

Ilka Agricola | Thomas Friedrich

Vektoranalysis

Analysis Band 1 und 2

von Ehrhard Behrends

Einführung in die Komplexe Analysis

von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb

Analysis 1 bis 3

von Otto Forster

Übungsbuch Analysis 1 und 2

von Otto Forster

Gewöhnliche Differentialgleichungen

von Lars Grüne und Oliver Junge

Lehrbuch der Analysis Teil 1 und 2

von Harro Heuser

Variationsrechnung

von Hansjörg Kielhöfer

Differentialgeometrie

von Wolfgang Kühnel

Ilka Agricola | Thomas Friedrich

Vektoranalysis

Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. habil. Ilka Agricola

Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Hans-Meerwein-Str. / Campus Lahnberge
35032 Marburg

agricola@mathematik.uni-marburg.de

Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6
10099 Berlin

friedric@mathematik.hu-berlin.de

Die erste Auflage des Buches erschien unter dem Titel „Globale Analysis“.

1. Auflage 2001
- 2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2010

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1016-8

Vorwort zur zweiten Auflage

Zu unserer Freude hat sich nun, einige Jahre nach dem ersten Erscheinen dieses Buches, eine Gelegenheit zu einer zweiten, überarbeiteten und erweiterten Auflage ergeben. Bei dieser Gelegenheit haben wir eine Reihe kleinerer Korrekturen vorgenommen, fast alle Bilder neu erstellt, sowie den – wie wir meinen – passenderen neuen Titel „Vektoranalysis“ ausgewählt. Inhaltliche Ergänzungen wurden u. a. in der Differentialgeometrie (Kapitel 5) sowie der Elektrodynamik (Kapitel 9) vorgenommen; wir denken, dass diese Passagen dadurch interessanter und vollständiger geworden sind.

Wir danken den zahlreichen Lesern der ersten Auflage, die auf Ungenauigkeiten und mögliche Verbesserungen hingewiesen haben. Natürlich freuen wir uns auch in Zukunft über Hinweise und Anregungen, die wir auf der neuen Internetseite des Buches sammeln werden:

<http://www.mathematik.uni-marburg.de/~agricola/vektoranalysis.html>

Zudem danken wir Heike Pahlisch und Monika Teubner für ihr gewissenhaftes Korrekturlesen des gesamten Manuskripts.

Marburg und Berlin, im Januar 2010

Ilka Agricola
Thomas Friedrich

Vorwort zur ersten Auflage

Das vorliegende Buch beabsichtigt, den Leser in die Welt der Differentialformen einzuführen und zugleich diejenigen Themen der Analysis, Differentialgeometrie und der Mathematischen Physik zu behandeln, in denen Formen besonders wichtig sind. Es entstand nach zahlreichen Vorlesungen, welche der zweite Autor seit Beginn der 80er Jahre an der Humboldt-Universität zu Berlin über Analysis für Studenten des zweiten und dritten Semesters sowie über Differentialgeometrie für das zweite und dritte Studienjahr gehalten hat. In den Jahren von 1998 bis 2000 unterrichteten beide Autoren gemeinsam die zwei Grundkurse mit jeweils vier Stunden Vorlesung und zwei Stunden Übung. Studenten der Mathematik und Physik waren unsere Hörer und gaben den Anlass, die mit Differentialformen zusammenhängenden Anfangsgründe der Mathematik und Physik geschlossen darzustellen. Besonderen Wert wurde in den Lehrveranstaltungen auf die Übungsaufgaben gelegt, von denen der Leser eine Auswahl am Ende jedes Kapitels findet. Das Buch kann sowohl begleitend zu einer Vorlesung als auch zur Gestaltung von Seminaren herangezogen werden.

Wir setzen beim Leser nur die Kenntnisse voraus, die er in einem Jahr des Studiums der Mathematik oder anderer Naturwissenschaften erwirbt. Dabei handelt es sich zunächst um die lineare Algebra. Im ersten Kapitel des Buches legen wir nochmals die im Kontext der Differentialformen benötigten Aspekte der multilinearen Algebra dar. Die größeren Vorkenntnisse beziehen sich auf die analytische Bildung des Lesers. Die Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n , die Integralrechnung (Riemannsches Integral), die Transformationsformel des Integrals sowie die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind der Stoff, der im Verlauf eines Studienjahres erworben wird. Einen solchermaßen vorbereiteten Leser haben wir im Auge, den wir nunmehr in die Vektoranalysis, die Pfaffschen Systeme, die Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im euklidischen Raum, in die Lie-Gruppen und homogenen Räume, die symplektische Geometrie und Mechanik, die statistische Mechanik und Thermodynamik und letztlich in die Elektrodynamik begleiten wollen.

Im zweiten Kapitel entwickeln wir die Differential- und Integralrechnung für Differentialformen, die auf offenen Mengen des euklidischen Raumes definiert sind.

Das zentrale Resultat ist die Stokessche Formel, die das Integral des äußeren Differentials einer Differentialform über eine singuläre Kette in ein Integral der Form selbst über den Rand der Kette verwandelt. Im Kern ist dies der weitgehend verallgemeinerte sog. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Differentiation und Integration sind zueinander inverse Operationen. Geschichtlich war es ein langer Entwicklungsprozess, an dessen Ende die Einsicht stand, dass eine Reihe wichtiger Integralformeln der Vektoranalysis einen gemeinsamen Hintergrund haben: Sie können durch Spezialisierung der allgemeinen Stokesschen Formeln gewonnen werden. Wir zeigen dies im Rahmen des zweiten Kapitels anhand der zweidimensionalen Greenschen Formel, des klassischen Satzes von Stokes sowie der Cauchyschen Integralformeln für komplex-differenzierbare Funktionen. Des Weiteren beweisen wir unter Verwendung der Stokesschen Formeln und des Weierstraßschen Approximationssatzes den Fixpunktsatz von Brouwer.

Im dritten Kapitel schränken wir die möglichen Integrationsbereiche dahingehend ein, dass wir nur „glatte“ Ketten betrachten. Auf diesen kann eine Differentialrechnung für Funktionen und Formen entwickelt werden, man nennt sie Mannigfaltigkeiten. Obgleich wir nur Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums betrachten, sind die Darlegungen dieses Abschnitts so angelegt, dass sie für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit zutreffen. Wir besprechen die Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit, deren Volumenform, die Divergenz von Vektorfeldern sowie den Gradienten und den Laplace-Operator von Funktionen. Aus der Stokesschen Formel ergeben sich die weiteren klassischen Integralformeln im Kontext der Riemannschen Geometrie (Gauß-Ostrogradski-Formel, erste und zweite Greensche Formel) sowie ein Beweis des Satzes vom Igel. Ein Abschnitt über die Lie-Ableitung einer Differentialform führt uns auf die Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes als Maß für die Volumenverzerrung seines Flusses. Die Integralformeln benutzen wir zur Lösung des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf der Vollkugel des euklidischen Raums und beim Studium der Eigenschaften harmonischer Funktionen in \mathbb{R}^n . Für diese beweisen wir u. a. das Maximumprinzip und den Satz von Liouville. Abschließend diskutieren wir den auf Formen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wirkenden Laplace-Operator sowie die Hodge-Zerlegung einer Differentialform. Sie ist eine Verallgemeinerung einer auf Helmholtz zurückgehenden Aufspaltung eines Vektorfeldes mit kompaktem Träger in \mathbb{R}^3 in die Summe eines Gradientenvektorfeldes und eines divergenzfreien Vektorfeldes. Im letzten Kapitel werden wir den Helmholtz-Satz im Rahmen der Elektrodynamik beweisen.

Neben dem Satz von Stokes ist das Integrierbaritätskriterium von Frobenius eine der grundlegenden Aussagen der Theorie der Differentialformen. Eine geometrische Distribution (Pfaffsches System) besteht aus einer glatten Auswahl k -dimensionaler Unterräume in den Tangentialräumen einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Geometrische Distributionen können als Nullstellenmengen linear unabhängiger 1-Formen beschrieben werden. Gesucht sind k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten, deren Tangentialräume an jeder Stelle mit der geometrischen Distribution übereinstimmen. Der Satz von Frobenius löst diese Frage vollständig

und ist ein grundlegendes Werkzeug zur Integration gewisser Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Im vierten Kapitel führen wir einen rein analytischen Beweis des Frobenius-Satzes und verwenden diesen später in den Abschnitten über Flächentheorie, in der symplektischen Geometrie sowie beim Studium vollständig integrabler Systeme.

Das fünfte Kapitel ist der Differentialgeometrie von Kurven und Flächen im euklidischen Raum gewidmet. Wir besprechen die Krümmung und die Windung einer Kurve, die Frenet-Formeln und beweisen den Fundamentalsatz der Kurventheorie. Danach wenden wir uns einigen speziellen Kurventypen zu und beenden diesen einleitenden Abschnitt mit einem Beweis der Fenchel-Ungleichung. Sie besagt, dass die totale Krümmung einer geschlossenen Raumkurve mindestens 2π beträgt. Die Flächentheorie behandeln wir im Sinne von Cartan unter Verwendung eines begleitenden Repers. Zunächst diskutieren wir die Strukturgleichungen einer Fläche und beweisen unter Anwendung des Frobenius-Satzes den Fundamentalsatz der Flächentheorie. Diesen formulieren wir bezogen auf ein an die Fläche angepasstes Reper und den sich daraus ergebenden 1-Formen. Wir gehen anschließend zur tensoriellen Beschreibung der Flächentheorie über. Die erste und die zweite Grundform einer Fläche sowie die in den Gauss- und Codazzi-Mainardi-Gleichungen zum Ausdruck kommenden Beziehungen zwischen den beiden Grundformen sind dabei die wichtigsten Aussagen. Den bereits bewiesenen Fundamentalsatz formulieren wir ein zweites Mal in dieser tensoriellen Beschreibung der Flächentheorie. Zahlreiche Beispiele (Rotationsflächen, Graphen, Betragsflächen analytischer Funktionen, deren Real- und Imaginärteileflächen) illustrieren die differentialgeometrische Behandlung von Flächen im euklidischen Raum. Das Studium der Normalenabbildung einer Fläche führt auf die Gaußsche Krümmung, welche nach dem Theorema Egregium von Gauß eine Größe der inneren Geometrie ist. Unter Verwendung des Satzes von Stokes beweisen wir die Gauß-Bonnet-Formel und eine auf Steiner-Minkowski zurückgehende, analoge Integralformel für die mittlere Krümmung einer kompakten, orientierten Fläche. Eine wichtige Klasse von Flächen sind die Minimalflächen. Deren Normalenabbildung ist konform und diese Beobachtung führt auf die sog. Weierstraß-Formeln. Sie beschreiben die Minimalfläche lokal durch zwei holomorphe Funktionen. Es folgt das Studium der geodätischen Linien auf Flächen, die Integration des geodätischen Flusses unter Verwendung erster Integrale sowie die Untersuchung von Abbildungen zwischen Flächen. Am Ende des fünften Kapitels geben wir einen Ausblick auf die Geometrie pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten höherer Dimension und wenden uns insbesondere Einstein-Räumen sowie Räumen konstanter Krümmung zu.

Symmetrien spielen in Geometrie und Physik eine fundamentale Rolle. Im sechsten Kapitel führen wir in die Theorie der Lie-Gruppen und homogenen Räume ein. Wir besprechen die grundlegenden Eigenschaften einer Lie-Gruppe, ihrer Lie-Algebra sowie die Exponentialabbildung. Danach konzentrieren wir uns auf den Beweis der Tatsache, dass jede abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe selbst Lie-Gruppe ist und definieren im Faktorraum eine Mannigfaltigkeitsstruktur. Auf

diese Weise entstehen viele bekannte Mannigfaltigkeiten als homogene Räume. Mit Hinblick auf die folgenden Anwendungen in der Mechanik studieren wir die adjungierte Darstellung einer Lie-Gruppe näher.

Neben der Riemannschen ist die symplektische Geometrie eine wesentliche Säule der Differentialgeometrie und besonders mit Hinblick auf die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik relevant. Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten ergeben sich aus Kotangentialbündeln beliebiger Mannigfaltigkeiten oder aus den Orbits der koadjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe. Wir beweisen zunächst den Satz von Darboux, welcher besagt, dass alle symplektischen Mannigfaltigkeiten lokal äquivalent sind. Danach zeigen wir den Satz von Noether und interpretieren diesen als die Momentenabbildung Hamiltonscher Wirkungen von Lie-Gruppen auf symplektischen Mannigfaltigkeiten. Sorgfältig besprechen wir vollständig integrierbare Hamilton-Systeme. Unter Verwendung des Frobenius-Satzes beweisen wir einen Algorithmus zum Auffinden der Winkel- und Wirkungskoordinaten direkt aus den ersten Integralen der Hamilton-Funktion. Im Abschnitt 7.5 skizzieren wir die Formulierungen der Mechanik nach Newton, Lagrange und Hamilton. Insbesondere kehren wir nochmals zum Satz von Noether im Rahmen der Lagrange-Mechanik zurück, welcher u. a. bei der Integration des geodätischen Flusses pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten zur Anwendung kommt. In den Übungsaufgaben des siebten Kapitels findet der Leser eine Reihe der bekanntesten mechanischen Systeme wieder.

In der statistischen Mechanik werden Teilchen durch ihre Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Raum beschrieben. Ihr Gegenstand sind daher die Bewegungen statistischer Zustände in einem Hamilton-System. Wir führen die Energie und die Informationsentropie statistischer Gleichgewichtszustände ein. Danach charakterisieren wir die Gibbsschen Zustände als diejenigen maximaler Informationsentropie bei festgelegter Energie und beweisen analog, dass die mikrokanonische Verteilung das Maximum an Entropie unter allen Zuständen mit feststehendem Träger realisiert. Mittels der Gibbsschen Zustände ordnen wir einem von zusätzlichen Parametern abhängigen Hamilton-System ein thermodynamisches System im Gleichgewichtszustand zu, welches die Postulate der Thermodynamik erfüllt. Wir besprechen die Rolle des Drucks sowie die der freien Energie. Eine Reihe von Beispielen, etwa das ideale Gas, Festkörper und Kreisprozesse, beenden dieses achte Kapitel.

Das neunte Kapitel ist der Elektrodynamik gewidmet. Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, formuliert in der Gestalt der Feldstärkevektoren sowie unter Verwendung der dualen 1-Formen, behandeln wir zunächst das statische elektromagnetische Feld. Wir beweisen die entsprechende Lösungsformel für die inhomogene Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum und erhalten damit neben einer Beschreibung des elektrischen und des magnetischen Feldes im statischen Fall zugleich einen Beweis des bereits erwähnten Helmholtz-Satzes. Danach wenden wir uns elektromagnetischen Feldern im Vakuum zu. Hier beweisen wir die

Lösungsformeln für das Cauchy-Problem der Wellengleichung in den Dimensionen zwei und drei. Das Kapitel schließt mit einer relativistischen Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen im Minkowski-Raum und einer eingehenden Besprechung der Lorentz-Kraft.

Wir danken Frau Heike Pahlisch für ihre umfangreiche Arbeit und ihren Einsatz bei der Herstellung des Buchtextes sowie der Bilder. Ohne sie wäre eine so schnelle Publikation des vorliegenden Buches nicht denkbar gewesen. Den Hörern unserer Lehrveranstaltungen in den Jahren von 1998 bis 2000 danken wir für zahlreiche Hinweise, die zur Ergänzung und Verbesserung des Textes geführt haben. Insbesondere Herr Dipl.-Math. Uli Krähmer hat uns in vielen Kapiteln auf notwendige Korrekturen hingewiesen. Nicht zuletzt danken wir Frau M. A. Claudia Frank für die Gründlichkeit, mit der sie das gesamte Manuskript unter sprachlichem Gesichtspunkt durchgelesen und verbessert hat.

