# Exercices de Mathématiques 2

Haute école Léonard de Vinci

**Site Paul Lambin**

Clos Chapelle-aux-champs 43 - 1200 Bruxelles

Baccalauréat en informatique

Annick Dupont, Adeline Duterre, Stéphanie Ferneeuw, Loïc Lecharlier, Axel Morris

Année académique 2021-2022

# Table des matières

# Relations binaires

# CHAPITRE 1

# Implémentation des ensembles

Créez un projet IntelliJ "Math2" et créez dedans le module ensembles. Dans le répertoire src de ce module, copiez les fichiers de l'archive math2_ensemble se trouvant sur moodle dans le répertoire Classes Java.
Le fichier **EnsembleInterface.java** est une « interface »Java que l'on vous demande d'implémenter. Toute instance d'une classe implémentant EnsembleInterface est « moralement »un sous-ensemble de l'Univers des Elt. Pour rappel, la classe Elt fournit les constructeurs

```
public Elt(int i)
 // construit un Elt de valeur i;
 // produit une IllegalArgumentException si i n'est pas dans l'Univers.

public Elt(Elt e)
 // constructeur par recopie.
 // lance une IllegalArgumentException si e est null.
```

et les méthodes :

```
public int val()
 // renvoie la valeur numerique du Elt courant

public String toString()
 // description d'un Elt par sa valeur numerique.

public boolean equals(Object o)
 // renvoie true si l'Elt courant est egal a o.

public boolean hashCode()
 // calcule et renvoie un hashCode associe a l'Elt courant.

public Elt succ()
 // renvoie le successeur du Elt courant;
 // le successeur de 1 est 2, celui de 2 est 3, ...
 // celui de MAXELT est 1.

public Elt pred()
 // renvoie le predecesseur du Elt courant ;
 // le predecesseur de 32 est 31, ..., celui de 1 est MAXELT.
```

L'interface EnsembleInterface expose les méthodes que vous allez devoir compléter dans les classes que vous allez récupérer :

```
public interface EnsembleInterface {

  // renvoie true ssi l'ensemble courant est vide
      public boolean estVide();

  // renvoie un element de l'ensemble s'il n'est pas vide
  // lance une MathException si l'ensemble est vide
      public Elt unElement();

  // renvoie true ssi e appartient a l'ensemble courant
  // lance une IllegalArgumentException en cas de parametre invalide
      public boolean contient(Elt e);

  // ajoute e (eventuellement) a l'ensemble courant
  // lance une IllegalArgumentException en cas de parametre invalide

      public void ajouter(Elt e);

  // enleve e (eventuellement) de l'ensemble courant
  // lance une IllegalArgumentException en cas de parametre invalide

      public void enlever(Elt e);

  // remplace l'ensemble courant par son complementaire
      public void complementer();

  // renvoie le cardinal de l'ensemble courant
      public int cardinal();

  // renvoie une chaine de caractere decrivant this en extension
      public String toString();
} // EnsembleInterface
```

1. Complétez les classes Ens1 et Ens2 et testez-les à l'aide du programme TestEnsemble. Ens1 implémente un ensemble en gardant comme attribut un tableau de booléens et le cardinal de l'ensemble. Ens2 implémente un ensemble en gardant comme attribut un tableau de Elt et le cardinal de l'ensemble.
2. On veut maintenant permettre la « cohabitation » d'ensembles créés par des constructeurs différents. Afin de réaliser cela, on vous demande de :
   (a) compléter les méthodes par défaut qui se trouvent dans EnsembleInterface.java.
   (b) compléter les méthodes inclusDans et equals qui se trouvent dans la classe EnsembleAbstrait.

   Testez ces méthodes au moyen du programme TestEnsembleBis.
3. Ajoutez à vos classes *Ens i* les constructeurs :

```
public Ensi(EnsembleInterface a)
//cree un ensemble ayant les memes elements que a.

public Ensi(Elt e)
//fait de this le singleton{e}.
```

CHAPITRE 2

# Relations binaires

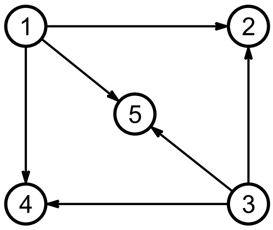
## 2.1 Définition et représentation

1. Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{p, q, r\}$. Donnez le domaine, l'image et la représentation sagittale de la relation $\mathcal{R}$ définie par $\mathcal{R} = \{(a, p), (b, q), (c, p), (a, q)\}$.
2. On considère les relations $\mathcal{R}$ suivantes, de $A$ vers $B$. Pour chacune d'elles, donnez son domaine, son image et décrivez-la en extension.
   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $B = \{1, 4, 6, 9\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a$ divise $b$
   (b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 6, 9\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b = a^2$
   (c) $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \leq 9$
   (d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \leq b + 1$
3. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pour chacune des relations suivantes sur $E$, donnez son domaine, son image et le digraphe associé.
   (a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$
   (b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise $y$
   (c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x^2$

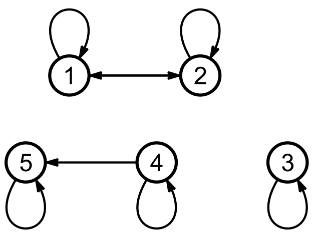
## 2.2 Propriétés des relations

1. Montrez que les propriétés de réflexivité, d'antiréflexivité, de symétrie, d'antisymétrie et de transitivité sont indépendantes (on peut trouver pour chaque propriété une relation qui possède cette propriété mais pas les autres). Pour ce faire, construisez graphiquement 5 relations : la première doit être réflexive et ne posséder aucune des 4 autres qualités ; la deuxième doit être antiréflexive et ne posséder aucune des 4 autres qualités, etc.
2. Les relations suivantes sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ sont-elles réflexives, antiréflexives, symétriques, antisymétriques, transitives ?
   (a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
   (b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$
   (d) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

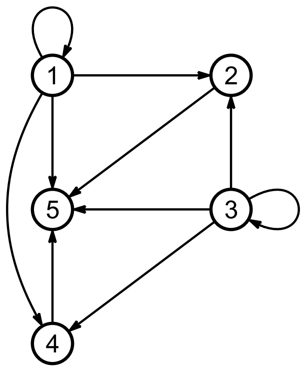
3. La relation $\mathcal{R}$ décrite par le digraphe suivant est-elle réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?




4. La relation $\mathcal{R}$ décrite par le digraphe suivant est-elle réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?



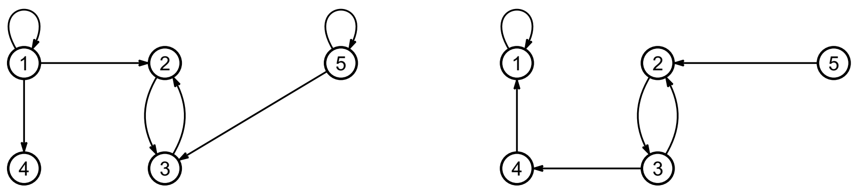

5. La relation $\mathcal{R}$ décrite par le digraphe suivant est-elle réflexive, antiréflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?



6. Déterminez si les relations suivantes sur l'ensemble des pages Web sont réflexives, antiréflexives, symétriques, antisymétriques, transitives ?
   (a) $a\mathcal{R}b$ si la page $a$ n'a pas d'hyperlien en commun avec la page $b$.
   (b) $a\mathcal{R}b$ si la page $a$ a au moins un hyperlien en commun avec la page $b$.
7. Déterminez si les relations suivantes sur l'ensemble $A$ sont réflexives, antiréflexives, symétriques, antisymétriques, transitives ?
   (a) $A = \mathbb{R}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| = |b|$
   (b) $A = \mathbb{R}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| + |b| = 4$
   (c) $A = \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \leq b + 1$
   (d) $A = \mathbb{N}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = b^n$
   (e) $A = \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a.b \geq 1$
8. Est-il possible de construire une relation à la fois symétrique et antisymétrique ?

## 2.3 Opérations sur les relations

1. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ les relations sur $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ décrites respectivement par les digraphes ci-dessous :



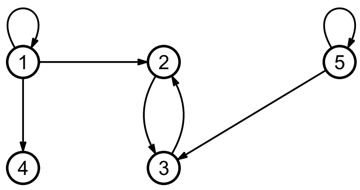

   Représentez les relations $\overline{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.
2. Pour chacune des relations suivantes sur l'ensemble $\mathbb{N}$, décrivez la relation réciproque et la relation complémentaire : $=$ , $\neq$ , $>$ , $\geq$ .
3. Sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, on considère les relations $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ et $\mathcal{S} = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$. Trouvez $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
4. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ les relations sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ définies par
   $$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y \qquad x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x > y$$
   Décrivez les relations $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R}^{-1}$ et $\overline{\mathcal{S}}$.
5. A partir des relations $P$ (« être père de ») et $M$ (« être mère de ») sur un ensemble d'individus $A$, construisez les relations suivantes :
   (a) « est grand père paternel de »
   (b) « est grand parent de »
   (c) « est frère ou soeur de »(même père et même mère)
   (d) « est neveu ou nièce de »
   (e) « est cousin(e) de »

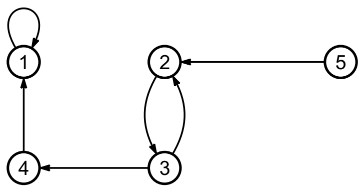
6. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations sur un ensemble $A$. Dites si les enoncés suivants sont vrais ou faux et justifiez :
   (a) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est réflexive.
   (b) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est transitive.
   (c) Si $\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{R}^n$ est transitive $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
   (d) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est une relation transitive.
   (e) Si $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est symétrique, alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques.
   (f) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est antisymétrique.
7. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ des relations sur un ensemble $A$. Comparez les relations
   (a) $\mathcal{R}^2 \cup \mathcal{S}^2$ et $\big(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}\big)^2$
   (b) $\mathcal{R}^2 \cap \mathcal{S}^2$ et $\big(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}\big)^2$
   (c) $\mathcal{R}^2 \circ \mathcal{S}^2$ et $\big(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}\big)^2$

## 2.4 Clôtures

1. Trouvez la clôture réflexive et la clôture symétrique de la relation $\mathcal{R} = \{(0,1),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2)\}$ définie sur l'ensemble $A = \{0,1,2,3\}$.
2. Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère la relation
   $$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,5),(5,1),(5,2),(5,4)\}$$
   Donnez $\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^4, \mathcal{R}^5$.
3. Soit $\mathcal{R}$ la relation qui contient tous les couples $(a,b)$ formés de pays pour lesquels il existe un vol direct de $a$ vers $b$. Quels sont les couples appartenant à $\mathcal{R}^2$ et $\mathcal{R}^+$ ?
4. Sur un ensemble d'individus mâles, on considère les relations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}$ décrites par
   ▷ $x\mathcal{F}y$ si $x$ a pour fils aîné $y$
   ▷ $x\mathcal{S}y$ si $x$ a pour frère suivant $y$ (dans l'ordre décroissant des âges)
   A partir de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{S}$, construisez les relations :
   (a) « est père de »
   (b) « est fils de »
   (c) « est ancêtre de »
   (d) « est frère de »
   (e) « est neveu de »
   (f) « est cousin de »
5. Utilisez l'algorithme de Warshall pour trouver la clôture transitive de la relation sur $\{1,2,3,4\}$ définie par
   $$\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4),(4,1)\}$$
6. Utilisez l'algorithme de Warshall pour trouver la clôture transitive de la relation sur $\{1,2,3,4\}$ définie par
   $$\mathcal{R} = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,4),(4,1),(4,3)\}$$

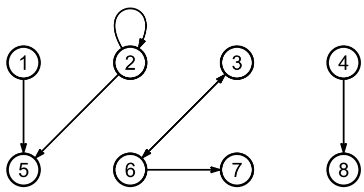
7. Considérons les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ représentées graphiquement par :




   (a) Représentez $\mathcal{R}^3$ et $\mathcal{S}^3$
   (b) Représentez les relations $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{S}_3$ de Warshall.

8. Considérons la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dont le digraphe est donné par




   Dessinez la clôture réflexive, la clôture symétrique et la clôture transitive de $\mathcal{R}$

9. Trouvez la plus petite relation qui contient la relation $\{(1, 2), (1, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ et qui est
   (a) réflexive et transitive ;
   (b) symétrique et transitive ;
   (c) réflexive, transitive et symétrique.

10. **(Septembre 2016)** Sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$, on considère la relation $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.
   (a) Dessinez le digraphe associé à $\mathcal{S}$.
   (b) Dessinez le digraphe associé à $\mathcal{S}^2$.
   (c) Dessinez le digraphe associé à $\mathcal{S}^+$ (détaillez les étapes de l'algorithme de Warshall).

11. **(Juin 2017)** Sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$, on considère la relation

$$\mathcal{S} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}.$$

   (a) Donnez la représentation sagittale associée à $\mathcal{S}$.
   (b) Dessinez le digraphe associé à $\mathcal{S}^4$.
   (c) Dessinez le digraphe associé à $\mathcal{S}^+$ (détaillez les étapes de l'algorithme de Warshall).

