חלק I
שאלות דומות לתרגיל 4

1 לוגיקה ו-DNF

הגדרה 1. נניח ונתונים לנו n משתנים: $x_1, \ldots, x_n$, אזי:
פסוק DNF הוא פסוק מהצורה הבאה:

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_m$$

כאשר $m \in \mathbb{N}$.
ולכל i:

$$A_i = (P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_k)$$

כאשר כל P_j הוא משתנה x_k כלשהו או שלילתו ($\overline{x}_k$ או $\neg x_k$) .

הערה 1. **לא ייתכן כי באותה פסוקית A_i אותו משתנה יופיע פעמיים!!**

1.1 דוגמאות

נניח כי נתונים לנו: P, Q, R, W, אזי הנה פסוקי DNF לדוגמה:

1. P
2. $(P \wedge Q) \vee \left(W \wedge \overline{Q}\right) \vee \left(\overline{P} \wedge R\right)$
3. $\left(P \wedge \overline{Q} \wedge \overline{W} \wedge \overline{R}\right)$

שימו ♡ כי בשום פסוקית אין משתנה המופיע פעמיים...

1.2 אלגוריתם לבניית פסוק DNF

בניית פסוק DNF מפסוק אחר כלשהו היא יחסית פשוטה:

אלגוריתם 1 בניית פסוק DNF

קלט: פסוק α כלשהו.

פלט: הפסוק α בצורת DNF.

1. בנו טבלת אמת ל-α.
2. לקחו את כל ערכי האמת בטבלה (הערכים שעבורם בטבלה מתקבל הערך T [אמת]).
3. כעת, עבור כל אחד מהערכים הללו:
   א) נחבר אותם בקשר "וגם" ($\wedge$) - אם מופיע הערך "אמת" במשתנה נחבר אותו כמו שהוא ואם מופיע הערך "שקר" נחבר את שלילתו.
4. את כל הפסוקיות נחבר בקשר "או" ($\vee$).

דוגמה 1. נסתכל על הפסוק: $(P \oplus Q)$:

נבנה לו טבלת אמת:

P	Q	$P \oplus Q$	
T	T	F	
T	F	T	◄
F	T	T	◄
F	F	F	

וכעת ניקח את שתי השורות המסומנות בכחול (האמצעיות) וע"פ אלגוריתם (1) נבנה פסוקית DNF:

$$(P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$$

נסתכל למשל על הפסוקית השמאלית: היא מייצגת את השורה השנייה.

ההשמה בשורה השנייה היא: $P = T$ ו-$Q = F$ ולכן אנחנו רושמים: $(P \wedge \overline{Q})$.

<u>הסבר:</u>

הרעיון שעומד מאחורי פסוקית DNF כזאת היא שאנחנו צריכים השמה אחת שמספקת את הפסוק המקורי (למשל במקרה שלנו: $P = F, Q = T$) והיא בהכרח תספק את פסוק ה-DNF שבנינו בגלל קשר ה-"או" (והסיבה שיש "וגם" היא כדי לוודא שזאת תהיה אותה השמה).

2 CNF

פסוקית CNF היא כמו פסוקית DNF מבחינת הצורה רק המבנה הוא הפוך:

את כל הקשרים מהצורה $\wedge$ נמיר ל-$\vee$ וההפך.

2.1 אלגוריתם לבניית CNF מפסוק כלשהו

אנחנו עושים בדיוק את הדבר כמו ב-אלגוריתם לבניית פסוק DNF רק שהפעם אנחנו לוקחים את ערכי השקר של הטבלת אמת והיכן שהופיע משתנה נשים את שלילתו והיכן שהופיעה שלילת משתנה - נוסיף אותו ללא השלילה.

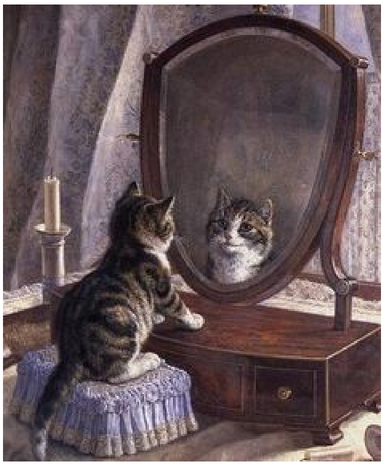
למשל.