Berlin, im November 2000

Ilka Agricola
Thomas Friedrich

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur zweiten Auflage	v
Vorwort zur ersten Auflage	vii
Kapitel 1. Elemente der multilinear Algebra	1
Aufgaben	8
Kapitel 2. Differentialformen im \mathbb{R}^n	11
2.1. Vektorfelder und Differentialformen	11
2.2. Geschlossene und exakte Differentialformen	17
2.3. Gradient, Divergenz und Rotation	22
2.4. Singuläre Würfel und Ketten	25
2.5. Integration von Differentialformen und der Satz von Stokes	28
2.6. Die klassischen Formeln von Green und Stokes	33
2.7. Komplexwertige Differentialformen und holomorphe Funktionen	34
2.8. Der Fixpunktsatz von Brouwer	36
Aufgaben	40
Kapitel 3. Vektoranalysis auf Mannigfaltigkeiten	45
3.1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	45
3.2. Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten	51
3.3. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	62
3.4. Orientierbare Mannigfaltigkeiten	64
3.5. Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten	71
3.6. Der Satz von Stokes für Mannigfaltigkeiten	74
3.7. Der Satz vom Igel	76
3.8. Die klassischen Integralsätze	77
3.9. Die Lie-Ableitung und die geometrische Interpretation der Divergenz	82
3.10. Harmonische Funktionen	88
3.11. Der Laplace-Operator auf Differentialformen	93
Aufgaben	98
Kapitel 4. Pfaffsche Systeme	103
4.1. Geometrische Distributionen	103
4.2. Der Beweis des Satzes von Frobenius	107
4.3. Einige Anwendungen des Satzes von Frobenius	111
Aufgaben	117

Kapitel 5. Kurven und Flächen im dreidimensionalen Raum	119
5.1. Kurven im dreidimensionalen Raum	119
5.2. Die Strukturgleichungen einer Fläche	131
5.3. Die erste und die zweite Grundform einer Fläche	137
5.4. Gaußsche und mittlere Krümmung	145
5.5. Kurven auf Flächen und geodätische Linien	161
5.6. Abbildungen zwischen Flächen	169
5.7. Riemannsche Mannigfaltigkeiten höherer Dimension	173
Aufgaben	186
Kapitel 6. Lie-Gruppen und homogene Räume	195
6.1. Lie-Gruppen und Lie-Algebren	195
6.2. Abgeschlossene Untergruppen und homogene Räume	202
6.3. Die adjungierte Darstellung	208
Aufgaben	212
Kapitel 7. Symplektische Geometrie und Mechanik	215
7.1. Symplektische Mannigfaltigkeiten	215
7.2. Der Satz von Darboux	222
7.3. Erste Integrale und die Momentenabbildung	223
7.4. Vollständig integrierbare Hamilton-Systeme	225
7.5. Formulierungen der Mechanik	235
Aufgaben	246
Kapitel 8. Elemente der statistischen Mechanik und Thermodynamik	251
8.1. Statistische Zustände Hamiltonscher Systeme	251
8.2. Thermodynamische Systeme im Gleichgewicht	262
Aufgaben	270
Kapitel 9. Elemente der Elektrodynamik	273
9.1. Die Maxwellschen Gleichungen	273
9.2. Das statische elektromagnetische Feld	276
9.3. Elektromagnetische Wellen	282
9.4. Die relativistische Formulierung der Maxwellschen Gleichungen	288
9.5. Die Lorentz-Kraft	292
Aufgaben	296
Literaturverzeichnis	303
Symbolverzeichnis	307
Namens- und Sachverzeichnis	309

Kapitel 1

Elemente der multilinear Algebra

Wir betrachten einen n -dimensionalen Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} der reellen oder komplexen Zahlen. Der Dualraum V^* besteht bekanntlich aus allen linearen Abbildungen von V nach \mathbb{K} . Allgemeiner, eine multilinear und antisymmetrische Abbildung

$$\omega^k : V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{K},$$

welche von k Vektoren des Vektorraums V abhängt, heißt *äußere (Multilinear-)Form vom Grad k* . Die Antisymmetrie von ω^k bedeutet, dass für jedes k -Tupel v_1, \dots, v_k von Vektoren aus V und für jede Permutation $\sigma \in S_k$ der Zahlen $\{1, \dots, k\}$ die Gleichung

$$\omega^k(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega^k(v_1, \dots, v_k)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\text{sgn}(\sigma)$ das Vorzeichen der Permutation σ . Insbesondere wechselt ω^k unter einer Transposition der Indizes i und j das Vorzeichen:

$$\omega^k(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega^k(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

Den Vektorraum aller äußeren k -Formen bezeichnen wir mit $\bigwedge^k(V^*)$. Vereinbarungsgemäß gilt $\bigwedge^0(V^*) = \mathbb{K}$ und $\bigwedge^1(V^*) = V^*$.

Fixieren wir eine beliebige Basis e_1, \dots, e_n im n -dimensionalen Vektorraum, so ist jede äußere k -Form ω^k eindeutig durch ihre Werte auf allen k -Tupeln der Gestalt e_{i_1}, \dots, e_{i_k} mit einem geordneten k -Indextuplel $I = (i_1 < \dots < i_k)$ bestimmt. Andererseits kann man eine k -Form durch beliebig vorgegebene Werte auf den geordneten k -Tupeln von Basisvektoren definieren, indem man sie durch die Antisymmetrie und Multilinearität auf beliebige k -Tupel von Vektoren ausdehnt. Die Anzahl aller verschiedenen k -Tupel unter n Elementen beträgt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ und somit erhalten wir den

Satz 1. Ist $k > n$, so besteht $\bigwedge^k(V^*)$ nur aus der identisch verschwindenden Abbildung. Im Falle $k \leq n$ ist die Dimension des Vektorraums $\bigwedge^k(V^*)$ gegeben durch

$$\dim \bigwedge^k(V^*) = \binom{n}{k}.$$

Äußere Formen kann man multiplizieren und im Ergebnis erhält man wiederum eine äußere Form.

Definition 1. Seien $\omega^k \in \bigwedge^k(V^*)$ und $\eta^l \in \bigwedge^l(V^*)$ zwei äußere Formen vom Grade k und l . Dann ist das *äußere Produkt* $\omega^k \wedge \eta^l$ als eine $(k+l)$ -Form definiert durch die Formel

$$(\omega^k \wedge \eta^l)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega^k(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta^l(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Offensichtlich ist $\omega^k \wedge \eta^l$ eine auf $(k+l)$ Vektoren wirkende, multilineare und antisymmetrische Abbildung vom Grad $(k+l)$. Im nächsten Satz fassen wir die algebraischen Rechenregeln der äußeren Multiplikation von Formen zusammen.

Satz 2. Für äußere Formen vom entsprechenden Grad gilt:

- (1) $(\omega_1^k + \omega_2^k) \wedge \eta^l = \omega_1^k \wedge \eta^l + \omega_2^k \wedge \eta^l$;
- (2) $\omega^k \wedge (\eta_1^l + \eta_2^l) = \omega^k \wedge \eta_1^l + \omega^k \wedge \eta_2^l$;
- (3) $(a\omega^k) \wedge \eta^l = \omega^k \wedge (a\eta^l) = a(\omega^k \wedge \eta^l)$ mit $a \in \mathbb{K}$;
- (4) $(\omega^k \wedge \eta^l) \wedge \mu^m = \omega^k \wedge (\eta^l \wedge \mu^m)$;
- (5) $\omega^k \wedge \eta^l = (-1)^{kl} \eta^l \wedge \omega^k$.

Beweis. Einzig die letzten beiden Formeln bedürfen eines Beweises. Zunächst gilt

$$(\omega^k \wedge \eta^l) \wedge \mu^m(v_1, \dots, v_{k+l+m}) = \frac{1}{(k+l)!m!} \sum_{\sigma \in S_{k+l+m}} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega^k \wedge \eta^l)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+m)}).$$

Wir zerlegen die Permutationsgruppe S_{k+l+m} nach den Restklassen der Untergruppe $S_{k+l} \subset S_{k+l+m}$ bestehend aus allen Permutationen, welche auf die letzten m Indizes $\{k+l+1, \dots, k+l+m\}$ als Identität wirken. Jede Restklasse R besteht somit aus allen Permutationen $\sigma \in S_{k+l+m}$ mit fixierten Werten $\sigma(k+l+1), \dots, \sigma(k+l+m)$. Wählen wir irgendeine Permutation $\sigma_0 \in R$ aus, so können die weiteren Elemente $\sigma \in R$ durch die Gruppe S_{k+l} parametrisiert werden:

$$\sigma = \sigma_0 \circ \pi, \quad \pi \in S_{k+l}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in R} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega^k \wedge \eta^l)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+m)}) \\ &= \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma_0) \operatorname{sgn}(\pi) (\omega^k \wedge \eta^l)(v_{\sigma_0 \circ \pi(1)}, \dots, v_{\sigma_0 \circ \pi(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma_0(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma_0(k+l+m)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma_0) (k+l)! (\omega^k \wedge \eta^l)(v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma_0(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma_0(k+l+m)}). \end{aligned}$$

Benutzen wir nun die Definition des äußeren Produkts $\omega^k \wedge \eta^l$, so ergibt sich hieraus die Formel

$$\begin{aligned} & \frac{k!l!}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in R} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega^k \wedge \eta^l)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+m)}) = \\ & \sum_{\sigma \in R} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega^k(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta^l(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+m)}). \end{aligned}$$

Um nun die Summe über alle Elemente der Gruppe S_{k+l+m} zu bilden, summiert man über alle Restklassen R und bekommt, nach Vereinfachung des skalaren Vorfaktors, die Gleichung

$$(k! l! m!) (\omega^k \wedge \eta^l) \wedge \mu^m(v_1, \dots, v_{k+l+m}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_{k+l+m}} \text{sgn}(\sigma) \omega^k(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta^l(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \mu^m(v_{\sigma(k+l+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l+m)}),$$

welche die Assoziativität der äußeren Multiplikation von Formen beweist. Den Beweis der letzten Formel (5) führt man analog. \square

Definition 2. Die *äußere Algebra* $\Lambda(V^*)$ des Vektorraums V besteht aus der Summe aller äußeren Formen

$$\Lambda(V^*) = \sum_{k=0}^n \Lambda^k(V^*)$$

mit dem äußeren Produkt \wedge der Formen als Multiplikation in der Algebra $\Lambda(V^*)$.

Wir geben explizit eine Basis in den Vektorräumen $\Lambda^k(V^*)$ an. Zu diesem Ziel gehen wir von einer Basis e_1, \dots, e_n in V aus und bezeichnen mit $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die duale Basis im Dualraum $V^* = \Lambda^1(V^*)$. Ist $I = (i_1 < \dots < i_k)$ ein geordnetes k -Indextupel, so bezeichnen wir mit σ_I die durch

$$\sigma_I := \sigma_{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma_{i_k}$$

definierte k -Form. Offenbar gilt bei vorliegendem k -Indextupel $J = (j_1 < \dots < j_k)$ die Formel

$$\sigma_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } I \neq J \\ 1 & \text{falls } I = J \end{cases}.$$

Insbesondere ergibt sich daraus, dass die k -Formen vom Typ σ_I linear unabhängig in $\Lambda^k(V^*)$ sind. Aus Dimensionsgründen gilt dann der

Satz 3. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis im Vektorraum V , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die duale Basis im Dualraum V^* . Dann bilden die Formen $\sigma_I, I = (i_1 < \dots < i_k)$, eine Basis des Vektorraumes $\Lambda^k(V^*)$.

Äußere Formen lassen sich unter linearen Abbildungen zurückziehen. In der Tat, ist $L : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung aus dem Vektorraum W in den Vektorraum V und ist $\omega^k \in \Lambda(V^*)$ eine äußere k -Form in V , so wird durch die Formel

$$(L^* \omega^k)(w_1, \dots, w_k) := \omega^k(L(w_1), \dots, L(w_k))$$

eine äußere k -Form $(L^* \omega^k) \in \Lambda^k(W^*)$ im Vektorraum W definiert. Der Übergang von der Form ω^k zur *induzierten Form* $L^*(\omega^k)$ ist verträglich mit allen algebraischen Operationen. Insbesondere gilt die Formel

$$L^*(\omega^k \wedge \eta^l) = (L^* \omega^k) \wedge (L^* \eta^l).$$

Weiterhin lassen sich Vektoren in äußere Formen einsetzen, das Ergebnis ist eine äußere Form von um eins abgesenktem Grad. Sei $\omega^k \in \Lambda^k(V^*)$ eine k -Form in V

und $v_0 \in V$ ein Vektor. Wir definieren eine $(k-1)$ -Form $(v_0 \lrcorner \omega^k) \in \bigwedge^{k-1}(V^*)$ durch die Formel

$$(v_0 \lrcorner \omega^k)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega^k(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Die $(k-1)$ -Form $v_0 \lrcorner \omega^k$ heißt das *innere Produkt des Vektors v_0 mit der k -Form ω^k* und wird auch mit $i_{v_0}(\omega^k)$ bezeichnet. Als Resultat der Antisymmetrie der k -Form ω^k ergibt sich sofort die folgende Relation zwischen den $(k-2)$ -Formen

$$v_1 \lrcorner (v_0 \lrcorner \omega^k) = -v_0 \lrcorner (v_1 \lrcorner \omega^k).$$

Beginnend von dieser Stelle an sei V ein reeller Vektorraum mit einem *nichtausgearteten Skalarprodukt g* . Dies ist eine symmetrische Bilinearform

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass die durch

$$g^\#(v)(w) := g(v, w)$$

definierte lineare Abbildung $g^\# : V \rightarrow V^*$ von V in seinem Dualraum V^* bijektiv ist. Bei gegebener Basis e_1, \dots, e_n in V ist die Matrix

$$M(g) = (g(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$$

symmetrisch und invertierbar. Ihre Koeffizienten bezeichnen wir der Kürze halber mit $g_{ij} := g(e_i, e_j)$, die Koeffizienten der Inversmatrix $(M(g))^{-1}$ mit g^{ij} . Bekanntlich gilt der auf *Lagrange* und *Sylvester* zurückgehende

Satz 4. *Sei g ein nichtausgeartetes Skalarprodukt im reellen Vektorraum V . Dann existiert eine Basis e_1, \dots, e_n in V derart, dass die Matrix $M(g)$ die Diagonalgestalt*

$$M(g) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & 1 & & -1 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 \end{bmatrix}$$

hat. Die Anzahl p der $(+1)$ -Stellen sowie die Anzahl q der (-1) -Stellen in der Diagonalform hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Das Paar (p, q) heißt die *Signatur des Skalarproduktes g* , die Zahl q nennt man seinen *Index*. \square

Zunächst dehnen wir das Skalarprodukt g auf die Räume $\bigwedge^k(V^*)$ der k -Formen aus und wollen es dort mit dem gleichen Symbol bezeichnen. Dies geschieht unter Verwendung einer orthonormalen Basis mittels der Formel

$$g(\omega_1^k, \omega_2^k) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_k}} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \omega_1^k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \omega_2^k(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}).$$

Eine leichte Überlegung zeigt, dass damit ein von der Wahl der orthonormalen Basis unabhängiges, nichtausgeartetes Skalarprodukt in allen Räumen $\bigwedge^k(V^*)$

definiert wird. Die Signatur verändert sich allerdings. Ist zum Beispiel g ein Skalarprodukt der Signatur $(n-1, 1)$ in V , so hat das induzierte Skalarprodukt im Raum $\bigwedge^k(V^*)$ der äußeren k -Formen die Signatur $\binom{(n-1)}{k}, \binom{(n-1)}{k-1}$. Gehen wir von einer orthogonalen Basis e_1, \dots, e_n in V sowie der entsprechenden dualen Basis $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ in V^* aus, so ist die Basis $\sigma_I = \sigma_{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma_{i_k}$ ($i_1 < \dots < i_k$) gleichfalls eine orthogonale Basis in $\bigwedge^k(V^*)$ und die Länge der k -Form σ_I berechnet sich aus der Formel

$$g(\sigma_I, \sigma_I) = g^{i_1 i_1} \cdot \dots \cdot g^{i_k i_k}.$$

Insbesondere ist das Skalarprodukt auf dem eindimensionalen Raum $\bigwedge^n(V^*)$ positiv- bzw. negativ-definit, je nachdem, ob der Index q des Skalarproduktes gerade oder ungerade ist.

Außer einem Skalarprodukt g wollen wir weiterhin eine Orientierung im reellen Vektorraum V festlegen. Wir erinnern zunächst daran, was man unter einer solchen versteht. Zu diesem Ziel betrachten wir die Menge $\mathcal{B}(V)$ aller angeordneten Basen $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$ des Vektorraums V . Sind $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathfrak{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ zwei angeordnete Basen in V , so existiert eine $(n \times n)$ -Matrix $A(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ mit

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^*.$$

In der Menge $\mathcal{B}(V)$ können wir nun die Äquivalenzrelation \sim dadurch einführen, dass wir

$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}^*$ dann und nur dann, falls $\det(A(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)) > 0$,

fordern. Auf diese Weise entstehen genau zwei Äquivalenzklassen.

Definition 3. Eine *Orientierung* eines reellen Vektorraumes V ist eine der beiden Äquivalenzklassen in der Menge $\mathcal{B}(V)$ aller Basen von V .

In der Ebene \mathbb{R}^2 kann man eine Orientierung als den Durchlaufsinn verstehen und zeichnet dann mitunter diesen aus:

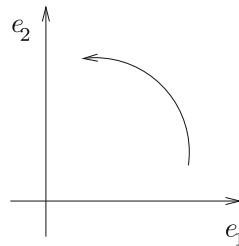


Bild 1

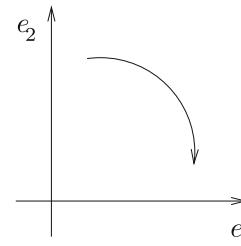


Bild 2

Bild 1 meint, dass in \mathbb{R}^2 die durch die Basis (e_1, e_2) gegebene Orientierung betrachtet wird, während Bild 2 die Ebene \mathbb{R}^2 mit der Orientierung (e_2, e_1) darstellt. Die Übergangsmatrix zwischen beiden Basen ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mit negativer Determinante $\det(A) = -1$. Daher repräsentieren die beiden Basen (e_1, e_2) und (e_2, e_1) die zwei möglichen Orientierungen von \mathbb{R}^2 .

