Mathématiques 1
Méthodes numériques :
Recherche d'une racine d'un polynôme

Institut Paul Lambin

12 novembre 2021

Polynômes : Définition

Un **polynôme** est une fonction d'une variable x de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où les a_i sont des constantes réelles.

Exemples :

- $f(x) = 4x^3 - 3x + 2$
- $f(x) = 3$
- $f(x) = x - x^2$

Polynômes : Propriétés

1. Le **degré** d'un polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est

   le plus grand exposant présent dans le polynôme

   $\rightarrow$ le plus grand n tel que $a_n \neq 0$

Exemples :

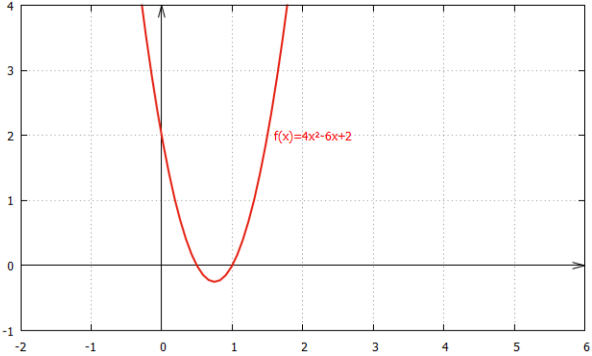
- $f(x) = 4x^{\mathbf{3}} - 3x + 2 \rightarrow$ de degré **3**.
- $f(x) = 3 \rightarrow$ de degré **0** (car $f(x) = 3 \cdot x^0$)
- $f(x) = x - x^{\mathbf{2}} \rightarrow$ de degré **2**.

Polynômes : Propriétés

2. Un polynôme est une fonction **continue**
   $\rightarrow$ on peut tracer son graphe en une seule fois sans lever son crayon.

Exemples :

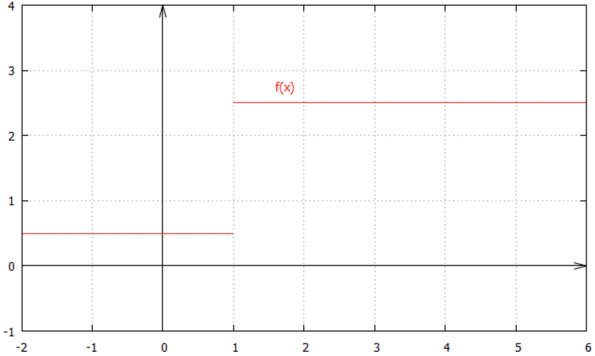
1) Polynôme $f(x) = 4x^2 - 6x + 2 \rightarrow$ fonction **continue** :



$\rightarrow$ on peut tracer son graphe en une seule fois sans lever son crayon

Polynômes : Propriétés

2) Fonction **pas continue** :



Le graphe de $f(x)$ est en deux morceaux.

$\rightarrow$ On ne peut pas le tracer en une fois sans lever le crayon.

$\rightarrow$ cette fonction n'est pas continue

Polynômes : Propriétés

3. Un **racine** d'un polynôme (d'une fonction) $f(x)$ est une valeur x^* telle que

$$\boldsymbol{f(x^*) = 0}$$

.

Interprétation graphique :

La valeur x^* est une racine de $f(x)$ si c'est l'abscisse (la coordonnée x) du point d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des x (l'axe horizontal).

Polynômes : Propriétés

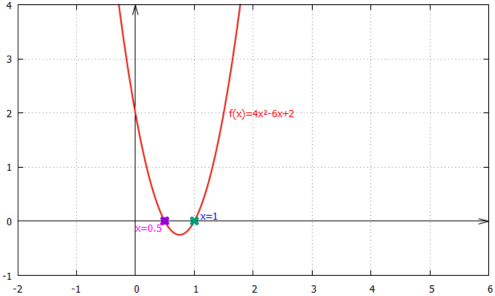
Exemple :

Reprenons le polynôme $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$.

$\rightarrow$ $x^* = 1$ est une racine de $f(x)$

$\rightarrow$ $f(1) = 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$.

Graphiquement on a



$\rightarrow$ en $x = x^* = 1$ le graphe du polynôme $f(x)$ intersecte l'axe horizontal

$\rightarrow$ $f(x)$ possède une seconde racine : $x^* = 0.5$.

Recherche d'une racine d'un polynôme : formules existantes

Pour certains polynômes : formules directes pour le calcul de la des racine(s). Ces racines seront soit **réelles** soit **complexes**.

Polynôme de degré 1 :

Si $f(x) = a_1 x + a_0$ alors l'unique racine est $x^* = -\dfrac{a_0}{a_1}$.