דוגמה 2. נמיר את הפסוק $P \to Q$ ל-CNF:

P	Q	$P \to Q$	
T	T	T	
T	F	F	◄
F	T	T	
F	F	T	

ולכן פסוק ה-CNF שנקבל הוא: $(\neg P \lor Q)$.

3 הוכחות וקבוצות



3.1 הוכחות

הגדרה 2. כאשר יש לנו להוכיח הוכחה מהצורה: $A \Rightarrow B$, כלומר: אם $\boldsymbol{A}$ אז $\boldsymbol{B}$, אזי אנחנו מניחים את A וצריכים להראות ש-B נכון.

דוגמה 3. נוכיח כי אם **חתולים הם חיות** אז **לוקחים אותם לחיסונים אצל הווטרינר.**

הוכחה. נתון לנו כי חתולים הם חיות. אנחנו יודעים כי מחסנים חיות אצל הווטרינר, ומכך ניתן להסיק שמחסנים אותם אצל הווטרינר. ■

הגדרה 3. כאשר יש לנו הוכחה מהצורה $A \iff B$, כלומר $\boldsymbol{A}$ אסס $\boldsymbol{B}$, אזי אנחנו עושים בדיוק את מה שעשינו בהגדרה (2) רק באופן כפול:
$B \Rightarrow A$ וגם $A \Rightarrow B$. כלומר כל פעם מניחים שצד אחד הוא נכון וצריך להוכיח את הצד השני.

הגדרה 4. היחס **מחלק את** מסומן ע"י $\boxed{a \mid b}$ (כאשר $a, b \in \mathbb{Z}$) ופירושו שקיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a \cdot k = b$.

למשל: $2 \mid 16$ כי $2 \cdot \mathbf{8} = 16$, או $3 \mid 12$ כי $3 \cdot \mathbf{4} = 12$. לעומת זאת $2 \nmid 5$.

משפט 1. אם $a \mid b \land b \mid c$ אזי $a \mid c$.

הוכחה. ניתן לראות כי מדובר בהוכחה שצריכה להיות ע"פ הגדרה 2.
לכן, נתחיל מכך שנתון לנו כי $a \mid b \wedge b \mid c$, ולכן, ע"פ הגדרת "מחלק את" (הגדרה 4), קיימים $p, q \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$a \cdot \boldsymbol{p} = b$$
$$b \cdot \boldsymbol{q} = c$$

כעת, זה מה שנתון לנו, ומתוך זה צריך להגיע למסקנה.
פשוט נציב את המשוואה העליונה בתחתונה (את ה-b) ונקבל: $a \cdot \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = c$.
כעת היות ו-$p, q \in \mathbb{N}$ אזי בוודאי גם $p \cdot q \in \mathbb{N}$, ולכן ע"פ הגדרה 4: $a \mid c$.
מש"ל. ■

3.2 הוכחות עם כמתים

כאשר נתונים לנו משפטים כמו: "קיים..." או "לכל...." אזי אפשר להוכיח את הדברים בצורה הבאה:

3.2.1 הוכחה עם הכמת "לכל" $\forall$

כאשר רוצים להוכיח שמשפט עם הכמת $\forall$ (לכל) אינו נכון מספיק למצוא דוגמה נגדית למשפט שבא אחרי (במקרה ומדובר במשפט פשוט ולא מורכב).

דוגמה. כל המספרים הראשוניים הם אי-זוגיים. מספיק שנמצא ראשוני אחד שהוא זוגי ואז הטענה תהיה לא נכונה כי החלנו אותה על כל המספרים הראשוניים. ואכן - 2 - הוא ראשוני ואינו אי-זוגי.

לעומת זאת - אם רוצים להוכיח כי הטענה נכונה - כאן כבר צריכים ממש "הוכחה" ואי אפשר להוכיח על ידי מציאות דוגמה... (מהסיבה שאנחנו מדברים על **כל** האיברים ולכן לא מספיק להוכיח רק עבור אחד, אלא צריך על כולם ולפעמים ה"כולם" הזה זה אינסוף איברים ...)