Beispiel 1. Sei (V, g) ein reeller Vektorraum mit fixierter Orientierung. Wir wählen eine Basis e_1, \dots, e_n in V derart, dass die Matrix $M(g)$ die Diagonalgestalt aus Satz 4 hat und (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte Basis ist. Durch die Formel

$$dV(v_1, \dots, v_n) := (-1)^q \det \begin{bmatrix} g(v_1, e_1) & \dots & g(v_n, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(v_1, e_n) & \dots & g(v_n, e_n) \end{bmatrix}$$

wird eine n -Form $dV \in \bigwedge^n(V^*)$ definiert, welche unabhängig von der Wahl der speziellen Basis e_1, \dots, e_n mit den angegebenen Eigenschaften ist. Diese Form dV nennt man die *Volumenform* des orientierten Vektorraumes mit nichtausgeartetem Skalarprodukt. Unter Verwendung der dualen Basis $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ lässt die Volumenform sich darstellen als

$$dV = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n.$$

Hier bezeichnet q den Index des Skalarproduktes g . Die Länge der Volumenform beträgt nach Definition

$$g(dV, dV) = (-1)^q.$$

Die Volumenform des Koordinatenraumes \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt stimmt mit der Determinante überein:

$$d\mathbb{R}^n(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_n), \quad v_i \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere erweist die Determinante sich als eine n -Form definiert im Vektorraum \mathbb{R}^n .

Wir führen nun den **-Operator (Hodge-Operator)* ein, welcher jeder k -Form eine $(n-k)$ -Form zuordnet. Gegeben sei nach wie vor ein reeller Vektorraum V samt Skalarprodukt g und fixierter Orientierung. Ist $\omega^k \in \bigwedge^k(V^*)$ eine k -Form, so wird durch die Zuordnung

$$\bigwedge^{n-k}(V^*) \ni \eta^{n-k} \longmapsto \omega^k \wedge \eta^{n-k} \in \bigwedge^n(V^*)$$

eine lineare Abbildung von $\bigwedge^{n-k}(V^*)$ in den 1-dimensionalen Raum $\bigwedge^n(V^*)$ definiert. Die Volumenform dV ist ein Basisvektor in $\bigwedge^n(V^*)$ und der Vektorraum $\bigwedge^{n-k}(V^*)$ ist mit einem nichtausgearteten Skalarprodukt ausgestattet. Damit existiert genau eine $(n-k)$ -Form – welche wir mit $*\omega^k$ bezeichnen wollen – derart, dass

$$\omega^k \wedge \eta^{n-k} = g(*\omega^k, \eta^{n-k})dV$$

für alle $(n-k)$ -Formen η^{n-k} gilt. Insgesamt entsteht eine lineare Abbildung

$$*: \bigwedge^k(V^*) \longrightarrow \bigwedge^{n-k}(V^*),$$

der sogenannte Hodge-Operator.

Beispiel 2. Wie zuvor sei e_1, \dots, e_n eine orthonormale Basis ($g_{ij} = \pm \delta_{ij}$) des Vektorraumes V der vorgegebenen Orientierung und $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die duale Basis. Ist $I = (i_1 < \dots < i_k)$ ein geordnetes k -Indextupel, so bezeichnen wir mit $J = (j_1 < \dots < j_{n-k})$ dasjenige geordnete $(n-k)$ -Indextupel, welches die Zahlen $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ enthält. Aus

$$g(*\sigma_I, \sigma_J)dV = \sigma_I \wedge \sigma_J = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ I \quad J \end{pmatrix} \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ I \quad J \end{pmatrix} dV$$

und $g(\sigma_J, \sigma_J) = g_{j_1 j_1} \dots g_{j_{n-k} j_{n-k}}$ folgt sofort die Formel

$$*\sigma_I = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ I \quad J \end{pmatrix} g_{j_1 j_1} \dots g_{j_{n-k} j_{n-k}} \sigma_J.$$

Im folgenden Satz stellen wir die Eigenschaften des $*$ -Operators zusammen:

Satz 5.

- (1) Für jede k -Form ω^k gilt $* * \omega^k = (-1)^{k(n-k)+q} \omega^k$;
- (2) für zwei k -Formen ω^k, η^k gilt

$$g(*\omega^k, *\eta^k) = (-1)^q g(\omega^k, \eta^k), \quad \omega^k \wedge *\eta^k = (-1)^q g(\omega^k, \eta^k) dV.$$

Beweis. Zum Beweis der ersten Formel berechnen wir

$$\begin{aligned} * * \sigma_I &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ I \quad J \end{pmatrix} g_{j_1 j_1} \dots g_{j_{n-k} j_{n-k}} * \sigma_J \\ &= \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ I \quad J \end{pmatrix} g_{j_1 j_1} \dots g_{j_{n-k} j_{n-k}} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ J \quad I \end{pmatrix} \cdot g_{i_1 i_1} \dots g_{i_k i_k} \sigma_I \\ &= (-1)^q (-1)^{k(n-k)} \sigma_I. \end{aligned}$$

Die weiteren Formeln sind eine Konsequenz dieser ersten Formel und der Definition des $*$ -Operators. Wir haben

$$\begin{aligned} (*\omega^k, *\eta^k)dV &= \omega^k \wedge *\eta^k = (-1)^{k(n-k)} * \eta^k \wedge \omega^k \\ &= (-1)^{k(n-k)} g(* * \eta^k, \omega^k)dV = (-1)^q g(\eta^k, \omega^k)dV, \end{aligned}$$

und daraus ergeben sich die restlichen Identitäten. \square

Beispiel 3. Sei $n = 2k$ eine gerade Zahl. Dann bildet der Hodge-Operator den Raum $\bigwedge^k(V^*)$ in sich ab,

$$*: \bigwedge^k(V^*) \longrightarrow \bigwedge^k(V^*).$$

Weiterhin gilt

$$* * \omega^k = (-1)^{k+q} \omega^k,$$

und somit hat im Falle $k + q \equiv \text{mod } 2$ der Hodge-Operator die Eigenwerte ± 1 .

Aufgaben

1. Sei $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ eine Basis von V^* und $\omega^1 = \sum a_i \sigma_i$, $\eta^1 = \sum b_i \sigma_i$ zwei beliebige Elemente aus V^* sowie $\mu^2 = \sum c_{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j$ eine 2-Form.

- a) Man berechne $\omega^1 \wedge \eta^1$ und begründe im Fall $n = 3$, in welchem Sinne das äußere Produkt eine Verallgemeinerung des Vektorprodukts ist;
- b) man berechne $\omega^1 \wedge \mu^2$ und erläutere im Fall $n = 3$ den Zusammenhang mit dem Skalarprodukt.

2. Man zeige, dass jede 2-Form $\omega^2 \in \bigwedge^2(V^*)$ sich in der Gestalt

$$\omega^2 = \sigma_1 \wedge \sigma_2 + \dots + \sigma_{2r-1} \wedge \sigma_{2r}$$

für eine gewisse Basis $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ von V^* darstellen lässt. Weiterhin beweise man, dass die Zahl r von der Wahl der Basis unabhängig ist und durch die Bedingung

$$(\omega^2)^r \neq 0, \quad (\omega^2)^{r+1} = 0$$

charakterisiert wird.

3. Man beweise, dass k Linearformen $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ auf V^* genau dann linear unabhängig sind, falls

$$\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k \neq 0$$

gilt.

4 (Cartan-Lemma). Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ linear unabhängige Linearformen aus V^* und μ_1, \dots, μ_k beliebige Elemente von V^* . Gilt $\sigma_1 \wedge \mu_1 + \dots + \sigma_k \wedge \mu_k = 0$, dann sind die Formen μ_i Linearkombinationen der σ_j

$$\mu_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \sigma_j$$

und weiterhin ist $a_{ij} = a_{ji}$.

5. Sei e_1, \dots, e_n eine Basis des Vektorraums V und $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die hierzu duale Basis. Dann gilt für jede k -Form ω^k die Formel

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \wedge (e_i \lrcorner \omega^k) = k \cdot \omega^k.$$

6. Ist eine Form $0 \neq \omega^k \in \bigwedge^k(V^*)$ gegeben, so definieren wir den Teilraum $M(\omega^k) \subset V^*$ durch

$$M(\omega^k) = \{\eta^1 \in \bigwedge^1(V^*) : \eta^1 \wedge \omega^k = 0\}.$$

Beweisen Sie:

- a) Es gilt $\dim M(\omega^k) \leq k$;

- b) Die Gleichheit $\dim M(\omega^k) = k$ tritt genau dann ein, wenn k Linearformen $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ mit $\omega^k = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k$ existieren.

Formen der Gestalt $\omega^k = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k$ heißen *zerlegbar*.

7. Beweisen Sie:

- a) Eine 2-Form $\omega^2 = \sum_{i,j} \omega_{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j$ ist genau dann zerlegbar (vgl. die vorherige Aufgabe), wenn

$$\omega_{ij} \omega_{pq} - \omega_{ip} \omega_{jq} + \omega_{iq} \omega_{jp} = 0$$

gilt;

- b) Eine 3-Form $\omega^3 = \sum_{i,j,k} \omega_{ijk} \sigma_i \wedge \sigma_j \wedge \sigma_k$ ist genau dann zerlegbar, wenn

$$\omega_{ijk} \omega_{pqr} - \omega_{ijp} \omega_{kqr} + \omega_{ijq} \omega_{kpr} - \omega_{ijr} \omega_{kpq} = 0$$

gilt.

8. Der Hodge-Operator eines vierdimensionalen Vektorraums V bildet die 2-Formen in sich ab,

$$* : \Lambda^2(V^*) \longrightarrow \Lambda^2(V^*), \quad ** = (-1)^q.$$

Ist der Index $q = 0, 2$ des Skalarprodukts gerade, so zerlegt der Hodge-Operator den reellen Vektorraum $\Lambda^2(V^*)$ in seine Eigenräume

$$\Lambda_\pm^2(V^*) = \{\omega^2 \in \Lambda^2(V^*) : * \omega^2 = \pm \omega^2\}.$$

Im Fall eines ungeraden Index $q = 1, 3$ kann die Komplexifizierung $\Lambda^2(V^*) \otimes \mathbb{C}$ analog in die $\pm i$ -Eigenräume zerlegt werden. Man berechne in beiden Fällen die Dimension der Eigenräume und bestimme eine Basis aus Eigenformen.

9. Sei V^{2n} ein Vektorraum gerader Dimension $2n$, in dem zwei konform äquivalente Skalarprodukte $g_2 = a \cdot g_1$ gegeben sind ($a > 0$). Davon werden Hodge-Operatoren $*_1, *_2$ induziert. Beweisen Sie: auf Formen vom Grade n gilt $*_1 = *_2$.

Kapitel 2

Differentialformen im \mathbb{R}^n

2.1. Vektorfelder und Differentialformen

Vektoren im euklidischen Raum \mathbb{R}^n kann man als „freie Vektoren“ oder als an einen Punkt von \mathbb{R}^n „ortsgebundene Vektoren“ verstehen. Im ersten Fall fassen wir \mathbb{R}^n einfach als einen euklidischen Vektorraum auf. Der zweiten Betrachtungsweise liegt die Vorstellung des \mathbb{R}^n als einer Menge oder eines metrischen Raums zugrunde, dessen Elemente man die Punkte des Raums nennt. Die an einen Punkt gebundenen Ortsvektoren bilden einen Vektorraum, der sich allerdings von Punkt zu Punkt ändert. Zum Beispiel können Vektoren in verschiedenen Punkten nicht addiert werden. Dies führt auf den Begriff des Tangentialraums in einem Punkt des \mathbb{R}^n .

Definition 1. Sei $p \in \mathbb{R}^n$. Unter dem *Tangentialraum* an \mathbb{R}^n im Punkt p verstehen wir die Menge

$$T_p \mathbb{R}^n := \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

und führen auf ihr durch $(p, v) + (p, w) := (p, v + w)$ und $\lambda \cdot (p, v) := (p, \lambda \cdot v)$ eine Addition sowie eine Multiplikation mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ ein. Damit wird $T_p \mathbb{R}^n$ ein reeller n -dimensionaler Vektorraum.

Das gewöhnliche Differential Df_p an der Stelle p einer glatten Abbildung f aus dem Raum \mathbb{R}^n in den Raum \mathbb{R}^m kann nun als lineare Abbildung $f_{*,p}$ zwischen den entsprechenden Tangentialräumen verstanden werden.

Definition 2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Für jeden Punkt p aus der Menge U definieren wir eine lineare Abbildung $f_{*,p} : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$ durch die Formel

$$f_{*,p}(p, v) := (f(p), Df_p(v)).$$

Definition 3. Unter einem *Vektorfeld*, definiert auf einer offenen Teilmenge U von \mathbb{R}^n , verstehen wir eine Zuordnung, welche in jedem Punkt $p \in U$ einen Vektor $\mathcal{V}(p) \in T_p \mathbb{R}^n$ im entsprechenden Tangentialraum auszeichnet.

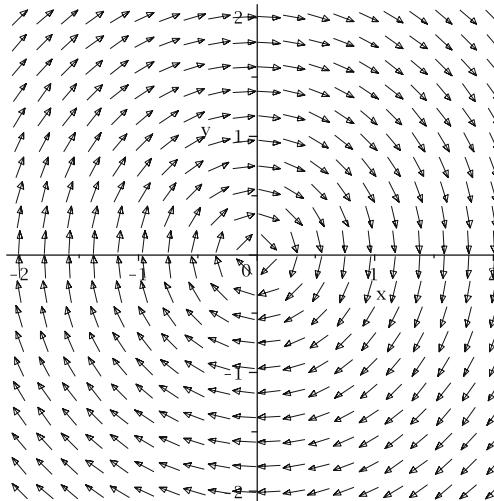
Ist e_1, \dots, e_n die Standardbasis des euklidischen Raums \mathbb{R}^n , so wird das durch die Zuordnung $p \mapsto (p, e_i)$ definierte Vektorfeld gewöhnlich mit $\partial/\partial x^i$ bezeichnet, d. h. $\partial/\partial x^i(p) := (p, e_i)$ (vgl. Aufgabe 5 für eine Begründung dieser Notation). Offensichtlich ist jedes weitere auf U definierte Vektorfeld in der Form

$$\mathcal{V}(p) = V^1(p) \frac{\partial}{\partial x^1}(p) + \dots + V^n(p) \frac{\partial}{\partial x^n}(p)$$

mit gewissen auf U definierten Funktionen $V^1(p), \dots, V^n(p)$ darstellbar. Das Vektorfeld \mathcal{V} heißt *differenzierbar der Klasse C^k* , falls alle seine Komponentenfunktionen $V^1(p), \dots, V^n(p)$ stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen. Die Menge aller Vektorfelder der Klasse C^k ist einerseits ein reeller Vektorraum und zugleich ein Modul über dem Ring $C^k(U)$ aller reellwertigen C^k -Funktionen auf U . Graphisch kann man sich ein Vektorfeld dadurch veranschaulichen, dass man in jedem Punkt p die entsprechende zweite Komponente v des Vektors aus dem Tangentialraum zeichnet. Betrachten wir zum Beispiel in der Ebene $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ mit den Koordinaten x, y das Vektorfeld

$$\mathcal{V}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y},$$

so erhält man die nachstehende graphische Darstellung:



Jeder der Tangentialräume $T_p \mathbb{R}^n$ ist ein reeller Vektorraum. Damit können wir sowohl seinen Dualraum $T_p^* \mathbb{R}^n := (T_p \mathbb{R}^n)^*$ als auch dessen äußere Potenzen

$$\Lambda_p^k(\mathbb{R}^n) := \Lambda^k(T_p^* \mathbb{R}^n)$$

betrachten. Ein Element ω^k des Raums $\Lambda_p^k(\mathbb{R}^n)$ ist demnach eine antisymmetrische Multilinearform in k Argumenten aus dem Tangentialraum $T_p \mathbb{R}^n$:

$$\omega^k : T_p \mathbb{R}^n \times \dots \times T_p \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

In Analogie zum Begriff des Vektorfeldes kommen wir nun zum wichtigen Begriff einer Differentialform.

Definition 4. Unter einer k -Form auf der offenen Teilmenge U des \mathbb{R}^n verstehen wir eine Vorschrift, welche jedem Punkt $p \in U$ ein Element $\omega^k(p) \in \Lambda_p^k(\mathbb{R}^n)$ zuordnet.

Zunächst betrachten wir einige Beispiele von Differentialformen.

Beispiel 1. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte, reellwertige Funktion, $p \in U$ ein fixierter Punkt und $Df_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Differential an der Stelle p . Dann wird durch die Formel

$$df(p)(p, v) := Df_p(v)$$

offensichtlich eine 1-Form df auf der Menge U definiert.

Beispiel 2. Bei fixierter Basis e_1, \dots, e_n im \mathbb{R}^n haben wir n Koordinatenfunktionen x^1, \dots, x^n und damit ihre Differentiale dx^1, \dots, dx^n . Für einen Tangentialvektor $(p, v) \in T_p \mathbb{R}^n$ gilt also

$$dx^i(p)(p, v) = v^i,$$

wobei v^i die i -te Komponente von v bezüglich der Basis e_1, \dots, e_n ist. Die 1-Formen $dx^1(p), \dots, dx^n(p)$ bilden eine Basis des Vektorraums $\Lambda_p^1(\mathbb{R}^n) = T_p^* \mathbb{R}^n$. Beliebige äußere Produkte $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ sowie ihre Linearkombinationen mittels Funktionen ergeben weitere Beispiele von k -Formen. Umgekehrt lässt sich jede k -Form ω^k auf U in der Gestalt

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

mit gewissen Funktionen ω_{i_1, \dots, i_k} darstellen.

