Mathématiques 1
Logique des prédicats

Institut Paul Lambin

24 septembre 2021

Introduction

Trois logiciens se promène en Belgique et aperçoivent la scène suivante :

- Le premier dit "*Toute les vaches de Belgique sont noires*"
- Le deuxième dit "*C'est faux par contre on peut dire qu'en Belgique il existe une vache noire*"
- Le troisième dit "*Ce n'est pas vrai.Tout ce que l'on peut dire c'est qu'en Belgique il existe une vache dont une face est noire*"

Comment formaliser cette conversation avec la logique des propositions ?

Introduction

- $\rightarrow$ impossible.
- $\rightarrow$ les propositions ont une seule valeur de vérité.
- $\rightarrow$ la valeur de vérité de la proposition ”cette vache est noire” peut varier selon la vache !
- $\rightarrow$ une proposition par vache ? Pas pratique !

- $\rightarrow$ Solution : introduire des paramètres dans les propositions.

Une proposition paramétrée est ce que l’on appellera un **prédicat**.

Prédicats : Définition et exemple

Définition : Un prédicat est une **proposition** contenant un ou plusieurs **paramètres**

Exemples :

Considérons l'univers des nombres entiers :

1) Soit la proposition $p(x)$: "x est multiple de 3" :
   - $p(x)$ est un prédicat avec un paramètre (x)
   - $p(6)$ est vraie car 6 est un multiple de 3
   - $p(13)$ est fausse car 13 n'est pas un multiple de 3.
2) Soit la proposition $q(x, y)$: "x et y sont premiers entre eux" :
   - $q(x, y)$ est un prédicat à deux paramètres (x et y)
   - $q(6, 35)$ est vraie car 6 et 35 sont premiers entre eux.
   - $q(14, 21)$ est fausse car 14 et 21 sont divisibles par 7 et ne sont donc pas premiers entre eux

⚠ la valeur de vérité de ces propositions dépend des valeurs paramètres.

Quantificateur universel

La valeur de vérité d'un prédicat peut-elle être la même quelque soit la valeur de vérité de ces paramètres ?

$\rightarrow$ Utilisation du **quantificateur universel** noté $\forall$

Définition : La formule $\boxed{\forall x \ p(x)}$ est **vraie** uniquement si $p(x)$ est **vraie pour toutes les valeurs possible du paramètre** x.

Exemple :

Dans l'univers des nombres naturels

1) Soit le prédicat $p(x)$: "est divisible par 1".

   Alors $\forall x \ p(x)$ est vraie car tous les entiers sont divisibles par 1.

2) Soit le prédicat $q(x)$: "$x > 0$".

   Alors $\forall x \ q(x)$ est fausse car $q(0)$ est fausse.

Quantificateur existentiel

Existe-t-il une valeur des paramètres d'un prédicat telle que la valeur de vérité du prédicat soit vrai ?

$\rightarrow$ Utilisation du **quantificateur existentiel** noté $\exists$

Définition : La formule $\boxed{\exists x\ p(x)}$ est **vraie** uniquement si il existe (au moins) une valeur du paramètre x telle que $p(x)$ soit **vraie**.

Exemple :

Dans l'univers des nombres naturels

1) Soit le prédicat $p(x)$: "est divisible par 13".

   Alors $\exists x\ p(x)$ est vraie car $p(26)$ est vraie puisque $26 = 2 \cdot 13$

2) Soit le prédicat $q(x)$: "$x < 0$".

   Alors $\exists x\ q(x)$ est fausse car les entiers naturels sont tous positifs.

Variables libres et variables liées

Dans l'univers des entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, on considère la formule

$$\alpha \;:\; \forall x\,(x \cdot y = x)$$

Alors

- α est vraie pour $y = 1$ car pour tout entier x on a bien que $x \cdot 1 = x$
- α est fausse pour $y = 2$ car pour $x = 3$ on a $2 \cdot 3 \neq 3$.
- α est un prédicat en y : on peut l'écrire $\alpha(y)$

De plus,

- le paramètre x, quantifié, est dit **lié**
- le paramètre y, non quantifié (non lié à un quantificateur), est dit **libre**

Remarques :

1) Le nom des paramètres n'a pas d'importance :
$\rightarrow$ on peut réécrire α comme $\alpha \;:\; \forall z\,(z \cdot y = z)$
2) Si on ajoute le quantificateur $\exists$ pour lier y, on obtient $\exists y \forall x\,(x \cdot y = x)$.
$\rightarrow$ proposition vraie car pour tout entier x on a bien que $x \cdot 1 = x$.

Ordre des quantificateurs

L'ordre des quantificateur est important !