3.2.2 הוכחה עם הכמת "קיים"

בדיוק כמו הוכחה עם הכמת "לכל" $\forall$ רק ההפך.
כאשר רוצים להראות כי משפט שמתחיל ב-"קיים..." נכון - מספיק לתת רק דוגמה - כי אנחנו רוצים להראות **שקיים** משהו.
מצד שני: אם רוצים להראות שלא קיים משהו צריך לעבור על הכל כדי להראות שלא קיים, ולכן גם כאן צריך הוכחה.

ניתן לראות את הדברים גם באופן הבא:

$$\forall x \equiv \neg\exists\neg x$$
$$\exists x = \neg\forall\neg x$$

כאשר $\neg$ הוא סימן השלילה.

3.3 קבוצות

צורת רישום 1. הקבוצה $A = \{x \in \mathbb{N}, x > 3\}$ פירושה קבוצת כל המספרים הגדולים מ-3.
הערה. יש כל מיני דרכים לכתוב קבוצה כזאת. למשל: $\{x \in \mathbb{N}; x > 3\}$ או $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x > 3\}$ וכו'....
העיקר שיהיה ברור מהם אברי הקבוצה.

3.3.1 אפשרויות של קבוצות

נניח ונתונות לנו שתי קבוצות: A, B אזי יש מספר אפשרויות:
$\underline{A = B}$ - שוויון בין קבוצות - כל איבר ב-A נמצא ב-B וכל איבר ב-B נמצא ב-A. או: $x \in A \iff x \in B$.
$\underline{A \subseteq B}$ - הכלה של A ב-B - כל איבר ב-A נמצא ב-B, אבל לא בהכרח כל איבר ב-B נמצא ב-A. $x \in A \Rightarrow x \in B$. ניתן לשים לב כי אם קיים איבר ב-B שלא קיים ב-A הפסוק $x \in A \Rightarrow x \in B$ מקבל ערך אמת....
$B \subseteq A$ - כנ"ל.
$\underline{A \subsetneq B}$ - A מוכלת ממש ב-B - כל איבר ב-A נמצא ב-B, וקיים לפחות איבר אחד ב-B שאינו נמצא ב-A.
$\underline{A \neq B}$ - אם קיים איבר אחד לפחות בכל קבוצה שאינו קיים בקבוצה השנייה. למשל: $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$.
<u>הקבוצות זרות</u> - לא קיים שום איבר שנמצא בשתי הקבוצות.
כעת, אם נרצה להוכיח טענה מסוימת על שתי קבוצות, למשל $A \subsetneq B$, אזי זה אומר ש:

1. **כל** איבר ב-A נמצא ב-B.
2. **קיים** איבר ב-B שלא קיים ב-A

אזי נשים לב שמדובר כאן בהוכחות עם כמתים, ולכן יש להוכיח כאן שתי הוכחות בנפרד.
נניח כי $A = \{x, x \in \mathbb{N} \wedge x > 7\}$ ו-$B = \mathbb{N}$.
<u>הוכחת 1:</u>

הוכחה. כל מספר טבעי גדול מ-7 נמצא ב-A והיות הוא מספר טבעי אזי הוא גם ב-B ■

<u>הוכחת 2:</u>

הוכחה. $3 \in B$ כי הוא מספר טבעי, אבל $3 \notin A$ כי הוא קטן מ-7, ומצאנו איבר כנדרש. ■

כעת נניח והקבוצות הן מהצורה:

$$A = \left\{x \middle| x \mid a\right\}, B = \left\{x \middle| x \mid b\right\}$$