Unter einer k -Differentialform der Klasse C^l verstehen wir nun eine solche Form ω^k , deren Koeffizientenfunktionen ω_{i_1, \dots, i_k} alle der Klasse C^l sind. Die Gesamtheit aller dieser Formen bezeichnen wir mit $\Omega_l^k(U)$. Offensichtlich ist diese Menge sowohl ein reeller Vektorraum als auch ein Modul über dem Ring $C^l(U)$. Die 0-te äußere Potenz eines Vektorraums ist der Skalarkörper. Daher wollen wir unter den 0-Formen der Klasse C^l die C^l -Funktionen selbst verstehen,

$$\Omega_l^0(U) := C^l(U).$$

Beispiel 3. Sei f eine reellwertige Funktion der Klasse C^l auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist df eine 1-Form der Klasse C^{l-1} und es gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

In der Tat haben wir an der Stelle $p \in U$ für den Vektor $(p, v) \in T_p \mathbb{R}^n$

$$df(p)(p, v) = Df_p(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v^i.$$

Ersetzt man nun die Vektorkomponenten v^i durch $dx^i(p)(p, v)$ und lässt das Argument (p, v) weg, so erhält man die behauptete Formel

$$df(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot dx^i(p).$$

Das äußere Produkt von Multilinearformen kann mühelos auf Differentialformen ausgedehnt werden, indem man für zwei Formen ω^k, η^l auf U eine $(k+l)$ -Form durch

$$(\omega^k \wedge \eta^l)(p) := \omega^k(p) \wedge \eta^l(p)$$

definiert. Es gelten dann die aus dem ersten Kapitel bekannten Rechenregeln:

- (1) $(\omega^k + \mu^k) \wedge \eta^l = \omega^k \wedge \eta^l + \mu^k \wedge \eta^l;$
- (2) $(f \cdot \omega^k) \wedge \eta^l = f \cdot \omega^k \wedge \eta^l;$
- (3) $\omega^k \wedge \eta^l = (-1)^{kl} \eta^l \wedge \omega^k.$

Insbesondere impliziert die letzte Eigenschaft, dass das äußere Produkt einer Form ungerader Ordnung mit sich selbst immer verschwindet, zum Beispiel ist $dx^i \wedge dx^i = 0$. Formen gerader Ordnung haben diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht: man rechne nach, dass auf dem \mathbb{R}^4

$$(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) = 2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

gilt. Sowohl konzeptionell als auch für das praktische Rechnen ist es nun von Bedeutung, dass man Differentialformen unter Abbildungen „zurückziehen“ kann.

Definition 5. Sei $f : U_1 \rightarrow U_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, sowie ω^k eine k -Form auf U_2 . Dann definieren wir eine k -Form $f^*(\omega^k)$ (die *zurückgezogene* oder *induzierte* Form) auf U_1 durch

$$f^*(\omega^k)((p, v_1), \dots, (p, v_k)) := \omega^k(f_{*,p}(p, v_1), \dots, f_{*,p}(p, v_k)).$$

Für das Rechnen mit $f^*(\omega^k)$ gelten folgende Regeln.

Satz 1. Sei $f : U_1 \rightarrow U_2$ eine differenzierbare Abbildung zwischen den offenen Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen f^i . Dann gilt

$$f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Sind weiterhin Differentialformen auf U_2 und eine Funktion $g : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so gilt

- (1) $f^*(\omega_1^k + \omega_2^k) = f^*(\omega_1^k) + f^*(\omega_2^k);$
- (2) $f^*(g \cdot \omega^k) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega^k);$
- (3) $f^*(\omega^k \wedge \eta^l) = f^*(\omega^k) \wedge f^*(\eta^l).$

Im Fall $n = m$ gilt zudem

$$f^*(g \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (g \circ f) \cdot \det(Df) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Beweis. Nach Definition von f^* gilt

$$f^*(dx^i)(p, v) = dx^i(f(p))(f_{*,p}(p, v)) = dx^i(f(p))(f(p), Df_p(v)).$$

Dies ist aber genau die i -te Komponente von $Df_p(v)$, also folgt

$$f^*(dx^i)(p, v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) v^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) dx^j(p, v).$$

Die drei Rechenregeln folgen sofort aus den Definitionen und sollen deswegen nicht weiter bewiesen werden. Für die letzte Behauptung verwenden wir zunächst die

zweite Rechenregel und anschließend die soeben bewiesene Gleichung:

$$\begin{aligned} f^*(g \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) &= (g \circ f)f^*(dx^1) \wedge \dots \wedge f^*(dx^n) \\ &= (g \circ f) \left(\sum_{j_1=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^n \frac{\partial f^n}{\partial x^{j_n}} dx^{j_n} \right) \\ &= (g \circ f) \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \frac{\partial f^1}{\partial x^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f^n}{\partial x^{j_n}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}. \end{aligned}$$

Weil das äußere Quadrat einer 1-Form immer verschwindet, treten in dieser Summe nur solche n -Indextupel (j_1, \dots, j_n) auf, welche eine Permutation von $(1, \dots, n)$ sind. Unter Verwendung der in der äußeren Algebra geltenden Antisymmetrierelationen erhalten wir sofort die Formel

$$f^*(g \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (g \circ f) \sum_J \operatorname{sgn} \binom{1 \dots n}{J} \frac{\partial f^1}{\partial x^{j_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial f^n}{\partial x^{j_n}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

und damit die Determinante der Ableitung Df . \square

Erinnern wir uns, dass eine C^l -Funktion f auf U als eine 0-Form verstanden werden kann, so ist das Differential d also eine Abbildung, die eine 0-Form f in eine 1-Form df verwandelt. Indem man diese Abbildung d in geeigneter Weise auf die Koeffizientenfunktionen einer Differentialform anwendet, kann man ganz allgemein das äußere Differential auf k -Formen ausdehnen.

Definition 6. Sei ω^k eine k -Form auf der offenen Menge U der Gestalt

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Wir definieren ihr *äußeres Differential* $d\omega^k$ durch die Formel

$$\begin{aligned} d\omega^k &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} d(\omega_{i_1, \dots, i_k}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Damit ist $d\omega^k$ eine $(k+1)$ -Form der Klasse C^{l-1} und d wird ein linearer Operator zwischen den Räumen

$$d : \Omega_l^k(U) \longrightarrow \Omega_{l-1}^{k+1}(U).$$

Beispiel 4. Wir berechnen das äußere Differential der auf ganz \mathbb{R}^2 definierten 1-Form

$$\omega^1 = \sin x dy + \sin y dx.$$

Wegen $d(\sin x) = \cos x dx + 0 dy$ und $d(\sin y) = 0 dx + \cos y dy$ ist

$$d\omega^1 = \cos x dx \wedge dy + \cos y dy \wedge dx = (\cos x - \cos y) dx \wedge dy.$$

Satz 2. Für das äußere Differential gilt:

- (1) $d(\omega^k + \eta^k) = d\omega^k + d\eta^k$ für $\omega^k, \eta^k \in \Omega_1^k(U)$;
- (2) $d(\omega^k \wedge \eta^l) = (d\omega^k) \wedge \eta^l + (-1)^k \omega^k \wedge (d\eta^l)$;
- (3) $d(d\omega^k) = 0$ für $\omega^k \in \Omega_2^k(U)$;
- (4) $f^*(d\omega^k) = d(f^*\omega^k)$ für $\omega^k \in \Omega_1^k(U_2)$ und $f: U_1 \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^m$.

Beweis. Die erste Identität ist trivial. Für die zweite verwenden wir die Multiindexschreibweise $I = (i_1 < \dots < i_k)$ und setzen $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ sowie

$$\omega^k = \sum_I \omega_I dx^I, \quad \eta^l = \sum_J \eta_J dx^J.$$

Dann ist

$$\omega^k \wedge \eta^l = \sum_{I,J} \omega_I \eta_J dx^I \wedge dx^J$$

und die Anwendung des äußeren Differentials ergibt die Formel

$$d(\omega^k \wedge \eta^l) = \sum_{I,J} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^\alpha} \eta_J + \omega_I \frac{\partial \eta_J}{\partial x^\alpha} \right) dx^\alpha \wedge dx^I \wedge dx^J.$$

Der erste Term in der Summe ist $d\omega^k \wedge \eta^l$, beim zweiten führt man genau k Transpositionen aus:

$$\begin{aligned} d(\omega^k \wedge \eta^l) &= d\omega^k \wedge \eta^l + (-1)^k \sum_{I,J} \sum_{\alpha=1}^n \omega_I \frac{\partial \eta_J}{\partial x^\alpha} dx^I \wedge dx^\alpha \wedge dx^J \\ &= d\omega^k \wedge \eta^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\eta^l. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $dd = 0$. Das zweifache Differential führt uns auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} dd\omega^k &= \sum_I \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^I \\ &= \sum_I \sum_{\alpha < \beta} \left(\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen ω_I stetig. Das Schwarzsche Lemma impliziert daher, dass der Ausdruck in der Klammer für jeden Multiindex I verschwindet. Zuletzt zeigen wir noch, dass Zurückziehen von Differentialformen mit dem äußeren Differential kommutiert. Seien dazu y^1, \dots, y^m die Koordinaten auf V , $\omega^k = \sum_I \omega_I dy^I$ in diesen dargestellt und f^1, \dots, f^m die Komponenten der Abbildung $f: U_1 \rightarrow U_2$. Mit

$$d\omega^k = \sum_I \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega_I}{\partial y^\alpha} dy^\alpha \wedge dy^I$$

gilt für die zurückgezogene Form

$$f^*(d\omega^k) = \sum_I \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega_I}{\partial y^\alpha}(f(x)) df^\alpha \wedge df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}.$$

Andererseits ist

$$f^* \omega^k = \sum_I \omega_I(f(x)) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k},$$

und dessen Differential berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} d(f^* \omega^k) &= \sum_I \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \omega_I}{\partial x^\beta}(f(x)) dx^\beta \wedge df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k} \\ &= \sum_I \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega_I}{\partial y^\alpha}(f(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta \wedge df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $df^\alpha = \sum (\partial f^\alpha / \partial x^\beta) dx^\beta$ kann man dies zusammenfassen zu:

$$d(f^* \omega^k) = \sum_I \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega_I}{\partial y^\alpha}(f(x)) df^\alpha \wedge df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k} = f^*(d\omega^k). \quad \square$$

Beispiel 5. Das folgende Beispiel illustriert, dass zum praktischen Rechnen mit f^* und d die in den Sätzen 1 und 2 formulierten Rechenregeln oft ausreichen. Betrachten wir etwa die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (u^2, v^3, uv)$$

und die 1-Form auf \mathbb{R}^3 in den Koordinaten x, y, z

$$\omega^1 = y dx + x dy + xyz dz.$$

Dann berechnen wir $f^*(\omega^1)$ auf folgende Weise. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} f^*(\omega^1) &= (y \circ f) f^*(dx) + (x \circ f) f^*(dy) + (xyz \circ f) f^*(dz) \\ &= v^3 f^*(dx) + u^2 f^*(dy) + u^3 v^4 f^*(dz), \end{aligned}$$

und nun verwenden wir die Vertauschbarkeit des äußeren Differentials mit der induzierten Abbildung:

$$f^*(dx) = d(f^* x) = d(x \circ f) = d(u^2) = 2u du.$$

Ebenso zeigt man

$$f^*(dy) = 3v^2 dv, \quad f^*(dz) = v du + u dv,$$

woraus insgesamt das Ergebnis entsteht:

$$f^*(\omega^1) = (2uv^3 + u^3v^5) du + (3u^2v^2 + u^4v^4) dv.$$

2.2. Geschlossene und exakte Differentialformen

Aus der Riemannschen Integrationstheorie weiß man, dass jede stetige Funktion auf \mathbb{R} eine Stammfunktion besitzt. Diesen Sachverhalt können wir in der Sprache der Formen so verstehen, dass zu jeder 1-Form $\mu^1 = g(x) dx$ mit stetiger Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion f mit $df = \mu^1$ existiert. Ist g darüber hinaus differenzierbar, so gilt sicherlich $d\mu^1 = 0$, weil jede 2-Form auf \mathbb{R} verschwindet. Wir wollen nun die analoge Frage nach einer „Stammform“ von Differentialformen stellen:

Sei eine k -Form $\mu^k \in \Omega_1^k(U)$ gegeben. Unter welchen Voraussetzungen existiert eine $(k-1)$ -Form $\eta^{k-1} \in \Omega_2^{k-1}(U)$, deren äußeres Differential mit μ^k übereinstimmt, $d\eta^{k-1} = \mu^k$?

Aus $dd = 0$ folgt sofort, dass $d\mu^k = 0$ eine notwendige Bedingung, im Allgemeinen jedoch keine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $d\eta^{k-1} = \mu^k$ ist.

Definition 7.

- (1) Eine k -Form $\omega^k \in \Omega_1^k(U)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\omega^k = 0$ gilt;
- (2) eine k -Form $\omega^k \in \Omega_1^k(U)$ heißt *exakt*, wenn eine $(k-1)$ -Form $\eta^{k-1} \in \Omega_2^{k-1}(U)$ mit $d\eta^{k-1} = \omega^k$ existiert.

Die Eigenschaft $dd = 0$ bedeutet, dass jede exakte Form geschlossen ist.

Beispiel 6. Auf der offenen Menge $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ betrachten wir die *Windungsform*

$$\omega^1 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

und berechnen deren Differential:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \left[\frac{-dy}{x^2 + y^2} + \frac{y(2x dx + 2y dy)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \wedge dx + \left[\frac{dx}{x^2 + y^2} + \frac{-x(2x dx + 2y dy)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \wedge dy \\ &= \frac{y^2 + x^2 - 2y^2 + x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Also ist ω^1 geschlossen; wir werden später aber beweisen, dass ω^1 nicht exakt ist (Beispiel 10). Das Integral der Windungsform entlang einer geschlossenen, um Null herum-laufenden Kurve misst, wie oft sich diese um den Ursprung „windet“ (Aufgaben 1 und 2).

In der algebraischen Topologie ist es üblich, den Unterschied zwischen geschlossenen und exakten Formen durch die sog. *de-Rham-Kohomologie* zu beschreiben. Den Vektorraum der „Zyklen“ $Z^k(U)$ bzw. den der „Ränder“ (boundaries) $B^k(U)$ definieren wir durch

$$\begin{aligned} Z^k(U) &:= \{\omega^k \in \Omega_\infty^k(U) : \omega^k \text{ ist geschlossen}\} \\ B^k(U) &:= \{\omega^k \in \Omega_\infty^k(U) : \omega^k \text{ ist exakt}\}. \end{aligned}$$

Dann ist $B^k(U)$ ein Unterraum von $Z^k(U)$ und man definiert die k -te de-Rham-Kohomologie von U als den Faktorraum

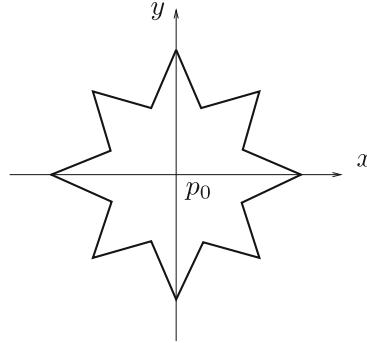
$$H_{DR}^k(U) := Z^k(U) / B^k(U).$$

Die Windungsform etwa ist ein nichttriviales Element in $H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \neq 0$ und wir werden später zeigen, dass

$$H_{DR}^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{R}$$

ist (Aufgabe 14). Die k -te de-Rham-Kohomologie hängt nur von der topologischen Gestalt der Menge U ab. Zum Beispiel verschwindet die de-Rham-Kohomologie konvexer Mengen. Für etwas allgemeinere Mengen ist dies der Inhalt des sog. *Poincaré-Lemmas*, welches wir nun besprechen.

Definition 8. Eine Menge U des \mathbb{R}^n heißt *sternförmig* (oder ein *Sterngebiet*, falls sie zusätzlich offen ist), falls ein Punkt $p_0 \in U$ mit der Eigenschaft existiert, dass zu jedem weiteren Punkt $x \in U$ die Verbindungsstrecke von p_0 nach x ganz in U enthalten ist. Offensichtlich sind Sterngebiete wegzusammenhängend.



Satz 3 (Poincaré-Lemma). *Sei U eine sternförmige offene Menge des \mathbb{R}^n . Dann gilt für jedes $k = 1, \dots, n$:*

$$H_{DR}^k(U) = 0.$$

Mit anderen Worten: Zu jeder geschlossenen k -Form $\omega^k \in \Omega_1^k(U)$ existiert eine $(k-1)$ -Form $\eta^{k-1} \in \Omega_2^{k-1}$, für die $d\eta^{k-1} = \omega^k$ ist.