En effet $\forall x \exists y \; p(x,y)$ n'est pas équivalent à $\exists y \forall x \; p(x,y)$

Cependant la seconde implique la première :

$$\boxed{\Big(\exists y \forall x \; p(x,y)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x \exists y \; p(x,y)\Big)}$$

Exemples :

Dans l'univers des entiers relatifs :

1) On considère $p(x,y) : x \cdot y = x$:
   - $\exists y \forall x \; p(x,y)$ est vraie : $x \cdot 1 = x$ pour tout entier x.
   - $\forall x \exists y \; p(x,y)$ est vraie : pour tout entier x, je peux trouver un entier y tel que $x \cdot y = x \rightarrow$ pour chaque x on prend $y = 1$.
2) On considère $q(x,y) : x + y = 0$:
   - $\forall x \exists y \; q(x,y)$ est vraie : pour tout entier x : $x + y = 0$ si $y = -x$.
   - $\exists y \forall x \; q(x,y)$ est fausse car on ne peut pas trouver un entier y qui serait l'opposé de tous les entiers autrement dit tel que $\forall x \; q(x,y)$.

Négation du quantificateur universel

Deux logiciens se baladent et s'arrêtent devant le pré suivant

- Le premier dit alors "*Dans ce pré toutes les vaches sont noires*"
- Le second répond alors "*Ce n'est pas vrai car il y en a une qui n'est pas noire puisqu'elle est brune*"

Soit U l'univers des vaches de ce pré et le prédicat $p(x)$: "x est noire"

Alors

1) la phrase du premier logicien se traduit par $\forall x\, p(x)$
2) la phrase du second se traduit par $\exists x\, \left(\neg\, p(x)\right)$

$\rightarrow$ pour contredire le premier logicien (prendre la négation de $\forall x\, p(x)$), le second logicien a dû trouver une seule vache qui n'était pas noire

$\rightarrow$ il a utilisé le quantificateur existentiel et obtenu la proposition $\exists x\, \left(\neg\, p(x)\right)$

Négation du quantificateur universel

La formule $\forall x\, p(x)$ prend la valeur **Faux**

si on peut trouver **au moins une valeur** de x qui rend la proposition $p(x)$ **fausse**

si $\exists x\, (\neg p(x))$ est **vraie**.

Conclusion :

$$\boxed{\neg\left(\forall x\, p(x)\right) \Leftrightarrow \exists x\, (\neg p(x))}$$

Négation du quantificateur existentiel

Deux logiciens se baladent et s'arrêtent devant le pré suivant

- Le premier dit alors "*Dans ce pré il y a une vache brune.*"
- Le second répond alors "*Ce n'est pas vrai car dans ce pré il n'y aucune vache brune car elles sont toutes noires*"

Soit U l'univers des vaches de ce pré et le prédicat $p(x)$: "x est brune"

Alors

1) la phrase du premier logicien se traduit par $\exists x\, p(x)$
2) la phrase du second se traduit par $\forall x\, (\neg p(x))$

$\rightarrow$ pour contredire le premier logicien (prendre la négation de $\exists x\, p(x)$), le second logicien a dû montrer qu'aucune vache n'était brune

$\rightarrow$ il a utilisé le quantificateur universel et obtenu la proposition $\forall x\, (\neg p(x))$

Négation du quantificateur existentiel

La formule $\exists x\, p(x)$ prend la valeur **Faux**

- si on ne peut trouve aucune valeur de x qui rend la proposition $p(x)$ **vraie**
- si toutes les valeurs de x rendent la proposition $p(x)$ **fausse**.
- si $\forall x\, \left(\neg\, p(x)\right)$ est **vraie**.

Conclusion :

$$\boxed{\neg \left(\exists x\, p(x)\right) \Leftrightarrow \forall x \left(\neg\, p(x)\right)}$$

Quantificateur universel et conjonction

Si on est dans le pré suivant

Dire

"*Tous les animaux de ce pré sont des vaches noires*"

revient à dire

"*Tous les animaux de ce pré sont des vaches et tous les animaux de ce pré sont noirs*"

On a donc la propriété

$$\boxed{\forall x \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall x\, p(x)\Big) \wedge \Big(\forall x\, q(x)\Big)}$$

Quantificateur existentiel et conjonction

Si on est dans le pré suivant

- La phrase "*Dans ce pré il y a un animal qui est un cheval noir*" est fausse car le cheval est brun.
- La phrase "*Dans ce pré il y a un cheval et dans ce pré il y a un animal noir*" est vraie car il y a un cheval et la vache est noire.

Par contre, comme

la phrase "*Dans ce pré il y a un animal qui est une vache noire*" est vraie.

Alors

la phrase "*Dans ce pré il y a un animal qui est une vache et dans ce pré il y a un animal noir*" est vraie.