Polynôme de degré 2 :

Si $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ alors la méthode pour trouver la ou les racine(s) est

1) Calcul du discriminant : $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_0$
2)
   - Si $\Delta < 0 \rightarrow$ deux racines complexes conjuguées (hors du cadre de ce cours)
   - Si $\Delta = 0 \rightarrow$ une racine réelle double $x^* = -\dfrac{a_1}{2 \cdot a_2}$
   - Si $\Delta > 0 \rightarrow$ deux racines réelles : $\left\langle \begin{array}{lcl} x_1^* & = & \dfrac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a_2} \\ x_2^* & = & \dfrac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a_2} \end{array} \right.$

Recherche d'une racine d'un polynôme : formules existantes

Polynôme de degré 3 :

→ méthode de Cardan : ne donne qu'une racine !

→ Les autres racines racines doivent être calculées par factorisation.

Polynômes de degré 4 :

→ méthode de Ferrari qui permet de se ramener à un polynôme de degré 3

→ utilisation de la méthode de Cardan

Polynômes de degré supérieur ou égal à 5 :

→ Évariste Gallois a démontré qu'il n'existait pas de formule directe.

Recherche d'une racine d'un polynôme : méthodes numériques

Polynômes de degré 5 ou plus : pas de formules.

$\rightarrow$ Utilisation de **méthodes numériques** dite **itératives**

1) Ces méthodes ont la **structure** suivante :

   Etape 0 : choix d'une approximation initiale x_0 de la racine.

   Etape n : calcul d'une nouvelle approximation x_n à partir des précédentes $(x_0,\ x_1,\ \cdots, x_{n-1})$

2) La suite des approximations **doit converger vers la racine** recherchée :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x^* \text{ avec } f\left(x^*\right) = 0.$$

3) Choix d'un **critère d'arrêt** pour ne pas faire une infinité d'itération :

   $\rightarrow$ condition assurant que l'on est assez proche de la racine recherchée :

   $\rightarrow$ **erreur absolue** : $E_n = \left|x_n - x^*\right|$ qu'il faut estimer et borner

   $\rightarrow$ arrêt quand l'erreur absolue E_n est "suffisamment" petite

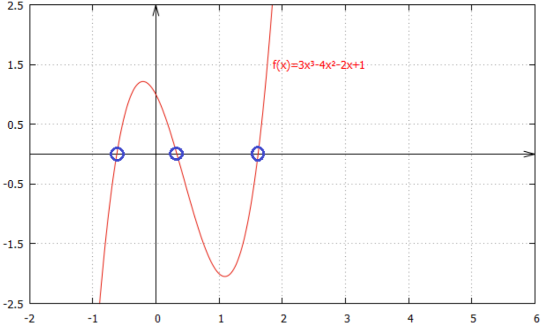
Méthodes pour choisir l'approximation initiale

Le choix de l'approximation initial très important

$\rightarrow$ impacte fortement la convergence et l'efficacité de la méthode.

Ce choix peut se faire

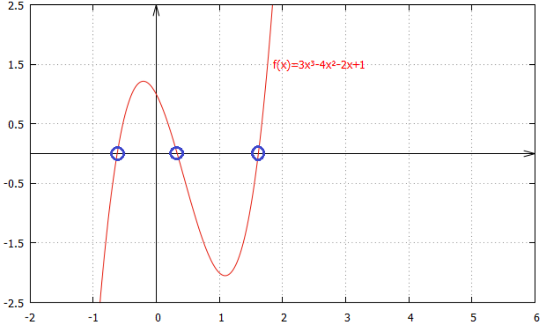
- grâce au contexte
- sur base d'une représentation graphique :



- par **criblage** : en faisant des essais systématiques

Méthodes pour choisir l'approximation initiale : Exemple

Soit le polynôme $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ dont le graphique est



On remarque que ce polynôme a trois racines :

- Une entre -1 et 0
- Une entre 0 et 1
- Une entre 1 et 2

Le graphique nous a permis de trouver une première "localisation" des racines.

Comment confirmer cela mathématiquement ? $\rightarrow$ théorème de **Bolzano**

Théorème de Bolzano

Soit

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$

Si

$$f(a) * f(b) < 0 \quad \Big(f(a) \text{ et } f(b) \text{ de signes opposés } \Big),$$

Alors

il existe au moins une valeur de $c \in [a, b]$ telle que $f(c) = 0$.

Interprétation :

Si

- je peux tracer le graphe de la fonction $f(x)$ sans lever mon stylo
- en partant de a je suis d'un côté de l'axe horizontal
- en arrivant à b je suis de l'autre côté

Alors

j'ai forcément intersecté l'axe en au moins un point.

Théorème de Bolzano : Exemple

Revenons à l'exemple précédent : le polynôme $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x + 1$:

1) La fonction $f(x)$ est un polynôme $\rightarrow$ elle est continue

2) $$\left.\begin{array}{rcl} f(-1) & = & -3-4+2+1=-4 \\ f(0) & = & 0-0-0+1=1 \end{array}\right\} \longrightarrow f(-1)\cdot f(0) = -4 < 0$$
$\rightarrow$ Il y a au moins une racine dans l'intervalle $[-1,\ 0]$

3) $$\left.\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0-0-0+1=1 \\ f(1) & = & 3-4-2+1=-2 \end{array}\right\} \longrightarrow f(0)\cdot f(1) = 1\cdot(-2) = -2 < 0$$
$\rightarrow$ Il y a au moins une racine dans l'intervalle $[0,\ 1]$

4) $$\left.\begin{array}{rcl} f(1) & = & 3-4-2+1=-2 \\ f(2) & = & 24-16-4+1=5 \end{array}\right\} \rightarrow f(1)\cdot f(2) = (-2)\cdot 5 = -10 < 0$$
$\rightarrow$ Il y a au moins une racine dans l'intervalle $[1,\ 2]$

Théorème de Bolzano : Exemple

Remarque :

Le théorème est vrai pour l'intervalle $[-1, 2]$!

