌بندی دلانی

- در الگوریتم Flip کردن یال‌های غیر قانونی، آیا امکان دارد یالی از حالت غیر قانونی قانونی شود و سپس دوباره غیر قانونی؟
- وضعیت n نقطه را نشان دهید که در آن درجه‌ی یک رأس مثلث‌بندی دلانی $n - 1$ باشد.
- از روی نمودار ورونویی یکی از مسئله‌های مطرح شده، مثلث‌بندی دلانی را محاسبه نمایید.

- با استفاده از الگوریتم افزایشی، رأس‌های دو چهار گوش تو در تو را مثلث‌بندی کنید.
- با استفاده از الگوریتم افزایشی، نمودار دلانی را برای رأس‌های دو چهار گوش تو در تو (که هیچ چهار رأسی روی یک دایره نباشند) محاسبه کنید.
- حالتی از n رأس را نشان دهید که در الگوریتم افزایشی ساخت مثلث‌بندی دلانی، اضافه کردن یک رأس موجب تغییر همهی مثلث‌ها شود.

دسته‌ی هفتم: برنامه‌ریزی خطی

- برنامه‌ی خطی صحیح مسئله‌ی کوله‌پشتی با سه کالا را بیان کنید. فرض کنید وزن کالاها به ترتیب پنج، سه و چهار کیلوگرم باشد و ارزش آنها به ترتیب ششصد، دویست و چهارصد واحد باشد. فرض کنید ظرفیت کوله‌پشتی چهل و دو کیلوگرم باشد و از هر کالا به تعداد لازم موجود باشد.
- الگوریتم Seidel را برای برای دو متغیر x و y و تابع $f(x, y) = y - 2x$ اجرا کنید. محدودیت‌های برنامه شامل $y - x \geq -5$ ، $y + 2x \geq -4$ و $-2y - x \geq -4$ هستند. فرض کنید مقدار قدر مطلق x حداکثر چهار و قدر مطلق y حداکثر پنج باشد.

دسته‌ی هشتم: جستجوی بازه‌ای

- نقطه‌های $(1, 5)$ ، $(2, 6)$ ، $(3, 3)$ ، $(4, 1)$ ، $(5, 2)$ و $(6, 3)$ را در نظر بگیرید. به این مجموعه، سه نقطه با مختصات تصادفی دیگر نیز اضافه کنید. سپس، سطح اول درخت جستجوی بازه‌ای دو بعدی را برای این نقطه‌ها بکشید و مشخص کنید چه نقطه‌هایی جزء مجموعه‌ی هر رأس هستند. اگر پرسش بازه‌ی $1 \leq x \leq 3$ و $3 \leq y \leq 6$ باشد، مشخص کنید که جستجوی مرحله‌ی دوم باید برای چه رأس‌هایی انجام شود.