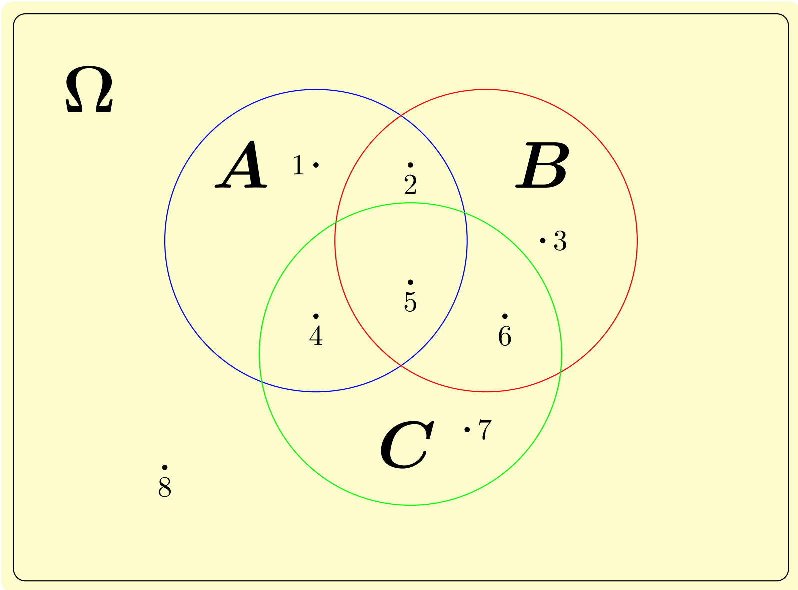
בשביל להוכיח את היחסים בניהם צריך להשתמש בהגדרת היחס "מחלק את".

4 תורת הקבוצה

4.1 דיאגרמת-ון לשלוש קבוצות

כיצד ניתן לדעת מה הדיאגרמה של: $(A \cap B) \oplus C$? (בהינתן שלוש קבוצות).
או האם שני ביטויים הם שקולים?
לשם כך נסתכל על הדיאגרמה הבאה:

איור 1: דיאגרמת ון לשלוש קבוצות



כעת נשים לב כי יש לנו שלוש קבוצות:

$$A = \{1, 2, 4, 5\}$$
$$B = \{2, 3, 5, 6\}$$
$$C = \{4, 5, 6, 7\}$$

וכי 8 אומר "אף-קבוצה", כלומר: $\text{"8"} = \varnothing$.
ניתן לשים לב כי האיבר "5" למשל, נמצא בכל הקבוצות, האיבר "2" נמצא רק ב-A, B וכו'...
ולכן נובע מכך כי: $\text{"5"} = \Omega$.

◇

4.2 דוגמה למציאת אזור בדיאגרמה

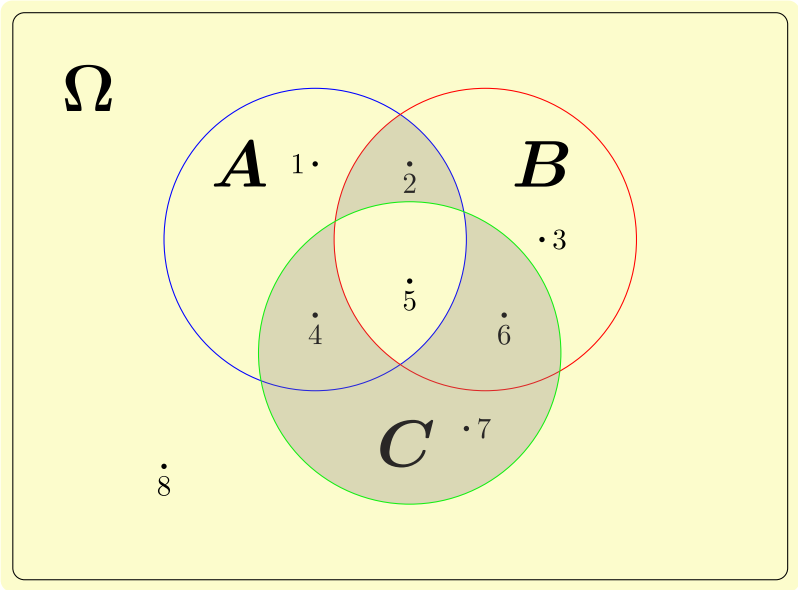
4.2.1 $(A \cap B) \oplus C$

כעת, אנחנו רוצים לדעת מה זה: $(A \cap B) \oplus C$, איך נדע?
נלך לשלושת הקבוצות שתוארו למעלה, ונראה כי:

