מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל 6

1 חזרה על מושגים מפעם קודמת

הנה כמה מושגים (שכבר נתקלנו בהם) שיעזרו לנו להבין את ההמשך:

הגדרה 1.1. זוג סדור הוא זוג איברים (a,b) כאשר ישנה חשיבות לסדר. ($(a,b)\neq(b,a)$).

הגדרה 1.2. מכפלה קרטזית עבור שתי קבוצות A,B היא אוסף כל הזוגות הסדורים (a,b) (הגדרה 1.1) כך ש-$a\in A, b\in B$. מסמנים אותה: $\boldsymbol{A\times B}$.

הגדרה 1.3. יחס על הקבוצה A מסומן ב-R ומוגדר להיות $\boldsymbol{R\subseteq A\times B}$ - כלומר מדובר באוסף של זוגות סדורים מהקבוצה $A\times B$ (המכפלה הקרטזית). מדובר בקבוצה חלקית לקבוצה $A\times B$.

2 יחס סדר חלקי ומלא

נסמן: $S=\{\clubsuit,\spadesuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$

2.1 יחס סדר חלקי

הגדרה 2.1. יחס R על הקבוצה A יקרא <u>**יחס סדר חלקי**</u> אם R הוא:

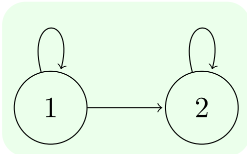
1. רפלקסיבי.
2. אנטי-סימטרי.
3. טרנזיטיבי.

2.2 קבוצה סדורה חלקית

לזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה חלקית (קס"ח).
לרוב נסמן זאת כך: $(A,\leq)$ - שימו לב כי כאן הסימון $\leq$ **אינו** מסמל קטן-שווה, אלא ש-A היא קס"ח.

דוגמה 2.1. ניקח את הקבוצה $A=\{1,2,3\}$ ו-$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ אזי היחס הנ"ל הוא יחס סדר חלקי.

דוגמה 2.2. הנה עוד דוגמה ליחס סדר חלקי:
הפעם $A=\{1,2\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$



2.3 יחס סדר מלא

הגדרה 2.2. נתונה לנו קבוצה A ויחס R עליה (הגדרה 1.3). אם **לכל** $a,b\in A$ מתקיים aRb או bRa ($(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$) אזי היחס R נקרא **יחס סדר מלא** (או:יחס סדר ליניארי) ומסומן ע"י: $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{R})$.
או: $\forall a\forall b\,(aRb\vee bRa)$
לקבוצה (A,R) נקרא קבוצה סדורה לינארית.

דוגמה 2.3. נגדיר את היחס R_S על $S\times S$ באופן הבא:

$$R_S=\{(\clubsuit,\spadesuit),(\diamondsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\diamondsuit),(\heartsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\heartsuit)\}$$

הוא יחס סדר מלא אך אינו חלקי.
אחת הסיבות לכך שהוא אינו חלקי היא שהוא אינו רפלקסיבי (וזה כבר מספיק בשביל לפסול את זה...). אבל הוא כן יחס סדר חלקי כי **לכל** $a,b\in S$ מתקיים: $(a,b)\in R_S$ או $(b,a)\in R_{S_1}$.
כעת, אם נוציא מ-R_S את אחד הזוגות, למשל, את $(\heartsuit,\spadesuit)$ אזי היחס לא יהיה יחס סדר מלא כי עבור שני האיברים $\heartsuit,\spadesuit$ אין שום זוג סדור שמכיל את שניהם.
(זה יהיה נכון לכל זוג שנוציא במקום מה שהוצאנו).

2.4 דוגמאות לסדרים מכל ארבעת האפשרויות

תנאי 1. יחס סדר מלא: היחס הוא יחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

תנאי 2. יחס סדר חלקי: לכל $a,b\in A$: $(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$.

2.4.1 יחס סדר מלא וחלקי

ניתן למנות שני יחסים די טריוויאלים: " $\leq$ " - קטן שווה ו-" $\geq$ " - גדול שווה; עבור הקבוצה $\mathbb{N}$.
שני התנאים (1, 2) מתקיימים.