En effet

$$\left.\begin{array}{rcl} f(-1) & = & -3-4+2+1=-4 \\ f(2) & = & 24-16-4+1=5 \end{array}\right\} \longrightarrow f(1)\cdot f(2) = (-4)\cdot 5 = -20 < 0$$

$\rightarrow$ Il y a au moins une racine dans l'intervalle $[-1,\ 2]$!

$\rightarrow$ En fait il y en a 3 !

Méthode de la bissection : Principe

A chaque itération

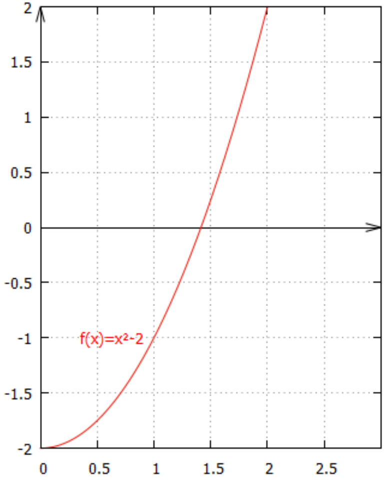
1. on coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux en son milieu
2. on garde la moitié dans laquelle se trouve la racine.

$\rightarrow$ utilisation le théorème de Bolzano pour choisir quelle moitié garder.

Méthode de la bissection : Exemple

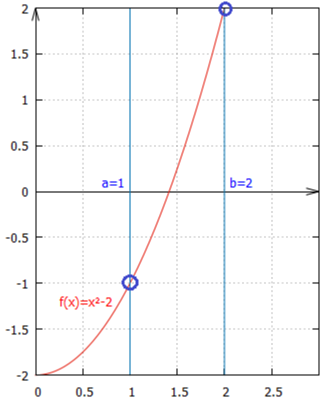
Cherchons la racine de $f(x) = x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Voici un graphique de ce polynôme :



Méthode de la bissection : Exemple

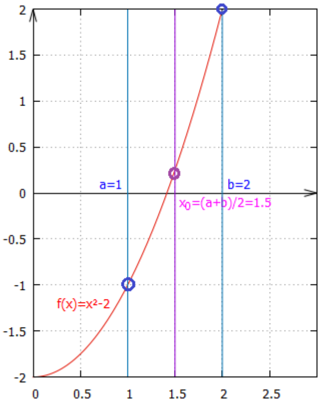
2. Sur base du graphique : intervalle de départ : $[a, b] = [1, 2]$



On voit que $f(1) = -1$ et $f(2) = 2 \rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$
$\rightarrow$ Par Bolzano il y a une racine dans cet intervalle

Méthode de la bissection : Exemple

3. Coupons cet intervalle en 2 en son milieu : $x_0 = \dfrac{1+2}{2} = 1.5$:



<u>choix de l'intervalle suivant :</u>

2 intervalles possibles : $[1,\ 1.5]$ et $[1.5,\ 2]$.

On a $f(1.5) > 0$ comme $f(2)$.

$\rightarrow$ ~~Bolzano~~ sur l'intervalle $[1.5,\ 2]$.

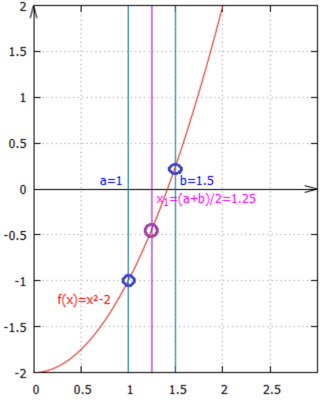
$\rightarrow$ on prend l'autre intervalle

$\rightarrow$ $[1,\ 1.5]$ est le nouvel intervalle de travail.

$\rightarrow$ b devient égal à x_0

Méthode de la bissection : Exemple

4. On refait l'étape 3 : Coupons l'intervalle en 2 en son milieu :
$x_1 = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25$:



<u>choix de l'intervalle suivant :</u>
$[1,\ 1.25]$ ou $[1.25,\ 1.5]$.
On a $f(1.25) < 0$ comme $f(1)$.
$\rightarrow$ ~~Bolzano~~ sur l'intervalle $[1,\ 1.25]$.
$\rightarrow$ on prend l'autre intervalle
$\rightarrow$ $[1.25,\ 1.5]$ est le nouvel intervalle.
$\rightarrow$ a devient égal à x_1

Méthode de la bissection : Exemple

Remarques :

1) L'étape 3. sera réitérée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit vérifié.
2) Pour trouver graphiquement la valeur de la fonction en un point :
   a) On trace une droite verticale passant par ce point
   b) On trace une droite horizontale passant par le point d'intersection du graphe du polynôme avec la droite verticale
   c) La valeur de la fonction se trouve à l'intersection de cette droite horizontale avec l'axe verticale (l'axe des y)
3) A chaque itération, la taille de l'intervalle est divisée par 2 et celui-ci contient toujours la racine
   $\rightarrow$ on va bien converger vers la racine.