Beweis. Zum Zweck des Beweises ordnen wir jeder k -Form $\omega^k = \sum \omega_I dx^I$ eine $(k-1)$ -Form $P(\omega^k)$ zu, die die Identität

$$\omega^k = P(d\omega^k) + dP(\omega^k)$$

erfüllt. Für geschlossene Formen verschwindet dann der erste Term, woraus die Behauptung folgt. Die Form $P(\omega^k)$ definieren wir wie folgt:

$$P(\omega^k) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Hierbei soll die Schreibweise $\widehat{dx^{i_\alpha}}$ bedeuten, dass der entsprechende Faktor wegzulassen ist, weswegen $P(\omega^k)$, wie behauptet, von um eins geringerem Grad als ω^k ist. Wir bestimmen das äußere Differential von $P(\omega^k)$. Dazu wenden wir die Produktregel auf die Koeffizientenfunktionen an: Das Integral ist implizit nach x zu differenzieren, während die Ableitung von x^{i_α} immer den Term

$$dx^{i_\alpha} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

ergibt. Das Vorzeichen $(-1)^{\alpha-1}$ ist nun gerade so gewählt, dass dieser Ausdruck gleich $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ ist. Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} dP(\omega^k) &= k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Andererseits berechnet man $d\omega^k$ wie gewohnt

$$d\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

und erhält, indem man den Operator P hierauf anwendet:

$$\begin{aligned} P(d\omega^k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j}(tx) dt \right) x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - \\ &- \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j}(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

Nach Addition von $P(d\omega^k)$ und $dP(\omega^k)$ heben sich zwei Terme heraus und der Rest ergibt

$$\begin{aligned} P(d\omega^k) + dP(\omega^k) &= k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &+ \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j}(tx) dt \right) x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_I \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k \omega_I(tx)] dt \right) dx^I \\ &= \sum_I (\omega_I(x) - 0 \cdot \omega_I(0)) dx^I = \sum_I \omega_I(x) dx^I. \quad \square \end{aligned}$$

Das Poincaré-Lemma ist nur eine Existenzaussage für die gesuchte Form η^{k-1} , jedoch keine Eindeutigkeitsaussage. Ist etwa η^{k-1} eine Lösung der Gleichung $d\eta^{k-1} = \omega^k$, dann ist für jede $(k-2)$ -Form ξ^{k-2} die Form $\eta^{k-1} + d\xi^{k-2}$ ebenfalls eine Lösung. Sind umgekehrt η_1^{k-1} und η_2^{k-1} zwei Formen mit $d\eta_1^{k-1} = d\eta_2^{k-1} = \omega^k$, so folgt

$$d(\eta_1^{k-1} - \eta_2^{k-1}) = 0.$$

Nach dem Poincaré-Lemma existiert somit eine $(k-2)$ -Form ξ_0^{k-2} mit $\eta_1^{k-1} - \eta_2^{k-1} = d\xi_0^{k-2}$, anders geschrieben

$$\eta_1^{k-1} = \eta_2^{k-1} + d\xi_0^{k-2},$$

und wir haben insgesamt gezeigt, dass die allgemeine Lösung immer gleich der Summe einer partikulären Lösung und dem Differential einer beliebigen $(k - 2)$ -Form ist.

Beispiel 7. Auf \mathbb{R}^3 sei die geschlossene 2-Form

$$\omega^2 = xy \, dx \wedge dy + 2x \, dy \wedge dz + 2y \, dx \wedge dz$$

gegeben. Wir bestimmen eine 1-Form, deren Differential mit ω^2 übereinstimmt, auf zwei verschiedene Weisen. Zunächst erläutern wir die *Ansatzmethode*. Die 1-Form η^1 setzen wir in der Gestalt

$$\eta^1 = f(x, y, z) \, dx + g(x, y, z) \, dy + h(x, y, z) \, dz$$

mit zu bestimmenden Funktionen $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ an. Ihr Differential berechnet man leicht:

$$d\eta^1 = \left[\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right] dx \wedge dy + \left[\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \right] dx \wedge dz + \left[\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right] dy \wedge dz.$$

Also müssen die gesuchten Funktionen die Bedingungen

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = xy, \quad \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} = 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 2x$$

erfüllen. Integriert man etwa die ersten beiden nach x , so erhält man

$$g = \frac{1}{2}x^2y + \int \frac{\partial f}{\partial y} dx, \quad h = 2xy + \int \frac{\partial f}{\partial z} dx.$$

Setzt man das Ergebnis in die letzte Bedingung ein,

$$2x = 2x + \int \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dx - \int \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dx,$$

so sieht man, dass diese für jede beliebige Funktion f erfüllt ist; man kann also $f = 0$ wählen. Dann ist $g = \frac{1}{2}x^2y$, $h = 2xy$ und demnach erhalten wir mit

$$\eta^1 = \frac{1}{2}x^2y \, dy + 2xy \, dz$$

eine Lösung, wie man leicht nachprüft. Die *Integrationsmethode* bestimmt die Stammform anhand der im Beweis des Poincaré-Lemmas benutzten Abbildung $P(\omega^2)$. In unserem Beispiel ist sie die Summe von 6 Termen, nämlich

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= + \left(\int_0^1 t(tx)(ty) dt \right) x \, dy - \left(\int_0^1 t(tx)(ty) dt \right) y \, dx \\ &\quad + 2 \left(\int_0^1 t(tx) dt \right) y \, dz - 2 \left(\int_0^1 t(tx) dt \right) z \, dy \\ &\quad + 2 \left(\int_0^1 t(ty) dt \right) x \, dz - 2 \left(\int_0^1 t(ty) dt \right) z \, dx. \end{aligned}$$

Jeder einzelne Summand hiervon ist leicht auszurechnen:

$$\begin{aligned} P(\omega^2) &= \frac{1}{4}x^2y\,dy - \frac{1}{4}xy^2\,dx + \frac{2}{3}xy\,dz - \frac{2}{3}xz\,dy + \frac{2}{3}xy\,dz - \frac{2}{3}yz\,dx \\ &= -\left(\frac{1}{4}xy^2 + \frac{2}{3}yz\right)\,dx + \left(\frac{1}{4}x^2y - \frac{2}{3}xz\right)\,dy + \frac{4}{3}xy\,dz. \end{aligned}$$

Welche der beiden Methoden schneller zum Ziel führt, hängt vom gegebenen Fall ab; da so oder so eine Integration auszuführen ist, muss es nicht immer möglich sein, eine elementare Lösung explizit angeben zu können (ebenso wie nicht jede stetige Funktion elementar integrierbar ist).

2.3. Gradient, Divergenz und Rotation

Jeder Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^n$ des Koordinatenraums ist ein orientierter, euklidischer Vektorraum und somit haben wir in ihm sowohl die Volumenform

$$d\mathbb{R}^n(p) \in \Lambda_p^n(\mathbb{R}^n)$$

als auch den Hodge-Operator

$$* : \Lambda_p^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda_p^{n-k}(\mathbb{R}^n)$$

vorliegen. Dies gibt uns die Möglichkeit, zu jeder auf \mathbb{R}^n definierten Differentialform ω^k vom Grade k die entsprechende $(n-k)$ -Form $*\omega^k$ zu betrachten, indem wir den $*$ -Operator punktweise jeweils auf $\omega^k(p)$ anwenden. Ist e_1, \dots, e_n eine orthonormale Basis des Raums \mathbb{R}^n und sind x^1, \dots, x^n die Koordinatenfunktionen, dann gilt für eine k -Form $\omega^k = \sum \omega_I dx^I$, dargestellt in diesen Koordinaten, die Formel

$$*\omega^k = \sum_I \text{sgn}\binom{1 \dots n}{I, J} \omega_I dx^J.$$

Dabei ist $J = (j_1 < \dots < j_{n-k})$ das zu $I = (i_1 < \dots < i_k)$ komplementäre Indextupel. Die Volumenform $d\mathbb{R}^n$ selbst ist einfach gegeben durch

$$d\mathbb{R}^n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Wir haben weiterhin die Möglichkeit, von einem Vektorfeld \mathcal{V} zu einer 1-Form $\omega_{\mathcal{V}}^1$ und umgekehrt überzugehen. Dies geschieht durch die

Definition 9. Ist \mathcal{V} ein Vektorfeld, so wird dessen *duale 1-Form* $\omega_{\mathcal{V}}^1$ durch die Gleichung

$$*\omega_{\mathcal{V}}^1 := \mathcal{V} \lrcorner d\mathbb{R}^n$$

definiert.

Ist das Vektorfeld $\mathcal{V} = \sum V^i \partial/\partial x^i$ in kartesischen Koordinaten gegeben, so erhalten wir die entsprechende Darstellung von $\omega_{\mathcal{V}}^1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{V}}^1 &= (-1)^{n-1} * (V^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n - V^2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n \pm \dots) \\ &= V^1 dx^1 + \dots + V^n dx^n. \end{aligned}$$

Diesen Übergang von Vektorfeldern zu 1-Formen benutzen wir jetzt, um auf invariante Weise den Gradienten einer Funktion sowie die Divergenz und Rotation von Vektorfeldern einzuführen.

Definition 10. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Das zur 1-Form df gehörende Vektorfeld $\text{grad}(f)$ heißt der *Gradient* der Funktion f . Die definierende Gleichung des Vektorfeldes $\text{grad}(f)$ lautet somit

$$*\omega_{\text{grad}(f)}^1 = \text{grad}(f) \lrcorner d\mathbb{R}^n = *df,$$

und in den gewählten Koordinaten gilt

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Definition 11. Die *Divergenz* eines C^1 -Vektorfeldes \mathcal{V} ist eine Funktion, welche durch die Gleichung

$$d(*\omega_{\mathcal{V}}^1) = d(\mathcal{V} \lrcorner d\mathbb{R}^n) := \text{div}(\mathcal{V}) \cdot d\mathbb{R}^n$$

definiert wird. Die Formel

$$\text{div}(\mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial x^i}$$

drückt die Divergenz von \mathcal{V} durch seine Komponenten aus.

Im nächsten Satz geben wir einige einfache Eigenschaften dieser Operationen an.

Satz 4.

(1) Sind f und g zwei C^1 -Funktionen, so gilt:

$$\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad}(g) + g \cdot \text{grad}(f);$$

(2) sind f eine Funktion und \mathcal{V} ein Vektorfeld der Klasse C^1 , so gilt:

$$\text{div}(f \cdot \mathcal{V}) = f \cdot \text{div}(\mathcal{V}) + df(\mathcal{V}).$$

Beweis. Wir zeigen nur die zweite Formel. Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \text{div}(f \cdot \mathcal{V}) \cdot d\mathbb{R}^n &= d(f \cdot (\mathcal{V} \lrcorner d\mathbb{R}^n)) = df \wedge (\mathcal{V} \lrcorner d\mathbb{R}^n) + f \cdot d(\mathcal{V} \lrcorner d\mathbb{R}^n) \\ &= df \wedge *\omega_{\mathcal{V}}^1 + f \cdot \text{div}(\mathcal{V}) \cdot d\mathbb{R}^n = [df(\mathcal{V}) + f \cdot \text{div}(\mathcal{V})] \cdot d\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt benutzten wir die für jedes Vektorfeld \mathcal{V} und jede 1-Form η^1 gültige Gleichung

$$\eta^1 \wedge *\omega_{\mathcal{V}}^1 = \eta^1(\mathcal{V}) \cdot d\mathbb{R}^n.$$

□

Definition 12. Sei f eine C^2 -Funktion, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Die Divergenz des Gradienten von f nennt man den *Laplace-Operator* $\Delta(f)$ der Funktion f :

$$\Delta(f) = \text{div}(\text{grad}(f)).$$

In den gewählten Koordinaten berechnet sich der Laplace-Operator durch die Formel

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2},$$

und eine direkte Konsequenz der Identitäten des letzten Satzes ist die Formel

$$\Delta(f \cdot g) = \Delta(f) \cdot g + f \cdot \Delta(g) + 2 \langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle.$$

Speziell in der Dimension $n = 3$ existiert eine weitere, auf Vektorfelder wirkende Operation, die sog. Rotation. Ist \mathcal{V} ein Vektorfeld und $\omega_{\mathcal{V}}^1$ die entsprechende 1-Form, so wird in \mathbb{R}^3 die Form $*d(\omega_{\mathcal{V}}^1)$ gleichfalls eine 1-Form und definiert daher wiederum ein Vektorfeld, die Rotation $\text{rot}(\mathcal{V})$. In Kurzform haben wir folgende

Definition 13. Die *Rotation* des Vektorfeldes \mathcal{V} ist das durch die folgende Bedingung bestimmte Vektorfeld:

$$d\omega_{\mathcal{V}}^1 =: \text{rot}(\mathcal{V}) \lrcorner d\mathbb{R}^3 = * \omega_{\text{rot}(\mathcal{V})}^1.$$

Aus dem Differential $d\omega_{\mathcal{V}}^1$

$$d\omega_{\mathcal{V}}^1 = \left[\frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right] dx^1 \wedge dx^2 + \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^3} \right] dx^1 \wedge dx^3 + \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right] dx^2 \wedge dx^3$$

ergibt sich unmittelbar die Formel

$$\text{rot}(\mathcal{V}) = \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} + \left[\frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} \right] \frac{\partial}{\partial x^2} + \left[\frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

Eigenschaften der Rotation von Vektorfeldern beweisen wir im nächsten Satz:

Satz 5. Sind die Funktion f und das Vektorfeld \mathcal{V} der Klasse C^2 definiert auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$, so gilt:

- (1) $\text{div}(\text{rot}(\mathcal{V})) = 0$ und $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$;
- (2) $\text{rot}(f \cdot \mathcal{V}) = f \cdot \text{rot}(\mathcal{V}) + \text{grad}(f) \times \mathcal{V}$, wobei \times das Vektorprodukt in \mathbb{R}^3 bezeichnet;
- (3) verschwindet die Rotation $\text{rot}(\mathcal{V}) = 0$ von \mathcal{V} und ist U sternförmig, so existiert eine Funktion f mit $\mathcal{V} = \text{grad}(f)$;
- (4) verschwindet die Divergenz $\text{div}(\mathcal{V}) = 0$ von \mathcal{V} und ist U sternförmig, so existiert ein Vektorfeld \mathcal{W} mit $\mathcal{V} = \text{rot}(\mathcal{W})$.

Beweis. Die ersten Gleichungen ergeben sich direkt aus der Tatsache, dass das Quadrat $dd = 0$ des äußeren Differentials Null ist. In der Tat, wir erhalten:

$$\text{div}(\text{rot}(\mathcal{V})) \cdot d\mathbb{R}^3 = d(*\omega_{\text{rot}(\mathcal{V})}^1) = dd\omega_{\mathcal{V}}^1 = 0$$

und

$$\omega_{\text{rot}(\text{grad}(f))}^1 = *d\omega_{\text{grad}(f)}^1 = *ddf = 0.$$

Die Behauptungen (3) und (4) sind Spezialfälle des Poincaré-Lemmas. Ist $\text{rot}(\mathcal{V}) = 0$, so wird $\omega_{\mathcal{V}}^1$ eine geschlossene Form. Nach Poincaré-Lemma existiert daher eine Funktion f mit $\omega_{\mathcal{V}}^1 = df$. Damit ist \mathcal{V} der Gradient der Funktion f . Analog zeigt man die Eigenschaft (4). \square

2.4. Singuläre Würfel und Ketten

Wir wollen die Integrationstheorie von Differentialformen entwickeln und benötigen daher geeignete Mengen als Integrationsgebiete. Zunächst und in diesem Kapitel werden wir nur solche Teilmengen von \mathbb{R}^n zulassen, die ein mehrdimensionales Analogon parametrisierter Kurven sind, sog. *singuläre Ketten*. Den k -dimensionalen Einheitswürfel werden wir mit $[0, 1]^k$ bezeichnen,

$$[0, 1]^k = \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq x^1, \dots, x^k \leq 1\}.$$

Definition 14. Unter einem *singulären k -Würfel* in $U \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine C^1 -Abbildung

$$c^k : [0, 1]^k \longrightarrow U.$$

Hierbei vereinbaren wir ein für alle Mal, dass eine auf einer nicht notwendig offenen Teilmenge des \mathbb{R}^k definierte Abbildung glatt genannt wird, falls sie eine glatte Fortsetzung auf eine offene Umgebung dieser Teilmenge besitzt.

Wichtig ist anzumerken, dass ein singulärer Würfel nicht nur die Bildmenge von c^k ist, sondern in diesen Begriff auch die explizite Parametrisierung eingeht. Zum Beispiel ist im Fall $k = 0$ ein singulärer 0-Würfel ein Punkt in der Menge U , im Fall $k = 1$ eine parametrisierte Kurve. Ein 1-Würfel kann zu einem Punkt entarten, in diesem Sinne also „singulär“ sein. Ebenso lässt sich jeder singuläre k -Würfel als ein solcher höherer Dimension auffassen.

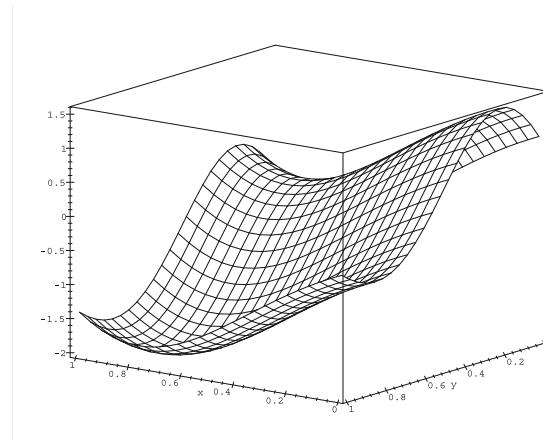


Bild des 2-Würfels $[0, 1]^2 \ni (x, y) \mapsto \cos(x+1)^2 + \sin(y-3)^2$

Definition 15. Eine *singuläre k -Kette* in U ist eine formale Summe singulärer k -Würfel c_i^k in U mit ganzzahligen Koeffizienten $l_i \in \mathbb{Z}$

$$l_1 c_1^k + \dots + l_m c_m^k =: s^k.$$

Man addiert k -Ketten in der naheliegenden Weise und erhält so die abelsche Gruppe der singulären k -Ketten in U (mit der Addition als Verknüpfung), die wir $\mathcal{C}_k(U)$ schreiben werden. Das Inverse der k -Kette s^k ist zum Beispiel ihr Negatives $-s^k$.