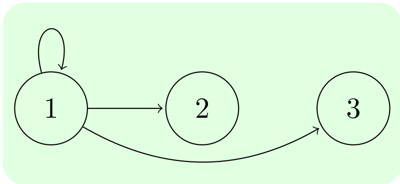
2.4.2 יחס סדר מלא שאינו חלקי

ניתן לקחת את יחס השיוויון I_A: $R=\left\{(a,a)\middle|a\in A\right\}$ (לכל קבוצה A שהיא...).
תנאי 1 מתקיים, לעומת זאת תנאי 2 אינו מתקיים (כי למשל $(2,3)\notin I$).

2.4.3 יחס סדר חלקי שאינו מלא

היחס קטן ממש " $<$ " או - גדול ממש " $>$ " עבור $\mathbb{N}$.
אינו מלא כי הוא אינו רפלקסיבי, והוא יחס סדר חלקי כי לכל שני מספרים $a,b\in\mathbb{N}$ $a<b$ או $b<a$
וכנ"ל לגבי " $>$ " (תנאי 2)

2.4.4 יחס סדר שאינו חלקי ואינו מלא



היחס אינו מלא כי הוא אינו טרנזיטיבי, והוא אינו חלקי כי $(2,3)$ לא נמצא בו.

3 איבר מינימלי ואיבר מקסימלי

3.1 איבר מינימלי

הגדרה 3.1. נתון לנו יחס R על הקבוצה A. $a\in A$ הוא **איבר מינימלי** אם הוא מקיים את התכונה הבאה:
לא קיים $b\in A$, מלבד a עצמו, כך ש-(b,a). $\forall a\neg\exists b\left((b,a)\in R\vee b=a\right)$.
כלומר, אם ישנו זוג סדור ש-a נמצא בו, אזי כדי שהוא יהיה מינימלי הוא חייב להיות השמאלי (והוא יכול להופיע יותר מפעם אחת).

3.2 איבר מקסימלי

הגדרה 3.2. נתון לנו יחס R על הקבוצה A. $b\in A$ הוא **איבר מקסימלי** אם הוא מקיים את התכונה הבאה:
לא קיים $a\in A$, מלבד b עצמו, כך ש-(b,a). $\forall b\neg\exists a\left((b,a)\in R\vee b=a\right)$.
כלומר, אם ישנו זוג סדור ש-b נמצא בו, אזי כדי שהוא יהיה מקסימלי הוא חייב להיות הימני (והוא יכול להופיע יותר מפעם אחת).

הערה 1. בכל יחס, אם ישנו איבר מינימלי/מקסימלי אזי הוא יכול להופיע יותר מפעם אחת אבל **רק** בצד שמאל/ימין (בהתאמה).

הערה 2. בכל יחס יכול להיות יותר מאיבר מינימלי/מקסימלי אחד.

3.3 דוגמאות

דוגמה 3.1. נסתכל על היחס $R = \{(1,2)\}$.
ביחס הזה ישנו איבר מינימלי אחד - "1", ואיבר מקסימלי אחד - "2".

דוגמה 3.2. ניקח את כל קלפי הלב מחפיסת קלפים סטנדרטית: $A = \{1, 2, \ldots, 13, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, $S \subseteq A \times A$, לכן יהיה לנו יחס שנראה כך:
$S = \{(1, \heartsuit), (2, \heartsuit), \ldots, (13, \heartsuit)\}$, אזי ישנם 13 איברים מינימליים: $1, 2, \ldots, 13$. ואיבר מקסימלי אחד -$\heartsuit$. הסבר: יש 13 איברים מינימליים, כי אם ניקח למשל את "2", אזי נראה שלא קיים שום איבר ב-S מהצורה: $(*, 2)$ (כאשר $*$ הוא איבר כלשהו - מספר או צורה), וזה נכון לגבי כל אחד מ-13 המספרים.
לגבי איבר מקסימלי - כנ"ל, ה-$\heartsuit$ תמיד מופיע בצד השמאלי ולא קיים ב-S איבר מהצורה $(\heartsuit, *)$.

הגדרה 3.3. תהי $(B, \leq)$ קס"ח (הגדרה 2.2) ותהיה קבוצה A תת-קבוצה של B, $A \subseteq B$.
איבר $a \in A$ יקרא מינימלי ב-A, אם **לא קיים** $b \in A$ כך ש-$b \neq a$ וגם $b \leq a$ (כלומר (b, a)).