## Solutions

2.1.1 $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{a, b, c\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{p, q\}$

2.1.2 (a) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 4, 6, 9\}$
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (1, 6), (1, 9), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9), (4, 4)\}$

(b) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 4, 9\}$
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

(c) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$
$\mathcal{R} = \big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 8), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (8, 1)\big\}$

(d) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$

2.1.3 (a) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(b) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(c) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2\}$ et $\mathrm{img}(\mathcal{R}) = \{1, 4\}$

2.2.2 (a) transitive

(b) réflexive, symétrique, transitive

(c) antiréflexive, symétrique

(d) antiréflexive

2.2.3 antiréflexive, antisymétrique, transitive

2.2.4 réflexive, transitive

2.2.5 antisymétrique, transitive

2.2.6 (a) symétrique

(b) symétrique

2.2.7 (a) réflexive, symétrique, transitive

(b) symétrique

(c) réflexive

(d) réflexive, antisymétrique, transitive

(e) symétrique, transitive

2.2.8 Oui

2.3.2 $= \left\langle \begin{array}{lcl} \text{relation réciproque} & : & = \\ \text{relation complémentaire} & : & \neq \end{array} \right.$

$\neq \left\langle \begin{array}{lcl} \text{relation réciproque} & : & \neq \\ \text{relation complémentaire} & : & = \end{array} \right.$

$> \left\langle \begin{array}{lcl} \text{relation réciproque} & : & < \\ \text{relation complémentaire} & : & \leq \end{array} \right.$

$\geq \left\langle \begin{array}{lcl} \text{relation réciproque} & : & \leq \\ \text{relation complémentaire} & : & < \end{array} \right.$

2.3.3 $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

2.3.4 $x(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})y \Leftrightarrow x \neq y$
$\mathcal{R}\cap\mathcal{S} = \phi$
$\mathcal{R}\circ\mathcal{R} = \mathcal{R}$
$\mathcal{S}\circ\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$
$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{S}$
$x\overline{\mathcal{S}}y \Leftrightarrow x \leq y$

2.3.5 (a) $\mathcal{P}^2$
(b) $(\mathcal{P}\cup\mathcal{M})^2$
(c) $\Big(\big(\mathcal{P}\circ\mathcal{P}^{-1}\big)\cap\big(\mathcal{M}\circ\mathcal{M}^{-1}\big)\Big)\cap\neq$
(d) $\mathcal{F}\circ(\mathcal{P}\cup\mathcal{M})^{-1}$ où $\mathcal{F}$ est la réponse du (c)
(e) $(\mathcal{P}\cup\mathcal{M})\circ F\circ(\mathcal{P}\cup\mathcal{M})^{-1}$ où $\mathcal{F}$ est la réponse du (c)

2.3.6 (a) vrai
(b) faux
(c) vrai
(d) vrai
(e) faux
(f) faux

2.3.7 (a) $\big(\mathcal{R}^2\cup\mathcal{S}^2\big)\subseteq\big(\mathcal{R}\cup\mathcal{S}\big)^2$
(b) $\big(\mathcal{R}\cap\mathcal{S}\big)^2\subseteq\big(\mathcal{R}^2\cap\mathcal{S}^2\big)$
(c) Les 2 relations sont différentes

2.4.1 clotûre réflexive $= \{(0,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}$ ;
clotûre symétrique $= \{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,0),(0,2),(2,2)\}$

2.4.3 $\mathcal{R}^2 = \{$couples $(a,b)$ de pays pour lesquels il existe un vol avec une escale entre $a$ et $b\}$
$\mathcal{R}^+ = \{$couples $(a,b)$ de pays pour lesquels il existe un vol avec un nombre quelconque d'escales de $a$ à $b\}$

2.4.4 (a) $\mathcal{F}\cup\Big(\mathcal{S}^+\circ\mathcal{F}\Big)$
(b) $\Big(\mathcal{F}\cup\Big(\mathcal{S}^+\circ F\Big)\Big)^{-1}$
(c) $\Big(\Big(\mathcal{F}\cup\Big(\mathcal{S}^+\circ F\Big)\Big)^{-1}\Big)^+$
(d) $\mathcal{S}^+\cup(\mathcal{S}^+)^{-1}$
(e) $\Big(\mathcal{S}^+\cup(\mathcal{S}^+)^{-1}\Big)\circ\Big(\mathcal{F}\cup\Big(\mathcal{S}^+\circ F\Big)\Big)^{-1}$
(f) $\Big(\mathcal{F}\cup(\mathcal{S}^+\circ F)\Big)\circ\Big(\mathcal{S}^+\cup(\mathcal{S}^+)^{-1}\Big)\circ\Big(\mathcal{F}\cup(\mathcal{S}^+\circ F)\Big)^{-1}$

CHAPITRE 3

# Implémentation des relations binaires

Dans le projet IntelliJ "Math2" créez le module relations. Dans le répertoire src de ce module, copiez les fichiers de l'archive math2_relations se trouvant sur moodle dans le répertoire Classes Java.

Vous disposez d'une classe Couple dont les instances sont les couples d'éléments de l'Univers. Cette classe fournit les constructeurs :

```
public Couple (Elt x, Elt y)
  // IllegalArgumentException si x ou y est null.
public Couple (int i, int j)
  // IllegalArgumentException si i et/ou j n'appartient pas a l'Univers.
```

et les méthodes :

```
public Elt getx()
public Elt gety()
  // renvoient resp.  la premiere et la seconde composante.
public String toString()
  // description sous la forme : <(x,y)>.
public Couple reciproque()
  // renvoie le couple reciproque du couple courant.
public boolean equals(Object o)
  // renvoie vrai si le couple courant est egal a l'objet passe en parametre
public boolean hashCode()
  // renvoie un hashcode associe au couple courant
```

**Relation.java** est l'esquisse d'une classe destinée à implémenter le concept de relation binaire entre sous-ensembles de l'Univers. Cette classe hérite de la classe abstraite RelationDeBase. Vous aurez essentiellement, dans ces exercices, à compléter cette classe Relation ainsi que la classe RelationAbstraite. Vous n'avez pas à vous préoccuper de la manière dont les relations sont implémentées ; en effet, ce choix est fait dans RelationDeBase qui est pour vous une boîte noire qui hérite de la classe abstraite RelationAbstraite et, par conséquent, implémente l'interface RelationInterface :

```java
public interface RelationInterface extends Iterable<Couple>{

  // renvoie true ssi la Relation courante est vide
      public boolean estVide();

  // renvoie true ssi le couple c appartient a la Relation courante
  // lance une IllegalArgumentException si c est null
      public boolean contient(Couple c);

  // ajoute le couple c=(x,y) (eventuellement) a la Relation courante
  // lance une IllegalArgumentException si c est null
  // lance une IllegalArgumentException si x n'est pas dans l'ensemble
  // de depart de la relation courante
  // lance une IllegalArgumentException si y n'est pas dans l'ensemble
  // d'arrivee de la relation courante
      public void ajouter(Couple c);

  // enleve le couple (x,y) (eventuellement) de la Relation courante
  // lance une IllegalArgumentException si c est null
  // lance une IllegalArgumentException si x n'est pas dans l'ensemble
  // de depart de la relation courante
  // lance une IllegalArgumentException si y n'est pas dans l'ensemble
  // d'arrivee de la relation courante
      public void enlever(Couple c);

  // renvoie une copie de l'ensemble de depart de la Relation courante
      public EnsembleAbstrait depart();

  // renvoie une copie de l'ensemble d'arrivee de la Relation courante
      public EnsembleAbstrait arrivee();

  // renvoie une chaine de caracteres decrivant la Relation courante
      public String toString();

  // renvoie un iterateur sur la Relation courante
      public Iterator<Couple> iterator();
  } // RelationInterface
```

Outre ces méthodes, la classe RelationDeBase contient les méthodes suivantes qui lanceront une IllegalArgumentException si le paramètre $e$ est null.

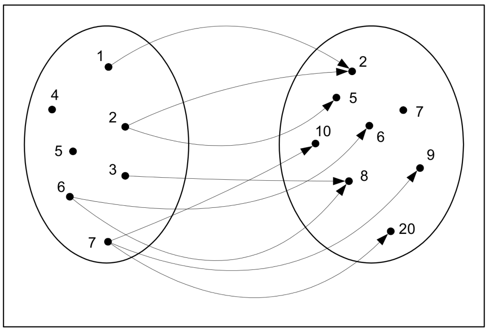
```java
// ajoute eventuellement e a l'ensemble de depart de la relation
    public void ajouterDepart(Elt e)

// ajoute eventuellement e a l'ensemble d'arrivee de la relation
    public void ajouterArrivee(Elt e)

// supprime eventuellement e de l'ensemble de depart de la relation
// ainsi que toutes les fleches partant de e
     public void supprimerDepart(Elt e)

// supprime eventuellement e de l'ensemble d'arrivee de la relation
// ainsi que toutes les fleches aboutissant a e
     public void supprimerArrivee(Elt e)
```

et les deux constructeurs

```
// construit la Relation vide sur l'ensemble vide
   public RelationDeBase()

// construit la Relation vide de l'ensemble dep vers l'ensemble arr
// lance une IllegalArgumentException si un des parametres est null
   public RelationDeBase(EnsembleAbstrait dep, EnsembleAbstrait arr)
```

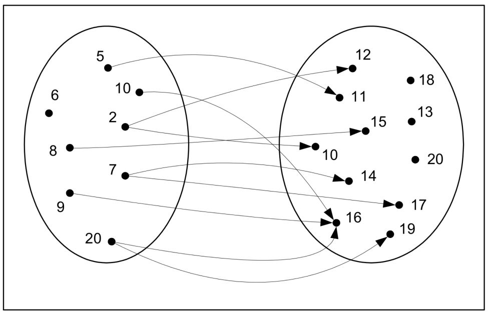
Vous utiliserez le fichier TestRelation.java pour tester vos méthodes. Les relations suivantes sont utilisées dans cette classe test :

re1.rel



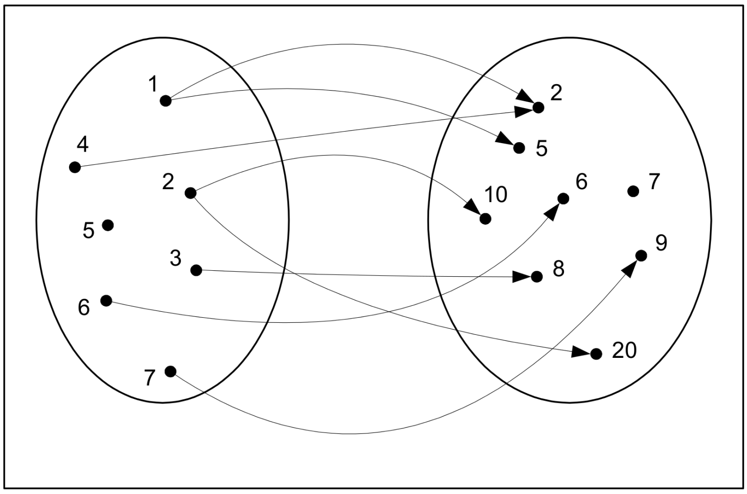

Départ : {1..7}
Arrivée : {2,5..10,20}

re2.rel



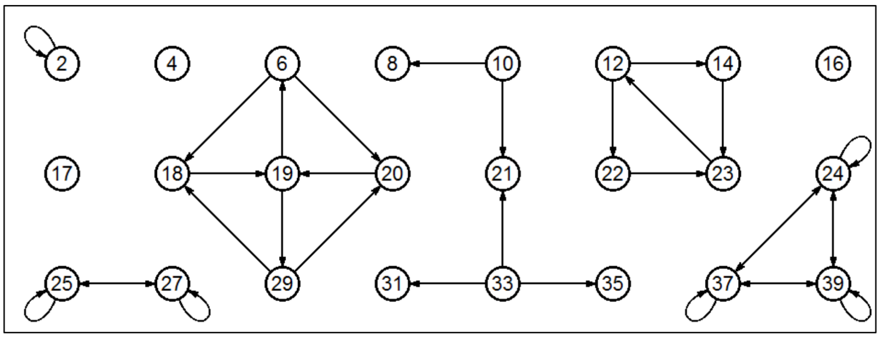

Départ : {2,5..10,20}
Arrivée : {10..20}

re3.rel

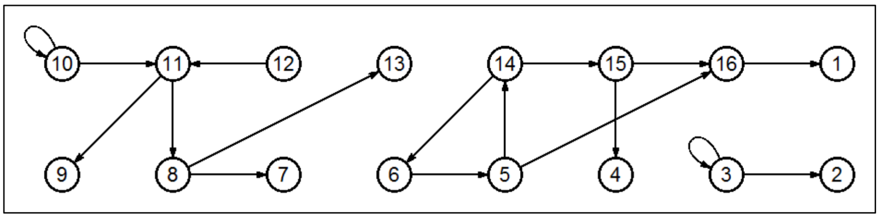



Départ : {1..7}
Arrivée : {2,5..10,20}

dg1.rel

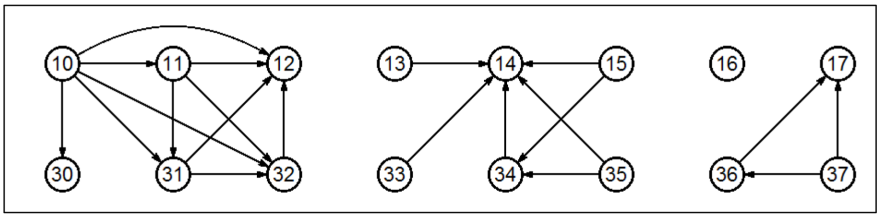



Sous-jacent : {2,4,6,8,10,12,14,16..25,27,29,31,33,35,37,39} dg2.rel



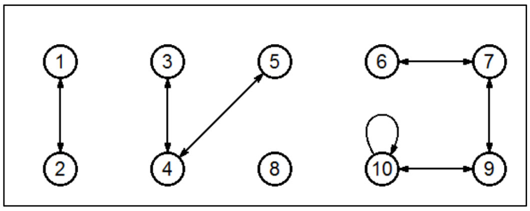

Sous-jacent : {1..16}

dg3.rel



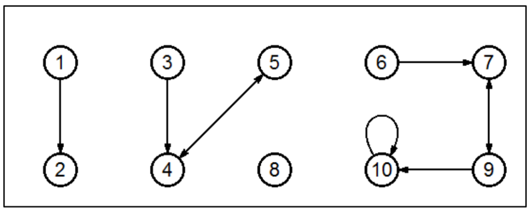

Sous-jacent : {10..17,30..37}

dg4.rel




Sous-jacent : {1..10}

dg5.rel




Sous-jacent : {1..10}

dg6.rel est la clôture transitive de dg2.rel

1. Implémentez les méthodes permettant de trouver le domaine et l'image de la relation :

```
public EnsembleAbstrait domaine() {
}
// renvoie le domaine de la relation

public EnsembleAbstrait image() {
}
// renvoie l'image de la relation
```

2. Implémentez les opérations sur les relations en écrivant les méthodes ci-dessous. Ces méthodes génèreront une IllegalArgumentException dans le cas où l'opération souhaitée ne peut pas être exécutée.

```
public Relation complementaire()
// renvoie la complementaire de la Relation courante

public Relation reciproque()
// renvoie la reciproque de la Relation courante

public void ajouter(RelationInterface r)
// si possible, remplace la Relation courante par son union avec r

public void enlever(RelationInterface r)
// si possible, remplace this par sa difference avec r

public void intersecter(RelationInterface r)
// si possible, remplace this par son intersection avec r

public Relation apres(RelationInterface r)
// si possible, renvoie la composee "this apres r"
```

3. Dans la classe RelationAbstraite, complétez les méthodes booléennes :

```
public boolean inclusDans(RelationAbstraite r)
// renvoie true si this est inclue dans r

public boolean equals(Object o)
// renvoie true si this=o
```

Les deux questions qui suivent ne concernent que les relations sur un ensemble. Les méthodes demandées génèreront donc une MathException lorsque l'ensemble de départ ne coïncide pas avec l'ensemble d'arrivée.

