

پنجشنبه‌ی بیست و پنجم

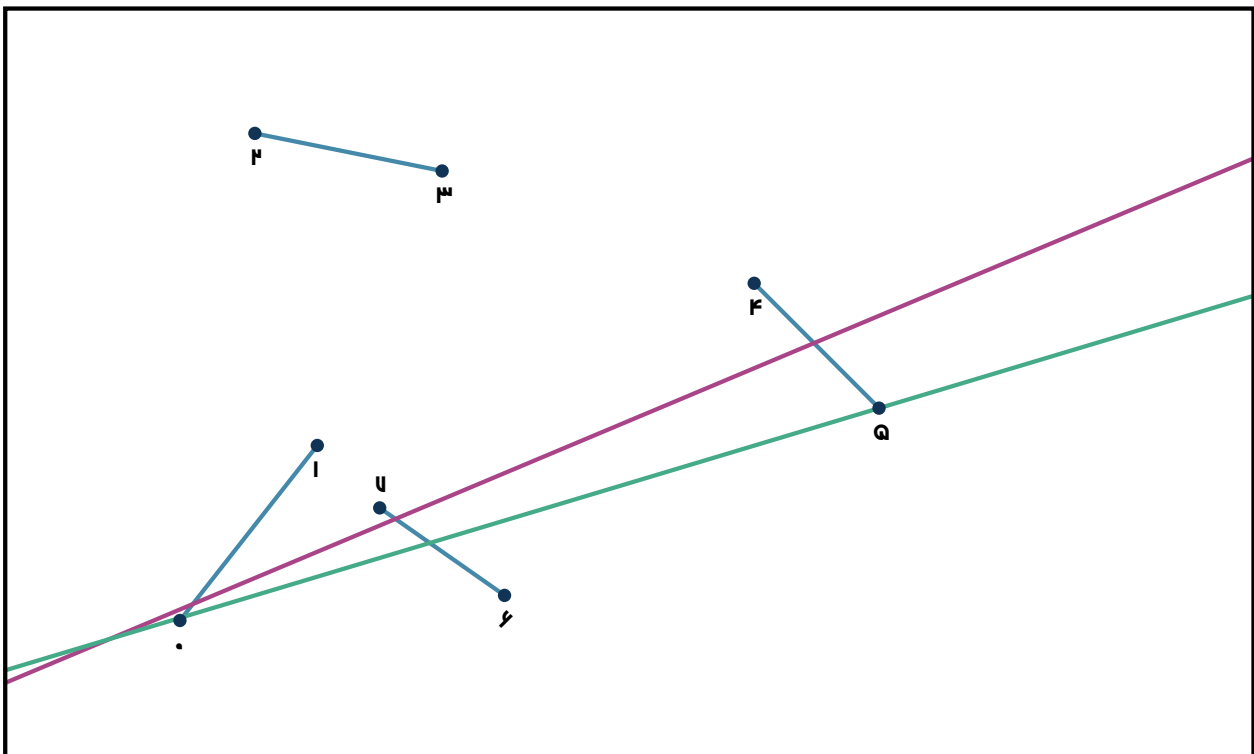
# یادداشت‌های دال

## مقدمه‌ی سردبیر

شماره‌ی سیزدهم و پانزدهم پنج‌شنبه‌های سخت که به قسمتی از یادداشت‌های دال اختصاص داده شده بودند، با استقبال بسیاری از خوانندگان گرامی روبرو شدند. آگاه هستیم که مطالعه‌ی یادداشت‌های دال هیجان و لذت بی‌مانندی به همراه دارد و از این رو، در این شماره نیز با افتخار بخشی از یادداشت‌های اخیر دال را منتشر می‌کنیم. در این یادداشت‌ها، دال به مسئله‌ی پنج‌شنبه‌ی بیست و سوم و بیست و چهارم می‌پردازد. او مطالب بسیار جالبی را مطرح می‌کند از جمله اینکه چگونه می‌توان مسئله‌ی پنج‌شنبه‌ی بیست و سوم را حل کرد. توجه خوانندگان گرامی را به این یادداشت‌ها جلب می‌نماییم.

## دال در مورد مسئله‌ی بیست و چهارم

هدف اصلی من از پرداختن به مسئله‌ی بیست و چهارم، آمادگی برای حل مسئله‌ی بیست و سوم بود. اما در هنگام مطالعه‌ی این مسئله، با جنبه‌های بسیار جالبی از آن روبرو شدم که قبل از پرداختن دقیق به این مسئله آنها را پیش‌بینی نمی‌کردم. ایده‌ی اول من برای حل مسئله‌ی بیست و چهارم، استفاده از روشی بود که در مسئله‌ی یازدهم به کار بردیم: مرتب کردن همه‌ی نقطه‌ها دور هر نقطه (با توجه به زاویه‌ی آنها) و سپس پیمایش نقطه‌های مرتب شده مطابق این ترتیب. در حین این پیمایش تعداد پاره‌خط‌هایی که قطع می‌شوند محاسبه می‌شود و بیشترین تعداد تقاطع شناسایی می‌گردد. پیچیدگی زمانی این الگوریتم  $O(n^2 \log n)$  است.