Definition 16. Unter dem *Standardwürfel* in \mathbb{R}^k verstehen wir die identische Abbildung des k -dimensionalen Einheitswürfels

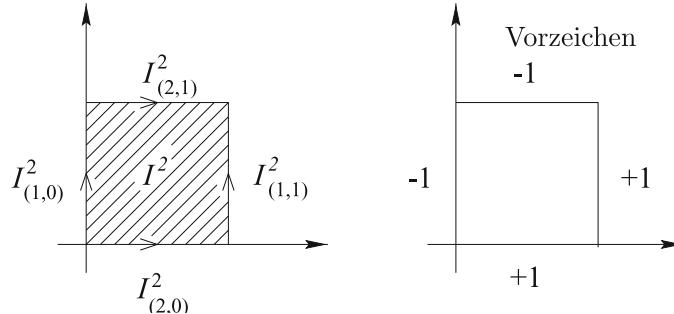
$$I^k : [0, 1]^k \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad I^k(x) = x.$$

Wir definieren jetzt für jede k -Kette einen Rand. Zu jedem Index i zwischen 1 und k parametrisieren wir einen Teil des Randes von $[0, 1]^k$ durch Abbildungen $I_{(i,0)}^k$, $I_{(i,1)}^k : [0, 1]^{k-1} \rightarrow [0, 1]^k$, die an i -ter Stelle den Wert 0 bzw. 1 einschieben:

$$\begin{aligned} I_{(i,0)}^k : [0, 1]^{k-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad I_{(i,0)}^k(x^1, \dots, x^{k-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^i, \dots, x^{k-1}) \\ I_{(i,1)}^k : [0, 1]^{k-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad I_{(i,1)}^k(x^1, \dots, x^{k-1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{k-1}). \end{aligned}$$

Unter dem Rand des Standardwürfels I^k verstehen wir die $(k-1)$ -Kette

$$\partial I^k := \sum_{i=1}^k (-1)^i (I_{(i,0)}^k - I_{(i,1)}^k).$$



Für einen beliebigen singulären k -Würfel $c^k : [0, 1]^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\partial c^k := \sum_{i=1}^k (-1)^i (c^k \circ I_{(i,0)}^k - c^k \circ I_{(i,1)}^k).$$

Ist letztlich $s^k = \sum l_j c_j^k$ eine singuläre k -Kette, so definieren wir den *Randoperator* durch

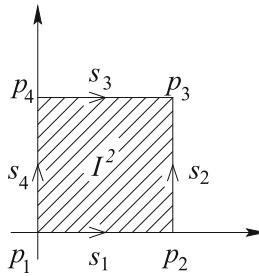
$$\partial s^k := \sum_j l_j \partial c_j^k.$$

Beispiel 8. Wir bestimmen den Rand des zweidimensionalen Standardwürfels I^2 . Dazu nummerieren wir die 4 Eckpunkte beim Ursprung beginnend in positiver Richtung mit p_1 bis p_4 und die 4 Kanten mit s_1 bis s_4 , welche ebenfalls dem positiven Durchlaufsinne folgen und bei p_1 beginnen. Dann ist

$$\partial I^2 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$$

und für den Rand hiervon

$$\partial \partial I^2 = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + (p_4 - p_3) + (p_1 - p_4) = 0.$$



Ähnlich wie für das äußere Differential d gilt auch für den Randoperator, dass durch zweimalige Anwendung Null entsteht.

Satz 6.

- (1) Der Randoperator $\partial : \mathcal{C}_k(U) \rightarrow \mathcal{C}_{k-1}(U)$ ist ein Gruppenhomomorphismus;
- (2) in der Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{k+1}(U) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_k(U) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_{k-1}(U) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_1(U) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_0(U)$$

gilt $\partial\partial = 0$, d. h. für jede k -Kette $s^k \in \mathcal{C}_k(U)$ ist

$$\partial(\partial s^k) = 0.$$

Beweis. Die Eigenschaft $\partial(s_1^k + s_2^k) = \partial s_1^k + \partial s_2^k$ folgt sofort aus der Definition des Randoperators. Aus Linearitätsgründen genügt es offenbar, die zweite Aussage für einen beliebigen k -Würfel $c^k : [0, 1]^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ zu beweisen. Nach Definition war der Rand erklärt durch

$$\partial c^k = \sum_{j=1}^k (-1)^j \left(c^k \circ I_{(j,0)}^k - c^k \circ I_{(j,1)}^k \right).$$

Wenden wir den Randoperator nochmals an, erhalten wir (in der zweiten Zeile lassen wir das Verknüpfungszeichen \circ weg):

$$\begin{aligned} \partial(\partial c^k) &= \sum_{j=1}^k (-1)^j \left(\partial(c^k \circ I_{(j,0)}^k) - \partial(c^k \circ I_{(j,1)}^k) \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+j} \left[c^k I_{(j,0)}^k I_{(i,0)}^{k-1} - c^k I_{(j,0)}^k I_{(i,1)}^k - c^k I_{(j,1)}^k I_{(i,0)}^{k-1} + c^k I_{(j,1)}^k I_{(i,1)}^k \right]. \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck etwas besser umformen zu können, schreiben wir ihn unter Verwendung zweier weiterer Summationsindizes $\alpha, \beta = 0, 1$ als

$$\partial(\partial c^k) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{\alpha=0,1 \\ \beta=0,1}} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} \left[c^k \circ I_{(j,\alpha)}^k \circ I_{(i,\beta)}^{k-1} \right].$$

Für $j \leq i$ und $\alpha, \beta = 0, 1$ gilt

$$\begin{aligned} I_{(j,\alpha)}^k \circ I_{(i,\beta)}^{k-1}(x^1, \dots, x^{k-2}) &= I_{(j,\alpha)}^k(x^1, \dots, x^{i-1}, \beta, x^i, \dots, x^{k-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha, x^j, \dots, x^{i-1}, \beta, x^i, \dots, x^{k-2}) \end{aligned}$$

und analog formt man die Verknüpfung $I_{(i+1,\beta)}^k \circ I_{(j,\alpha)}^{k-1}$ um

$$\begin{aligned} I_{(i+1,\beta)}^k \circ I_{(j,\alpha)}^{k-1}(x^1, \dots, x^{k-2}) &= I_{(i+1,\beta)}^k(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha, x^j, \dots, x^{k-2}) \\ &= (x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha, x^j, \dots, x^{i-1}, \beta, x^i, \dots, x^{k-2}). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die Identität

$$I_{(j,\alpha)}^k \circ I_{(i,\beta)}^{k-1} = I_{(i+1,\beta)}^k \circ I_{(j,\alpha)}^{k-1}.$$

Um diese anwenden zu können, teilen wir die im Ausdruck für $\partial(\partial c^k)$ vorkommende Summe auf in diejenigen Indexpaare, für die $j \leq i$ gilt, und in die verbleibenden:

$$\begin{aligned} \partial(\partial c^k) &= \sum_{1 \leq j \leq i \leq k-1} \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c^k \circ I_{(j,\alpha)}^k \circ I_{(i,\beta)}^{k-1} \\ &\quad + \sum_{i < j} \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c^k \circ I_{(j,\alpha)}^k \circ I_{(i,\beta)}^{k-1}. \end{aligned}$$

In der zweiten Summe ersetzen wir i durch j sowie j durch $i+1$:

$$\begin{aligned} \partial(\partial c^k) &= \sum_{1 \leq j \leq i \leq k-1} \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{i+j+\alpha+\beta} c^k \circ I_{(j,\alpha)}^k \circ I_{(i,\beta)}^{k-1} \\ &\quad + \sum_{1 \leq j < i+1} \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{i+j+1+\alpha+\beta} c^k \circ I_{(i+1,\alpha)}^k \circ I_{(j,\beta)}^{k-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

unter Verwendung der zuvor bewiesenen Identität. \square

In Analogie zur de-Rham-Kohomologie kann man nun die k -te *kubische Homologiegruppe* einer Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ betrachten:

$$H_k^{\text{kub}}(U) := \ker(\partial : \mathcal{C}_k(U) \rightarrow \mathcal{C}_{k-1}(U)) / \text{im}(\partial : \mathcal{C}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{C}_k(U)).$$

2.5. Integration von Differentialformen und der Satz von Stokes

Wir betrachten einen singulären k -Würfel $c^k : [0, 1]^k \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ der Klasse C^1 sowie eine k -Form ω^k auf U . Dann ist die induzierte Differentialform $(c^k)^* \omega^k$ auf dem Einheitswürfel $[0, 1]^k$ definiert und als solche ein Vielfaches von $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$,

$$(c^k)^* \omega^k = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

für eine gewisse Funktion $f : [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$. Somit können wir das Integral von ω^k über den singulären Würfel c^k wie folgt definieren:

Definition 17. Wir setzen

$$\int_{c^k} \omega^k := \int_{[0,1]^k} f(x)$$

und erweitern diesen Integralbegriff linear auf k -Ketten $s^k = \sum_j l_j c_j^k$ in U durch

$$\int_{s^k} \omega^k := \sum_j l_j \int_{c_j^k} \omega^k.$$

Beispiel 9. Im Fall $k = 1$ ist ein singulärer k -Würfel einfach eine parametrisierte C^1 -Kurve $c : [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$. Man nennt dann das Integral der 1-Form $\omega^1 = p_1 dy^1 + \dots + p_n dy^n$ das *Kurvenintegral* von ω^1 entlang c . Sind c^1, \dots, c^n die Komponentenfunktionen von c , so schreibt sich die zurückgezogene Form

$$c^* \omega^1(t) = p_1(c(t)) \cdot \frac{dc^1(t)}{dt} dt + \dots + p_n(c(t)) \cdot \frac{dc^n(t)}{dt} dt,$$

und somit erhält man für das Kurvenintegral in dieser Situation die allgemeine Formel

$$\int_c \omega^1 = \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n p_i(c(t)) \cdot \frac{dc^i(t)}{dt} \right] dt.$$

Falls die 1-Form ω^1 das Differential einer glatten Funktion f ist, erhalten wir wegen

$$c^*(\omega^1) = c^*(df) = d(f \circ c)$$

als Wert für das Integral über df

$$\int_c df = \int_0^1 \frac{d(f \circ c)(t)}{dt} dt = f(c(1)) - f(c(0)).$$

Insbesondere hängt das Kurvenintegral einer exakten 1-Form nur von den Endpunkten der Kurve, nicht jedoch von ihrem Verlauf ab. Es verschwindet für jede geschlossene Kurve.

Beispiel 10. Die letzte Bemerkung benutzen wir für den Beweis, dass die Windungsform

$$\omega^1 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ nicht exakt ist. In der Tat, betrachten wir den Kreis $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, so gilt

$$c^* \omega^1 = 2\pi dt \quad \text{und} \quad \int_c \omega^1 = 2\pi.$$

Das Integral einer k -Form über einen singulären k -Würfel ist bis auf ein Vorzeichen unabhängig von der Parametrisierung des Würfels. Dies ist eine Konsequenz der wohlbekannten Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale: Ist $\varphi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\int_U (f \circ \varphi)(y) \cdot |\det(D\varphi(y))| dy = \int_V f(x) dx.$$

Zwei Parametrisierungen c_1^k und $c_2^k : [0, 1]^k \rightarrow U$ ein- und derselben Punktmenge in U unterscheiden sich durch einen Diffeomorphismus $\varphi : [0, 1]^k \rightarrow [0, 1]^k$ des Einheitswürfels, $c_2^k = c_1^k \circ \varphi$. Die Determinante des Differentials $D\varphi(x)$ hat ein konstantes Vorzeichen, welches wir mit $\varepsilon(\varphi)$ bezeichnen wollen.

Satz 7. Es gilt

$$\int_{c_1^k} \omega^k = \varepsilon(\varphi) \int_{c_2^k} \omega^k.$$

Beweis. Die zurückgezogene Form

$$(c_2^k)^* \omega^k = \varphi^*(c_1^k)^* (\omega^k) = \varphi^*(f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (f \circ \varphi) \cdot \varphi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

stimmt laut Satz 1 überein mit

$$(c_2^k)^* \omega^k = (f \circ \varphi) \det(D\varphi(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Die Behauptung ergibt sich daher aus der zitierten Transformationsformel für das n -dimensionale Integral. \square

Im Fall $k = 1$ ergibt sich eine Änderung des Vorzeichens im Kurvenintegral bei Veränderung des Durchlaufsinn der Kurve.

Wir beweisen jetzt das wesentliche Ergebnis dieses Kapitels, den sog. *Satz von Stokes*. Dieser ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung und enthält die klassischen Integralformeln des 19. Jahrhunderts als Spezialfälle. Wie der folgende Beweis dem aufmerksamen Leser jedoch sofort zeigt, handelt es sich im Kern um die Tatsache, dass Integration und Differentiation zueinander inverse Operationen sind.

Satz 8 (Satz von Stokes). *Sei ω^k eine Differentialform, definiert auf der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, und $s^{k+1} : [0, 1]^{k+1} \rightarrow U$ eine $(k+1)$ -Kette. Dann gilt*

$$\int_{\partial s^{k+1}} \omega^k = \int_{s^{k+1}} d\omega^k.$$

Beweis. Das Integral ist additiv und daher genügt es, die Formel für singuläre $(k+1)$ -Würfel zu beweisen. Zunächst betrachten wir den Standardwürfel $I^{k+1} : [0, 1]^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$. Die k -Form ω^k in \mathbb{R}^{k+1} stellen wir in der Gestalt

$$\omega^k = \sum_{i=1}^{k+1} f_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$$

dar und berechnen sofort deren Ableitung:

$$d\omega^k = \left[\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right] dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k+1}.$$

Damit gilt nach Definition des Integrals

$$\int_{I^{k+1}} d\omega^k = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} dx.$$

Andererseits ergibt sich für die Abbildungen $I_{(j,\alpha)}^{k+1}$, welche Teile des Randes des Einheitswürfels parametrisieren, die Formel

$$\left(I_{(j,\alpha)}^{k+1} \right)^* \omega^k = f_j(x^1, \dots, x^{j-1}, \alpha, x^j, \dots, x^k) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

woraus man

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^k} \left(I_{(j,1)}^{k+1} \right)^* \omega^k - \int_{[0,1]^k} \left(I_{(j,0)}^{k+1} \right)^* \omega^k &= \\ &= \int_{[0,1]^k} \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^{j-1}, t, x^j, \dots, x^k) dt dx^1 \cdots dx^k \\ &= \int_{[0,1]^{k+1}} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx \end{aligned}$$

erhält. Nach Definition des Randes von I^{k+1} folgt nun

$$\int_{\partial I^{k+1}} \omega^k = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\alpha=0,1} \int_{I_{(j,\alpha)}^{k+1}} (-1)^{j+\alpha} \omega^k = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \int_{[0,1]^{k+1}} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx = \int_{I^{k+1}} d\omega^k$$

und die Stokessche Formel ist für den Standardwürfel verifiziert. Für einen beliebigen singulären $(k+1)$ -Würfel $c^{k+1} : [0,1]^{k+1} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ benutzen wir nun die Vertauschbarkeit des äußeren Differentials mit der Operation des Zurückziehens von Formen. Es gilt

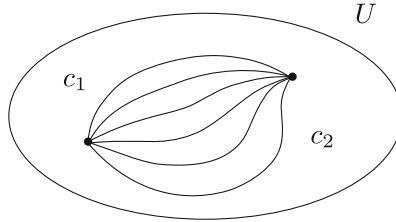
$$\begin{aligned} \int_{c^{k+1}} d\omega^k &= \int_{I^{k+1}} (c^{k+1})^* (d\omega^k) = \int_{I^{k+1}} d((c^{k+1})^* \omega^k) \\ &= \int_{\partial I^{k+1}} (c^{k+1})^* \omega^k = \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\alpha=0,1} \int_{I_{(j,\alpha)}^{k+1}} (c^{k+1})^* \omega^k \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\alpha=0,1} \int_{c^{k+1} \circ I_{(j,\alpha)}^{k+1}} \omega^k = \int_{\partial c^{k+1}} \omega^k. \quad \square \end{aligned}$$

Wir hatten gesehen, dass das Kurvenintegral über eine *exakte* 1-Form wegunabhängig ist. Als erste Anwendung des Satzes von Stokes beweisen wir nun, dass die Kurvenintegrale über eine *geschlossene* 1-Form entlang zweier verschiedener Kurven übereinstimmen, falls man diese Kurven unter Festhalten des Anfangs- und Endpunktes stetig differenzierbar ineinander deformieren kann. Dies führt uns auf den in der Topologie grundlegenden Begriff der Homotopie.

Definition 18. Zwei C^1 -Kurven $c_0, c_1 : [0,1] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ heißen *homotop*, falls eine C^1 -Abbildung $F : [0,1] \times [0,1] \rightarrow U$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} F(t,0) &= c_0(t), & F(0,s) &= c_0(0) = c_1(0) \\ F(t,1) &= c_1(t), & F(1,s) &= c_0(1) = c_1(1) \end{aligned}$$

existiert. Die Abbildung F nennt man eine *Homotopie* zwischen den Kurven c_0 und c_1 .