4. Ecrivez les méthodes de clôture suivantes :

```
public void cloReflex()
 // remplace this par sa cloture reflexive

public void cloSym()
 // remplace this par sa cloture symetrique

public void cloTrans()
 // remplace this par sa cloture transitive (Warshall)
```

5. Ecrivez les méthodes booléennes suivantes :

```
public boolean reflexive()
// renvoie true ssi this est reflexive

public boolean antireflexive()
// renvoie true ssi this est antireflexive

public boolean symetrique()
// renvoie true ssi this est symetrique

public boolean antisymetrique()
// renvoie true ssi this est antisymetrique

public boolean transitive()
// renvoie true ssi this est transitive
```

6. Ajoutez à la classe relation un constructeur par recopie :

```
public Relation(RelationInterface r){
}
// construit une copie de r
// lance une IllegalArgumentException en cas de parametre invalide
```

et les méthodes statiques :

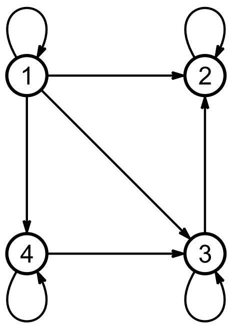
```
public static Relation identite(EnsembleAbstrait e)
// renvoie l'identite sur e
// lance une IllegalArgumentException si e est null

public static Relation produitCartesien(EnsembleAbstrait a,
    EnsembleAbstrait b)
// renvoie le produit cartesien de a et b
// lance une IllegalArgumentException si l'un des parametres est null
```

CHAPITRE 4

# Relations d'ordre

## 4.1 Définition

1. Parmi les relations suivantes sur l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$, repérez les ordres partiels et les ordres totaux.
   (a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   (b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
   (c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$
   (d) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$
2. La relation dont le digraphe est donné ci-dessous est-elle un ordre partiel ? un ordre total ?

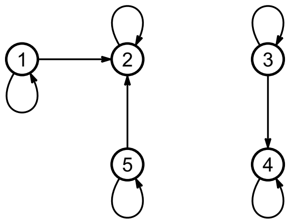


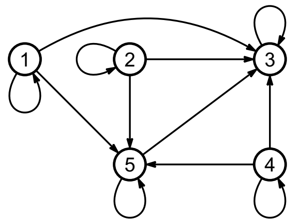

3. Parmi les relations suivantes sur l'ensemble $A$, repérez les ordres partiels et les ordres totaux.
   (a) $A = \mathbb{Z}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : a = b^k$
   (b) $A = \mathbb{N}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b$
   (c) $A = \mathbb{R}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

## 4.2 Diagrammes de Hasse

1. Dessinez le diagramme de Hasse pour la relation « plus petit ou égal à » sur $\{0, 2, 5, 10, 11, 15\}$.

2. Représentez les diagrammes de Hasse des relations d'ordre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, décrites respectivement par les digraphes ci-dessous :

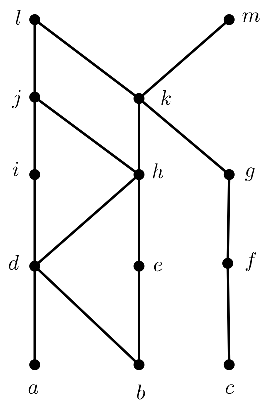



3. Dessinez le diagramme de Hasse pour la relation « divise » sur les ensembles suivants :
   (a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   (b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
   (c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$
   (d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
4. Dessinez le diagramme de Hasse pour la relation « inclut dans » sur l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ où $A = \{a, b, c, d\}$.

## 4.3 Supremum et infimum

1. Répondez aux questions suivantes sur l'ordre partiel dont le diagramme de Hasse est le suivant :




   (a) Quels sont les éléments maximaux ?
   (b) Quels sont les éléments minimaux ?
   (c) Donnez le maximum, si il existe.
   (d) Donnez le minimum, si il existe.
   (e) Donnez tous les majorants de $\{a, b, c\}$.
   (f) Donnez le supremum de $\{a, b, c\}$ s'il existe.
   (g) Donnez tous les minorants de $\{f, g, h\}$.
   (h) Donnez l'infimum de $\{f, g, h\}$ s'il existe.

2. Répondez aux questions suivantes sur l'ordre partiel sur $\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$ pour la relation « divise ».

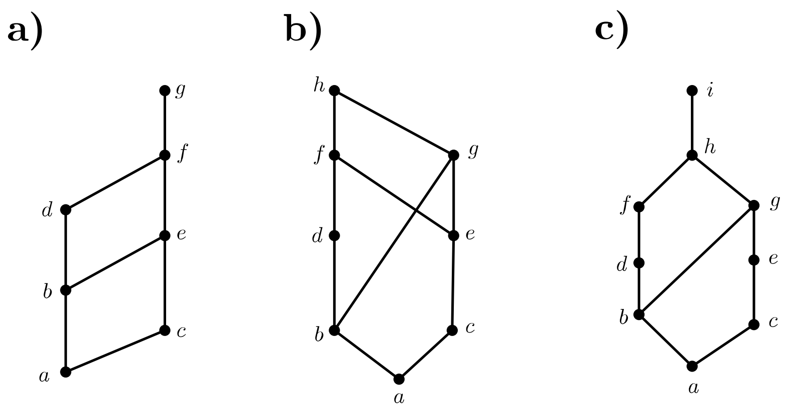
   (a) Quels sont les éléments maximaux ?
   (b) Quels sont les éléments minimaux ?
   (c) Donnez le maximum, si il existe.
   (d) Donnez le minimum, si il existe.
   (e) Donnez tous les majorants de $\{3, 5\}$.
   (f) Donnez le supremum de $\{3, 5\}$ s'il existe.
   (g) Donnez tous les minorants de $\{15, 45\}$.
   (h) Donnez l'infimum de $\{15, 45\}$ s'il existe.

3. Répondez aux questions suivantes sur l'ordre partiel sur $\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}$ pour la relation « divise ».

   (a) Quels sont les éléments maximaux ?
   (b) Quels sont les éléments minimaux ?
   (c) Donnez le maximum, si il existe.
   (d) Donnez le minimum, si il existe.
   (e) Donnez tous les majorants de $\{2, 9\}$.
   (f) Donnez le supremum de $\{2, 9\}$ s'il existe.
   (g) Donnez tous les minorants de $\{60, 72\}$.
   (h) Donnez l'infimum de $\{60, 72\}$ s'il existe.

## 4.4 Treillis

1. Parmi les ordres partiels dont les diagrammes de Hasse sont donnés ci-dessous, lesquels sont des treillis ?

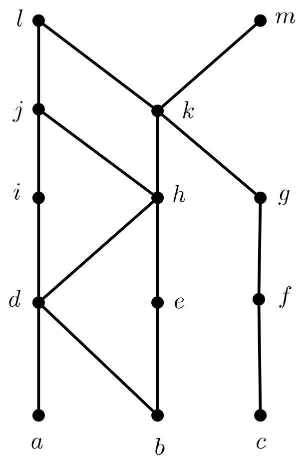



2. Parmi les ordres partiels suivants, lesquels sont des treillis ?

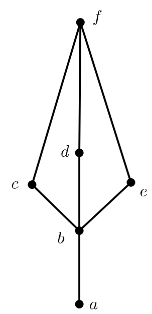
   (a) $(\{1, 3, 6, 9, 12\}, \mid)$
   (b) $(\{1, 5, 25, 125\}, \mid)$
   (c) $(\mathbb{Z}, \geq)$

## 4.5 Tris topologiques

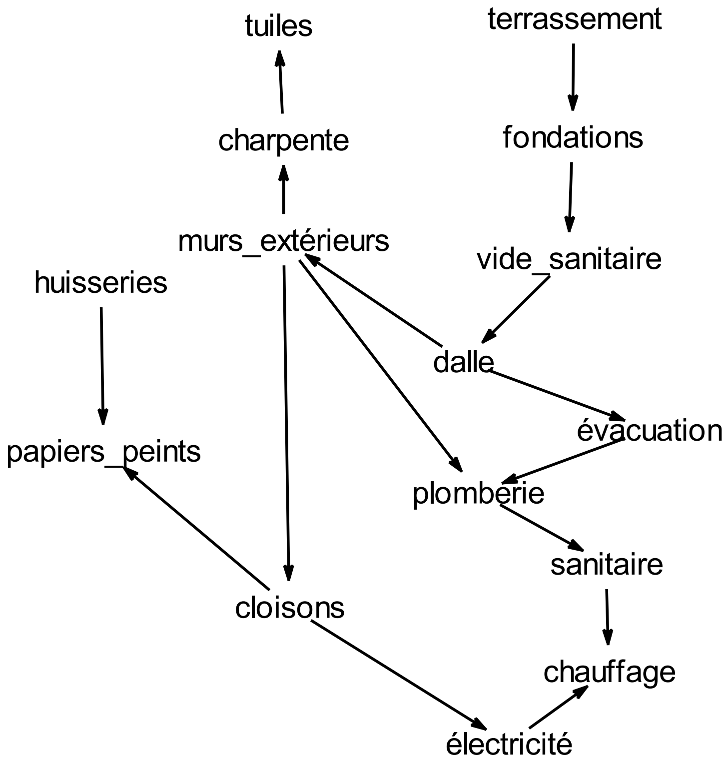
1. Donnez un tri topologique pour l'ordre partiel dont le digraphe est le suivant :




2. Trouvez tous les tris topologiques pour l'ordre partiel $(\{1, 2, 4, 5, 12, 20\}, \mid)$.
3. Combien de tris topologiques est-il possible de former à partir de l'ordre partiel dont le diagramme de Hasse est le suivant ?



4. Bilou décide de se faire construire une maison. Les entreprises générales étant un peu trop chères pour lui, il décide d'engager des indépendants. Il doit donc coordonner les différents corps de métier. Voici le plan des tâches à effectuer avec un ordre à respecter :



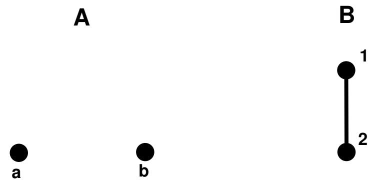

Donnez un ordre dans lequel les tâches pourront être effectuées.

5. **(Septembre 2016)** On considère la relation « divise »sur l'ensemble $A = \{2, 5, 7, 20, 21, 40, 60, 147, 240\}$
   (a) Dessinez le diagramme de Hasse pour cet ordre partiel.
   (b) Trouvez les éléments minimaux et les éléments maximaux pour cet ordre.
   (c) Trouvez tous les majorants et tous les minorants de l'ensemble $B = \{20\}$.
   (d) Cet ordre est-il un treillis ? Justifiez.

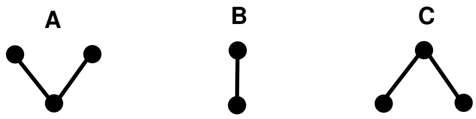
6. **(Juin 2017)** On considère l'ensemble $A = \{(a, b) \,|\, a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ et la relation $\mathcal{R}$ sur $A$ définie par
$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \text{ si et seulement si } (a \leq c) \wedge (b \leq d)$$
   (a) Prouvez que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $A$.
   (b) Dessinez le diagramme de Hasse pour cet ordre partiel.
   (c) Trouvez les éléments minimaux et les éléments maximaux pour cet ordre.
   (d) Trouvez tous les majorants et tous les minorants de l'ensemble $B = \{(1, 1)\}$.
   (e) Donnez un tri topologique associé à cet ordre.

## 4.6 Produits de relations d'ordre

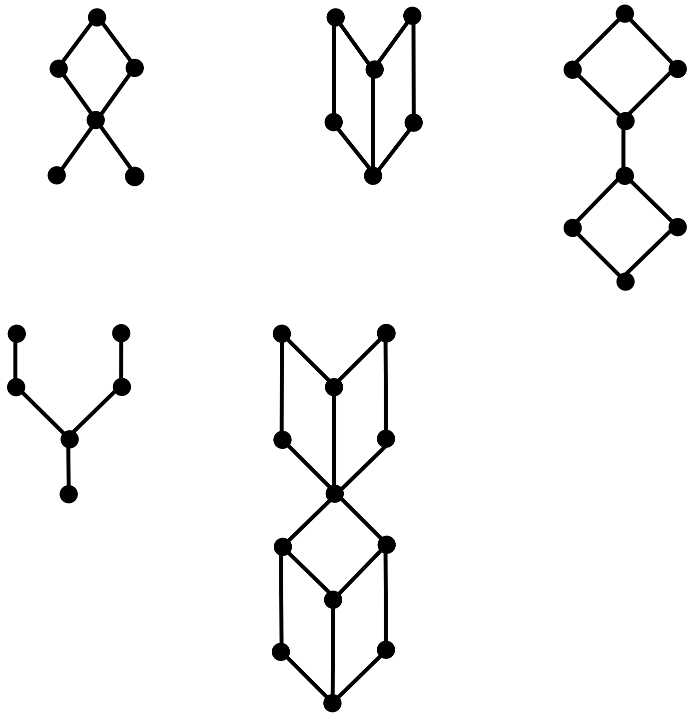
1. Représentez les diagrammes de Hasse du produit classique $A \times B$, ainsi que les produits lexicographiques $A \times B$ et $B \times A$, si $A$ et $B$ sont les ensembles ordonnées ci-dessous.




2. Soit $A$, $B$, $C$ les ensembles ordonnés représentés par les diagrammes de Hasse

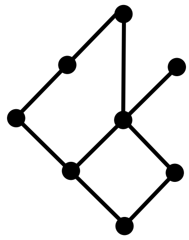



Comment peut-on, par produit classique et/ou par produit lexicographique, obtenir, à partir de $A$, $B$, $C$, chacun des ensembles ordonnés ci-dessous ?

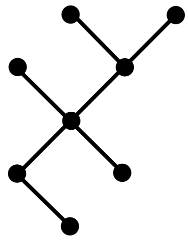


3. Soient $A$ et $C$ les ensembles ordonnés ci-après.

A



C



Sans représenter graphiquement les produits concernés, déterminez le nombre d'arêtes du diagramme de Hasse de

1°) $(A \times C, \leq)$ (produit classique)

2°) $(A \times C, \preccurlyeq)$ (produit lexicographique)

3°) $(C \times A, \preccurlyeq)$ (produit lexicographique)

4. a) Le produit lexicographique de deux treillis finis est-il encore un treillis ? Justifiez !

   b) Le produit classique de deux treillis finis est-il encore un treillis ? Justifiez !

