פונקציות ואינדוקציה

1 פונקציות

1.1 מהי פונקציה?

בהינתן שתי קבוצות A ו-B נגדיר **פונקציה מ-A ל-B** באופן הבא:

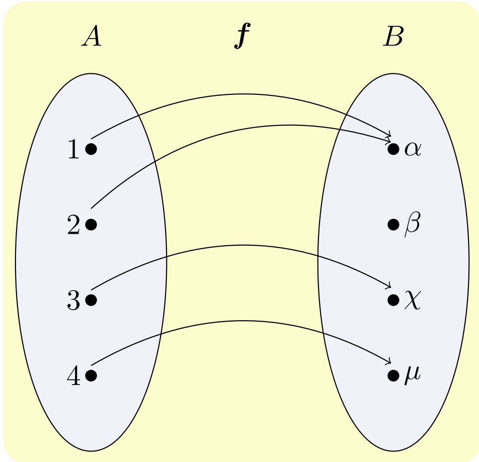
הגדרה 1. תהיינה שתי קבוצות A, B, f היא פונקציה מ-A ל-B אם **לכל** $a \in A$ **קיים** $b \in B$ כך ש-$f(a) = b$. [פירוש הסימן הוא ש-a נשלח ל-b.]
כלומר, אנחנו חייבים **שלכל** איבר ב-A יהיה איבר אחד בדיוק ב-B ש-$a \to b$.
לשתי הקבוצות הללו יש שמות:

A - "תחום" - הקבוצה שממנה אנחנו יוצאים.
B - "טווח" - הקבוצה שאליה אנחנו מגיעים.
פונקציה, היא פעולה שלוקחת **כל** אובייקט מקבוצת התחום ומעבירה אותו לאובייקט **אחד** בקבוצת הטווח.

למשל:
נניח כי:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{\alpha, \beta, \chi, \mu\}$$

אזי:



איור 1: גרף של פונקציה f

ולכן למשל: $f\left(1\right)=\alpha$ וגם $f\left(2\right)=\alpha$, $f\left(4\right)=\mu$ ואין שום איבר ב-A שמוביל ל-β, לכן לא נוכל באמצעות f להגיע אל β.

1.2 פונקציה חד-חד ערכית

פונקציה חד-חד-ערכית (חח"ע) היא פונקציה שעונה להגדרה הבאה:

הגדרה 2. עבור $a_1,a_2\in A$ f היא חח"ע אם מתקיים הדבר הבא:

$$a_1\neq a_2\implies f\left(a_1\right)\neq f\left(a_2\right)$$

כלומר, אם a_1 ו-a_2 שונים - אז **בהכרח** $f\left(a_1\right)$ ו-$f\left(a_2\right)$ שונים.
או, במילים אחרות: אם $f\left(a_1\right)=f\left(a_2\right)$ אזי **בהכרח** $a_1=a_2$.
במילים פשוטות יותר אפשר לומר שפונקציה חח"ע היא פונקציה שאם איבר מסוים בקבוצת התחום נשלח לאיבר כלשהו בקבוצת הטווח, אף איבר אחר (מקבוצת התחום) לא יגיע לאותו איבר מקבוצת הטווח, כלומר - הוא נתפס.

שאלה 1. למה ההגדרה לא אומרת את הדבר הבא: עבור $b_1,b_2\in B$ (קבוצת הטווח) אם $b_1\neq b_2$ אזי בהכרח שני האיברים ששלחו אותם שונים?

פתרון 1. כי אף אחד לא הבטיח לנו שלכל b קיים a שיגיע אליו.

1.3 פונקצית על

הגדרה 3. פונקציה f תיקרא "על" אם לכל $b\in B$ (קבוצת הטווח) קיים $a\in A$ (בניגוד לפונקציה חד-חד ערכית - 1.2, כאן יכול להיות שמספר איברים ב-a יובילו לאותו b) כך ש-$f\left(a\right)=b$. במילים אחרות - **כל** B "מכוסה", אין איבר ב-B שלא מגיעים אליו.

1.4 פונקציות של קבוצות אינסופיות

ניתן לשרטט פונקציה כמו באיור 1 או לרשום את הפונקציה כאוסף זוגות סדורים, כאשר מדובר בקבוצות סופיות.
אבל כאשר מדובר בקבוצות אינסופיות, נהוג להציג את הפונקציות באופן הבא:

דוגמה 1.