Algorithme de la bissection

Soit

- $f(x)$ un polynôme
- $[a,\ b]$ un intervalle de départ vérifiant le théorème de Bolzano

A l'étape n on fait

1) Calcul de $x_n = \dfrac{a+b}{2}$
2) Si $f(x_n) = 0$, on a trouvé la racine et on s'arrête
3) Détermination du nouvel intervalle :

$$\begin{cases} \text{Si} \quad f(a)\cdot f(x_n) > 0 \quad \text{alors} \quad a \text{ devient } x_n \quad \rightarrow \quad [a,\ b] = [x_n,\ b] \\ \text{Si} \quad f(b)\cdot f(x_n) > 0 \quad \text{alors} \quad b \text{ devient } x_n \quad \rightarrow \quad [a,\ b] = [a,\ x_n] \end{cases}$$

Attention, la première approximation de la racine est x_0

$\rightarrow$ n prendra les valeurs $0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

Méthode de la bissection : bornage de l'erreur absolue

- On travaille sur intervalle $[a,\ b]$ contenant la racine recherchée.
- On prend alors le milieu de l'intervalle comme nouvelle approximation x_n.

Comment déterminer l'erreur commise ?

L'approximation x_n étant au milieu de l'intervalle :

$\rightarrow$ Les points de l'intervalle les plus éloignés de x_n sont a et b

$\rightarrow$ Ils sont à une distance de la moitié de la longueur de l'intervalle de x_n

$\rightarrow$ La longueur de l'intervalle égale à $b - a$

$\rightarrow$ Erreur absolue E_n bornée par la moitié de cette longueur : $E_n \leq \dfrac{b-a}{2}$

A chaque itération on divise la longueur par 2.

Donc à l'étape n, l'intervalle de travail est $[a_n,\ b_n]$ et

$$E_n \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2}$$

$$\rightarrow \boxed{E_n \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}}$$

Bissection : Nombre d'étapes pour d décimales exactes

Une approximation x_n d'une racine x^* a d décimale(s) exacte(s) si

$$
\begin{array}{rrcl}
 & E_n = |x_n - x^*| & \leq & 0.5 \cdot 10^{-d} \\
\rightarrow & \dfrac{b-a}{2^{n+1}} & \leq & 0.5 \cdot 10^{-d} \qquad \left(\text{car } E_n \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}} \right) \\
\rightarrow & \dfrac{b-a}{0.5 \cdot 10^{-d}} & \leq & 2^{n+1} \\
\rightarrow & \dfrac{b-a}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^d}} & \leq & 2^n \cdot 2^1 \\
\rightarrow & 2 \cdot 10^d \cdot (b-a) & \leq & 2 \cdot 2^n \\
\rightarrow & 10^d \cdot (b-a) & \leq & 2^n \\
\rightarrow & \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right) & \leq & n \\
\rightarrow & n & \geq & \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right)
\end{array}
$$

Donc pour obtenir d décimale(s) exacte(s) le nombre minimale d'itérations à faire est **le plus petit entier** $n \geq \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right)$.

Bissection : Nombre d'étapes pour d décimales exactes

Exemple :

Polynôme $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[a, b] = [1, 2]$.

On a $b - a = 2 - 1 = 1$.

Pour obtenir une approximation de la racine avec d décimale(s) exacte(s) avec

- $d = 1 \to n \geq \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right) = \log_2\left(10^1 \cdot 1\right) = 3.32... \to 4$ étapes.
- $d = 2 \to n \geq \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right) = \log_2\left(10^2 \cdot 1\right) = 6.64... \to 7$ étapes.
- $d = 4 \to n \geq \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right) = \log_2\left(10^4 \cdot 1\right) = 13.29... \to 14$ étapes.
- $d = 10 \to n \geq \log_2\left(10^d \cdot (b-a)\right) = \log_2\left(10^{10} \cdot 1\right) = 33.22... \to 34$ étapes.

Cette **méthode** fonctionne toujours est **très simple** mais est **très lente** !

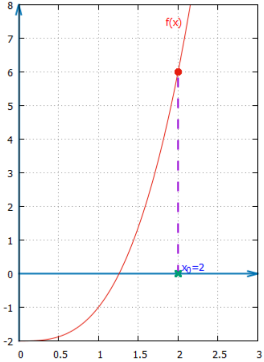
Méthode de Newton(-Raphson) : Principe

Calcul l'approximation suivante x_{n+1}

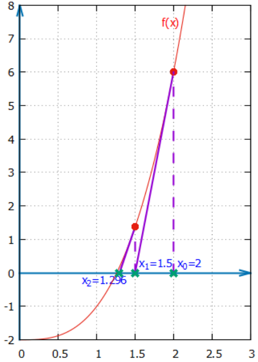
- uniquement à partir de la précédente x_n.
- en suivant la tangente au graphe en x_n jusqu'à l'axe horizontal (l'axe x).