# Solutions

4.1.1 Le (a) et le (c) sont des ordres partiels. Les autres ne sont pas des ordres.

4.1.2 Ce n'est pas une relation d'ordre

4.1.3 Le (a) est un ordre partiel. Les autres ne sont pas des ordres.

4.3.1 (a) $\{l, m\}$
(b) $\{a, b, c\}$
(c) Pas de maximum
(d) Pas de minimum
(e) $\{k, l, m\}$
(f) $k$
(g) Pas de minorant
(h) Pas d'infimum

4.3.2 (a) $\{24, 45\}$
(b) $\{3, 5\}$
(c) Pas de maximum
(d) Pas de minimum
(e) $\{15, 45\}$
(f) 15
(g) $\{3, 5, 15\}$
(h) 15

4.3.3 (a) $\{27, 48, 60, 72\}$
(b) $\{2, 9\}$
(c) Pas de maximum
(d) Pas de minimum
(e) $\{18, 36, 72\}$
(f) 18
(g) $\{2, 4, 6, 12\}$
(h) 12

4.4.1 Le a) et le c) sont des treillis.

4.4.2 Le (b) et le (c) sont des treillis.

4.5.2 Il y a 7 tris topologiques possibles.

4.5.3 Il y a 6 tris topologiques possibles.

4.5.5 (b) Minimaux $= \{2, 5, 7\}$
Maximaux $= \{147, 240\}$
(c) $\text{Minorant}_{\{20\}} = \{2, 5, 20\}$
$\text{Majorant}_{\{20\}} = \{20, 40, 60, 240\}$
(d) Ce n'est pas un treillis

4.5.6 (c) Minimaux $= \{(0, 0)\}$
Maximaux $= \{(2, 2)\}$

(d) $\text{Minorant}_{\{(1,1)\}} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$
$\text{Majorant}_{\{(1,1)\}} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

4.6.2 a) $(B \times C, \preccurlyeq)$

b) $(B \times A, \leq)$ ou $(A \times B, \leq)$

c) $\Big(B \times \big(B \times B, \leq\big), \preccurlyeq\Big)$

d) $(A \times B, \preccurlyeq)$

e) $\Big(B \times \big(B \times A, \leq\big), \preccurlyeq\Big)$ ou $\Big(B \times \big(A \times B, \leq\big), \preccurlyeq\Big)$

4.6.3 1°) 128

2°) 110

3°) 86

4.6.4 a) Oui

b) Oui

CHAPITRE 5

# Implémentation des ordres

Complétez la classe **Ordre**, qui étend **RelationAbstraite** dont les instances sont des relations d'ordres sur une partie de l'univers. Une partie de cette classe est déjà écrite pour vous, on vous demande uniquement de compléter les constructeurs et méthodes suivants :

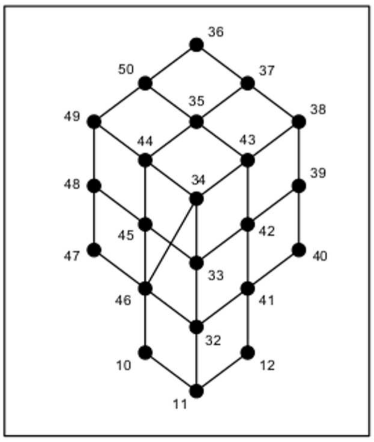
*Pour chaque constructeur et chaque méthode, vous lancerez une IllegalArgumentException en cas de paramètre invalide.*

```
// Construit l'identite sur e
    public Ordre(EnsembleAbstrait e) {
    }


// Construit le plus petit ordre contenant r;
// lance une IllegalArgumentException si cette construction n'est pas possible
    public Ordre(Relation r) {
    }


// Constructeur par recopie
    public Ordre(Ordre or) {
    }


// Ajoute x a l'ensemble sous-jacent de la relation d'ordre.
// Ne fait rien si x est deja dans l'ensemble sous-jacent
    public void ajouterAuSousJacent(Elt x) {
    }


// Enleve x de l'ensemble sous-jacent de la relation d'ordre
// ainsi que toutes les fleches liees a x
    public void enleverDuSousJacent(Elt x) {
    }


// Cree (si possible) le plus petit ordre contenant this et c.
    public void ajouter(Couple c) {
    }
```

```
// Renvoie true ssi x et y sont comparables pour l'odre courant
    public boolean comparables(Elt x, Elt y) {
    }



// Renvoie l'ensemble des elements minimaux de b
    public EnsembleAbstrait minimaux(EnsembleAbstrait b) {
    }


// Renvoie l'ensemble des elements maximaux de b
    public EnsembleAbstrait maximaux(EnsembleAbstrait b) {
    }


// Renvoie le minimum de b s'il existe; renvoie null sinon
    public Elt minimum(EnsembleAbstrait b) {
    }


// Renvoie le maximum de b s'il existe; renvoie null sinon
    public Elt maximum(EnsembleAbstrait b) {
    }


// Renvoie l'ensemble des minorants de b
    public EnsembleAbstrait minor(EnsembleAbstrait b) {
    }

// Renvoie l'ensemble des majorants de b
    public EnsembleAbstrait major(EnsembleAbstrait b) {
    }

// Renvoie l'infimum de b s'il existe; renvoie null sinon
    public Elt infimum(EnsembleAbstrait b) {
    }

// Renvoie le supremum de b s'il existe; renvoie null sinon
    public Elt supremum(EnsembleAbstrait b) {
    }

// Renvoie true ssi this est un treillis
   public boolean treillis(){
    }
```

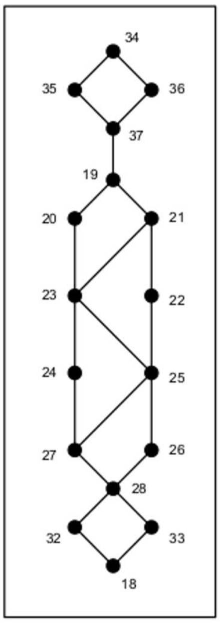
Vous utiliserez le fichier TestOrdre.java pour tester vos méthodes. Les ordres suivants sont utilisés dans cette classe test :

Diagramme de Hasse de or1.rel




Sous-jacent : {10..12,32..50}

Diagramme de Hasse de or2.rel




Sous-jacent :{18..28,32..37}

## CHAPITRE 6

# Relations d'équivalence

## 6.1 Algèbres modulaires

1. Donnez les tables d'addition et de multiplication complètes dans $\mathbb{Z}_7$. Vérifiez que tout élément non nul de $\mathbb{Z}_7$ est inversible.
2. Donnez les tables d'addition et de multiplication complètes dans $\mathbb{Z}_8$. Vérifiez qu'au moins un élément non nul de $\mathbb{Z}_8$ n'est pas inversible.
3. a) Résolvez l'équation $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}_8$.

   b) Trouvez tous les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 \mod 8 = 1$.
4. a) Résolvez l'équation $x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}_8$.

   b) Trouvez tous les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $(x^2 + 1) \mod 8 = 0$.
5. Trouvez tous les $x \in \mathbb{Z}$ tels que $(3x + 2) \mod 9 = 0$.
6. Montrez qu'un naturel $n = a_k a_{k-1} \ldots a_0$ est divisible par trois si et seulement si $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0$ est divisible par trois.
7. Trouvez l'inverse de 23 dans $\mathbb{Z}_{26}$ en utilisant l'algorithme adéquat.
8. Trouvez l'inverse de 17 dans $\mathbb{Z}_{324}$ en utilisant l'algorithme adéquat.
9. Calculez $25^{17} \mod 381$ en utilisant l'algorithme adéquat.
10. Calculez $3^{2015} \mod 8$.

## 6.2 Implémentation d'une Algèbre Modulaire

Dans le projet IntelliJ "Math2" et créez dedans le module cryptograhie. Dans le répertoire src de ce module, copiez les fichiers de l'archive math2_cryptographie se trouvant sur moodle dans le répertoire Classes Java.

Complétez la classe `Zn` et testez-la avec la classe `TestZn`.

```java
/*
 * Classe representant Z_n : l'ensemble des entiers modulo n
 */
public class Zn {

    private long n ;

    // construit Z_n
    // lance une IllegalArgumentException si n<=0
    public Zn(long n) {
        //TODO
    }

    // renvoie true si l'entier x appartient a Z_n, false sinon
    public boolean contient(long x) {
        //TODO
    }

    // calcule a+b dans Z_n
    // renvoie une IllegalArgumentException si a ou b n'appartient pas a Z_n
    public long plus(long a, long b) {
        //TODO
    }

    // calcule a*b dans Z_n
    // lance une IllegalArgumentException si a ou b n'appartient pas a Z_n
    public long fois(long a, long b) {
        //TODO
    }

    // calcule l'inverse de x dans Z_n en utilisant l'algorithme d'Euclide
        etendu
    // lance une IllegalArgumentException si x n'est pas dans Z_n
    // lance une MathException si x n'admet pas d'inverse dans Z_n
    public long inverse(long x) {
        //TODO
    }

    // calcule x^a dans Z_n en utilisant l'algorithme recursif d'
        exponentiation rapide modulaire
    // lance une IllegalArgumentException si x n'est pas dans Z_n ou si l'
        exposant est strictement negatif
    // lance une MathException si x=0 et a=0 (0^0 est une indetermination) ;

    public long puissance(long x, long a) {
        //TODO
    }
}
```

## 6.3 Relations d'équivalence

1. Parmi les relations suivantes sur l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$, repérez les relations d'équivalences et donnez l'ensemble quotient obtenu le cas échéant
   (a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   (b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
   (c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   (d) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$
2. Sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 999, 1000\}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ ssi $x$ et $y$ ont le même nombre de chiffres.
   (a) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Décrivez l'ensemble quotient obtenu.
3. **(Septembre 2016)** Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on pose la relation (d'équivalence)
   $$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a^b = c^d$$
   (a) Donnez tous les éléments faisant partie de la classe d'équivalence $[(16, 1)]$.
   (b) Trouvez une classe d'équivalence qui contient un nombre infini d'éléments.
   (c) Trouvez une classe avec exactement 4 éléments.
4. **(Septembre 2017)** On considère l'ensemble
   $$Z = \{M \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,|\, M_{21} = M_{32} = M_{31} = 0\}$$
   et la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $\mathbb{R}^{3\times 3}$ :
   $$\mathcal{R} = \{(A, B) \,|\, A - B \in Z\}$$
   (a) Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (b) Trouvez la classe d'équivalence de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -3 & 9 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

## Solutions

6.1.3 (a) $S = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
(b) $S = \left\{2k+1 \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

6.1.4 (a) $S = \phi$
(b) $S = \phi$

6.1.5 $S = \phi$

6.1.7 17

6.1.8 305

6.1.9 77

6.1.10 3

6.3.1 La (a) et la (c) sont des relations d'équivalence

6.3.2 (b) $\Big\{\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{10,11,\cdots,98,99\},\{100,101,\cdots,998,999\},\{1000\}\Big\}$

6.3.3 (a) $[(16,1)] = \Big\{(16,1),(4,2),(2,4)\Big\}$

6.3.4 (b) $[A] = \left\{ \left( \begin{array}{rrr} a & b & c \\ -3 & d & e \\ 5 & 7 & f \end{array} \right) \middle| \, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$

CHAPITRE 7

# Implémentation des équivalences

Complétez la classe **Equivalence** dont les instances sont des relations d'équivalence sur une partie de l'univers. La partie de l'univers sur laquelle est définie la relation d'équivalence est stockée dans un **EnsembleAbstrait (sousjac)**. On a choisi de représenter une équivalence en choisissant pour chaque classe un représentant. Afin de réaliser cela, la classe **Equivalence** garde un tableau d'**Elt (tabRep)** dans lequel on stocke à l'indice correspondant à l'Elt le représentant de sa classe. D'autre part, un troisième attribut **(numVersion)** permet de stocker le numéro de version de l'équivalence : n'oubliez pas de le remettre à jour à chaque fois que la relation d'équivalence est modifiée.

```
/** Classe Equivalence
     Chaque instance de cette classe est une relation d'equivalence
    sur un sous-ensemble de l'Univers

 */

import java.util.*;

public class Equivalence extends RelationAbstraite {

    private Ensemble sousJac; // ensemble sous-jacent
    private Elt[] tabRep; // tableau des representants
    private int numVersion; // numero de version
    private static final int MAX = Elt.MAXELT.val();


    // Construit l'identite sur e
    // Lance une IllegalArgumentException en cas de parametre invalide
    public Equivalence(EnsembleAbstrait e) {
    }

    // Fusionne les classes de c.getx() et de c.gety().
    // Lance une IllegalArgumentException en cas de parametre invalide
    public void ajouter(Couple c) {
    }

    // Construit la cloture equivalente de r, pour autant que celle-ci soit
    // une relation sur un ensemble.
    // Lance une IllegalArgumentException sinon
    public Equivalence(Relation r) {
    }


    // Renvoie true si c.getx() et c.gety() sont dans la meme classe et
    // false sinon.
```

```
    //Lance une IllegalArgumentException
    // en cas de parametre invalide
    public boolean contient(Couple c) {
    }

    // Renvoie la classe d'equivalence de x, ou genere une
    // IllegalArgumentException
    // si e est null ou si e n'appartient pas a l'ensemble sous-jacent
    public EnsembleAbstrait classe(Elt e) {
    }

    // Si c.getx()et c.gety() sont distincts et si la classe commune
    // de c.getx() et c.gety() est {c.getx(),c.gety()}, alors cette classe
    // sera scindee en deux classes.
    // Genere une IllegalArgumentException si le parametre est invalide,
    // ou si c.getx(), c.gety() sont dans la meme classe  mais qu'on n'est pas
    // dans le cas ou on peut scinder cette classe.
    public void enlever(Couple c) {
    }

    // Renvoie le nombre de classes de l'Equivalence courante
    public int nbreClasses() {
    }

    // Renvoie le quotient de l'ensemble sous-jacent par l'Equivalence
    // courante
    public EnsembleAbstrait[] quotient() {
    }


} // Equivalence
```

# Structures algébriques

CHAPITRE 8

# Modélisations matricielles

## 8.1 Opérations matricielles

1. Ecrivez la matrice $A = (A_{ij})$ de genre $3 \times 4$ telle que $A_{ij} = 3i + j$.
2. On considère les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculez $3.A$.
   (b) Calculez $A + B$ et $B + A$.
   (c) Calculez $A.B$ et $B.A$.
3. Calculez, si possible, les produits matriciels suivants :
   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
   (e) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. Trouvez toutes les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$
5. Pourquoi la formule
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
   n'est-elle pas vraie en général si $A$ et $B$ sont des matrices carrées de même taille ?