$$(A \cap B) \oplus C = \{2, 4, 6, 7\}$$

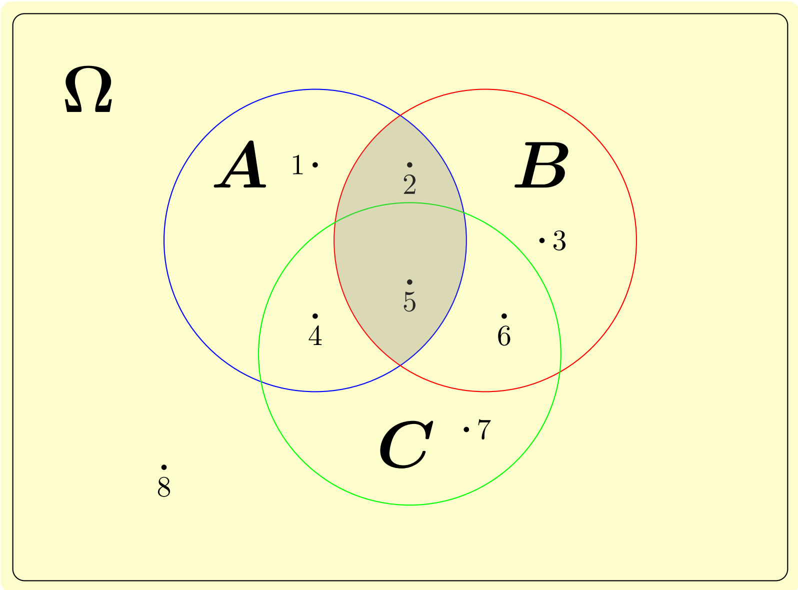
ואת האיזורים הללו נסמן בדיאגרמה:

איור 2: דיאגרמת ון של $(A \cap B) \oplus C$



4.2.2 $A \cap B$

כמו-כן, הנה דוגמה פשוטה יותר שמסבירה את הרעיון:
אם נרצה לסמן רק את החיתוך $A \cap B$, אזי נראה שהחיתוך עצמו נותן לנו את הקבוצה $\{2, 5\}$, כי: $A \cap B = \{2, 5\}$ ואכן:



4.3 הוכחה/הפרכה של שיוונים בקבוצות

נניח ונתונים לנו שני ביטויים של קבוצות, למשל:
$(A \oplus C^c) \cap (B \oplus C^c)$ ו-$(C \oplus B)^c$.

כיצד נדע אם הביטויים שקולים?

תשובה. נחשב את הערך של כל אחד מהביטויים הנ"ל ונקבל שתי קבוצות.
אם הקבוצות שוות: אזי הביטויים שקולים ונוכל להראות זאת ע"י סימון האזורים בדיאגרמה.
אם הקבוצות אינן שוות: אזי הביטויים אינם שקולים וכהוכחה לכך ניתן לתת את הקבוצות A, B, C שהוזכרו כאן: דיאגרמת-ון לשלוש קבוצות.

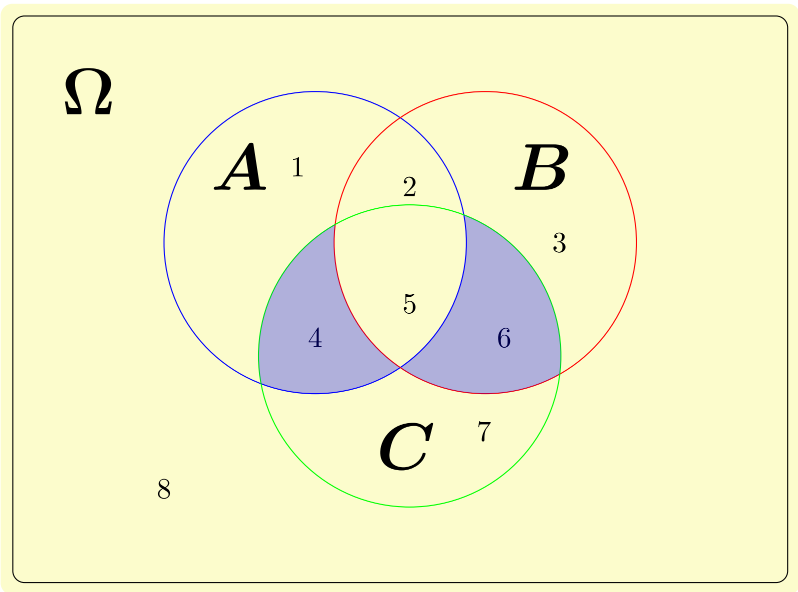
4.4 מציאת קבוצות תחת אילוצים

הערה חשובה: כאן המספרים אינם איברים בקבוצה כמו ב-דוגמה למציאת אזור בדיאגרמה - אלא הם מציינים אזורים בדיאגרמה. למשל: $4, 5$ זה $A \cap C$; ורק 7 זה $C \backslash (A \cap B)$ וכו'...

