Mathématiques 1
Théorie des ensembles

Institut Paul Lambin

18 octobre 2021

Ensembles

Définitions

Un **ensemble** A est une collection (non structurée) d'objets, à priori quelconques.

Attention :

Dans un ensemble :

- **Pas d'ordre**
- **Pas de répétition** $\rightarrow$ pas deux fois le même élément

Ensembles

Appartenance

- Pour dire que x est "un **élément** de l'ensemble A",
  - on dira que x "**appartient** à l'ensemble A"
  - on le notera $x \in A$.
- Le **nombre d'éléments** d'un ensemble A
  - s'appelle le **cardinal** de A
  - se note $|A|$ ou $\#A$
- Deux ensembles sont **égaux** s'ils ont les **mêmes éléments**.

Ensembles

Représentation d'un ensemble : Diagramme de Venn

La représentation la plus courante des ensembles est le **diagramme de Venn** :

Dans celui-ci :

- Les **ensembles** sont représentés par des **contours fermés** (généralement des cercles ou des ovales)

- L'**appartenance d'un objet** à un ensemble est représenté par un **point** représentant l'objet **à l'intérieur du contour fermé** représentant l'ensemble

Ensembles

Représentation d'un ensemble : Diagramme de Venn

Exemple :

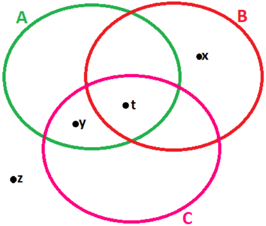


Figure – Diagramme de Venn avec 3 ensembles

Dans cet exemple :

- x est un élément de $\boldsymbol{B}$
- y appartient à l'ensemble $\boldsymbol{A}$ et à l'ensemble $\boldsymbol{C}$
- z n'appartient à aucun des trois ensembles
- t appartient aux 3 ensembles $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$

Description d'un ensemble

Un ensemble **peut se décrire**

- en **extension** : en listant tous les éléments
- en **compréhension** : en énonçant un critère d'appartenance.

Exemple :

1. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
2. $A = \{\text{l'ensemble des multiples de 3 entre 1 et 20}\}$
3. $A = \left\{3p \;\middle|\; (p \in \mathbb{N}_0) \wedge (p \leq 6)\right\}$
4. $B = \left\{5p,\ 5p+1,\ 5p+2 \;\middle|\; p \in \mathbb{N}_0\right\}$

Remarques :

- Les descriptions 1 à 3 décrivent le même ensemble.
- La description 1 est une description en extension.
- Les descriptions 2 et 3 sont des descriptions en compréhension.
- L'ensemble A contient 6 éléments $\rightarrow |A| = 6$.
- La descriptions 4 est une notation "mixte" : critère d'appartenance avec liste
- $|B|$ est infini car B contient une infinité d'éléments.

Description d’un ensemble

Attention !

Tout critère d’appartenance ne définit pas nécessairement un ensemble !

Sinon Paradoxe !

Le plus célèbre est le **paradoxe de Russel** :
Soit

$$C = \{\text{La collection des ensembles ne s'appartenant pas}\}.$$

Si C est un ensemble, s’appartient-il ? c.-à-d. C est-il un élément de lui-même ?

- $\rightarrow$ S’il ne s’appartient pas alors par le critère il doit s’appartenir !
- $\rightarrow$ S’il s’appartient alors par le critère il ne s’appartient pas !
- $\rightarrow$ PARADOXE
- $\rightarrow$ La collection C n’est pas un ensemble !

Ce paradoxe sera résolu grâce à la théorie axiomatique de Zermelo-Frankel

L'ensemble vide

1) Définition :

L'**ensemble vide** est l'**unique** ensemble qui **ne contient aucun élément**.

2) Propriétés :

1) L'ensemble vide est souvent noté $\varnothing$
2) En extension l'ensemble vide s'écrit $\Big\{ \ \Big\}$
3) Le prédicat $x \in \varnothing$ est toujours **faux**
   $\rightarrow$ l'ensemble vide ne contient jamais d'élément
4) Quelque soit le prédicat $p(x)$, la formule $\forall x \in \varnothing \ : \ p(x)$ est **vraie** !
   - $\rightarrow$ elle serait fausse s'il existait un x tel que $(x \in \varnothing) \wedge \neg p(x)$ est vraie.
   - $\rightarrow$ Par la propriété 3), la première proposition de cette conjonction est fausse.
   - $\rightarrow$ la conjonction est fausse
   - $\rightarrow$ la formule de départ est vraie !