## 8.2 Modélisation des systèmes linéaires

Ecrivez sous forme matricielle les systèmes suivants (trouvez des matrices $A, B$ et $X$ de sorte que le système s'écrive $A.X = B$) :

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0 \\ x_4 + 2x_5 & = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 & = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = 5 \end{cases}$$

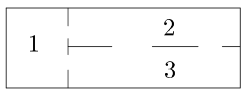
3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_3 & = 6 \end{cases}$$

## 8.3 Matrices et équations de récurrence

1. On considère l'équation de récurrence $f(n+1) = 3f(n) - 2f(n-1)$.
   (a) Trouvez une matrice $A$ telle que
   $$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix}$$
   (b) Déduire du point précédent que
   $$\begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = A^n. \begin{pmatrix} f(1) \\ f(0) \end{pmatrix}$$
   (c) En supposant que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, calculez $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$ en utilisant la relation précédente. (Pour pouvoir calculer $f(n)$, il suffirait donc de pouvoir trouver $A^n$ !)
2. On considère l'équation de récurrence $f(n+2) = -f(n+1) + 4f(n) + 4f(n-1)$.
   (a) Trouvez une matrice $A$ telle que
   $$\begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \\ f(n-1) \end{pmatrix}$$
   (b) Déduire du point précédent que
   $$\begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = A^n. \begin{pmatrix} f(2) \\ f(1) \\ f(0) \end{pmatrix}$$
   (c) En supposant que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 0$, calculez $f(3)$ et $f(4)$ en utilisant la relation précédente.

## 8.4 Modélisations diverses

1. Une famille de puces réside dans les pièces 1,2 et 3 repésentées sur le schéma ci-dessous :




Chaque jour, toutes les puces changent de pièce. Elles se répartissent "également" par les portes qui accèdent à leur pièce (ainsi, parmi les puces initialement dans la pièce 1, une moitié passera dans la pièce 2 et l'autre moitié dans la pièce 3).

   (a) Si on note $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}$ et $p_3^{(n)}$ la répartition des puces respectivement dans les pièces 1, 2 et 3 le jour $n$, Trouvez une matrice $A$ telle que

   $$\begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \\ p_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

   (b) Quelle sera la répartition des puces après 1 jour si la répartition initiale était la suivante : 2000 puces dans la pièce 1, 3000 puces dans la pièce 2 et 6000 puces dans la pièce 3.

   (c) Quelle sera la répartition après 2 jours si la répartition initiale est la même qu'au point précédent ?

2. Chaque année, la population d'un pays fait son choix entre deux partis politiques : le parti $A$ et le parti $B$. On constate les faits suivants :
   - ▷ 1/3 des anciens partisans de $A$ sont mécontents et passent au parti $B$. Les autres anciens de $A$ restent en $A$.
   - ▷ 1/3 des anciens partisans de $B$ seulement restent en $B$ et les autres passent en $A$.

   (a) Exprimez par un système d'équations le mouvement politique de la population en 1 an.

   (b) Exprimez ce transfert sous forme matricielle.

   (c) Exprimez sous forme matricielle le transfert politique après 2 ans, après 3 ans et après 4 ans.

   (d) Si en 1978 il y avait 36000 partisans A et 900 partisans B, quelle était la répartition de la population en l'an 2000 ?

3. **(Juin 2017)** Au fond des forêts de séquoias californiennes, les rats des bois aux pattes foncées fournissent jusqu'à 80% de la nourriture des chouettes, le principal prédateur de ce rongeur. On sait qu'en l'absence de rats la moitié des chouettes seulement survivraient chaque mois. On sait aussi qu'en l'absence des chouettes, le nombre de rats augmenterait de 10% par mois. On note $C^{(n)}$ le nombre de chouettes le mois $n$, $R^{(n)}$ le nombre de rats le mois $n$ et $A$ la matrice telle que

   $$\begin{pmatrix} C^{(n+1)} \\ R^{(n+1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} C^{(n)} \\ R^{(n)} \end{pmatrix}.$$

   Trouvez une matrice $A$ pour laquelle il existe une répartition initiale stable non nulle de chouettes et de rats et qui respecte l'énoncé. Détaillez votre raisonnement.

4. Une certaine espèce de scarabées se comporte de la manière suivante :
   ▷ La moitié des scarabées meurent la première année et les autres survivent une seconde année.
   ▷ Parmi ceux-ci, les 2/3 meurent durant cette seconde année et les autres survivent une troisième année.
   ▷ A la fin de cette troisième année, ils meurent tous mais, auparavant, chacun d'eux donne naissance à 6 scarabées.

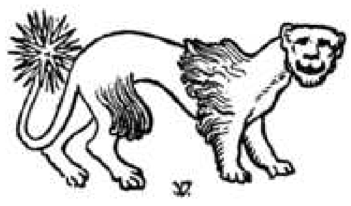
   (a) Si on note $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}$ et $p_3^{(n)}$ la répartition des scarabées respectivement de 1, 2 et 3 ans l'année $n$, trouvez une matrice $A$ telle que

   $$\begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \\ p_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

   (b) Quelle sera la répartition des scarabées après 1, 2, 4 et 8 ans si la répartition initiale était la suivante : 1000 scarabées de moins d'un an, 1000 scarabées entre 1 et 2 ans et 1000 scarabées entre 2 et 3 ans ?

   (c) Vérifiez qu'il y a une répartition initiale non nulle de la population qui est stable (elle ne change pas avec le temps).

5. **(Juin 2016)** La manticore est un gigantesque lion rouge immortel à figure humaine avec trois rangées de dents.



Manticora. From ancient Bestiaria.

Les manticores se répartissent en trois catégories : les juvéniles qui ont moins d'un an et qui ne se reproduisent pas, les matures qui ont plus d'un an et qui donnent naissance à quatre manticores chaque année, et enfin les séniles qui ne se reproduisent plus. Tous les ans, une manticore mature sur dix devient sénile. Seules les manticores matures peuvent devenir séniles. Les manticores séniles restent séniles à tout jamais.

   (a) Donnez la matrice $A$ permettant de calculer la population des manticores, partagée en $y_1$ =nombre de juvéniles, $y_2$ =nombre de matures et $y_3$ =nombre de séniles, après un an en fonction de la population initiale, partagée en $x_1$ =nombre de juvéniles, $x_2$ =nombre de matures et $x_3$ =nombre de séniles.

   (b) Donnez la matrice $B$ permettant de calculer la population des manticores après 2 ans.

   (c) Trouvez, à l'aide d'un système d'équations linéaires adéquat, une répartition initiale des manticores telle qu'en un an le nombre d'individus par catégorie soit multiplié par 2,5.

6. **(Août 2018)** On considère une population de rongeurs présentant trois classes d'âges : les juvéniles (moins d'un an), les préadultes (entre 1 et 2 ans) et les adultes (entre deux et trois ans). Les rongeurs ne vivent pas plus que trois ans et les juvéniles ne se reproduisent pas. On note repectivement par $j^{(t)}$, $p^{(t)}$ et $a^{(t)}$ le nombre de rongeurs l'année $t$ de ces trois classes et on suppose que l'on a la dynamique matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} j^{(t+1)} \\ p^{(t+1)} \\ a^{(t+1)} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} j^{(t)} \\ p^{(t)} \\ a^{(t)} \end{pmatrix}.$$

En observant la population pendant deux ans, on constate alors les effectifs suivants :

| $t$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $j^{(t)}$ | 30 | 750 | 310 |
| $p^{(t)}$ | 50 | 12 | 300 |
| $a^{(t)}$ | 50 | 25 | 6 |

(a) Trouvez une matrice $A$ correspondant à ce modèle. Détaillez votre raisonnement.

(b) En observant une autre population de rongeurs dans les mêmes conditions, on a trouvé la dynamique suivante :

$$\begin{pmatrix} j^{(t+1)} \\ p^{(t+1)} \\ a^{(t+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j^{(t)} \\ p^{(t)} \\ a^{(t)} \end{pmatrix}.$$

Expliquez le sens biologique des coefficients 3, 7, 0.3 et 0.6 qui figurent dans ce modèle.

## Solutions

8.1.1 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$

8.1.2 (a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8.1.3 (a) $(7)$

(b) $\begin{pmatrix} -6 & 2 & -8 \\ 18 & -6 & 24 \\ 9 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix}$

(d) impossible

(e) $\begin{pmatrix} -13 & 6 & -5 \\ 21 & 2 & 11 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

8.1.4 $\text{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{5-3a}{4} \\ c & \frac{6-3c}{4} \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$

8.3.1 (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $f(3) = 7\,;\ f(4) = 15$

8.3.2 (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $f(3) = 4\,;\ f(4) = 0$

8.4.1 (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 3000 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{8000}{3} \\ 3500 \\ \frac{14500}{3} \end{pmatrix}$

8.4.2 (b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 24600 \\ 12300 \end{pmatrix}$

8.4.3 $A = \begin{pmatrix} 0,5 & x \\ y & 1,1 \end{pmatrix}$ avec $x * y = -0.05$ et $x > 0$.

8.4.4 (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

(b) $p^{(1)} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 500 \\ \frac{1000}{3} \end{pmatrix}$ ; $p^{(2)} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ \frac{500}{3} \end{pmatrix}$ $p^{(3)} = p^{(0)}$ ; $p^{(4)} = p^{(1)}$ ; $p^{(8)} = p^{(2)}$

8.4.5 (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 3,6 & 0 \\ 0,9 & 4,81 & 0 \\ 0,1 & 0,19 & 1 \end{pmatrix}$

8.4.6 (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

# CHAPITRE 9

# Implémentation des matrices

Dans le projet IntelliJ "Math2" et créez le module matrices. Dans le répertoire src de ce module, copiez les fichiers de l'archive math2_matrices se trouvant sur moodle dans le répertoire Classes Java. Complétez ensuite la classe Matrice ci-dessous dont vous trouverez une ébauche dans le fichier **Matrice.java**

```java
public class Matrice {
   private final int nbLignes;              // nombre de lignes
   private final int nbColonnes;            // nombre de colonnes
   private final double[][] data;           // matrice (nbLignes,nbColonnes)

   // Ce constructeur cree la matrice nulle de genre (a,b)
   public Matrice(int a, int b) throws IllegalArgumentException {
   }

   //  Ce constructeur permet de construire la matrice correspondant
   //  au tableau en parametre.
   public Matrice(double[][] tab)  throws IllegalArgumentException {
   }

   // Ce constructeur cree une copie de la matrice passee en parametre
   public Matrice(Matrice a)  throws IllegalArgumentException {
   }

   // Cette methode cree et renvoie la matrice identite d'ordre a
   public static Matrice identite(int a)  throws IllegalArgumentException {
   }

   //Cette methode renvoie l'element de la ligne numLigne et de la
   //colonne numColonne de la matrice. Si cet element n'existe pas, la
   //methode lance une IllegalArgumentException
   public double getElement(int numLigne, int numColonne)
           throws IllegalArgumentException {
   }

   // ajoute b a la matrice courante si c'est possible
   public Matrice somme(Matrice b)  throws IllegalArgumentException {
   }

   // calcule le produit scalaire.this de la matrice courante avec scalaire
   public Matrice produitParScalaire(double scalaire){
   }
```

```
    // calcule le produit this*b de la matrice courante avec b si possible
    public Matrice produitAGauche(Matrice b)  throws IllegalArgumentException
        {
    }

    // calcule le produit b*this de b avec la matrice courante si possible
    public Matrice produitADroite(Matrice b)  throws IllegalArgumentException
        {
    }

   // renvoie true si la matrice courante est carree
     public boolean carree(){
    }

    // Calcule this^n. Lance une Mathexception si this n'est pas carree
    public Matrice puissance(int n) throws  IllegalArgumentException {
    }

    // Calcule this^T : la transposee de this
    public Matrice transposee() {

    }

    // affiche la matrice en format standard
    public String toString(){
    }

}
```

# CHAPITRE 10

# Systèmes d'équations linéaires

1. Déterminez toutes les solutions des systèmes suivants à l'aide de la méthode de Gauss :
   (a)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = 0 \\ x_4 + 2x_5 & = 0 \end{cases}$$
   (b)
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = 0 \end{cases}$$
   (c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

2. Étudiez les solutions des systèmes linéaires suivants à l'aide de la méthode de Gauss :
   (a)
$$\begin{cases} x + 5y - 2z & = 4 \\ 3x + 15y - 6z & = 12 \\ -2x + 10y + 4z & = 12 \end{cases}$$
   (b)
$$\begin{cases} x - y + 2z & = 0 \\ 2x + y - z & = 1 \\ x - 2y + z & = 0 \end{cases}$$
   (c)
$$\begin{cases} x - y & = 2 \\ 2x + y & = 1 \\ 3x + 2y & = 5 \end{cases}$$

(d)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z+4t & = & -9 \\ 2x-y+z-3t & = & -2 \\ 3x+y-2z+t & = & -5 \\ 4x-2y-z-t & = & -6 \end{array}\right.$$

3. On se donne les matrices

$$A_t = \begin{pmatrix} t & t^2+t & 5t \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & t^2-t & t \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$$

Résolvez le système $A_tX = B$ en fonction du paramètre $t$ en utilisant la méthode de Gauss.

4. On se donne les matrices

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \\ -t & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolvez le système $A_tX = B$ en fonction du paramètre $t$ en utilisant la méthode de Gauss.

5. On se donne les matrices

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 3-\lambda & \lambda^2-2\lambda+2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Résolvez le système $A_\lambda X = B$ en fonction du paramètre $\lambda$ en utilisant la méthode de Gauss.

6. **(Juin 2016)** On se donne les matrices

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Résolvez le système $A_mX = B$ en fonction du paramètre $m$ en utilisant la méthode de Gauss.

7. **(Juin 2017)** On se donne les matrices

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & m^3-4m+2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4m \\ m^2+4m-3 \\ 3-2m \end{pmatrix}$$

Résolvez le système $A_mX = B$ en fonction du paramètre $m$ en utilisant la méthode de Gauss.

8. **(Juin 2018)** On se donne les matrices

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m+4 & 9 \\ 1 & 2-m & m^2-4m+3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -m \end{pmatrix}$$

Résolvez le système $A_mX = B$ en fonction du paramètre $m$ en utilisant la méthode de Gauss.

