מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל 5

חלק I
זוגות סדורים ומכפלות קרטזיות

כעת נכיר שני מושגים חשובים שיעזרו לנו (או אפילו אפשר לומר שהם הכרחיים) חלק על היחסים.

1 זוג סדור

1.1 מהו זוג סדור?

הגדרה 1. זוג סדור הוא קבוצה של שני אברים a, b אשר הסדר שלהם משנה, ומסמנים זאת כך: $\boldsymbol{(a, b)}$.
לכן $a \neq b$ אזי: $(a, b) \neq (b, a)$.
לדוגמה, ניקח את המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ כקבוצה, אזי: $(2,3) \neq (3,2)$.

2 מכפלה קרטזית

מכפלה קרטזית (על שמו של הפילוסוף רנה דקארט [1596-1650]) מוגדרת באופן הבא:

הגדרה 2. מכפלה קרטזית מסומנת $\boldsymbol{A \times B}$ ומוגדרת כך:
$$A \times B = \left\{ (a, b) \middle| a \in A, b \in B \right\}$$
כלומר, האיבר a חייב להיות מ-A ו-b מ-B.

דוגמה 1. למשל: אם $A = \{a, b\}, B = \{\aleph, \beth\}$, אזי:

$$A \times B = \{(a, \aleph), (b, \beth)\}$$

כמובן שיכולות גם קבוצות גדולות יותר, למשל:

דוגמה 2. $A=\{1,2,\ldots,20\}\,,B=\{a,b,\ldots,z\}$ במקרה כזה, יהיו למשל:
$(2,d)\,,(5,f)\,,(9,t)\in A\times B$

כמו-כן ניתן גם להגדיר קבוצות אינסופיות, למשל:

דוגמה 3. $A=\left\{x\middle|3\mid x\right\}\,,B=\left\{x\middle|5\mid x\right\}$, במקרה כזה יהיו לנו איברים כמו:
$(6,10)\,,(15,30)\,,(30,15)\,,(30,30)\in A\times B$ - נשים לב כי אם מספר מחלק את 15 אזי הוא יכול להופיע בכל מקום בזוג הסדור (הגדרה 1), ואף בשני המקומות היות והוא נמצא בשתי הקבוצות.
ולמשל: $(6,12)\notin A\times B$ היות ו-$12\notin B$. וכמו-כן $(13,20)\notin A\times B$ כי $13\notin A$.

חלק II
יחסים בינאריים

3 רקע

אחרי שהגדרנו קבוצה וזוג סדור - אפשר לגשת למושג הבא: **יחסים בינאריים**, שמתאר יחס בין שני אובייקטים.
את היחס נהוג לסמן ב-R ויחד עם שני האובייקטים: aRb או $(a,b)\in R$.
מכך ניתן להבין שיחס הוא בעצם: **קבוצה של זוגות סדורים**.
מה שחשוב לזכור בנוסף לכך הוא ש-aRb יכול להיות או **אמת/שקר**.
במידה ו-aRb אזי נאמר כי a מתייחס ל-b.
אם $(a,b)\notin R$ אזי נהוג לסמן זאת כך: $a\not R b$.

4 מהי R?

הגדרה 3. יהיו A,B שתי קבוצות, אזי היחס R מוגדר באופן הבא:

$$\boxed{R \subseteq A \times B}$$

במילים אחרות: R היא קבוצה חלקית (תת-קבוצה) של המכפלה הקרטזית (מכפלה קרטזית), כלומר, R היא אוסף של זוגות סדורים מהצורה (a, b) כאשר $a \in A$ ו-$b \in B$.

הגדרה 4. אם $A = B$ אזי R נקרא **יחס על** A. (כלומר, $R \subseteq A \times A$).