Appartenance : remarques

1. Un ensemble **ne s'appartient pas** :
   $\rightarrow$ quelque soit l'ensemble A, l'affirmation $A \in A$ est **fausse**.
2. Par 1, quelque soit l'ensemble A, l'affirmation $A = \{A\}$ est **fausse**.
   Et ce, même si $A = \varnothing$.
3. L'ensemble $A = \{\varnothing\}$ n'est pas vide !
   $\rightarrow$ c'est un ensemble qui n'a qu'un seul élément qui est l'ensemble vide.
   Si on considère un ensemble comme un sac pouvant contenir des objets
   - $\rightarrow$ l'ensemble vide est un sac vide (qui ne contient rien).
   - $\rightarrow$ l'ensemble A est un sac qui ne contient qu'un seul objet qui est un sac qui est vide.
4. Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément est appelé un **singleton**.
   $\rightarrow$ Son cardinal vaut 1.

L'inclusion

Définition

- Un ensemble A est **inclus dans** l'ensemble B si

  tous les éléments de A sont aussi des éléments de B.

- On notera cela $\boxed{A \subseteq B}$.
- Mathématiquement on a donc

$$\boxed{A \subseteq B \Leftrightarrow \Big(\forall x\Big((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\Big)\Big)}$$

- Dans ce cas, on dira aussi que
  - A est un **sous-ensemble de** B
  - A est une **partie de** B

<u>Remarque :</u>

$\neg(A \subseteq B)$ est équivalent à la formule $\exists x\Big((x \in A) \wedge (x \notin B)\Big)$

$\longrightarrow$ l'ensemble A n'est pas inclus dans l'ensemble B si je peux trouver un élément de A qui n'appartient pas à B.

L'inclusion : Propriétés

1. **L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble** : $\forall\, A : \varnothing \subseteq A$.
   - $\rightarrow$ l'ensemble vide ne contient pas d'élément
   - $\rightarrow$ on ne peut pas trouver d'élément de l'ensemble vide qui ne soit pas dans A.
   - $\rightarrow$ on ne peut pas nier la proposition $\forall\, A : \varnothing \subseteq A$ $\rightarrow$ elle est vraie.
2. **Tout ensemble est inclus dans lui-même** : $\forall\, A : A \subseteq A$.
   - $\rightarrow$ l'ensemble A contient tous les éléments de l'ensemble A
   - $\rightarrow$ A est inclus dans A.
3. **Des ensembles égaux sont inclus l'un dans l'autre** :

$$\forall A \forall B \Big((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Big) \Leftrightarrow (A = B).$$

   - $\rightarrow$ tous les éléments de A sont dans B
   - $\rightarrow$ tous les éléments de B sont dans A
   - $\rightarrow$ A et B ont les mêmes éléments. $\rightarrow$ ils sont égaux.
4. **L'inclusion est transitive** : $\forall A \forall B \forall C \Big((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Big) \Rightarrow (A \subseteq C)$
   - $\rightarrow$ tous les éléments de A sont dans B
   - $\rightarrow$ tous les éléments de B sont dans C
   - $\rightarrow$ tous les éléments de A sont dans C

L'inclusion : Remarques

Attention à ne pas confondre **appartenance** et **inclusion** :

- L'inclusion est une relation entre 2 ensembles
- L'appartenance est une relation entre un élément et un ensemble. (L'élément pouvant être ou pas un ensemble)

Exemple :

Soient

- $a = 2$
- $A = \{2\}$
- $B = \{3\}$
- $C = \left\{1, \{2\}, 3\right\}$

Alors

- $\varnothing \subseteq A$ car un l'ensemble vide est inclus dans n'importe quel ensemble
- $\varnothing \notin A$ car $\varnothing$ n'est pas un élément de A
- $a \in A$ car 2 est un élément de A
- $A \in C$ car $A = \{2\}$ et $\{2\}$ est un élément de C.
- $A \nsubseteq C$ car 2 est un élément de A mais n'est pas un élément de C
- $B \notin C$ car $\{3\}$ n'est pas un élément de C.
- $B \subseteq C$ car 3 est un élément de B et c'est aussi un élément de C

