Mathématiques 1
Rappels d'arithmétique

Institut Paul Lambin

24 septembre 2021

Ensembles de nombres

Voici quelques ensembles de nombres avec lesquels nous allons travailler :

Ensemble	Description	Exemples
$\mathbb{N}$	ensemble des naturels (les entiers positifs)	$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs (positifs et négatifs)	$\ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationels (les entiers et les fractions)	$-2,\ -\frac{1}{2},\ 4,\ \frac{27}{5},\ \frac{1}{3} = 0.33\ldots$
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels (les rationels et les irrationnels)	$-5,\ -\frac{2}{3},\ \pi,\ \frac{27}{5},\ 12$

Ensembles de nombres

Remarques :

- L'entier **0** est **positif et négatif** $\rightarrow$ $\mathbf{signe(0) = 0}$
- Deux écritures pour les rationnels :
  - Sous forme de fraction : $\frac{1}{6}$
  - Sous décimale illimitée périodique : 0.16666666666...
- Les réels qui ne peuvent pas être écrits sous forme de fraction sont appelés les nombres irrationnels

  Exemple : $\sqrt{2}$, π, e, $\sqrt[3]{4}$
- Ensembles $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}_0$, $\mathbb{Q}_0$, $\mathbb{R}_0$: ensembles décrits avant mais sans 0.

La relation divise, notée $|$, sur $\mathbb{Q}$

Définition

- $\boldsymbol{b|a}$: $\left.\begin{array}{l}\text{a est un } \textbf{\textit{multiple}} \text{ de } b \\ b \text{ est un } \textbf{\textit{diviseur}} \text{ de } a \\ b \textbf{\textit{ divise }} a\end{array}\right\}$: le **reste** de la division entière de a par b égale **0**.

- Le reste de la division entière est noté " mod ".

  Exemple :

  $14 \mod 3 = 2$ car $14 = 4 \cdot 3 + 2$: le reste de la division de 14 par 3 vaut 2.

- Exemples avec la relation $|$:
  1) $5|15$ a pour valeur : VRAI 5 divise 15 $\rightarrow 15 = 3 \cdot 5 \rightarrow 15 \mod 3 = 0$
  2) $2|15$ a pour valeur : FAUX 2 ne divise pas 15 :

  $$\rightarrow 15 = 7 \cdot 2 + 1 \rightarrow 15 \mod 2 = 1 \neq 0$$

Nombres Premiers

Définition :

Un nombre naturel non nul est **premier** si et seulement si il n'a **que 2 diviseurs naturels** différents (1 et lui-même).

Exemples :

1) 13 : nombre premier car n'a que 2 diviseurs différents : 1 et 13.

2) 15 : pas un nombre premier : car a 4 diviseurs : 1, 3, 5 et 15.

Nombres premiers : test de primalité

Voici un algorithme permettant de déterminer si un naturel n est premier

1) Si n est égal à 0 ou 1 ce n'est pas un nombre premier
2) Si $n \geq 2$: On teste un par un les entiers entre 2 et $\sqrt{n}$:
   - S'il y a en un qui divise n alors n n'est pas premier.
   - Si aucun ne divise n alors n est un nombre premier.

Exemples :

a) Testons si 13 est premier : On a que $\sqrt{13} = 3.6056$. Alors
   1) on teste 2 : 2 ne divise pas 13
   2) on teste 3 : 3 ne divise pas 13
   3) 4 est plus grand que $\sqrt{13} \to$ on s'arrête

   Le nombre 13 est premier car aucun entier entre 2 et $\sqrt{13}$ ne divise 13
b) Testons si 51 est premier. On a que $\sqrt{51} = 7.1414$. Alors
   1) on teste 2 : 2 ne divise pas 51
   2) on teste 3 : 3 divise 51 car $51/3 = 17 \to$ on s'arrête

   Le nombre 51 n'est pas premier car on a trouvé un entier entre 2 et $\sqrt{51}$ qui divise 51.

Nombres premiers : test de primalité

Remarques :

Dans le cas de l'exemple b) : lorsque l'on trouve que 3 divise 51 on trouve aussi que 17 divise 51.

$\rightarrow$ pour un entier plus petit que $\sqrt{51}$ qui divise 51, on en a trouvé un plus grand que $\sqrt{51}$ qui divise 51.

$\rightarrow$ pour tester si un nombre n est premier, il suffit de tester s'il est divisible par un entier entre 2 et $\sqrt{n}$.