<u>Exemple :</u>

Recherche de la racine de $f(x)$ avec $x_0 = 2$ comme approximation initiale :



$\Longrightarrow$



Méthode de Newton(-Raphson) : Principe

Remarques :

1) En 2 itérations on est déjà très près de la racine.
2) Plus on se rapproche du point, plus la tangente et la fonction se confondent.

Comme cette méthode utilise les tangentes :

1) Utilisation de la dérivée première $\left(f'(x)\right)$ pour "calculer" la tangente
2) Besoin de conditions supplémentaires pour assurer la convergence
3) Importance accrue de l'approximation initiale !

Dérivée première d'un polynôme : définition

Soit le polynôme dont l'équation est

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Alors **sa dérivée (première)** $f'(x)$ est un polynôme dont l'équation est

$$n\, a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2\, a_2\, x + a_1$$

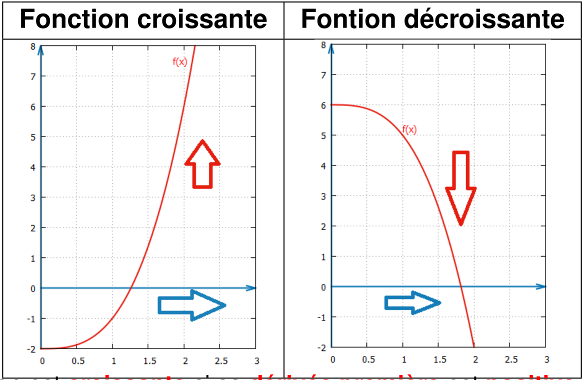
Exemples :

1) Si $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ alors $f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 3 = 6x^2 - 3$
2) Si $f(x) = 4x^4 - 5x^3 - 2x^2$ alors

$$f'(x) = 4 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 5x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} = 16x^3 - 15x^2 - 4x$$

Dérivée première d'un polynôme : interprétation graphique

- $f(x)$ **croissante** : quand je parcours son graphique de la gauche vers la droite, celui-ci **monte**.
- $f(x)$ **décroissante** : quand je parcours son graphique de la gauche vers la droite, celui-ci **descend**.



- une fonction est **croissante** si sa **dérivée première** est **positive** $\rightarrow$ si $f'(x) \geq 0$.
- une fonction est **décroissante** si sa **dérivée première** est **négative** $\rightarrow$ si $f'(x) < 0$.

Dérivée seconde d'un polynôme : définition

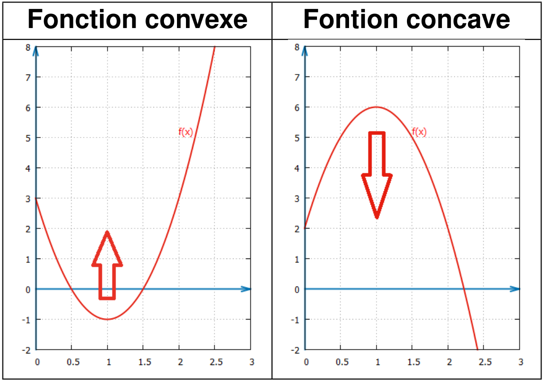
La **dérivée seconde** $f''(x)$ d'un polynôme est la **dérivée de sa dérivée**.

Exemples :

1) Si $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ alors
   - $f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 3 = 6x^2 - 3$
   - $f''(x) = \Big(f'(x)\Big)' = 2 \cdot 6\,x^{2-1} = 12x$
2) Si $f(x) = 4x^4 - 5x^3 - 2x^2$ alors
   - $f'(x) = 4 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 5x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} = 16x^3 - 15x^2 - 4x$
   - $f''(x) = \Big(f'(x)\Big)' = 3 \cdot 16x^{3-1} - 2 \cdot 15x^{2-1} - 4 = 48x^2 - 30x - 4$

Dérivée première d'un polynôme : interprétation graphique

- $f(x)$ **convexe** : si son graphe a une **concavité tournée vers le haut**.
- $f(x)$ **concave** : si son graphe a une **concavité tournée vers le bas**.



- une fonction est **convexe** si sa **dérivée seconde** est **positive** $\rightarrow$ si $f''(x) \geq 0$.
- une fonction est **concave** si sa **dérivée seconde** est **négative** $\rightarrow$ si $f''(x) \leq 0$.