5 הגדרת היחסים

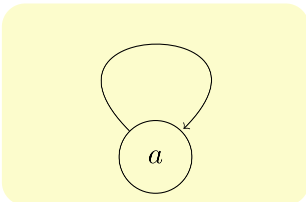
אנחנו נתמקד במספר יחסים, כאשר בכל המקרים הנ"ל היחס הוא יחס על A.

5.1 רפלקסיביות

5.1.1 הגדרה

יחס R יקרא רפלקסיבי אם:
לכל $a \in A$ מתקיים: aRa, כלומר:

$$\forall \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{aRa})$$



5.1.2 דוגמאות

דוגמה 4. נניח כי יש חדר עם מראה ובו מספר אנשים. A תהיה קבוצת האנשים בחדר, ו-R מוגדר כ-"האנשים שיכולים לראות את עצמם במראה". אזי כולם בחדר יכולים לראות את עצמם במראה ולכן R יחס רפלקסיבי.

דוגמה 5. יחס השוויון. A תהיה כל קבוצה שהיא ו-R הוא יחס השוויון, אזי לכל $a \in A$: $a = a \to aRa$, ולכן יחס השוויון הוא רפלקסיבי.

5.1.3 אנטי-רפלקסיביות

ישנה תכונה נוספת בהקשר של רפלקסיביות והיא אנטירפלקסיביות:
לכל $a \in A$ מתקיים: $a \not R a$, כלומר:

$$\forall \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{a \not R a})$$

או במילים אחרות, לא קיים a כך ש-aRa ($\neg \exists a\, (aRa)$).

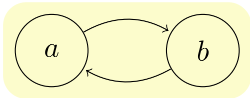
דוגמה 6. עבור $A = \mathbb{R}$ ו-$R = <$ ($a < b \Rightarrow aRb$), אזי R הוא יחס אנטי-רפלקסיבי כי לא קיים מספר גדול/קטן מעצמו.

5.2 סימטריות

5.2.1 הגדרה

יחס R על קבוצה A יקרא אם -
לכל $a, b \in A$:

$$\forall a \forall b \left(aRb \to bRa \right)$$



כלומר, **לכל** $a, b \in A$ - אם aRb אזי bRa.

5.2.2 דוגמאות

שתי דוגמאות - אחת ליחס שהוא סימטרי ואחת ליחס לא סימטרי:

דוגמה 7. חברות - בשביל ששני אנשים יהיו חברים (ע"פ ההגדרה המקובלת) **שניהם** צריכים להסכים שהם חברים אחד של השני: a צריך להיות חבר של b (aRb) ו-b צריך להיות חבר של a (bRa). אם **רק** אחד הצדדים מתקיים - אזי זאת אינה חברות.
מעניין לשים לב לכך שאם נניח יש שני אנשים, ואף אחד מהם לא חבר של השני אזי מבחינה לוגית זאת חברות. זה מקרה שהשפה והלוגיקה לא תואמות זו את זו.

5.2.3 אנטי-סימטריות

ההגדרה של יחס אנטי-סימטרי היא כמו ההגדרה של יחס סימטרי (5.2.1), רק שהפעם ישנו תנאי (אילוץ) נוסף - ש-$a = b$.
כלומר:
לכל $a, b \in A$ אם aRb וגם bRa אזי $a = b$.

$$\forall a \forall b \Big((aRb \wedge bRa) \to a = b \Big)$$

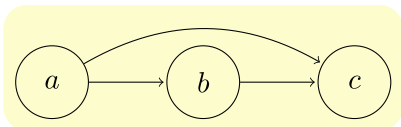
כלומר, אם **לכל** $a, b \in A$ מתקיים aRb וגם bRa אזי $a = b$.