# Solutions

10.1 (a) $S = \left\{ (-x_2, x_2, x_5, -2x_5, x_5) \;\middle|\; x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $S = \left\{ \left(\frac{x_3}{7}, -\frac{5}{7}x_3, x_3\right) \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $S = \left\{ (-x_2 + x_4 + x_5, x_2, -x_4 - x_5, x_4, x_5) \;\middle|\; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$

10.2 (a) $S = \left\{ (2z - 1, 1, z) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $S = \left\{ \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right) \right\}$

(c) $S = \emptyset$

(d) $S = \{(-2, 0, -1, -1)\}$

10.3 Si $t \neq 0$ et $t \neq 1$, $S = \left\{ \left(5 - \frac{4}{t-1}, \frac{2}{t-1}, -1\right) \right\}$ ;
Si $t = 0$, $S = \left\{ (2 - 2y - 3z, y, z) \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}$ ;
Si $t = 1$, $S = \emptyset$

10.4 Si $t \neq -2$ et $t \neq 1$, $S = \left\{ \left(-\frac{1}{t-1}, \frac{1}{t-1}, 0\right) \right\}$ ;
Si $t = -2$, $S = \left\{ \left(z + \frac{1}{3}, z - \frac{1}{3}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$ ;
Si $t = 1$, $S = \emptyset$

10.5 Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq 2$, $S = \left\{ \left(\frac{1-\lambda}{\lambda-2}, -\frac{1}{\lambda-2}, \frac{1}{\lambda-2}\right) \right\}$ ;
Si $\lambda = 1$, $S = \left\{ \left(0, \frac{1-z}{2}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$ ;
Si $\lambda = 2$, $S = \emptyset$

10.6 Si $m \neq -1$ et $m \neq 2$, $S = \left\{ \left(-\frac{4}{m-2}, \frac{3}{m-2}, \frac{1}{m-2}\right) \right\}$ ;
Si $m = -1$, $S = \left\{ \left(z + \frac{5}{3}, z - \frac{2}{3}, z\right) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$ ;
Si $m = 2$, $S = \emptyset$

10.7 Si $m \neq -2$ et $m \neq 0$ et $m \neq 2$, $S = \left\{ \left(2m - 1 - \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, 1\right) \right\}$ ;
Si $m = -2$, $S = \left\{ (-y - 5, y, 1) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$ ;
Si $m = 0$, $S = \emptyset$;
Si $m = 2$, $S = \left\{ (3 - y, y, 1) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$

10.8 Si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq 3$, $S = \left\{ \left(\frac{3}{1-m}, \frac{3}{m-1}, \frac{1}{1-m}\right) \right\}$ ;
Si $m = 0$, $S = \left\{ (-3 - 2y, y, 1) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$ ;
Si $m = 1$, $S = \emptyset$;
Si $m = 3$, $S = \left\{ (-z - 2, 1 - z, z) \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\}$

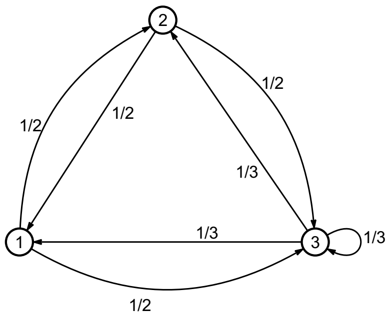
# CHAPITRE 11

# Processus de Markov homogènes

## 11.1 États, périodicité et stabilité

1. Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$
   (a) Vérifiez que $P$ est colonne-stochastique et donnez un processus de Markov à deux états qui admet $P$ comme matrice de transition.
   (b) Calculez la probabilité que partant du premier état (faites un choix), le système se retrouve sur le second état après 3 étapes.
   (c) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
   (d) Donnez les classes de communication de ce processus.
   (e) Pourquoi ce processus est-il irréductible ? Il admet donc une distribution stable unique. Trouvez cette distribution à l'aide de la méthode de Gauss. Interprétez.
   (f) Donnez la période de chaque état.
   (g) Déduire du point précédent que la distribution stable peut s'obtenir à l'aide du théorème de convergence. Illustrez ce théorème sur cet exemple.

2. Considérons le processus de Markov dont le graphe est le suivant :

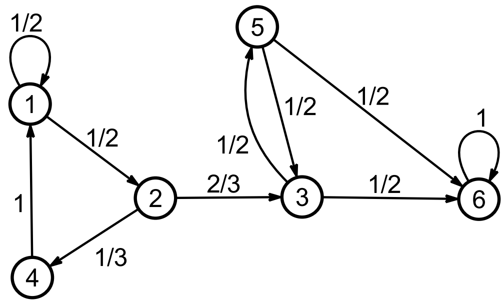



   (a) Donnez la matrice de transition $P$ associée.
   (b) Calculez la probabilité que, partant aléatoirement d'un état initial, le processus se retrouve sur le troisième état après 2 étapes.
   (c) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
   (d) Donnez les classes de communication de ce processus.

(e) Pourquoi ce processus est-il irréductible ? Il admet donc une distribution stable unique. Trouvez cette distribution à l'aide de la méthode de Gauss. Interprétez.
(f) Donnez la période de chaque état.
(g) Déduire du point précédent que la distribution stable peut s'obtenir à l'aide du théorème de convergence. Illustrez ce théorème sur cet exemple.

3. Considérons la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(a) Vérifiez que $P$ est colonne-stochastique et donnez un processus de Markov à six états qui admet $P$ comme matrice de transition.
(b) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
(c) Donnez les classes de communication de ce processus.
(d) Pourquoi ce processus est-il irréductible ? Admet-il un état stable unique ? Justifiez.
(e) Donnez la période de chaque état.
(f) Déduire du point précédent que la distribution stable ne peut s'obtenir à l'aide du théorème de convergence.

4. Considérons le processus de Markov dont le graphe est le suivant :




(a) Donnez la matrice de transition $P$ associée.
(b) Calculez la probabilité que, partant aléatoirement d'un état initial, le processus se retrouve sur le troisième état après 2 étapes.
(c) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
(d) Donnez les classes de communication de ce processus.
(e) Ce processus est-il irréductible ?
(f) Donnez la période de chaque état.

## 11.2 Modélisation et temps moyen de parcours

1. **(Août 2019)** Chaque année, la population d'un pays fait son choix entre trois partis politiques : le parti $A$, le parti $B$ et le parti $C$. On constate les faits suivants :
   - $1/4$ des anciens partisans de $A$ sont mécontents et passent au parti $B$. Les autres anciens de $A$ restent en $A$.
   - Tous les partisans de $B$ sont mécontents : $1/4$ passent en $A$ et le restant passe en $C$.
   - La moitié des partisans de $C$ sont contents et restent en $C$. Les autres anciens de $C$ se répartissent pour moitié en $A$ et pour moitié en $B$.

   a) Exprimez ce transfert sous forme matricielle.

   b) Si la première année sur 100 partisans, 60 votent pour $A$, 20 pour $B$ et 20 pour $C$, quelle sera la répartition des votes l'année suivante ?

   c) Trouver la répartition initialle non nulle d'une population de 100 habitants qui est stable.

   d) Cette situation peut-elle être modélisée par un processus de Markov ? Si oui, expliquez lequel et donnez son graphe.

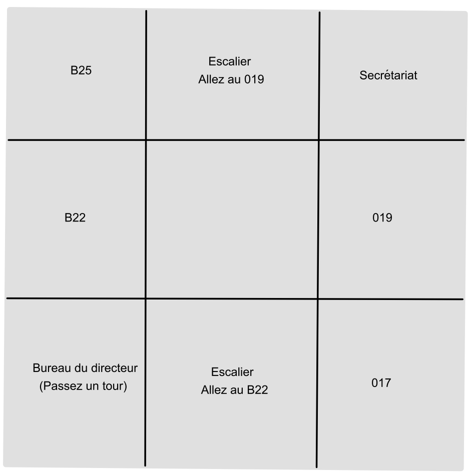
2. Un professeur de l'IPL n'est jamais heureux deux jours de suite. Quand il est heureux une journée, le lendemain il est soit triste, soit en colère avec autant de chances. Si un jour il est triste ou est en colère, la moitié du temps il aura un changement d'humeur le lendemain et s'il y a changement, il y a une chance sur deux qu'il soit heureux.

   (a) Modélisez ce problème à l'aide d'un processus de Markov et donnez la matrice de transition.

   (b) Si un professeur est heureux lundi, qu'en sera-t-il jeudi ?

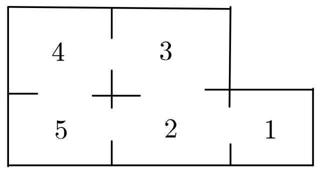
   (c) Quelle est la proportion de jours pour laquelle un professeur est heureux (sur le long terme) ?

3. On considère un jeu de monopipl. Les joueurs démarrent de la case secrétariat. Á chaque tour, les joueurs lancent une pièce. Ils avancent de 1 case ou de deux cases en fonction du résultat du lancer. Les instructions sont alors données sur la table suivante :




Modélisez ce problème à l'aide d'un processus de Markov et donnez la matrice de transition.

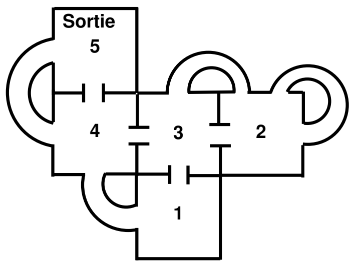
4. Voici une carte (très très simplifiée) de la Moria.




Un Hobbit se trouve caché dans la pièce 1 (et il a tellement peur qu'il y reste). Un gobelin rentre dans la grotte à partir de la pièce 5 et se promène dans la grotte. A chaque étape, il a la même probabilité d'aller dans chaque pièce voisine à celle où il se trouve. Le gobelin s'arrête de se déplacer quand il rentre dans la pièce où se trouve le hobbit.

(a) Modélisez le déplacement du gobelin par un processus de Markov et donnez la matrice de transition.
(b) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
(c) Donnez les classes de communication de ce processus.
(d) Donnez la période de chaque état.
(e) Calculez le temps moyen que va mettre le gobelin avant de rejoinre le hobbit (une unité de temps= un changement de pièce).

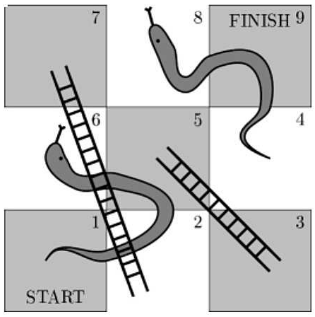
5. **(Juin 2019)** Un homme est enfermé sans lumière dans des caves dont voici les plans :




L'homme se trouve dans la salle 1 et voudrait sortir de ces caves. A chaque étape, il va essayer de changer de pièce en ayant la même probabilité de choisir n'importe quelle porte ou couloir lui permettant de changer de pièce. Quand il arrive à la salle 5 (la sortie), il s'arrête.

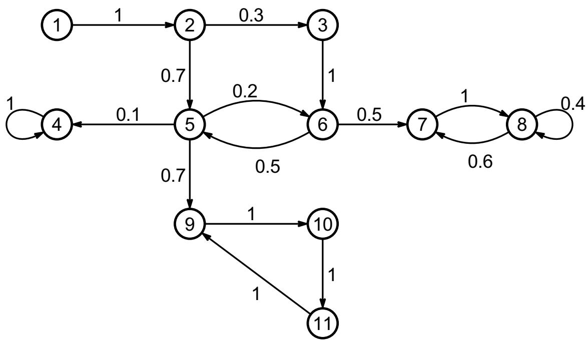
a) Modéliser le déplacement de l'homme par un processus de Markov.
b) Donnez la matrice de transition du système.
c) Donnez la nature de chaque état de ce processus.
d) Donnez les classes de communication de ce processus.
e) Donnez la période de chaque état de ce processus.
f) La distribution stable peut-elle s'obtenir à l'aide du théorème de convergence ? Justifiez !
g) Sachant que l'unité de temps est le changement de pièce, calculez le temps moyen qu'il faudra pour que l'homme trouve la sortie.

6. Vous souhaitez monter sur une échelle comportant quatre marches. Quand vous êtes au sol, vous montez toujours sur la première marche. Si vous arrivez sur la quatrième marche, vous y restez. Quand vous êtes sur une autre marche, vous lancez une pièce : si le résultat est face, vous montez d'une marche, sinon, vous descendez d'une marche.
   (a) En prenant comme états votre position (0 si on est au sol), décrivez le processus de Markov obtenu et donnez sa matrice de transition.
   (b) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
   (c) Donnez les classes de communication de ce processus.
   (d) Donnez la période de chaque état.
   (e) Calculez le temps moyen que vous allez mettre pour atteindre le haut de l'échelle.
7. On considère un jeu d'échelles et de serpents sur 9 cases :



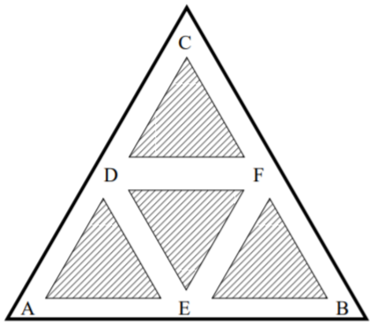

   Les joueurs démarrent de la case 1. Á chaque tour, les joueurs lancent une pièce. Ils avancent de 1 case ou de deux cases en fonction du résultat du lancer. Si un joueur atteint le pied d'une échelle, il monte directement en haut de celle-ci. S'il atteint la tête d'un serpent, il glisse sur celui-ci jusqu'à sa queue. Combien de coups faut-il en moyenne à un joueur pour terminer la partie ?
8. **(Juin 2016)** Un paquet de cartes contient au départ 3 cartes rouges et 2 cartes bleues. Á chaque étape une carte est choisie aléatoirement. Si elle est rouge, elle est retirée du paquet. Si elle est bleue, la carte n'est pas retirée du paquet et on recommence.
   (a) On souhaite modéliser ce jeu à l'aide d'un processus de Markov dont les états repésentent le nombre de cartes rouges restantes. Donnez le graphe de ce processus.
   (b) On voudrait savoir le nombre moyen de cartes à tirer avant que le paquet ne contienne plus de cartes rouges. A quoi cela correspond-il en terme de processus de Markov ?

9. **(Juin 2016)** Considérons le processus de Markov dont le graphe est le suivant :




   (a) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
   (b) Donnez les classes de communication de ce processus.
   (c) Donnez la période de chaque état (pour lequel il existe au moins un chemin partant et revenant à cet état).
   (d) Sachant que vous partez de l'état 7, quelle est la proportion du temps que vous passerez sur cet état sur le long terme ?