Méthode de Newton(-Raphson) : choix de l'intervalle $[a,\ b]$

Pour que la convergence se fasse rapidement et dans de bonnes condition,
Il faut que

- l'intervalle de travail $[a,\ b]$ contienne une et une seule racine
- le graphe $f(x)$ ne fasse que monter ou que descendre sur $[a,\ b]$
- le graphe $f(x)$ tout le temps convexe ou tout le temps concave sur $[a,\ b]$

Mathématiquement cela devient

- Bolzano : $\begin{cases} f(a)\cdot f(b) < 0 \\ f(x) \text{ continue sur } [a,\ b] \end{cases}$
- La dérivée première $f'(x)$ existe et est de signe constant sur $[a,\ b]$:
$$\forall x \in [a,\ b] : f'(x) > 0 \text{ ou } \forall x \in [a,\ b] : f'(x) < 0$$
- La dérivée seconde $f''(x)$ existe et est de signe constant sur $[a,\ b]$:
$$\forall x \in [a,\ b] : f''(x) > 0 \text{ ou } \forall x \in [a,\ b] : f''(x) < 0$$

Unicité de la racine

Par Bolzano

- le graphe de $f(x)$ commence en a d'un côté de l'axe horizontal
- le graphe de $f(x)$ se termine en b de l'autre côté de l'axe horizontal
- on peut tracer le graphe sans lever son crayon.

Par la deuxième condition

- le graphe ne fait que monter ou que descendre sur tout l'intervalle $[a, b]$.

Alors

le graphe va intersecter une et une seule fois l'axe horizontale.

$\rightarrow$ fonction $f(x)$ a une et seule racine dans l'intervalle $[a, b]$.

Newton(-Raphson) : choix de l'approximation initiale

Choix

- crucial pour avoir une convergence rapide vers l'unique racine de l'intervalle $[a,\ b]$.
- sur base du théorème suivant :

Soit

- $f(x)$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$
- x_0 une approximation initiale

Si

- les conditions précédentes sont vérifiées
- $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

Alors

l'algorithme de Newton(-Raphson) utilisant x_0 comme approximation initiale va converger vers l'unique racine x^* de $f(x)$ sur $[a,\ b]$.

Newton(-Raphson) : choix de l'approximation initiale

Choix approximation de initial x_0 vérifie les conditions du théorème :

$\rightarrow$ borne de l'intervalle telle que fonction $f(x)$ et sa dérivée seconde $f''(x)$ aient même signe :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } f(a) \cdot f''(a) > 0 \text{ alors } x_0 = a \\[1em] \text{Si } f(b) \cdot f''(b) > 0 \text{ alors } x_0 = b\end{array}}$$

Newton(-Raphson) : convergence de l'algorithme

Comme
- l'approximation initiale x_0 est choisie comme ci-avant
- $f(x)$ est soit convexe, soit concave sur $[a, b]$,

Alors

1) les x_n seront tous du même côté de la racine que x_0.
2) les x_n partiront d'une borne et vont se rapprocher de la racine sans la dépasser,
3) on dira que x_n est l'**extrémité variable** de l'intervalle.
4) L'autre extrémité a ou b est appelée **extrémité fixe**.

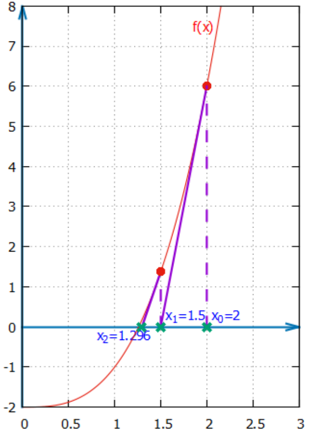
Conclusion :

Si
- $f(a) \cdot f''(a) > 0$ alors
  - $x_0 = a$ est l'extrémité variable
  - b est l'extrémité fixe
- $f(b) \cdot f''(b) > 0$ alors
  - $x_0 = b$ est l'extrémité variable
  - a est l'extrémité fixe

Alors les x_n se rapprochent de la racine x^* sans jamais la dépasser donc la convergence est assurée.

Newton(-Raphson) : convergence de l'algorithme

Illustration :



- intervalle de départ : $[a,\ b] = [0,\ 2]$
- $f(x)$ croissante sur $[a,\ b]$
- $x_0 = b$ car $f(x)$ est convexe
  $(f''(2) > 0$ et $f(2) > 0)$.
- $a = 0$ est l'extrémité fixe.

$\rightarrow$ l'algorithme converge vers l'unique racine de $f(x)$ dans $[0,\ 2]$.

Algorithme de Newton(-Raphson)

Algorithme de Newton(-Raphson) pour calculer la racine d'une fonction :

1) Choix d'un intervalle $[a,\ b]$ vérifiant les conditions vue précédemment

2) Choix de l'approximation initiale x_0 :

   - Si $f(a) \cdot f''(a) > 0$ alors $x_0 = a$
   - Si $f(b) \cdot f''(b) > 0$ alors $x_0 = b$

3) Tant qu'un critère d'arrêt n'est pas vérifié faire

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}}$$

Algorithme de Newton(-Raphson) : Exemple

- Même exemple que pour l'algorithme de la bissection.
- Recherche de la racine de $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle $[a,\ b] = [1,\ 2]$.