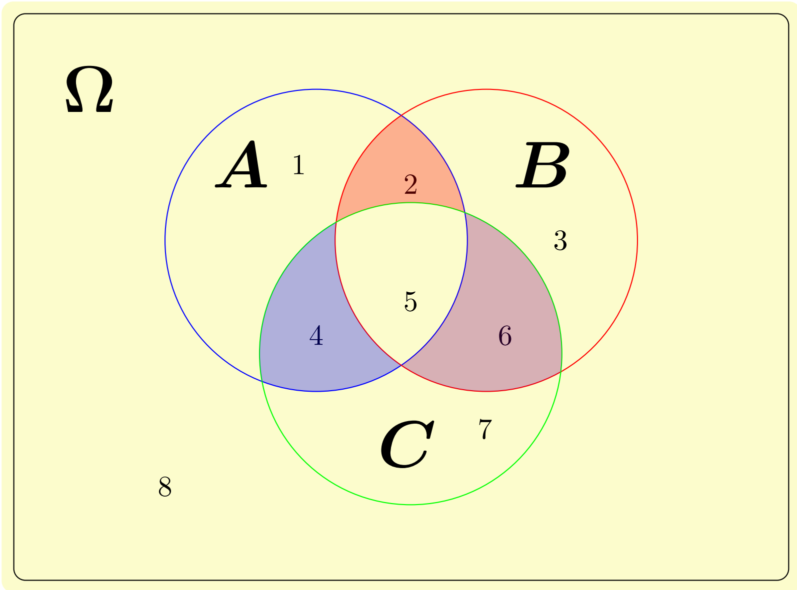
אנחנו מעוניינים לבנות קבוצות תחת אילוצים.
נניח ונתונים לנו אילוצים מהצורה $C \subseteq A \oplus B$, אזי נסתכל על אילוצים אלו ככה:

$$C \subseteq A \oplus B$$

אזי C (בכחול) - תהיה הקבוצה שמעניינת אותנו ואילו $A \oplus B$ (בירוק) יהיה האילוץ, וכך תיראה דיאגרמת-ון של אילוץ זה:



אנחנו מסתכלים על $A \oplus B$, אבל **רק** על מה שנמצא **בתוך** C, כי מה שמחוץ ל-C לא מעניין אותנו כי אנחנו רוצים לבנות רק את קבוצה C תחת האילוץ $A \oplus B$.
אנחנו רואים שהאזורים הרלוונטים למקרה שלנו אלו אזורים $4, 6$.
ונניח כי ישנו עוד אילוץ: $A \backslash C \subseteq B$, אזי עכשיו הדיאגרמה תיראה כך:



האילוץ $A \backslash C \subseteq B$ סומן באדום, והיכן שנמצא 6 בגלל שכבר היה שם כחול הצבע הוא שילוב.

חשוב לזכור: אין צורך לחזור על אזור שכבר סימנו! ברגע שסימנו אותו הוא יכלל בבניה.

כעת, אם נרצה לבנות את שלושת הקבוצות A, B, C אזי נוכל להיעזר בדיאגרמה:
נסתכל על האזורים הרלוונטיים: $2, 4, 6$ - ונבנה בהתאם את הקבוצות:
בכל אזור שסימנו נוסיף איבר (במקרה שלנו האיבר יהיה מספר האזור) ואז פשוט נבנה את הקבוצות לפי הדיאגרמה:

$$A = \{2, 4\}$$
$$B = \{2, 6\}$$
$$C = \{4, 6\}$$

ואכן נוכל לראות כי הקבוצות עומדות בכל התנאים שהצבנו להן....

הערה:

תמיד חשוב לבדוק את הקבוצות אחרי שמצאנו את התנאים. כלומר, לראות שהקבוצות שמצאנו אכן מקיימות את התנאים (אילוצים).

תוכן העניינים