Nombres premiers : Crible d'Eratosthène

Méthode permettant de trouver tous les nombres premiers entre 2 et n.

Exemple : Recherche de tous les nombres premiers entre 2 et 22 :

1) On met tous les entiers entre 2 et 22 dans un tableau :

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22

2) L'élément dans la première case non vide est premier : c'est le nombre 2.

3) On garde 2 et on retire tous ses multiples du tableau :

2	3		5		7	
9		11		13		15
	17		19		21	

Nombres premiers : Crible d'Eratosthène

4) L'élément dans la case non vide suivante est premier 3 : c'est le nombre 3.

2	**3**		5		7	
9		11		13		15
	17		19		21	

5) On garde 3 et on retire tous ses multiples du tableau :

2	**3**		5		7	
		11		13		
	17		19			

6) On continue comme cela jusqu'à avoir parcouru tout le tableau et on obtient

2	**3**		**5**		**7**	
		11		**13**		
	17		**19**			

Conclusion :

Les nombres premiers entre 2 et 22 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19

Décomposition en nombres premiers

Un résultat très important et très utile en mathématique est le suivant

> *Tout nombre naturel (≥ 2) s'écrit, de manière unique, comme produit de nombres premiers.*

Exemples :

1) $15 = 3 \cdot 5$
2) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$
3) $37 = 37$
4) $1040257 = 127 \cdot 8191$

PGCD

Deux entiers a et b ont toujours au moins 1 diviseur en commun à $\rightarrow$ le nombre 1.

Le **PGCD** de a et b est **le Plus Grand Commun Diviseur** de a et b c.-à-d. le plus grand entier qui divise a et b.

Exemples :

- si $a = 24$ et $b = 16$ alors PGCD(a,b)$= 8$ car $24 = 3 \cdot 8$, $16 = 2 \cdot 8$ et il n'y a pas d'entier plus grand que 8 qui divise à la fois 24 et 16.
- si $a = 980$ et $b = 1512$ alors

$$\begin{cases} a = 980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ b = 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \end{cases} \rightarrow \mathrm{PGCD}(a, b) = 2^2 \cdot 7 = 28$$

PGCD

Remarques :

- Pour trouver le PGCD d'entier :
  - $\longrightarrow$ recourt à la décomposition en facteurs premiers
  - $\longrightarrow$ méthode très lourde et très complexe
  - $\longrightarrow$ il existe une méthode plus simple et nettement moins coûteuse.

- Pour calculer le PGCD de deux entiers, on a
  - Factorisé a et b en nombres premiers.
  - PGCD = produit de tous les facteurs présent à la fois dans la factorisation de a et dans la factorisation de b avec pour exposant le plus petit parmi ceux des deux factorisations de a et b.

PPCM

Deux entiers a et b ont toujours au moins 1 multiple en commun à $\rightarrow$ le nombre $a \cdot b$.

Le **PPCM** de a et b est **le Plus Petit Commun Multiple** de a et b c.-à-d. le plus petit entier qui est à la fois multiple de a et b.

Exemples :

- si $a = 24$ et $b = 16$ alors

$$\left\{\begin{array}{l} a = 24 = 2^3 \cdot 3 \\ b = 16 = 2^4 \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{PPCM}(a, b) = 2^4 \cdot 3 = 48$$

- si $a = 980$ et $b = 1512$ alors

$$\left\{\begin{array}{l} a = 980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \\ b = 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \end{array}\right. \rightarrow \mathrm{PPCM}(a, b) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 52920$$

PPCM

Remarques :

- Pour calculer le PPCM, on a
  - Factorisé a et b en nombres premiers.
  - PPCM = produit de tous les facteurs présent soit dans la factorisation de a et soit dans la factorisation de b avec pour exposant le plus grand parmi ceux des deux factorisations de a et b.

Nombres premiers entre eux

Deux nombres naturels a et b sont **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(a,b) = 1$.

Exemples :

1) $a = 24$ et $b = 35$ sont premiers entre eux car

$$\begin{cases} a = 24 = 2^3 \cdot 3 \\ b = 35 = 5 \cdot 7 \end{cases} \rightarrow \text{PGCD}(a,b) = 1$$

2) $a = 91$ et $b = 35$ ne sont pas premiers entre eux

- $\rightarrow$ a et b sont divisibles par 7.
- $\rightarrow$ $a = 91 = 13 \cdot 7$ et $b = 35 = 5 \cdot 7$.
- $\rightarrow$ $\text{PGCD}(a,b) = 7 \neq 1$.