Einführung in das Kalkül diskreter Differentialformen

Ingo Nitschke

IWR - TU Dresden

28. November 2013

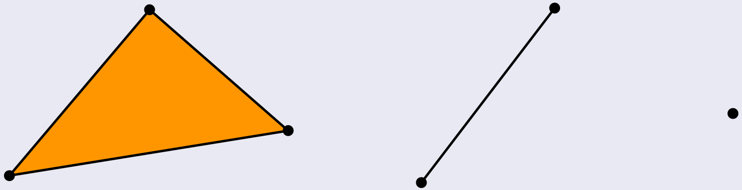
Content

Ein p-**Simplex** ist die konvexe Hülle von $p+1$ geometrisch unabhängigen Punkten (**Knoten**, **Vertices**)

$$\sigma^p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \middle| x = \sum_{i=0}^{p} \mu^i v_i \text{ wobei } \mu^i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{p} \mu^i = 1 \right\}$$

Geometrisch unabhängig heißt, dass die p Vektoren $v_1 - v_0, \ldots, v_p - v_0$ linear unabhängig sind.

Beispiel für σ^2, σ^1 und σ^0



Ein Simplizialkomplex K **der Dimension** n **ist eine Menge von Simplizes** $\left\{\sigma^p \in \mathbb{R}^N \middle| 0 \leq p \leq n \leq N\right\}$**, so dass**

(i) $\forall \sigma^r \prec \sigma^p : \quad \sigma^r \in K \qquad (0 \leq r \leq p)$

(ii) für alle $\sigma^r := \sigma^p \cap \sigma^q$ gilt $\qquad (0 \leq r \leq \min\{p, q\})$

 (a) entweder $\sigma^r \prec \sigma^p$ und $\sigma^r \prec \sigma^q$

 (b) oder $\sigma^r = \emptyset$

D.h. z.B. hängende Knoten sind nicht zulässig.

Das Polytop von K **ist (der zu Grunde liegende Raum)**

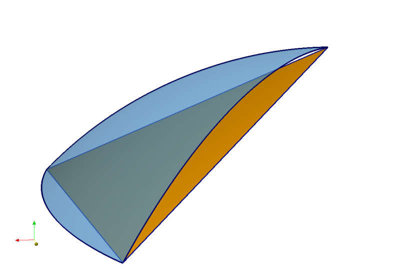
$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

(Andersherum heißt K eine **Triangulation** von $|K|$)
Achtung: $|K|$ liegt nur für **flache (lineare)** K in einem affinen n-dim. Untervektoraum des $\mathbb{R}^N$.

Diskretisierung einer Mannigfaltigkeit M

- Wir wollen nicht die Kartengebiete auf der Mannigfaltigkeit diskretisieren.
- Die n-Mannigfaltigkeit wird in den $\mathbb{R}^N$ eingebettet.
- Wir setzen dann nur voraus, dass $\sigma_M^0 = \sigma_K^0$

Beispiel



Orientierter mannigfaltigartiger Simplizialkomplex K (Primärgitter)

orientiert: $\operatorname{sgn}(\sigma_1^n, \sigma_2^n) = +1$ für $\sigma_1^n \cap \sigma_2^n \neq \emptyset$

mannigfaltigartig: $|K|$ ist eine C^0-Mannigfaltigkeit