Satz 9. Seien $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow U$ zwei homotope C^1 -Kurven und ω^1 eine geschlossene 1-Form auf U . Dann stimmen die Kurvenintegrale entlang c_0 und c_1 überein:

$$\int_{c_0} \omega^1 = \int_{c_1} \omega^1.$$

Beweis. Wir wählen eine Homotopie $F : [0, 1]^2 \rightarrow U$ zwischen c_0 und c_1 . Diese Abbildung F ist gleichzeitig ein singulärer 2-Würfel, und man kann somit die 2-Form $d\omega^1$ über F integrieren. Nach Voraussetzung ist $d\omega^1 = 0$ und das entsprechende Integral verschwindet:

$$0 = \int_F d\omega^1.$$

Andererseits gilt nach dem Satz von Stokes für die rechte Seite

$$\int_F d\omega^1 = \int_{\partial F} \omega^1 = \int_{F(t,0)} \omega^1 + \int_{F(1,s)} \omega^1 - \int_{F(t,1)} \omega^1 - \int_{F(0,s)} \omega^1.$$

Diese vier Integrale berechnet man nun unter Verwendung der Homotopie-Eigenschaft von F . Zunächst folgt für $\alpha = 0, 1$ aus $F(t, \alpha) = c_\alpha(t)$ sofort

$$F|_{(t,\alpha)}^* \omega^1 = c_\alpha^* \omega^1.$$

Weiterhin ist $F(\alpha, s)$ von s unabhängig, weswegen

$$F|_{(\alpha,s)}^* \omega^1 = 0$$

gilt. Letztendlich verbleibt insgesamt die Gleichung

$$0 = \int_0^1 c_0^* \omega^1 - \int_0^1 c_1^* \omega^1,$$

nach Definition des Integrals beendet dies den Beweis. \square

Wir verallgemeinern diese Betrachtungen für Kurvenintegrale auf den mehrdimensionalen Fall. Sei $s^k = \sum_j l_j \cdot c_j^k$ eine singuläre k -Kette mit der Bildmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ und gelte $\partial s^k = 0$. Die Menge A kann zum Beispiel eine k -dimensionale Sphäre S^k in \mathbb{R}^n sein. Wir betrachten eine glatte Abbildung $f : A \rightarrow A$, definiert auf einer Umgebung von A und homotop zur Identität Id_A . Darunter verstehen wir wiederum, dass eine glatte Abbildung definiert auf einer Umgebung U von $A \times [0, 1]$ in \mathbb{R}^{n+1}

$$F : A \times [0, 1] \longrightarrow A \quad \text{mit} \quad F(a, 0) = f(a) \quad \text{und} \quad F(a, 1) = a$$

existiert. Dann ist

$$F \circ (s^k \times \text{Id}_{[0,1]}) := \sum l_j \cdot F \circ (c_j^k \times \text{Id}_{[0,1]})$$

eine singuläre $(k+1)$ -Kette in \mathbb{R}^n und wegen $\partial s^k = 0$ erhalten wir den Rand:

$$\partial F \circ (s^k \times \text{Id}_{[0,1]}) = s^k - f \circ s^k.$$

Ist ω^k eine k -Form, definiert in einer offenen Umgebung der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, so gilt der

Satz 10.

$$\int_{s^k} \omega^k = \int_{f \circ s^k} \omega^k.$$

Beweis. Wir formen die Differenz unter Anwendung des Satzes von Stokes um:

$$\int_{s^k} \omega^k - \int_{f \circ s^k} \omega^k = \int_{\partial F \circ (s^k \times \text{Id}_{[0,1]})} \omega^k = \int_{F \circ (s^k \times \text{Id}_{[0,1]})} d\omega^k.$$

Die $(k+1)$ -Form $(s^k \times \text{Id}_{[0,1]})^* F^*(d\omega^k)$ verschwindet jedoch. Dies folgt direkt aus dem Satz über die implizite Funktion und der Voraussetzung, dass A Bild einer k -dimensionalen Kette ist. Die Behauptung ergibt sich jetzt unmittelbar. \square

2.6. Die klassischen Formeln von Green und Stokes

In diesem Abschnitt besprechen wir die klassischen zweidimensionalen Spezialfälle der allgemeinen Stokesschen Formel. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 , welche sich als Bild einer auf dem Standardwürfel $[0,1]^2$ definierten C^1 -Abbildung f darstellen lässt. Mit ∂D bezeichnen wir den Rand dieser Menge, aufgefasst als singuläre 1-Kette. Das Differential der 1-Form $\omega^1 := (x \cdot dy - y \cdot dx)/2$ ist die Volumenform von \mathbb{R}^2 . Damit gilt

$$\text{vol}(D) = \int_D d\omega^1 = \frac{1}{2} \int_{\partial D} (x \cdot dy - y \cdot dx).$$

Mit dieser Formel wird eine zweidimensionale Volumenberechnung in die Auswertung eines Kurvenintegrals verwandelt, und es handelt sich um einen Spezialfall der nun zu besprechenden Greenschen Formel. Betrachten wir allgemein die 1-Form

$$\omega^1 := P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy,$$

so berechnet sich deren Differential sofort:

$$d\omega^1 = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx \wedge dy.$$

Damit erhalten wir die sog. *erste Greensche Formel*.

Satz 11. Für Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ der Klasse C^1 gilt

$$\int_{\partial D} P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = \int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx \wedge dy.$$

Sind $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ Funktionen der Klasse C^2 , so betrachten wir die 1-Formen

$$\omega^1 := P \left[-\frac{\partial Q}{\partial y} \cdot dx + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dy \right] \quad \text{und} \quad \eta^1 := Q \left[-\frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx + \frac{\partial P}{\partial x} \cdot dy \right].$$

Das Differential der Differenz $\omega^1 - \eta^1$ kann leicht berechnet werden:

$$d(\omega^1 - \eta^1) = \{P \cdot \Delta(Q) - Q \cdot \Delta(P)\} dx \wedge dy,$$

eine Anwendung der Stokesschen Formel ergibt die *zweite Greensche Formel*.

Satz 12. Für Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ der Klasse C^2 gilt

$$\int_D \{P \cdot \Delta(Q) - Q \cdot \Delta(P)\} dx \wedge dy = \int_{\partial D} \left[Q \frac{\partial P}{\partial y} - P \frac{\partial Q}{\partial y} \right] dx + \left[P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right] dy.$$

Die gewisse Oberflächenintegrale betreffende Stokessche Formel ist auf ähnlich einfache Weise ein Spezialfall unserer allgemeinen Integralformel. In der Tat, sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge von \mathbb{R}^3 , welche sich als Bild einer auf dem Standardwürfel $[0, 1]^2$ definierten C^1 -Abbildung f darstellen lässt (ein Flächenstück). Mit ∂F bezeichnen wir den Rand dieser Menge, aufgefasst als singuläre 1-Kette in \mathbb{R}^3 . Wir betrachten ein Vektorfeld \mathcal{V} , definiert auf einer offenen Umgebung von F . Seine Rotation wurde durch die folgende Bedingung definiert:

$$d\omega_{\mathcal{V}}^1 := \text{rot}(\mathcal{V}) \lrcorner d\mathbb{R}^3 = * \omega_{\text{rot}(\mathcal{V})}^1.$$

Integrieren wir nun die 2-Form $*\omega_{\text{rot}(\mathcal{V})}^1$ über das Flächenstück F , so erhalten wir den *klassischen Satz von Stokes*.

Satz 13. Sei \mathcal{V} ein auf einer Umgebung von F glattes Vektorfeld. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} (V^1 dx^1 + V^2 dx^2 + V^3 dx^3) &= \int_F d\omega_{\mathcal{V}}^1 = \\ \int_F \left[\frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right] dx^1 \wedge dx^2 + \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^3} \right] dx^1 \wedge dx^3 + \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right] dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Bemerkung. Unter Verwendung der noch zu besprechenden Volumenform dF eines regulären Flächenstückes kann man die klassische Stokessche Formel kürzer in der Gestalt

$$\int_{\partial F} \omega_{\mathcal{V}}^1 = \int_F \langle \text{rot}(\mathcal{V}), \mathcal{N} \rangle \cdot dF$$

schreiben. Hier bezeichnet \mathcal{N} den Normalenvektor der Fläche in \mathbb{R}^3 . Im Kapitel 3 kommen wir darauf zurück.

2.7. Komplexwertige Differentialformen und holomorphe Funktionen

Die Komplexifizierung des Vektorraumes aller reellwertigen k -Formen nennt man den Raum der *komplexwertigen Formen* einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n . Eine derartige Form kann in ihren Real- und Imaginärteil aufgespalten werden

$$\omega^k = \omega_0^k + i \cdot \omega_1^k,$$

und sowohl die Differentiation als auch die Integration definieren wir entsprechend dieser Zerlegung:

$$d\omega^k := d\omega_0^k + i \cdot d\omega_1^k, \quad \int_{\sigma^k} \omega^k := \int_{\sigma^k} \omega_0^k + i \cdot \int_{\sigma^k} \omega_1^k.$$

Ähnlich dehnen wir das äußere Produkt auf komplexwertige Formen aus:

$$\omega^k \wedge \eta^l := (\omega_0^k \wedge \eta_0^l - \omega_1^k \wedge \eta_1^l) + i \cdot (\omega_0^k \wedge \eta_1^l + \omega_1^k \wedge \eta_0^l).$$

Dann gelten nach wie vor die vorherigen Rechenregeln sowie der Satz von Stokes. Wir wenden komplexwertige Formen nun auf holomorphe Funktionen an und identifizieren den reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 mit den komplexen Zahlen \mathbb{C} . Mit $z := x + i \cdot y$ und $\bar{z} := x - i \cdot y$ erhalten wir die Differentialformen

$$dz := dx + i \cdot dy, \quad d\bar{z} := dx - i \cdot dy \quad \text{und} \quad dz \wedge d\bar{z} = -2i \cdot dx \wedge dy.$$

Ist f eine komplexwertige Funktion mit den Real- und Imaginärteilen u und v der Klasse C^1 , $f(z) = u + i \cdot v$, so bezeichnen wir mit u_x, u_y, v_x, v_y die partiellen Ableitungen nach den entsprechenden Variablen. Dann wird $f(z) \cdot dz$ eine komplexwertige Differentialform. Wir berechnen deren Differential:

$$d(f(z) \cdot dz) = (-u_y - v_x) \cdot dx \wedge dy + i \cdot (u_x - v_y) \cdot dx \wedge dy.$$

Sei nun $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplex-differenzierbare Funktion, definiert auf einer offenen Teilmenge von \mathbb{C} . Bekanntlich beweist man in der elementaren komplexen Analysis (Satz von Goursat) zunächst, dass deren Real- und Imaginärteil glatte Funktionen im Sinne der reellen Analysis sind. Weiterhin gelten die *Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x.$$

Damit erhalten wir den

Satz 14. *Ist $f(z)$ eine komplex-differenzierbare Funktion, so ist die 1-Form $f(z) \cdot dz$ geschlossen,*

$$d(f(z) \cdot dz) = 0.$$

Eine unmittelbare Konsequenz ist der *Cauchy-Integralsatz*.

Satz 15. *Sei U eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und γ eine geschlossene Kurve in U , welche Rand eines singulären 2-Würfels ist. Das Integral*

$$\int_{\gamma} f(z) \cdot dz = 0$$

verschwindet für jede komplex-differenzierbare Funktion f .

Auf die gleiche Weise erhalten wir die Cauchy-Integralformel. Dazu setzen wir voraus, dass $f(z)$ eine komplex-differenzierbare Funktion in einer Umgebung der Kreisscheibe

$$K(z_0, M) = \{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| \leq M\}$$

ist. Wir fixieren $0 < \varepsilon \leq M$. Die Funktion $f(z)/(z - z_0)$ ist komplex-differenzierbar in $K(z_0, M) \setminus K(z_0, \varepsilon)$ und wegen $d((f(z) \cdot dz)/(z - z_0)) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial K(z_0, M)} \frac{f(z) \cdot dz}{z - z_0} &= \int_{\partial K(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z) \cdot dz}{z - z_0} = \int_{\partial K(z_0, \varepsilon)} (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{f(z) \cdot dz}{\|z - z_0\|^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial K(z_0, \varepsilon)} (\bar{z} - \bar{z}_0) f(z) \cdot dz. \end{aligned}$$

Wir berechnen das Differential der 1-Form $(\bar{z} - \bar{z}_0) f(z) \cdot dz$:

$$d((\bar{z} - \bar{z}_0) f(z) \cdot dz) = 2i \cdot f(z) \cdot dx \wedge dy.$$

Damit gilt

$$\int_{\partial K(z_0, M)} \frac{f(z) \cdot dz}{z - z_0} = \frac{2i}{\varepsilon^2} \int_{K(z_0, \varepsilon)} f(z) \cdot dx \wedge dy.$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung zeigt, dass eine Zahl z_ε in $K(z_0, \varepsilon)$ mit

$$\int_{K(z_0, \varepsilon)} f(z) \cdot dx \wedge dy = f(z_\varepsilon) \text{vol}(K(z_0, \varepsilon)) = \pi \cdot \varepsilon^2 \cdot f(z_\varepsilon)$$

existiert. Konvergiert ε gegen Null, so konvergiert $f(z_\varepsilon)$ gegen $f(z_0)$ und wir erhalten die *Cauchy-Integralformel*:

Satz 16.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(z_0, M)} \frac{f(z) \cdot dz}{z - z_0}.$$

Diese Formel ist grundlegend in der Funktionentheorie. Aus ihr ergibt sich zum Beispiel, dass jede komplex-differenzierbare Funktion in der Umgebung jedes Punktes in eine Potenzreihe entwickelt werden kann (analytische Funktion).

2.8. Der Fixpunktsatz von Brouwer

Unter einem *Fixpunkt* einer Abbildung $f : X \rightarrow X$ einer Menge in sich versteht man einen Punkt x_0 , welcher unter f nicht verändert wird, $f(x_0) = x_0$. In der Topologie sind einige Fixpunktsätze bekannt. Sie besagen, dass gewisse stetige Abbildungen metrischer Räume in sich zwingend mindestens einen Fixpunkt haben müssen. Ist zum Beispiel X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung, so hat nach dem *Banachschen Fixpunktsatz* die Abbildung f wenigstens einen Fixpunkt. Natürlich existieren (nicht kontrahierende) Abbildungen vollständiger metrischer Räume in sich ohne Fixpunkte. Die Translationen in \mathbb{R}^n sind Beispiele dafür. Man sagt, dass ein topologischer Raum X die *Fixpunkteigenschaft* besitzt, falls jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow X$ von X in sich einen Fixpunkt hat. Offenbar ist dies eine topologische Eigenschaft, d.h. homöomorphe Räume haben zugleich die Fixpunkteigenschaft oder auch nicht. Der Einheitskreis $X = S^1$ ist kompakt, hat jedoch nicht die Fixpunkteigenschaft; Drehungen sind stetige Abbildungen des Einheitskreises in sich ohne stationäre Punkte. Der *Brouwersche Fixpunktsatz* ist die Aussage, dass die abgeschlossene n -dimensionale Vollkugel vom Radius R

$$D^n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$$

ein metrischer Raum mit der Fixpunkteigenschaft ist. Wir beweisen diesen Satz zunächst für glatte Abbildungen der Kugel in sich und dehnen den Beweis danach mittels eines Approximationsargumentes auf stetige Abbildungen aus.