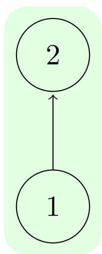
הגדרה 3.4. קבוצה סדורה היטב (קס"ה) היא קבוצה סדורה חלקית קבוצה סדורה חלקית $(B, \leq)$ שבה לכל תת-קבוצה לא ריקה $B \subseteq A$ יש איבר מינימלי (הגדרה 3.3) **אחד ויחיד**.

הגדרה 3.5. תנאי המינימליות: נאמר שקס"ח $(B, \leq)$ (הגדרה 2.2) מקיימת את תנאי המינימליות אם בכל תת-קבוצה לא ריקה $B \subseteq A$ יש לפחות איבר מינימלי אחד.

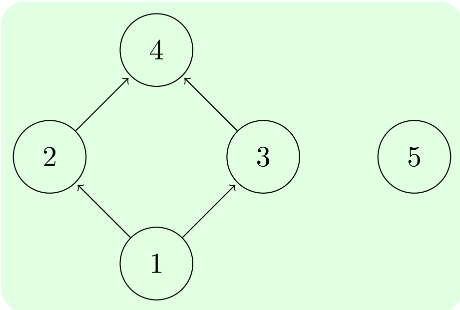
4 דיאגרמת הסה לקבוצה סדורה חלקית (קס"ח)

נניח ונתונה לנו קבוצה סדורה חלקית $(A, \leq)$ ונניח כי היא מקיימת את כל שלושת התנאים (רפלקסיביות, אנטי-סימטריות וטרנזיטיביות) אזי ניתן להציג אותה גם באמצעות גרף - **דיאגרמת הסה**.
כל קודקוד יסמן איבר בקבוצה, ונמתח קו לפי מאותו איבר להבא אחריו:

דוגמה 4.1. נניח כי $R_1 = \{(1,2), (1,1), (2,2)\}$ עבור $A = \{1, 2\}$ אזי הדיאגרמה תיראה כך:

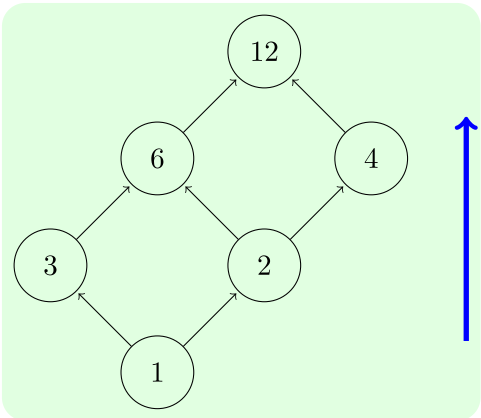


דוגמה 4.2. עבור: $B=\{1,2,3,4,5\}$,
$$R_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,4),(1,3),(3,4),(1,4)\}$$
הדיאגרמה תיראה כך:



את הצלע $(1,4)$ אין צורך לרשום כי זה הרעיון בדיאגרמה:
אם אני יכול להגיע מקודקוד a לקודקוד b (גם אם זה דרך קודקודים אחרים), אזי הזוג (a,b) נמצא ביחס.
הסיבה שקודקוד "5" לא מחובר אל השאר זה בגלל שאין שום דרך להגיע אליו מלבד הוא עצמו $(5,5)$.

דוגמה 4.3. נניח כי נתונה לנו הקבוצה $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ והיחס "מחלק את", אזי $(A,"\mid")$ היא קבוצה סדורה חלקית. דיאגרמת הסה תיראה כך:



ומכך ניתן להבין שזוגות כמו: $(3,12),(2,12),(1,12)$, וכו'... נמצאות ביחס כי ניתן להגיע מקודקוד אחד לשני (למשל: מ-2 ל-12).
<u>נשים לב כי למשל $(3,4)$ אינו ביחס הנתון, ואכן, אין אפשרות להגיע בדיאגרמה מ-3 ל-4.</u>
בנוסף, אפשר גם לומר שהרעיון הוא שבדיאגרמה אפשר **רק לעלות למעלה** (כמו שהחץ הכחול $\uparrow$ מראה)...
נשים לב לשני מקרים מעניינים:

1. המקרה של "1" - נשים לב שהוא יהיה תמיד בתחתית כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $1\mid n$, כי $1\cdot n=n$.
2. לעומת זאת, "0" תמיד יהיה הכי למעלה (אם הוא כלול בקבוצה), כי לכל $n\in\mathbb{N}$: $n\mid 0$, כי $n\cdot 0=0$.

תוכן העניינים