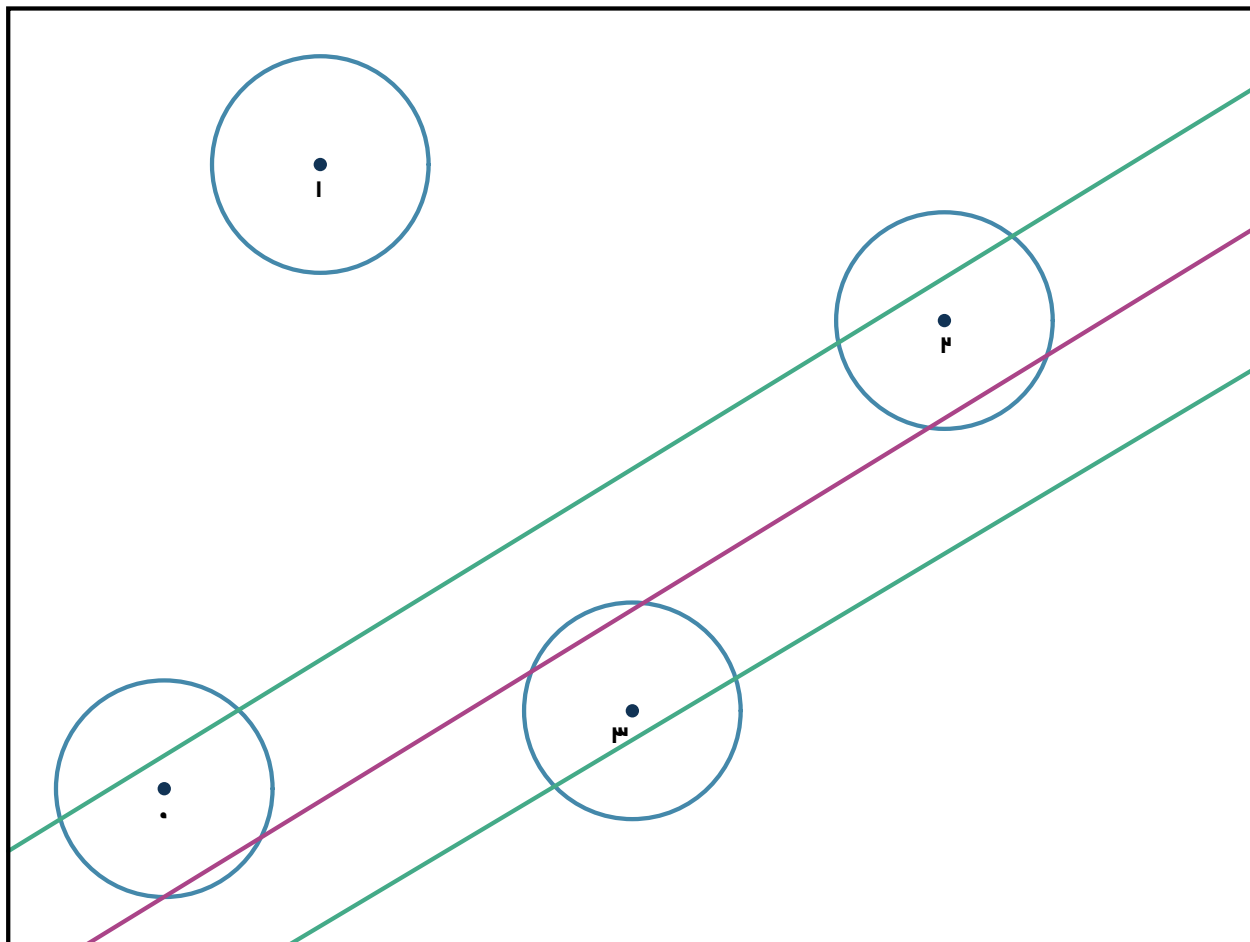
اگر چه مسئله به دنبال خطی است که از دو عدد از نقطه‌های ورودی عبور کند، این محدودیت را می‌توان بدون تغییر تعداد خط‌های قطع شده حذف کرد. به عبارت دیگر، از بین خط‌هایی که بیشترین تعداد پاره‌خط‌های ورودی را قطع می‌کنند، حتما یکی هست که از دو نقطه‌ی ورودی عبور کند. شکل بالا را در نظر بگیرید. خط قرمز یکی از خط‌هایی است که بیشترین تعداد پاره‌خط‌ها را قطع می‌کند. دو سر آن را تا جایی به سمت پایین حرکت دهید تا خط روی دو نقطه‌ی ورودی قرار بگیرد (مثل انداختن یک میله روی تعدادی تکیه‌گاه). خط حاصل در شکل با رنگ سبز نشان داده شده است. خط حاصل به تعداد مساوی پاره‌خط قطع می‌کند و از دو نقطه‌ی ورودی می‌گذرد. همین ویژگی به شکل دیگری در مسئله‌ی بیست و سوم هم رخ می‌دهد و موجب کاهش اندازه‌ی فضای