L'inclusion : Remarques

Voici un diagramme de Venn représentant a, A, B et C :

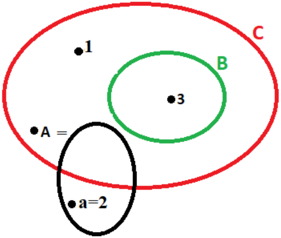


Figure – Diagramme de Venn de l'exemple du slide précédent

Remarque :

On a $a \in A$ et $A \in C$ mais $a \notin C$ car 2 n'est pas un élément de C.
$\rightarrow$ **l'appartenance n'est pas transitive** !

Power Set : Définition

Soit un ensemble A.

L'**ensemble de tous les sous-ensembles** de A

- se note $\mathcal{P}(A)$
- s'appelle "**power set**" de A, ou encore **ensemble des parties** de A

Power Set : Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3\}$.

- Le cardinal de A vaut 3 : $|A| = 3$
- Pour trouver tous les sous-ensembles de A, on va
  - Prendre tous les ensembles qui n'ont pas d'élément (cardinal=0) : $\varnothing$
  - Prendre tous les ensembles qui n'ont qu'un seul élément (cardinal=1) :
    $$\{1\}, \{2\}, \{3\}$$
  - Prendre tous les ensembles qui n'ont que 2 éléments (cardinal=2) :
    $$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$$
  - Prendre tous les ensembles qui n'ont que 3 éléments (cardinal=3) :
    $$\{1, 2, 3\} = A$$

$|A| = 3 \rightarrow$ aucun de ses sous-ensembles n'aura plus de 3 éléments.

Le power set de A est donc

$$\mathcal{P}(A) = \left\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\right\}$$

Power Set : Cardinal

On peut montrer que cardinal du power set d'un ensemble A est

$$\boxed{|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}}.$$

Vérifions pour des ensembles dont le cardinal est respectivement 0, 1, 2 et 3 :

1. Si $A = \varnothing$ alors $|A| = 0$.
   $\rightarrow$ $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$ donc $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0 = 2^{|A|}$
2. Si $A = \{5\}$ alors $|A| = 1$
   $\rightarrow$ $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, A\}$ donc $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1 = 2^{|A|}$
3. Si $A = \{5, 7\}$ alors $|A| = 2$
   $\rightarrow$ $\mathcal{P}(A) = \Big\{\varnothing, \{5\}, \{7\}, A\Big\}$ donc $|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2 = 2^{|A|}$
4. Si $A = \{1, 2, 3\}$ alors $|A| = 3$
   $\rightarrow$ $\mathcal{P}(A) = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\Big\}$
   $\rightarrow$ $|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3 = 2^{|A|}$

Conclusion :

Dans un ensemble à k éléments, il y a 2^k sous-ensembles !

Power Set : Remarques

- On a que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} > |A|$.
  $\rightarrow$ un ensemble ne contient jamais son power set !
- Conséquence :
  Considérons C la collection de tous les ensembles.
  Si C est un ensemble alors
  - $\rightarrow$ son power set $\mathcal{P}(C)$ est un ensemble
  - $\rightarrow$ C doit contenir son power set puisque celui-ci est un ensemble et que C est la collection de tous les ensembles.
  - $\rightarrow$ C n'est pas un ensemble car un ensemble ne peut pas contenir son power set.

Conclusion :
L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas !
On vient de trouver un autre critère d'appartenance qui ne définit pas un ensemble !