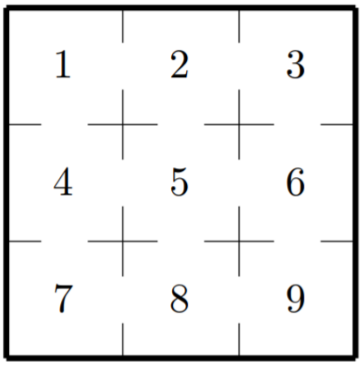
10. **(Juin 2018)** Une souris est lancée dans le labyrinthe suivant.




La souris parcourt les couloirs en choisissant au hasard les couloirs offerts à chaque nouvelle intersection. Elle ne reste jamais sur place. Un déplacement d'une intersection à une autre est l'unité de temps.

   a) Modélisez le déplacement de la souris par un processus de Markov.
   b) Donnez la matrice de transition P associée à ce processus.
   c) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.
   d) Calculez la probabilité que, partant intialement de la position $A$, le processus se retrouve sur la position $F$ après 2 étapes.
   e) Sur le long terme :
      i) Quels sont les sommets sur lesquels la souris passera la même proportion du temps ?
      ii) Calculez la proportion du temps que passera la souris sur chaque sommet. Utilisez le point i) pour faciliter les calculs.

11. **(Août 2018)** Une souris est lancée dans le labyrinthe suivant.




La souris parcourt les pièces en choisissant au hasard et de façon equiprobable une des portes. Elle ne reste jamais sur place. Un déplacement d'une pièce à une autre est l'unité de temps.

a) Modélisez le déplacement de la souris par un processus de Markov.

b) Donnez la matrice de transition P associée à ce processus.

c) Donnez la nature (récurrent ou transient) de chaque état de ce processus.

d) Calculez la probabilité que, partant intialement de la pièce 1, le processus se retrouve dans la pièce 5 après 2 étapes.

e) Calculez la proportion du temps que passera la souris dans chaque pièce sur le long terme.

## Solutions

11.1.1 (b) $\begin{pmatrix} \frac{11}{32} \\ \frac{21}{32} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \frac{21}{64} \\ \frac{43}{64} \end{pmatrix}$

(e) Système à résoudre : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ \dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{1}{4}\cdot y & = & x \\ \dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{3}{4}\cdot y & = & y \end{array}\right.$, Distribution stable : $d=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

11.1.2 (b) $\frac{23}{54}$

(e) Système à résoudre : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ \dfrac{1}{2}\cdot y+\dfrac{1}{3}\cdot z & = & x \\ \dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{1}{3}\cdot z & = & y \\ \dfrac{1}{2}\cdot x+\dfrac{1}{2}\cdot y+\dfrac{1}{3}\cdot z & = & z \end{array}\right.$, Distribution stable $d=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

11.1.4 (b) $\frac{7}{72}$

11.2.1 b) $\begin{pmatrix} 55 \\ 20 \\ 25 \end{pmatrix}$

c) Système à résoudre : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 100 \\ \frac{3}{4}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{4}\cdot z & = & x \\ \frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot z & = & y \\ \frac{3}{4}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot z & = & z \end{array}\right.$ , Répartition stable $\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

d) oui

11.2.2 (b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{13}{32} \\ \frac{13}{32} \end{pmatrix}$

(c) Si $\left\{\begin{array}{lcl} \text{État 1} & = & \text{Le professeur est heureux} \\ \text{État 2} & = & \text{Le professeur est triste} \\ \text{État 3} & = & \text{Le professeur est en colère} \end{array}\right.$ , alors

le système à resoudre est $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ \frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{4}\cdot z & = & x \\ \frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\cdot z & = & y \\ \frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot z & = & z \end{array}\right.$

et sur le long terme le professeur est heureux $\frac{1}{5}$ du temps.

11.2.4 (e) 12

11.2.5 (f) Non
(g) 11

11.2.6 (e) 16

11.2.7 7

11.2.8 (b) $\frac{20}{3}$

11.2.9 (d) Système à résoudre : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1 \\ \frac{3}{5}\cdot y & = & x \\ x+\frac{2}{5}\cdot y & = & y \end{array}\right.$ ,

Proportion du temps passé sur l'état 7 : $\frac{3}{8}$

11.2.10 (d) $\frac{1}{4}$

(e) ii) Le système à résoudre est $\left\{\begin{array}{rcl} x_A+x_B+x_C+x_D+x_E+x_F &=& 1 \\ \frac{1}{4}\cdot x_D+\frac{1}{4}\cdot x_E &=& x_A \\ \frac{1}{4}\cdot x_E+\frac{1}{4}\cdot x_F &=& x_B \\ \frac{1}{4}\cdot x_D+\frac{1}{4}\cdot x_F &=& x_C \\ \frac{1}{2}\cdot x_A+\frac{1}{2}\cdot x_C+\frac{1}{4}\cdot x_E+\frac{1}{4}\cdot x_F &=& x_D \\ \frac{1}{2}\cdot x_A+\frac{1}{2}\cdot x_B+\frac{1}{4}\cdot x_D+\frac{1}{4}\cdot x_F &=& x_E \\ \frac{1}{2}\cdot x_B+\frac{1}{2}\cdot x_C+\frac{1}{4}\cdot x_D+\frac{1}{4}\cdot x_E &=& x_F \end{array}\right.$

De part la similarité des états $A$, $B$ et $C$ ainsi que la similarité des états $D$, $E$, $F$,

le système se réduit à $\left\{\begin{array}{rcl} 3x_A+3x_D &=& 1 \\ \frac{1}{2}\cdot x_D &=& x_A \\ x_A+\frac{1}{2}\cdot x_D &=& x_D \end{array}\right.$

Proportion du temps sur $A$, $B$ et $C \to \frac{1}{9}$ ; proportion du temps sur $D$, $E$ et $F \to \frac{2}{9}$

11.2.11 (d) $\frac{1}{3}$

(e) Le système à résoudre est $\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9 &=& 1 \\ \frac{1}{3}\cdot x_2+\frac{1}{3}\cdot x_4 &=& x_1 \\ \frac{1}{2}\cdot x_1+\frac{1}{2}\cdot x_3+\frac{1}{4}\cdot x_5 &=& x_2 \\ \frac{1}{3}\cdot x_2+\frac{1}{3}\cdot x_6 &=& x_3 \\ \frac{1}{2}\cdot x_1+\frac{1}{4}\cdot x_5+\frac{1}{2}\cdot x_7 &=& x_4 \\ \frac{1}{3}\cdot x_2+\frac{1}{3}\cdot x_4+\frac{1}{3}\cdot x_6+\frac{1}{3}\cdot x_8 &=& x_5 \\ \frac{1}{2}\cdot x_3+\frac{1}{4}\cdot x_5+\frac{1}{2}\cdot x_9 &=& x_6 \\ \frac{1}{3}\cdot x_4+\frac{1}{3}\cdot x_8 &=& x_7 \\ \frac{1}{4}\cdot x_5+\frac{1}{2}\cdot x_7+\frac{1}{2}\cdot x_9 &=& x_8 \\ \frac{1}{3}\cdot x_6+\frac{1}{3}\cdot x_8 &=& x_9 \end{array}\right.$

De part la similarité des états 1, 3, 7 et 9 ainsi que la similarité des états 2, 4, 6 et 8

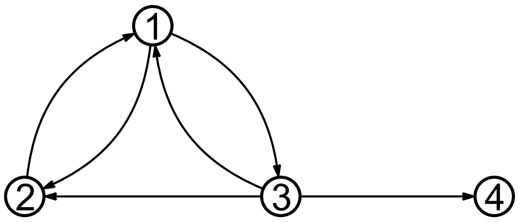
le système se réduit à $\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1+4x_2+x_5 &=& 1 \\ \frac{2}{3}\cdot x_2 &=& x_1 \\ x_1+\frac{1}{4}\cdot x_5 &=& x_2 \\ \frac{4}{3}\cdot x_2 &=& x_5 \end{array}\right.$

Pièces 1, 3, 7 et 9 : $\frac{1}{12}$ ; pièces 2, 4, 6, 8 : $\frac{1}{8}$ ; pièce 5 : $\frac{1}{6}$

# CHAPITRE 12

# PageRank de Google

1. **(Septembre 2017)** On considère un réseau formé de quatre pages web décrit par le graphe suivant :




Les états représentent les pages web et une flèche d'un état $i$ vers un état $j$ indique qu'il y a un hyperlien sur la page $i$ qui pointe vers la page $j$.

   (a) Créez la matrice de transition du réseau sans oublier de prendre en compte le problème des trous noirs. Pourquoi faut-il prendre en compte ce problème de trous noirs ?

   (b) Créez la matrice Google du réseau pour contourner le problème des multiples classes récurrentes. Justifiez votre calcul !

   (c) Peut-on utiliser l'algorithme de convergence pour calculer le score pagerank de chaque page du réseau ? Justifiez !

2. Dans la classe Matrice, on souhaite écrire une méthode

**public Matrice pageRank()**

qui, dans le cas où la matrice courante représente la matrice d'adjacence d'un réseau d'hyperliens (dont le coefficient de la $i$-ème ligne et $j-$ème colonne vaut 1 si la page $j$ pointe vers la page $i$ et 0 sinon), renvoie la matrice mesurant l'ordre d'importance de chaque page du réseau. Pour y arriver, on veillera à suivre les étapes suivantes :

   (a) Vérifier que la matrice ne contient que des 1 et des 0, lancer une MathException dans le cas contraire.

   (b) Créer la matrice de transition correspondant à la matrice du réseau sans oublier de prendre en compte le problème des trous noirs.

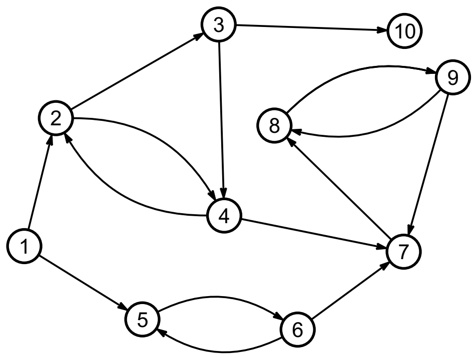
   (c) Créer la matrice Google du réseau pour contourner le problème des multiples classes récurrentes.

   (d) Associer une matrice d'état initial $v_0$ cohérente pour pouvoir par la suite calculer la distribution limite.

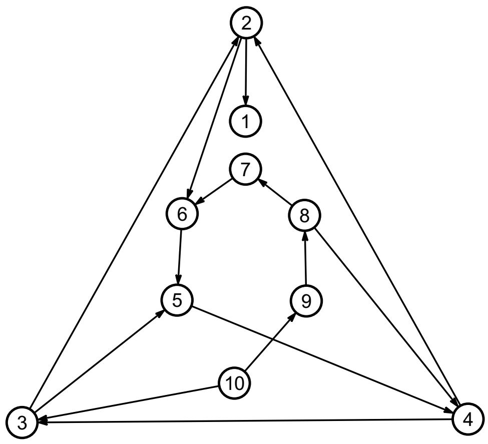
   (e) Trouver la distribution limite à l'aide du théorème de convergence en veillant à chaque étape à normaliser vos matrices pour éviter les erreurs machines.

Utilisez votre programme pour classer les pages des sites suivants.

(a) .




(b) .



# Solutions

12.1 (b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{80} & \frac{71}{80} & \frac{77}{240} & \frac{1}{4} \\ \frac{37}{80} & \frac{3}{80} & \frac{77}{240} & \frac{1}{4} \\ \frac{37}{80} & \frac{3}{80} & \frac{3}{80} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{80} & \frac{3}{80} & \frac{77}{240} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

12.2 (a) $\begin{pmatrix} 0.0179 \\ 0.0490 \\ 0.0388 \\ 0.0552 \\ 0.0519 \\ 0.0620 \\ 0.1730 \\ 0.2702 \\ 0.2476 \\ 0.0344 \end{pmatrix}$, arrondi à 4 chiffres décimaux.

(b) $\begin{pmatrix} 0.0878 \\ 0.1537 \\ 0.1146 \\ 0.1942 \\ 0.1772 \\ 0.1248 \\ 0.0436 \\ 0.0497 \\ 0.0320 \\ 0.0225 \end{pmatrix}$, arrondi à 4 chiffres décimaux.

# Langages Formels

CHAPITRE 13

# Langages formels

## 13.1 Généralités

1. Sur $\Sigma = \{a, b, c\}$, on considère les langages suivants :
$$A = \{aa\} \qquad B = \{abc, cba\} \qquad C = \{cca, bacc, ab, cab\}$$
Décrivez les langages $B \bullet C, A^*, A^* \bullet B, (A \bullet B)^*$
2. Soient $A$ et $B$ des langages sur un alphabet $\Sigma$. Vérifiez que l'on a toujours
$$(B \bullet A)^* \bullet B = B \bullet (A \bullet B)^*$$
3. Montrez que les affirmations suivantes sont fausses :
   (a) $L^2 \bullet L^+ = L^+$
   (b) $\emptyset \bullet L = L$
   (c) Si $L = L^*$, alors $L = \{\varepsilon\}$
   (d) $L^+ \bullet L^+ = L^+$

## 13.2 Expressions régulières

1. Soit l'alphabet $\Sigma = \{+, \times, a, b, c\}$. Repérez les expressions régulières sur $\Sigma$ parmi les suites de symboles suivantes :
   (a) $(a \mid +)^* + b \times c^*$
   (b) $((a+)^* \mid )b^*c$
   (c) $+^* \mid {}^*\times^*$
   (d) $((a^*b)^* \times \mid ca+^*)$
2. Trouvez les langages décrits par les expressions régulières suivantes :
   (a) $a(b \mid (c \mid d))a$
   (b) $a^*b^*c$
   (c) $(a \mid c)(c \mid d)$
   (d) $(ab^*\lambda \mid (cd)^*)$
   (e) $(ab^*)^*$
   (f) $b^*a(b^*ab^*a)^*b^*$
3. Sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ on considère les deux expressions régulières
$$\alpha = (a \mid cb)(ab)^*(c \mid \lambda) \qquad \text{et} \qquad \beta = (a \mid cb)^*ab^*c\lambda$$
Parmi les mots suivants, trouvez ceux qui se trouvent dans le langage associé à $\alpha$ et ceux qui se trouvent dans le langage associé à $\beta$.