جواب مسئله می‌گردد.

روش دیگر برای حل مسئله‌ی بیست و چهارم، نگاشت بازها به صفحه‌ی دوگان است. در صفحه‌ی دوگان، هر خط ورودی به یک نقطه و هر نقطه‌ی ورودی به یک خط تبدیل می‌شود. با بررسی چینش خط‌ها در صفحه‌ی دوگان، می‌توان خط‌هایی که بیشترین تعداد پاره‌خط‌ها را قطع می‌کنند با پیچیدگی زمانی  $O(n^2)$  شناسایی کرد. Edelsbrunner و همکارانش برای شناسایی خطی که همه‌ی پاره‌خط‌های ورودی را قطع می‌کند، از ایده‌ای مشابه استفاده کرده‌اند [۱]. در بخش پایانی این مقاله، آنها تعدادی مسئله‌ی جالب را به عنوان کارهای آتی ذکر می‌کنند.

## دال در مورد مسئله‌ی بیست و سوم

یک شیوه‌ی دیگر بیان مسئله‌ی بیست و سوم این است که به جای تعدادی دایره، فرض شود تعداد نقطه (مرکز دایره‌ها) موجود هستند. به جای یافتن یک خط، می‌توان دو خط موازی (با فاصله‌ی قطر دایره‌ها) یافت که بیشترین تعداد نقطه‌ها در بین آنها قرار گیرند.



این تناظر در شکل بالا نشان داده شده است. به جای یافتن یک خط (خط قرمز در شکل) که بیشترین تعداد دایره‌ها را قطع می‌کند، می‌توان دو خط موازی (خط‌های سبز) را یافت که بیشترین تعداد نقطه‌ها بین آنها قرار می‌گیرند. نکته‌ی مهم دیگری که در مسئله‌ی بیست و چهارم هم دیده می‌شود این است که هر یک از این دو خط موازی می‌توانند از حداقل یکی از نقطه‌ها عبور کنند. به عبارت دیگر، از بین همه‌ی جفت خط‌های موازی که بیشترین نقطه‌ها را در بر می‌گیرند، حداقل یک جفت هست که هر کدام از خط‌های از یکی از نقطه‌های ورودی عبور می‌کنند.

مسئله‌ی بیست و سوم در طول چند هفته گوشه‌ای از ذهنم را اشغال کرده بود. روش‌های متفاوتی را برای حل

آن آزمایش کردم ولی هیچ یک از آنها بهترین جواب را به صورت قطعی نمی‌یافت تا اینکه مقاله‌ای را یافتیم که در آن Böcker و Mäkinen همین مسئله را مطالعه کرده‌اند [۲]. روش اول ارائه شده در این مقاله، استفاده از ساختمان داده‌ای برای پرسش‌های نیم صفحه‌ای است که با گرفتن یک خط، تعداد نقطه‌هایی که در یک سمت این خط قرار می‌گیرند را گزارش می‌دهد. حل مسئله‌ی بیست و سوم با داشتن این ساختمان داده ساده است (با استفاده از این ویژگی که دو خط موازی بهینه وجود دارند که بیشترین تعداد نقطه‌ها در بین آنها قرار می‌گیرند). نکته‌ی بسیار جالب دیگر این است که با این ساختمان داده می‌توان مسئله‌ی یازدهم و مسئله‌ی بیست و چهارم را نیز با پیچیدگی زمانی  $O(n^2 \log n)$  به سادگی حل کرد.

1. H. Edelsbrunner, H. A. Maurer, F. P. Preparata, A. L. Rosenberg, E. Welzl, D. Wood, "Stabbing Line Segments," *BIT Numerical Mathematics* **22**(3), pp. 274–281, Springer (1982).
2. S. Böcker, V. Mäkinen, "Maximum Line-pair Stabbing Problem and Its Variations," pp. 183–186 in *The European Workshop on Computational Geometry* (2005).