5.3 טרנזיטיביות

5.3.1 הגדרה

יחס R על A יקרא טרנזיטיבי אם:
לכל $a, b, c \in A$ מתקיים: aRb וגם bRc אזי aRc -

$$\forall a \forall b \forall c \Big((aRb \wedge bRc) \to aRc \Big)$$



נשים לב שמבחינת הזוגות הסדורים יש לנו רק תנאי אחד מחיב והוא - האיבר השני בזוג הסדור הראשון חייב להיות אותו אחד בזוג הסדור השני: $(a,\underline{b})\,,(\underline{b},c)$.
ניתן לראות את b כמו מעין "תחנת מעבר" של a ל-c.
כלומר, אם ניתן להגיע מ-a ל-b ומ-b ל-c , אזי יחס R הוא טרנזיטיבי, אם ניתן להגיע ישירות מ-a ל-c.

5.3.2 דוגמאות

דוגמה 8. דוגמה לטרנזיטיביות שהיא לאו דווקא מספרית היא היחס "בתוך". למשל: אם ישנו חדר **ובתוך** החדר יש קופסה, **ובתוך** הקופסה ישנו כדור, אזי בוודאי שהכדור נמצא **בתוך** החדר. וזה נכון לכל שלושה עצמים שניקח: אם א' בתוך ב' וב' בתוך ג' $\Leftarrow$ אזי בוודאות גם א' בתוך ג' ולכן היחס טרנזיטיבי.

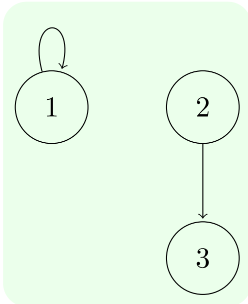
הערה 1. המון פעמים ביחסים כאלו (סימטריות ו-טרנזיטיביות) אנחנו נוטים לחשוב שאם למשל $a\not R b$ אזי היחס לא מתקיים. אבל ההפך הוא הנכון בחלק מהמקרים, היות ואם $a\not R b$ (או $b\not R a$) אזי תחילת הפסוק היא שקרית (וכזכור: $F\to\cdots=T$) ולכן יכול לנבוע מכך שיחס הוא כן טרנזיטיבי או סימטרי. **צריך לבדוק היטב...**

"קחי קצת יין," אמר הארנביב בנימה של עידוד. אליס סקרה את השולחן סביב-סביב אבל לא היה עליו דבר מלבד תה. "אני לא רואה שום יין," העירה.
"אין," אמר האנביב.
"אם כך, זה לא היה מנומס במיוחד להציע לי אותו," אמרה אליס בכעס.

(מתוך "הרפתקאות אליס באץ הפלאות", פרק 7 - "מסיבת תה מטורפת")

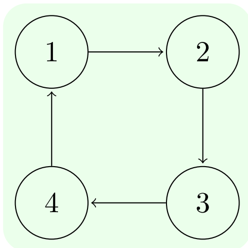
6 דוגמאות ליחסים

דוגמה 9. נסתכל על היחס הבא:



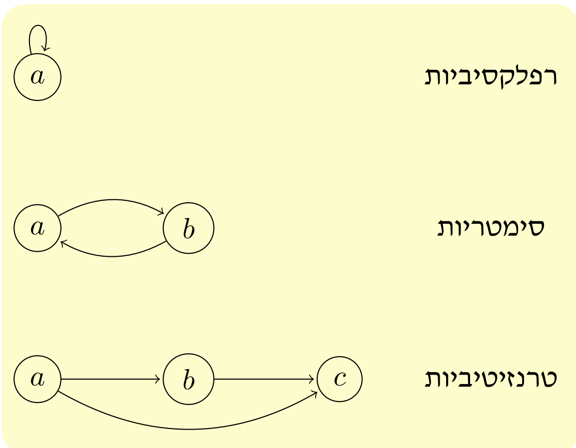
ניתן לראות כי היחס הינו: אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי (הוא לא סימטרי כי יש לנו את $(2,3)$ אבל לא את $(3,2)$).

דוגמה 10. ועל היחס הזה:



שהוא: אנטי-רפלקסיבי ואנטי-סימטרי.

7 הצגה גרפית של היחסים



תוכן העניינים