On a donc la propriété $\boxed{\exists x \Big(p(x) \wedge q(x)\Big) \Rightarrow \Big(\exists x\, p(x)\Big) \wedge \Big(\exists x\, q(x)\Big)}$

Quantificateur universel et disjonction

Si on est dans le pré suivant

- La phrase "*Tous les animaux dans ce pré sont des vaches ou tous les animaux de champs sont des chevaux*" est fausse car il y un vache et un cheval.
- La phrase "*Tout animal dans ce pré est soit une vache soit un cheval*" est vraie car il n'y a que des vaches ou des chevaux sur la photo.

Par contre, comme

la phrase "*Tous les animaux dans ce pré ont 4 pattes ou tous les animaux dans ce pré ont 3 pattes*" est vraie.

Alors

la phrase "*Tous les animaux dans ce pré ont 4 pattes ou 3 pattes*" est vraie.

On a donc la propriété $\boxed{\Big(\forall x\, p(x)\Big) \vee \Big(\forall x\, q(x)\Big) \Rightarrow \forall x \Big(p(x) \vee q(x)\Big)}$

Quantificateur existentiel et disjonction

Si on est dans le pré suivant

Dire

> "*Dans ce pré il y a un animal qui est une vache ou dans ce pré il y a un animal qui et un cheval*"

revient à dire

> "*Dans ce pré il y a une animal qui est soit une vache soit un cheval*"

On a donc la propriété

$$\boxed{\Big(\exists x\, p(x)\Big) \vee \Big(\exists x\, q(x)\Big) \Leftrightarrow \exists x \Big(p(x) \vee q(x)\Big)}$$

Quantificateurs et connecteurs : Récapitulatif

	Quantificateur universel	**Quantificateur existenciel**
Négation	$\neg\big(\forall x\, p(x)\big) \Leftrightarrow \exists x\,\big(\neg p(x)\big)$	$\neg\big(\exists x\, p(x)\big) \Leftrightarrow \forall x\,\big(\neg p(x)\big)$
Conjonction	$\forall x\big(p(x) \wedge q(x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x\, p(x)\big) \wedge \big(\forall x\, q(x)\big)$	$\exists x\big(p(x) \wedge q(x)\big) \Rightarrow \big(\exists x\, p(x)\big) \wedge \big(\exists x\, q(x)\big)$
Disjonction	$\big(\forall x\, p(x)\big) \vee \big(\forall x\, q(x)\big) \Rightarrow \forall x\big(p(x) \vee q(x)\big)$	$\big(\exists x\, p(x)\big) \vee \big(\exists x\, q(x)\big) \Leftrightarrow \exists x\big(p(x) \vee q(x)\big)$

Existence et unicité : Notation

Notation $\exists ! \, x \, p(x)$ souvent utilisée pour signifier

"***il existe une et une seule valeur*** *de x telle que $p(x)$ soit* ***vraie***"

Cette notation est un raccourci pour la formule

$$\underbrace{\left(\exists x \, p(x)\right)}_{\textit{existence}} \wedge \underbrace{\left(\forall y \forall z \left(p(y) \wedge p(z)\right) \Rightarrow (y = z)\right)}_{\textit{unicité}}$$

Cette formule est la **conjonction** de deux affirmations **indépendantes** :

- une **affirmation d'existence**
- une **affirmation d'unicité**

Existence et unicité : illustration

Mettons-nous dans l'univers des animaux du pré suivant :

Soit

le prédicat $v(x)$: "x est une vache"

Alors l'affirmation

$$\left(\exists x\, v(x)\right) \wedge \underbrace{\left(\forall y \forall z \left(v(y) \wedge v(z)\right) \Rightarrow (y = z)\right)}_{\textbf{\textit{unicité}}}$$

est **vraie** car il n'y qu'une et une seule vache.

La partie unicité peut se comprendre de la manière suivante :

> "*si je me promène dans le pré et que deux fois je croise une vache alors c'est que j'ai croisé deux fois la même vache*"

Négation de l'unicité

Si on nie la formule de l'existence unique :

$$\Big(\exists x\, p(x)\Big) \wedge \Big(\forall y \forall z \big(p(y) \wedge p(z)\big) \Rightarrow (y = z)\Big)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\neg \bigg(\Big(\exists x\, p(x)\Big) \wedge \Big(\forall y \forall z \big(p(y) \wedge p(z)\big) \Rightarrow (y = z)\Big)\bigg) \\
&\equiv \neg \Big(\exists x\, p(x)\Big) \vee \neg \Big(\forall y \forall z \big(p(y) \wedge p(z)\big) \Rightarrow (y = z)\Big) \\
&\equiv \Big(\forall x\, (\neg p(x))\Big) \vee \Big(\exists y \exists z \big(p(y) \wedge p(z) \wedge (y \neq z)\big)\Big)
\end{aligned}$$

On voit que pour nier l'existence unique, on doit

- nier **l'existence** $\rightarrow$ il n'y a aucune valeur de x telle que $p(x)$ soit **vraie**
- nier **l'unicité** $\rightarrow$ il y a au moins 2 valeurs de x telles que $p(x)$ soit **vraie**.