On a que

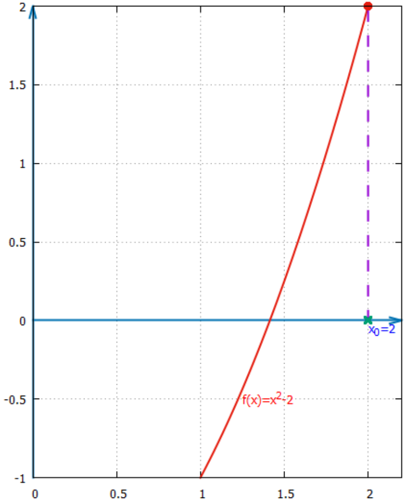
- Bolzano est respecté car $f(1) = -1$ et $f(2) = 2$
- $f'(x) = 2x > 0$ sur $[a,\ b] = [1,\ 2] \rightarrow f(x)$ est croissante sur $[a,\ b]$
- $f''(x) = 2 > 0$ sur $[a,\ b] = [1,\ 2] \rightarrow f(x)$ est convexe sur $[a,\ b]$

Donc

- l'approximation initiale sera $x_0 = b = 2$ car $f(2) \cdot f''(2) = 2 \cdot 2 = 4 > 0$
- $a = 1$ sera l'extrémité fixe.

Algorithme de Newton(-Raphson) : Exemple

1) Situation de départ :

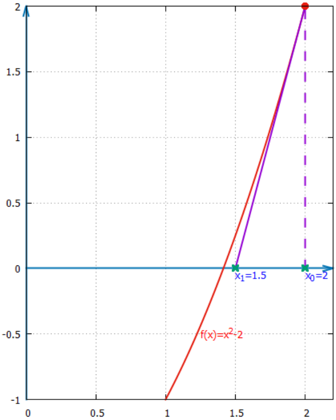


Algorithme de Newton(-Raphson) : Exemple

2) Formule de Newton(-Raphson) pour trouver l'approximation suivante :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = 2 - \frac{2}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Graphiquement :

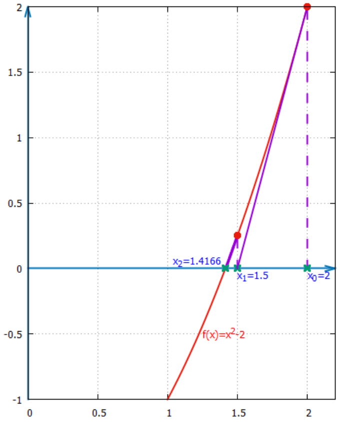


Algorithme de Newton(-Raphson) : Exemple

3) Formule de Newton(-Raphson) pour trouver l'approximation suivante :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \cdot 1.5} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.4166666..$$

Graphiquement :



Algorithme de Newton(-Raphson) : Exemple

4) Formule de Newton(-Raphson) pour trouver l'approximation suivante :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.41666... - \frac{1.41666...^2 - 2}{2 \cdot 1.41666} = 1.\mathbf{41421}569...$$

5) $\cdots$

Remarques :

1) Racine calculable immédiatement :
$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2} = \mathbf{1.41421}356...$
2) La quatrième approximation x_3 a déjà 5 décimales exactes !
3) L'approximation x_2 a deux décimales exactes et x_3 en a 5 !
   - $\rightarrow$ La méthode de Newton(-Raphson) est une méthode dite **quadratique**
   - $\rightarrow$ le nombre de décimale exacte double à chaque itération.

Méthode de Newton(-Raphson) : Borne d'erreur absolue

Soit

- une fonction $f(x)$ sur intervalle $[a,\ b]$
- vérifiant les conditions vues précédemment.

On a alors le théorème suivant

Soient

- x^* la racine exacte,
- $x^\$$ une approximation de la racine x^* .

Si

$$\exists\, m \text{ tel que } \forall\, x \in [a,\ b]\ |f'(x)| \geq m > 0$$

Alors

$$\left|x^\$ - x^*\right| \leq \frac{\left|f\left(x^\$\right)\right|}{m}$$

Méthode de Newton(-Raphson) : Borne d'erreur absolue

Considérons le cas où $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ sur $[a,\ b]$. Alors

- $f(x)$ est croissante
- $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ car $f(x)$ est croissante (Bolzano)
- on prend $x_0 = b$ car $f(b) > 0$ et $f''(x) > 0$ donc $f(b) \cdot f''(b) > 0$.
- a sera l'extrémité fixe
- comme $f''(x) > 0$ et $f''(x) = (f'(x))'$, alors
  - $f'(x)$ est croissante sur $[a,\ b]$
  - $f'(x) \geq f'(a)\ \forall x \in [a,\ b]$ et $f'(a) > 0$

On peut appliquer le théorème précédent avec $m = f'(a)$
$\rightarrow$ pour tout approximation x_n on a

$$\boxed{E_n = |x_n - x^*| \leq \left| \frac{f(x_n)}{f'(a)} \right|}$$

Méthode de Newton(-Raphson) : Borne d'erreur absolue

Un résultat similaire peut-être obtenu dans les 3 autres cas :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{et} & f''(x) < 0 \\ f'(x) < 0 & \text{et} & f''(x) > 0 \\ f'(x) < 0 & \text{et} & f''(x) < 0 \end{cases}$$

De manière générale on a

$$\boxed{E_n = |x_n - x^*| \leq \left|\frac{f(x_n)}{m}\right|}$$

avec $\boxed{m = f'(\text{extrémité fixe})}$

On a donc trouvé que

$$\boxed{\left|\frac{f(x_n)}{m}\right|}$$

est une borne d'erreur absolue .