Intersection de deux ensembles

L'**intersection** de deux ensembles A et B

- est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ET** à B
- est notée $A \cap B$
- est définie mathématiquement par $A \cap B = \left\{ x \;\middle|\; (x \in A) \wedge (x \in B) \right\}$

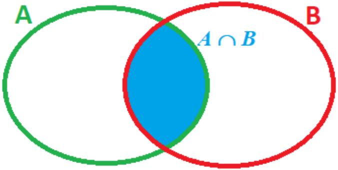


Figure – Diagramme de Venn de $A \cap B$

Union de deux ensembles

L'**union** de deux ensembles A et B

- est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **OU** à B (ou aux 2)
- est notée $A \cup B$
- est définie mathématiquement par $A \cup B = \left\{ x \;\middle|\; (x \in A) \vee (x \in B) \right\}$

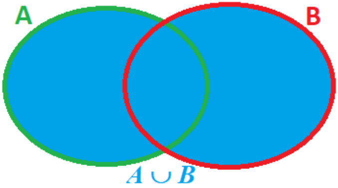


Figure – Diagramme de Venn de $A \cup B$

Différence

Soit deux ensembles A et B,
La **différence** de A et B

- est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **MAIS PAS** à B
- est notée $A - B$ mais aussi $A \backslash B$
- est définie mathématiquement par $A - B = \left\{ x \;\middle|\; (x \in A) \wedge (x \notin B) \right\}$

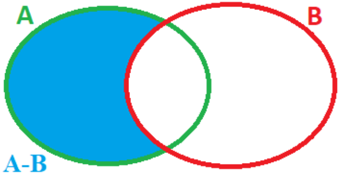


Figure – Diagramme de Venn de $A - B$

Différence symétrique

Soit deux ensembles A et B,

La **différence symétrique** de A et B

- est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **OU** à B **MAIS PAS** aux 2.
- est notée $A \oplus B$
- est définie mathématiquement par $A - B = \left\{ x \;\middle|\; (x \in A) \oplus (x \in B) \right\}$

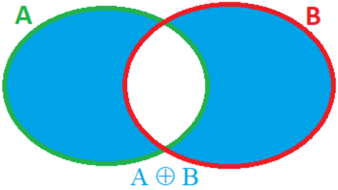


Figure – Diagramme de Venn de $A \oplus B$

Différence symétrique : Remarque

La définition mathématique de la différence symétrique peut se réécrire

$$A \oplus B = \left\{ x \,\middle|\, \Big((x \in A) \wedge (x \notin B) \Big) \vee \Big((x \notin A) \wedge (x \in B) \Big) \right\}.$$

Donc $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

<u>Propriété :</u>

La différence symétrique est **associative** :

$$\begin{aligned} A \oplus B \oplus C &= (A \oplus B) \oplus C \\ &= A \oplus (B \oplus C) \end{aligned}$$

Donc $A \oplus B \oplus C$ est l'ensemble des objets qui

- soit appartiennent à un et un seul des trois ensembles
- soit appartiennent aux trois à la fois.

Différence symétrique : Remarque

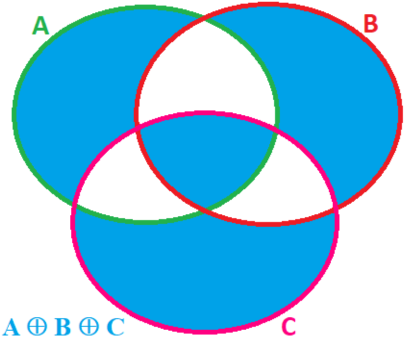


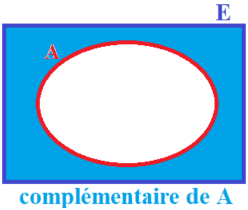
Figure – Diagramme de Venn de $A \oplus B \oplus C$

Complémentaire d'un ensemble

Supposons que nous travaillons dans un univers de référence E

Le **complémentaire** de A dans E

- est l'ensemble des éléments de E qui **n'appartiennent pas** à A
- est notée $\overline{A}$
- est définie mathématiquement par $\overline{A} = \left\{ x \,\middle|\, (x \in E) \wedge (x \notin A) \right\}$



Propriétés :

- $\overline{A} = E - A$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $A \oplus B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$

Propriétés booléennes

Sur le power set de l'univers E, on a les propriétés suivantes

Complémentarité	$\overline{\overline{A}} = A$ $\overline{\varnothing} = E \qquad \overline{E} = \varnothing$ $A \cap \overline{A} = \varnothing \qquad A \cup \overline{A} = E$
De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Distributivité	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotence	$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

Propriétés similaires à celles des connecteurs dans la logique des propositions.