מתמטיקה דיסקרטית - תרגיל 7

1 אינדוקציה

1.1 רקע

המון פעמים נרצה להוכיח טענה מתמטית שכוללת את הכמת **לכל**, למשל:
נסתכל על הקבוצה הבאה: $A = \{9, 17, 26, 36, 92, 15, 63\}$ אנחנו נרצה להוכיח כי **לא קיים** איבר הקטן מ-5, או במילים אחרות: **כל** האיברים בקבוצה גדולים מ-5.
לכן, מה שהכי טבעי שנעשה הוא שנעבור איבר איבר ונבדוק האם הטענה נכונה.
אבל יש מקרים שבהן מדובר על קבוצות אינסופיות, ולכן לא נוכל לבדוק איבר איבר אלא נצטרך להניח הנחה ולהוכיח אותה עבור כל המספרים החל מ-n מסוים.
זה כמו אבני דומינו שעומדים בשורה וכל אבן שנופלת מפילה את זאת שאחריה:
אם יש לנו אינסוף אבנים, לא נוכל אף פעם להפיל את כולן, אבל האינדוקציה מבטיחה לנו שהאבן שנמצאת "אי-שם" רחוק רחוק - גם היא תיפול.

1.2 תנאים

בשביל להפעיל את האינדוקציה אנחנו נדרוש שני תנאים:

תנאי 1. מינימליות - לכל קבוצה שנרצה להוכיח עליה את האינדוקציה יהיה איבר מינימלי אחד ויחיד.

תנאי 2. האיבר הבא - לכל איבר בקבוצה נוכל לדעת מה האיבר הבא (ולכן הוא גם חייב להיות יחיד).

אקסיומה 1. *לכל תת-קבוצה של הטבעיים קיים איבר מינימלי יחיד (תנאי 1).*

זאת הסיבה שבגלל באינדוקציה נעבוד רק על $\mathbb{N}$ (המספרים הטבעיים).

כל תת-קבוצה של $\mathbb{N}$ מקיימת את שני התנאים הללו, קבוצות ב-$\mathbb{Z}$ או ב-$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ כמובן לא יכולות לקיים את התנאי הזה.
$\mathbb{Z}$ - ניקח בתור תת-קבוצה את $\mathbb{Z}$ עצמה ואין לנו איבר מינימלי (תנאי 1).
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - ניקח למשל את $\frac{1}{4}$, מה האיבר שבא אחריו? (אין לזה תשובה חדש משמית).

1.3 סימון $P\left(n\right)$

צורת רישום. $P\left(n\right)$ פירושו טענה על n (שבמקרה שלנו אלו המספרים הטבעיים, כלומר מספר טבעי כלשהו).
למשל: $P\left(n\right)$ = "הביטוי $2n+1$ הוא אי-זוגי", וכו'.
באינדוקציה אנחנו נרצה להוכיח כי טענה $P\left(n\right)$ תהיה נכונה לכל $n\geq n_0$ (במקרה שלנו $n\in\mathbb{N}$) החל מ-$n_0\in\mathbb{N}$ מסוים.

1.4 משפט האינקציה

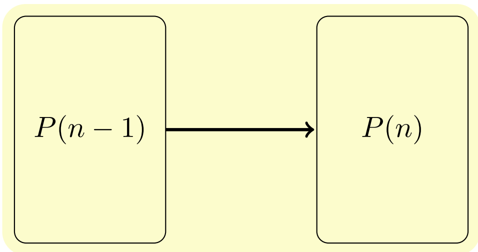
1.4.1 אינדוקציה בסיסית

משפט 1. תהי $P\left(n\right)$ טענה כלשהי לגבי $n\in\mathbb{N}$. אזי הטענה נכונה אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $P\left(n_0\right)$[1] נכונה.
2. **שלב האינדוקציה:** לכל $n>n_0$ נכונות הטענה $P\left(n-1\right)$ **גוררת** את הנכונות של $P\left(n\right)$.

הרעיון המרכזי פה שאחרי שהראנו שיש קבוצה עם איבר מינימלי $P\left(n_0\right)$, אזי הוכחת הנכונות של $P\left(n-1\right)$ **גוררת את הנכונות** של $P\left(n\right)$.
הרי n יכול להיות כל $n\in\mathbb{N}$ שהוא גדול מ-n_0 ולכן ברגע שהוכחנו את זה עבור $n-1$ הוכחנו את זה גם עבור n (זה כבר קשור להוכחת משפט האינדוקציה - שלא יתכנו איברים בין n_0 ל-n שעבורם $P\left(n\right)$ לא תהיה תקפה).

הערה 1. לפעמים הגרירה תהיה $P\left(n-1\right)\Rightarrow P\left(n\right)$ ולפעמים: $P\left(n\right)\Rightarrow P\left(n+1\right)$. אבל כמובן שדרכים אלו שקולות וניתן להשתמש בשתיהן (פשוט במקום n נציב $n-1$ או ההפך).



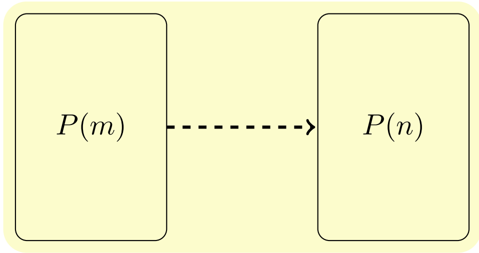
1.4.2 אינדוקציה שלמה

משפט 2. תהי $P\left(n\right)$ טענה כלשהי לגבי $n\in\mathbb{N}$. אזי הטענה נכונה אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה:** הטענה $P\left(n_0\right)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה:** לכל $m>n_0$, כאשר $n_0\leq m<n$, נכונות הטענה $P\left(m\right)$ **גוררת** את הנכונות של $P\left(n\right)$.

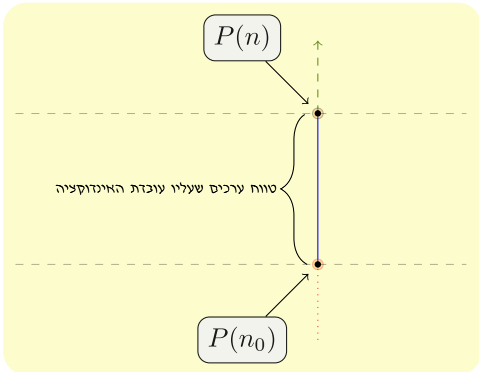
בניגוד לאינדוקציה בסיסית שבה הגרירה נובעת מ-"אחד לפני", כאן אנחנו יכולים להשתמש בכל מספר טבעי m לגרירת הטענה.

[1] בהרבה מקומות זה מצוין כ-$P\left(0\right)$, כלומר עבור $n=0$, אבל אני מניח שיש מקרים שהם האיבר המינימלי שעליו מתקיימת האינדוקציה אינו 0.



1.5 רעיון האינדוקציה

את האינדוקציה אפשר להבין באמצעות השרטוט הנ"ל:



תוכן העניינים