(a) $aabab$
(b) $aabc$
(c) $cb$
(d) $\varepsilon$
(e) $a^3bc$
(f) $ac$
(g) $cbcbc$
(h) $cbcba^4c$

4. Trouvez une expression régulière dont le langage associé est le suivant :
   (a) $\{ab, ac, ad\}$
   (b) $\{ab, ac, bb, bc\}$
   (c) $\{a, ab, abb, abbb, abbbb, \ldots\}$
   (d) $\{ab, abab, ababab, abababab, \ldots\}$
   (e) $\{ab, abb, aab, aabb\}$
   (f) $\{abcd, abef, cdcd, cdef\}$
5. Soit $\Sigma = \{a, b\}$. Donnez une expression régulière pour l'ensemble des éléments de $\Sigma^*$
   (a) contenant exactement deux $b$ et deux $a$,
   (b) contenant un nombre pair de $b$,
   (c) commençant et se terminant par $a$ et contenant au moins un $b$,
   (d) tels que le nombre de $a$ dans chaque mot est divisible par 3 ou le nombre de $b$ dans chaque mot est divisible par 5,
   (e) la longueur de chaque mot est divisible par 3.
6. Les expression régulières suivantes, sur $\Sigma = \{a, b, c\}$, sont-elles équivalentes ?
   1°) $a\Big((bb)^*bb(ac)^*\Big|(bb)^*ac(ac)^*\Big)$ et $a(bb)^*\big(bb|ac\big)(ac)^*$
   2°) $(b|c)^*(\lambda|a)(b|c)^*$ et $(b|c)^*\big(\lambda|a(b|c)^*\big)$
   3°) $(b|c)^*(\lambda|a)(b|c)^*$ et $(b^*|c^*)^*\big(\lambda|a(b|c)\big)^*$
7. **(Juin 2016)** On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Donnez une expression régulière pour le langage correspondant à l'ensemble des éléments de $\Sigma^*$
   (a) dont la longueur est un multiple de 3 ;
   (b) qui contiennent un nombre pair de $a$ ;
   (c) qui contiennent les sous-symboles $ab$ et $bc$ ;
   (d) dont le nombre de $b$ est égal à 1 modulo 3.
8. **(Septembre 2018)** On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
   1. Les mots $\varepsilon$, $a$, $b^3a$, $baba$ et $abab$ appartiennent-ils au langage régulier décrit par l'expression $((a|\lambda)a^*b)^*a$ ?
   2. Donnez une expression régulière pour le langage correspondant à l'ensemble des éléments de $\Sigma^*$ qui contiennent un nombre pair de $a$ et qui se terminent par $a$.
   3. Donnez une expression régulière pour le langage correspondant à l'ensemble des éléments de $\Sigma^*$ qui ne commencent pas par $aab$.

## 13.3 Grammaires régulières

1. Considérons, sur $\Sigma = \{a, b, c\}$, les grammaires $G_1$, $G_2$, $G_3$ ci-après :

$$\begin{array}{llrcl}
G_1 & : & <S> & \to & ab<X> \,\big|\, bc<Y> \\
 & & <X> & \to & \varepsilon \big| ba \\
 & & <Y> & \to & c<Y> \,\big|\, b<S> \\
 & & & & \\
G_2 & : & <S> & \to & ab<X> \,\big|\, b<Y>c \\
 & & <X> & \to & \varepsilon \,\big|\, <X>b<S> \\
 & & <Y> & \to & cba \\
 & & & & \\
G_3 & : & <S> & \to & ab<X> \,\big|\, b<Y> \,\big|\, ba<X> \\
 & & b<X> & \to & a<Y> \,\big|\, c<Z> \\
 & & a<X> & \to & \varepsilon | cc \\
 & & <Y> & \to & <Y>bba \,\big|\, a<X>ba
\end{array}$$

Repérez les grammaires qui sont régulières et normalisez-les.

2. Considérons, sur $\Sigma = \{a, b, c\}$, la grammaire régulière $G$ ci-dessous

$$\begin{array}{rcl}
<S> & \to & a<X> \,\big|\, a<Y> \,\big|\, b<Y> \\
<X> & \to & \varepsilon \big|\, c<S> \,\big|\, a<Z> \\
<Y> & \to & cb \,\big|\, c<Z> \\
<Z> & \to & \varepsilon \,\big|\, b<X>
\end{array}$$

Parmi les mots suivants, dites ceux qui se trouvent dans le langage engendré par $G$

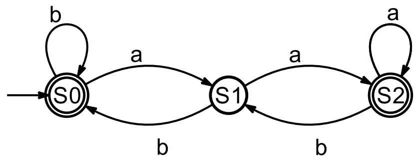
a) $accb$
b) $bcbbcb$
c) $acacaab$
d) $baccbca$
e) $aabcbcbcbcb$

3. Pour chaque langage sur $\Sigma = \{a, b\}$ ci-dessous, donnez une grammaire régulière qui l'engendre :
   a) le langage constitué de tous les mots contenant un nombre impair de '$a$'.
   b) le langage constitué de tous les mots dans lesquels les nombres de '$a$' et de '$b$' ont la même parité.
   c) le langage constitué de tous les mots contenant un nombre impair de '$a$' et au moins deux '$b$'.
   d) le langage constitué des mots commençant et se terminant par $a$ et contenant au moins un $b$.
   e) le langage constitué des mots dont la longueur est divisible par 3.
   f) le langage constitué des mots dans lesquels on n'a pas trois $b$ consécutifs.

4. Pour les expressions régulières, sur $\Sigma = \{a, b, c\}$, donnez une grammaire régulière génératrice du langage qui lui est associé :
   a) $aa^*(c|b)^*$
   b) $\left(a^*b\big|(b^*a)^*\right)$
   c) $\left(a(ba)^*\big|cc^*\right)^* a$
   d) $(bca)^* \left(a\big|bb\big|bcc\right)$

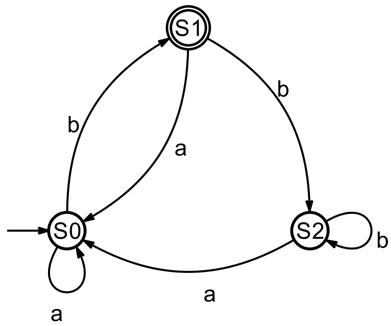
## 13.4 Automates de Moore et NDFA

1. Parmi les mots suivants quels sont ceux acceptés par l'automate suivant ?



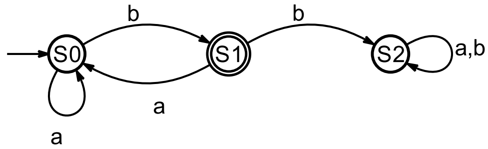

   (a) *abba*
   (b) *aabbb*
   (c) *babab*
   (d) *aaabbb*
   (e) *bbaab*

2. Parmi les mots suivants quels sont ceux acceptés par l'automate suivant ?

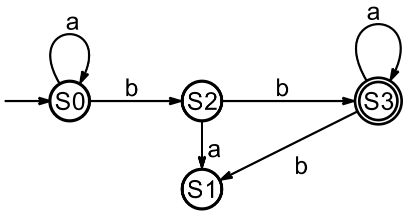



   (a) *aaabb*
   (b) *abbbabbb*
   (c) *bababa*
   (d) *aaabab*
   (e) *bbbabab*

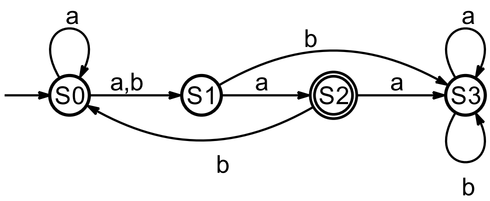
3. Donnez une expression régulière et une grammaire régulière pour le langage associé à l'automate suivant :



4. Donnez une expression régulière et une grammaire régulière pour le langage associé au NDFA suivant :




5. Donnez une expression régulière et une grammaire régulière pour le langage associé à l'automate suivant :




6. Donnez, pour chacune des grammaires régulières ci-dessous, un NDFA correspondant au même langage

   a)

$$
\begin{aligned}
<S> &\rightarrow b<A> \,\big|\, cb<B> \\
<A> &\rightarrow bb<A> \,\big|\, a<S> \\
<B> &\rightarrow c \,\big|\, b<A> \,\big|\, ab<B>
\end{aligned}
$$

   b)

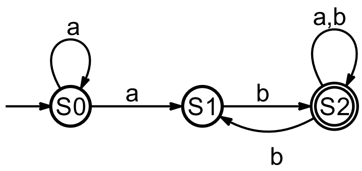
$$
\begin{aligned}
<S> &\rightarrow ac<A> \,\big|\, bc<A> \\
<A> &\rightarrow \varepsilon \,\big|\, b<B> \,\big|\, a \\
<B> &\rightarrow abc \,\big|\, b<S>
\end{aligned}
$$

7. Trouvez, pour chacune des expressions régulières suivantes, un NDFA correpondant au même langage

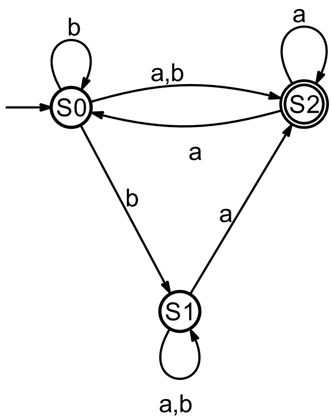
   (a) $aa^*bb^*cc^*$
   (b) $(a^*ba^*ba^*b)^*$
   (c) $(a^*(ba)^*bb^*a)^*$
   (d) $(a^*b \mid (b^*a)^*)$

8. Pour chacun des langages sur $\Sigma = \{a, b, c\}$ ci-dessous, donnez un automate de Moore le reconnaissant.
   a) Le langage constitué des mots contenant un nombre impair de $a$ et un nombre pair de $b$.
   b) Le langage constitué des mots dans lesquels un $b$ n'est jamais suivi d'un $c$.
   c) Le langage constitué des mots commençant et se terminant par $a$ et contenant la chaîne $bcb$.
9. Pour les NDFA ci-dessous, appliquez la subset construction afin de trouver un automate de Moore reconnaissant le même langage.

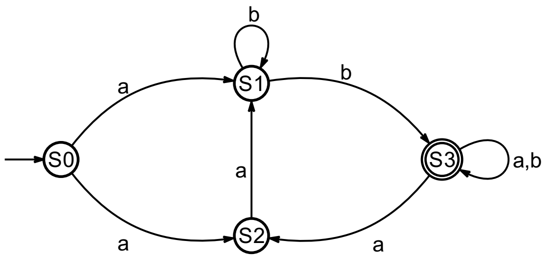
a)



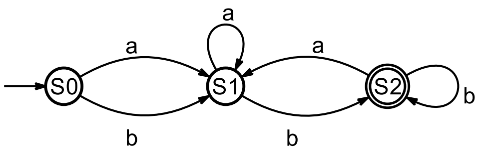

b)



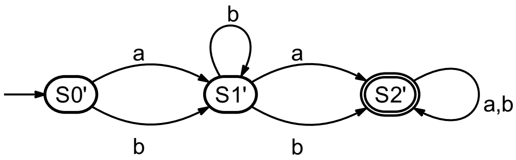

c)



10. Soient $L_1$ le langage accepté par l'automate




et $L_2$ le langage accepté par l'automate



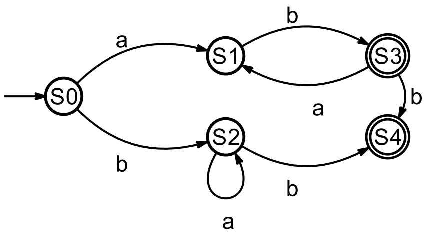

(a) Construisez un NDFA qui accepte $L_1 \cup L_2$.

(b) Construisez un NDFA qui accepte $L_1 \bullet L_2$.

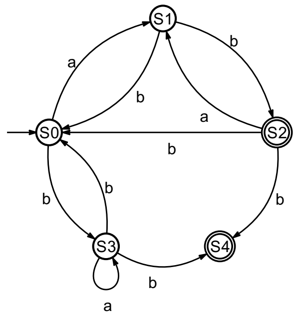
(c) Construisez un NDFA qui accepte $L_1^*$.

(d) Construisez un NDFA qui accepte $L_2^*$.

11. Soient $L_1$ le langage accepté par l'automate




et $L_2$ le langage accepté par l'automate



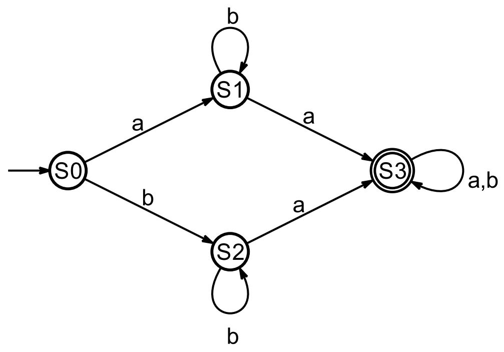

(a) Construisez un NDFA qui accepte $L_1 \cup L_2$.

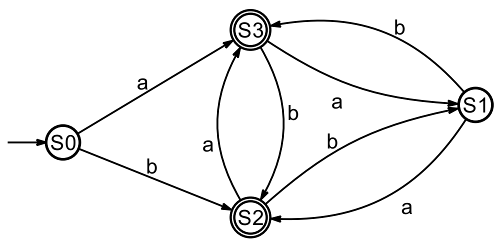
(b) Construisez un NDFA qui accepte $L_1 \bullet L_2$.

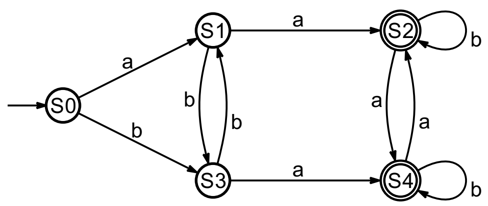
(c) Construisez un NDFA qui accepte $L_1^*$.

(d) Construisez un NDFA qui accepte $L_2^*$.

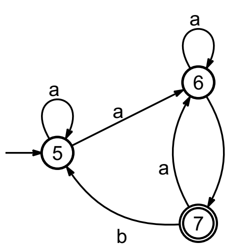
12. Pour chacun des automates de Moore ci-dessous, trouvez l'automate de Moore minimal reconnaissant le même langage :

a) 

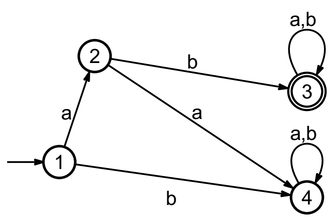

b) 


c) 


13. **(Juin 2016)** Soient $L_1$ et $L_2$ les langages reconnus par les NDFA suivants :




$L_1$




$L_2$

(a) Construisez un NDFA qui reconnaît $L_1 \bullet L_2$.

(b) Utilisez la subset construction pour trouver un NDFA reconnaissant le même langage que $L_2$.