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$
$$f(x)=x^2$$

במקרה הזה, נוכל לקחת כל מספר טבעי ולהעלות אותו בריבוע, אבל $\cancel{f(2.32)}$ לא ייתכן כי מדובר רק על הטבעיים.

דוגמה 2. אפשר גם להתייחס לקבוצת מקרים:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$g=\begin{cases} x<0 & x \\ 0 & 0 \\ x\in(0,2) & \pi \\ x\geq 2 & 3x+5 \end{cases}$$

בצד שמאל תמיד תופיע לנו קבוצה התחום <u>**במלואה**</u>, ואילו בצד ימין יופיעו **רק** ערכים מקבוצת הטווח.
במקרה הזה יהיה לנו למשל:

1. $g(-3.2)=-3.2$.
2. $g(0)=0$.
3. $g\left(\sqrt{2}\right)=\pi$.
4. $g(1)=\pi$.
5. $g(3)=14$.

נשים לב שישנם ערכים ב-$\mathbb{R}$ שלעולם לא נוכל אליהם עם הפונקציה הנ"ל. למשל, לא קיים $a\in\mathbb{R}$ כך ש: $g(a)=1$.

דוגמה 3.

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$$
$$h=\begin{cases} x\leq 0 & \lfloor -2x\rfloor \\ x>0 & 3 \end{cases}$$

אם לא היינו מעגלים למטה במקרה של $x\leq 0$ אזי הפונקציה לא הייתה תקנית מכיוון ש-$h(-2.3)=$ 4.6 אבל $4.6\notin\mathbb{N}$.

2 דוגמאות לאינדוקציה שלמה

2.1 $n = 3x + 4y$ **לכל** $n \geq 6$

הוכחה. לכל $6 \leq n \in \mathbb{N}$ ניתן להציגו כ-$n = 3x + 4y$ כאשר $x, y \in \mathbb{N}$.
עבור $k \in \mathbb{N}$ ניתן לחלק את המספרים $n \geq 6$ לשלוש קבוצות:

$$N_0 = \left\{3k \middle| k \geq 2\right\}$$
$$N_1 = \left\{3k+1 \middle| k \geq 2\right\}$$
$$N_2 = \left\{3k+2 \middle| k \geq 2\right\}$$

בה"כ נוכיח את הטענה באינדוקציה על $\boldsymbol{k}$ עבור N_1.
<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $k = 2$ נקבל: $n = 3 \cdot 2 + 1 = 7$, ואכן: $7 = 3 + 4$.
<u>שלב האינדוקציה:</u> נוכיח את הטענה עבור k:

$$3k + 1 = n = 3x + 4y$$

כעת נראה עבור $k + 1$:

$$3(k+1) + 1 = 3x + 4y$$
$$\Updownarrow$$

מהנחת האינדוקציה:

$$\boldsymbol{(3k+1)} + 3 = \boldsymbol{3x + 4y} + 3$$

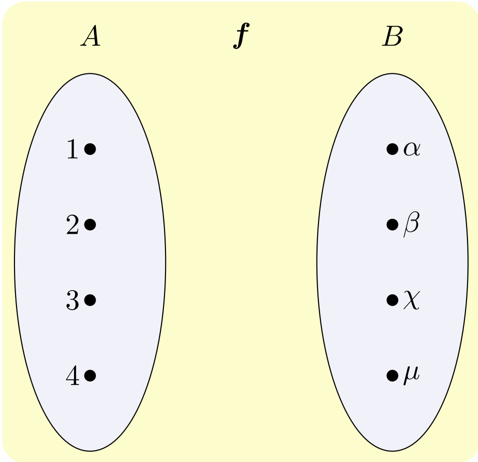
ולכן:

$$(3k+1) + 3 = 3(x+1) + 4y$$

וכמובן ש-$x + 1, y \in \mathbb{N}$.
מכאן שהאינדוקציה נכונה עבור $k \geq 2$ ובאופן דומה היינו יכולים להוכיח עבור N_0, N_2 והיות כפי שהסברנו קודם:

$$\left\{n \in \mathbb{N} \middle| n \geq 6\right\} = N_0 \cup N_1 \cup N_2$$

ולכן הטענה נכונה עבור על $n \geq 6$ כנדרש. ❐


A
f
B
1
2
3
4
α
β
χ
μ