Méthode de Newton(-Raphson) : Critère d'arrêt

- On veut une approximation avec ***d*** décimale(s) exacte(s).
- On peut le garantir si $\boxed{E_n \leq 0.5 \cdot 10^{-d}}$
  Donc si

$$\begin{aligned}
E_n &\leq 0.5 \cdot 10^{-d} \\
\frac{|f(x_n)|}{|m|} &\leq 0.5 \cdot 10^{-d} \\
\frac{|f(x_n)|}{|m|} &\leq \frac{0.5}{10^d} \\
10^d &\leq \frac{0.5 \cdot |m|}{|f(x_n)|} \\
d &\leq \log_{10}\left(\frac{0.5 \cdot |m|}{|f(x_n)|}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion :

Pour x_n, on peut garantir comme nombre minimal de décimales exactes le plus grand entier inférieur ou égal à $\log_{10}\left(\frac{0.5 \cdot |m|}{|f(x_n)|}\right)$

Méthode de Newton(-Raphson) : Critère d'arrêt

Attention ! La borne d'erreur dépend de x_n !

$\rightarrow$ on ne peut plus trouver n "a priori" comme dans le cas de la méthode de la bissection !

Méthode de Newton(-Raphson) : Critère d'arrêt

Revenons à notre exemple $f(x) = x^2 - 2$ avec $[a,\ b] = [1, 2]$,
On a que

- la racine est $x^* = \sqrt{2} = 1.4142135623730...$
- l'estimation initiale est $x_0 = b = 2$
- l'extrémité fixe est $a = 1$.

Voici le nombre d'étapes pour la méthode de la bissection :

Bissection		
n	$\boldsymbol{x_n}$	décimale(s) exacte(s)
0	1.5	$d = 0$
1	1.25	$d = 0$
2	1.375	$d = 0$
3	1.**4**375	$\boldsymbol{d = 1}$
14		$d = 4$
34		$d = 10$

Méthode de Newton(-Raphson) : Critère d'arrêt

Voici le nombre d'étapes pour la méthode de Newton :

Newton(-Raphson)		
n	x_n	décimale(s) exacte(s)
0	2	$\log_{10}\left(\left\lvert\frac{0.5\cdot f'(1)}{f(2)}\right\rvert\right) = -0.3 \to d = 0$
1	1.5	$\log_{10}\left(\left\lvert\frac{0.5\cdot f'(1)}{f(1.5)}\right\rvert\right) = 0.6 \to d = 0$
2	1.**41**666	$\log_{10}\left(\left\lvert\frac{0.5\cdot f'(1)}{f(1.41666)}\right\rvert\right) = 2.16 \to \boldsymbol{d = 2}$
3	1.**41421**569	$\log_{10}\left(\left\lvert\frac{0.5\cdot f'(1)}{f(1.41421569)}\right\rvert\right) = 5.22 \to \boldsymbol{d = 5}$
4	1.**41421356237**4690	$\log_{10}\left(\left\lvert\frac{0.5\cdot f'(1)}{f(1.41421356237)}\right\rvert\right) = 11.346 \to \boldsymbol{d = 11}$

$\rightarrow$ Méthode de Newton(-Raphson) : 4 itérations pour obtenir 11 décimales exactes

$\rightarrow$ Méthode de la bissection : 34 itérations de la pour en obtenir 10 !

Fonctions Excel utiles

1) `ARRONDI.INF(nombre ; nb_chiffres) :`
"arrondi `nombre` en tendant vers zéro, en gardant `nb_chiffres` après la virgule."

Exemples :

- `ARRONDI.INF(1,25 ; 0)` → 1
- `ARRONDI.INF(1,25 ; 1)` → 1,2
- `ARRONDI.INF(254,13 ; 0)` → 254
- `ARRONDI.INF(254,13 ; -1)` → 250
- `ARRONDI.INF(-32,236 ; 0)` → -32
- `ARRONDI.INF(-1,236 ; 1)` → -1,2

Fonctions Excel utiles

2) `ARRONDI.SUP(nombre ; nb_chiffres)` :
"arrondi `nombre` en s'éloignant de zéro, en gardant `nb_chiffres` après la virgule."

Exemples :

- `ARRONDI.SUP(1,25 ; 0)` → 2
- `ARRONDI.SUP(1,25 ; 1)` → 1,3
- `ARRONDI.SUP(254,13 ; 0)` → 255
- `ARRONDI.SUP(254,13 ; -1)` → 260
- `ARRONDI.SUP(-32,236 ; 0)` → -33
- `ARRONDI.SUP(-1,236 ; 1)` → -1,3