Satz 17. *Jede C^1 -Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ der n -dimensionalen Vollkugel in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, $f : D^n \rightarrow D^n$ hätte keine Fixpunkte. Dann definieren wir die Abbildung $F : D^n \rightarrow S^{n-1}$ von der Vollkugel in ihren Rand, die jedem Punkt $x \in D^n$ den Schnittpunkt der durch x und $f(x)$ verlaufenden Geraden mit der Sphäre S^{n-1} zuordnet. Die Formel für F

$$F(x) = x + \left[\sqrt{1 - \|x\|^2 + \left\langle x, \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|} \right\rangle^2} - \left\langle x, \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|} \right\rangle \right] \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$$

zeigt, dass es sich bei F um eine glatte Abbildung handelt. Weiterhin wirkt F auf dem Rand der Kugel als Identität, $F(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$. Seien F^1, \dots, F^n die Komponenten von F . Differenziert man die für alle $x \in D^n$ geltende Relation

$$\sum_{i=1}^n (F^i(x))^2 = 1,$$

so erhält man

$$2 \sum_{i=1}^n F^i \cdot dF^i = 2 \sum_{i,j=1}^n \left(F^i \frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right) dx^j = 0$$

und damit für jeden Index j

$$\sum_{i=1}^n F^i(x) \frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} = 0.$$

Daher hat das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^n \alpha^i \frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} = 0$$

die nichttriviale Lösung $(\alpha^1, \dots, \alpha^n) = (F^1(x), \dots, F^n(x)) \neq (0, \dots, 0)$, also verschwindet die Determinante der Matrix

$$\det \left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right) = 0.$$

Diese Beobachtung wenden wir nun auf die Differentialform

$$\omega^{n-1} = F^1 \wedge dF^2 \wedge \dots \wedge dF^n$$

an. Deren Differential verschwindet deshalb:

$$d\omega^{n-1} = dF^1 \wedge dF^2 \wedge \dots \wedge dF^n = \det \left(\frac{\partial F^i(x)}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = 0.$$

Nach dem Satz von Stokes erhalten wir für das Integral der Form ω^{n-1} über den Rand S^{n-1} des singulären Würfels D^n den Wert Null:

$$0 = \int_{D^n} d\omega^{n-1} = \int_{S^{n-1}} \omega^{n-1}.$$

Andererseits wirkt F auf der Sphäre S^{n-1} als Identität,

$$\omega^{n-1}|_{S^{n-1}} = x^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n|_{S^{n-1}},$$

und somit folgt

$$0 = \int_{S^{n-1}} x^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{D^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \text{vol}(D^n),$$

ein Widerspruch. \square

Satz 18 (Satz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ der n -dimensionalen Vollkugel in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

Beweis. Der Beweis wird mit Hilfe des Dichtheitssatzes von Stone-Weierstrass (vgl. etwa [Rudin, 1998], Satz 7.32) auf den Fall einer C^1 -Abbildung reduziert. Die Vollkugel D^n ist kompakt. Auf ihr betrachten wir den Ring $C^0(D^n)$ aller reellwertigen stetigen Funktionen sowie den Unterring \mathcal{R} derjenigen Funktionen, die Einschränkung auf D^n einer C^1 -Funktion mit echt größerem, offenem Definitionsbereich sind. Offensichtlich enthält der Unterring \mathcal{R} die konstanten Funktionen und trennt Punkte, nach dem Satz von Stone-Weierstrass liegt er demnach dicht in $C^0(U)$. Wendet man dies nun auf die Komponenten f^1, \dots, f^n von f an, so existiert insgesamt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^1 -Abbildung

$$p : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \|f(x) - p(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D^n.$$

Betrachte die umnormierte Abbildung $\tilde{p}(x) := p(x)/(1 + \varepsilon)$. Wegen

$$\|p(x)\| - \|f(x)\| \leq \|p(x) - f(x)\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|f(x)\| \leq 1$$

folgt $\|p(x)\| \leq 1 + \varepsilon$, also $\|\tilde{p}(x)\| \leq 1$. Damit ist \tilde{p} eine Abbildung der Vollkugel in sich. Weiterhin kann man \tilde{p} gegenüber f abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f(x) - \tilde{p}(x)\| &\leq \|f(x) - p(x)\| + \|p(x) - \tilde{p}(x)\| \leq \varepsilon + \|p(x)\| \cdot \left|1 - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right| \\ &\leq \varepsilon + (1 + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Insgesamt ist damit zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer C^1 -Abbildung $\tilde{p} : D^n \rightarrow D^n$ gezeigt, welche für jedes $x \in D^n$ die Abschätzung

$$\|f(x) - \tilde{p}(x)\| < 2\varepsilon$$

erfüllt. Hätte die stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ keinen Fixpunkt, so wäre die Zahl

$$\mu = \inf_{x \in D^n} \|f(x) - x\|$$

echt positiv. Wähle nun für $\varepsilon = \mu/2$ eine glatte Approximation \tilde{p} mit den eben genannten Eigenschaften; nach Satz 17 hätte diese einen Fixpunkt $x_0 \in D^n$, für den dann

$$\|f(x_0) - \tilde{p}(x_0)\| = \|f(x_0) - x_0\| < \mu$$

gelten müsste. Dies wäre aber ein Widerspruch zur Definition von μ . \square

Der Brouwersche Fixpunktsatz kann als eine Existenzaussage für reelle, nicht lineare Gleichungssysteme verstanden werden. Wir geben eine mögliche Anwendung an, die bei dem *Galerkin-Verfahren* eine wichtige Rolle spielt.

Satz 19. *Seien $g_1, \dots, g_n : D^n(R) \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, auf der Kugel $D^n(R)$ vom Radius R definierte Funktionen und gelte für alle Punkte $x = (x^1, \dots, x^n) \in S^{n-1}(R)$ der Sphäre $S^{n-1}(R)$ die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) \cdot x^i \geq 0.$$

Dann besitzt das Gleichungssystem

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_n(x) = 0$$

mindestens eine Lösung in $D^n(R)$.

Beweis. Wir setzen die Funktionen zu einer Abbildung $g : D^n(R) \rightarrow \mathbb{R}^n$ zusammen, $g(x) := (g_1(x), \dots, g_n(x))$. Wäre $g(x) \neq 0$ für alle Punkte $x \in D^n(R)$, so könnten wir die Abbildung $f : D^n(R) \rightarrow S^{n-1}(R)$

$$f(x) := -R \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$$

betrachten, deren Bild in der Sphäre $S^{n-1}(R)$ liegt. Nach dem Fixpunktsatz besitzt f einen solchen, der in $S^{n-1}(R)$ liegen muss. Damit existiert ein Punkt $x_0 \in S^{n-1}(R)$ mit

$$x_0 = -R \frac{g(x_0)}{\|g(x_0)\|}.$$

Daraus folgt $R^2 \cdot \|g(x_0)\| = -R \langle g(x_0), x_0 \rangle$, ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. \square

Die Annahme des letzten Satzes ist insbesondere für $g_i(x) = x^i + h_i(x)$ erfüllt, falls die Funktionen $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ langsamer als Linearformen wachsen,

$$|h_i(x)| \leq C_i \cdot \|x\|^{1-\varepsilon}.$$

Dann nämlich verhält sich die Summe

$$\sum_{i=1}^n g_i(x)x^i = R^2 + \sum_{i=1}^n h_i(x)x^i$$

auf der Sphäre $S^{n-1}(R)$ wie R^2 und wird positiv für hinreichend große Radien.

Korollar 1. Das Gleichungssystem

$$h_1(x) = x^1, \dots, h_n(x) = x^n$$

hat für beliebige stetige, durch $\|x\|^{1-\varepsilon}$ im Unendlichen beschränkte Funktionen h_i mindestens eine Lösung.

Beispiel 11. Das Gleichungssystem $x = \sqrt[4]{1+x^2+y^2}$, $y = \cos(x+y)$ hat in \mathbb{R}^2 mindestens eine Lösung, zum Beispiel

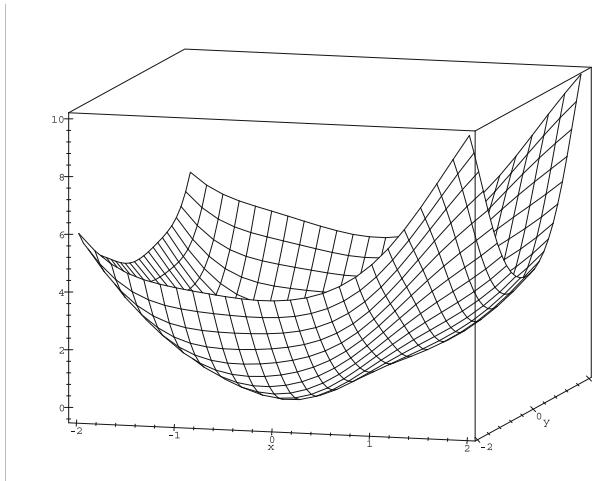
$$x = 1.2758079, \quad y = 0.14722564.$$

Beispiel 12. In \mathbb{R}^2 betrachten wir das Gleichungssystem

$$g_1(x, y) = x + e^{-(x+y)^2} = 0, \quad g_2(x, y) = y + e^{-(x-y)^2} = 0.$$

Das Bild zeigt den Graphen der Funktion $g_1(x, y) \cdot x + g_2(x, y) \cdot y$ über der Menge $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Aus ihm ersehen wir, dass diese Funktion positiv auf dem Kreis $S^1(2)$ vom Radius 2 ist. Daher hat das betrachtete Gleichungssystem mindestens eine Lösung in der Kreisscheibe $D^2(2)$. Eine numerische Berechnung der Lösung führt auf die Werte

$$x = -0.303122, \quad y = -0.789407.$$



Aufgaben

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ die Polarkoordinatenabbildung auf der „gelochten“ Ebene. Man zeige:

- a) Für die Windungsform gilt $f^*(\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}) = d\theta$;
- b) für die radiale Form $x dx + y dy$ gilt $f^*(x dx + y dy) = r dr$.

2. Man betrachte auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ die Windungsform $\omega^1 = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$ sowie die von dem ganzzahligen Parameter $n \in \mathbb{Z}$ abhängende Kurvenschar

$$c_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad c_n(t) = (\cos 2\pi n t, \sin 2\pi n t).$$

Man berechne das Kurvenintegral der Windungsform über die Kurve c_n und folgere, dass die Kurven c_n für verschiedene Parameterwerte n nicht homotop in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ sind.

3. Man berechne das äußere Differential folgender Differentialformen:

- a) $xy \, dx \wedge dy + 2x \, dy \wedge dz + 2y \, dx \wedge dz;$
- b) $z^2 \, dx \wedge dy + (z^2 + 2y) \, dx \wedge dz;$
- c) $13x \, dx + y^2 \, dy + xyz \, dz;$
- d) $e^x \cos(y) \, dx - e^x \sin(y) \, dy;$
- e) $x \, dy \wedge dz + y \, dx \wedge dz + z \, dx \wedge dy.$

4. Wir betrachten den \mathbb{R}^{2n} mit den Koordinaten x^1, \dots, x^{2n} und darauf die Differentialform vom Grad 2

$$\omega^2 = dx^1 \wedge dx^{n+1} + dx^2 \wedge dx^{n+2} + \dots + dx^n \wedge dx^{2n}.$$

Man beweise:

- a) Die Form ω^2 ist geschlossen;
- b) die n -te äußere Potenz von ω^2 steht mit der Volumenform in Beziehung über die Formel

$$\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2 = (-1)^{n(n-1)/2} n! dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}.$$

5. Gegenstand dieser Aufgabe ist es zu begründen, warum es Sinn macht, die anhand der Standardbasis e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n definierten Vektorfelder $x \mapsto (x, e_i)$ mit $\partial/\partial x^i$ zu bezeichnen. Wir nennen dieses Vektorfeld vorläufig E_i und können folglich jedes weitere Vektorfeld in der Form

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^n V^i(x) \cdot E_i$$

schreiben. Für jede Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge U des \mathbb{R}^n definieren wir eine neue Funktion, die Ableitung von f in Richtung des Vektorfeldes \mathcal{V} , durch

$$(\mathcal{V}(f))(x) := (Df_x)(\mathcal{V}(x)).$$

Man beweise die Formel

$$\mathcal{V}(f) = \left(\sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f),$$

welche bei Weglassen des Arguments f die gewünschte Begründung liefert.

6. Man beweise folgende Rechenregeln für Vektorfelder auf \mathbb{R}^3 :

- a) $\operatorname{div}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) = \langle \operatorname{rot}(\mathcal{V}_1), \mathcal{V}_2 \rangle - \langle \mathcal{V}_1, \operatorname{rot}(\mathcal{V}_2) \rangle;$

- b) $\text{rot}(\text{rot}(\mathcal{V})) = \text{grad}(\text{div}(\mathcal{V})) - \Delta(\mathcal{V})$, wobei der Laplace-Operator komponentenweise auf \mathcal{V} anzuwenden ist.

7. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

entlang der Kurve $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y = x^2\}$.

8. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_C \sin(y)dx + \sin(x)dy,$$

wobei C die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(0, \pi)$ und $(\pi, 0)$ ist.

9. Man betrachte auf \mathbb{R}^3 die Differentialform $\omega^2 = y dx \wedge dy$. Man bestimme alle 1-Formen $\eta^1 = p dx + q dy$, die $d\eta^1 = \omega^2$ erfüllen.

10. Man beweise die folgende Umkehrung einer der Aussagen von Beispiel 9: Ist ω^1 eine 1-Form, definiert auf der offenen Menge U , und ist das Kurvenintegral über ω^1 weganabhängig, dann ist ω^1 exakt.

Hinweis. Man beweise dies, indem man explizit eine „Stammfunktion“ konstruiere. In der Physik nennt man das zur 1-Form ω_V^1 gehörende Vektorfeld \mathcal{V} *konservativ*, falls es längs eines geschlossenen Weges γ keine Arbeit leistet, $\int_{\gamma} \omega_V^1 = 0$. Es gilt also: \mathcal{V} ist konservativ genau dann, wenn ω_V^1 exakt ist.

11. Wir betrachten den singulären 2-Würfel

$$f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}, \quad f(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

sowie auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ die 2-Form $\omega^2 = (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)/r^3$, wobei mit $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ der Abstand vom Ursprung gemeint ist.

- a) Man zeige, dass ω^2 geschlossen ist;
- b) man berechne das Integral von ω^2 über f ;
- c) man folgere aus den beiden vorherigen Eigenschaften, dass ω^2 auf $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ nicht exakt ist und dass es keine singuläre 3-Kette c^3 in $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ gibt, deren Rand gleich f ist, $\partial c^3 = f$.

12. Man beweise, dass durch das Integral eine eindeutige bilineare Abbildung

$$\int : H_{DR}^k(U) \times H_k^{\text{kub}}(U) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([\omega^k], [s^k]) \longmapsto \int_{s^k} \omega^k$$

definiert wird.

- 13.** Sei $\omega^1 = f(x) dx$ eine 1-Form auf dem Intervall $[0, 1]$ mit $f(0) = f(1)$. Man beweise, dass eine reelle Zahl p und eine Funktion g mit $g(0) = g(1)$ existieren, mit deren Hilfe sich ω^1 schreiben lässt als

$$\omega^1 = p dx + dg.$$

- 14** (Fortsetzung von 13). Sei η^1 eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ und ω^1 die Windungsform. Man zeige, dass eine Zahl p sowie eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ existieren derart, dass

$$\eta^1 = p \omega^1 + dg$$

ist. Folglich ist die Windungsform das erzeugende Element der ersten de-Rham-Kohomologie von $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Hinweis. Man betrachte die Polarkoordinatenabbildung f aus Aufgabe 1 und die darunter zurückgezogene Form $f^* \omega^1$. Diese muss sich in der Form $f^* \omega^1 = A(r, \theta) dr + B(r, \theta) d\theta$ schreiben lassen; insbesondere ist $B(r, \theta) d\theta$ eine (von einem Parameter r abhängende) 1-Form auf $[0, 2\pi]$, auf die man die vorherige Aufgabe anwenden kann.

- 15.** Man betrachte auf \mathbb{R}^3 die aus Beispiel 7 bekannte exakte Differentialform

$$\omega^2 = xy dx \wedge dy + 2x dy \wedge dz + 2y dx \wedge dz$$

sowie die obere Halbkugel $A \subset S^2$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Man zeige, dass das Integral von ω^2 über A verschwindet.

- 16.** Sei C der Kreis in \mathbb{R}^2 mit Gleichung $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ in Standardparametrisierung. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_C xy^2 dy - yx^2 dx$$

- a) direkt;
- b) unter Verwendung der Greenschen Formeln.

- 17.** Sei E die Ellipse der Gleichung $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > 0, b > 0$) in Standardparametrisierung. Man berechne mit Hilfe der Cauchy-Integralformel das Integral

$$\int_E \frac{dz}{z}$$

und folgere hieraus den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}.$$

- 18.** Sei \mathcal{H} ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $D = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}$ seine Einheitskugel. Hat D die Fixpunkteigenschaft?

19. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums X heißt *Retrakt* von X , falls eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r(a) = a$ für alle Punkte $a \in A$ existiert. Man beweise: Wenn X die Fixpunkteigenschaft hat, so hat auch jeder Retrakt A von X die Fixpunkteigenschaft.

20. Die Menge $A = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : xy = 0\}$ hat die Fixpunkteigenschaft.

Kapitel 3

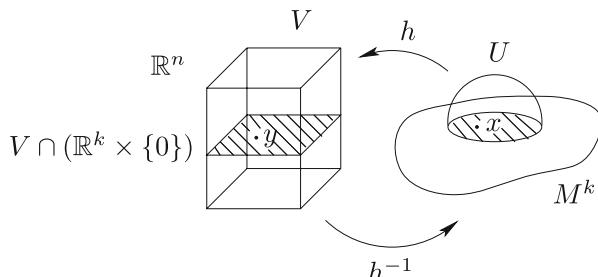
Vektoranalysis auf Mannigfaltigkeiten

3.1. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Im zweiten Kapitel entwickelten wir eine Integrationstheorie von Differentialformen über solchen Mengen, die sich als Bilder singulärer Ketten darstellen ließen. Diese Mengen können jedoch recht irregulär sein, und es ist schwer möglich, eine Differentialrechnung für nur auf ihnen definierte Funktionen zu entwickeln. Weitere Begriffe in diesem Zusammenhang wie etwa Tangentialraum, Vektorfeld etc. stehen gleichfalls nicht zur Verfügung. Aus diesem Grunde schränken wir jetzt die möglichen Teilmengen des \mathbb{R}^n auf eine solche Klasse ein, für die sowohl eine Differential- als auch eine Integralrechnung vollständig etabliert werden kann. Derartige Mengen heißen *Mannigfaltigkeiten* und sind – intuitiv gesprochen – dadurch gekennzeichnet, dass ihre Punkte lokal durch endlich viele reelle Parameter stetig (differenzierbar) beschreibbar sind, lokal also wie der euklidische Raum aussehen. Es war die grundlegende Idee von *B. Riemann* in seinem Habilitationsvortrag 1854, den Mannigfaltigkeitsbegriff einer die Raumvorstellungen modellierenden Geometrie zugrunde zu legen. In der Physik treten Mannigfaltigkeiten als Konfigurations- und Phasenräume von Teilchensystemen sowie in der Feldtheorie in Erscheinung. Die genaue Beschreibung dessen, was eine Untermannigfaltigkeit sein soll, ist Gegenstand der nächsten Definition.

Definition 1. Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^n heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand*, falls zu jedem Punkt $x \in M$ offene Mengen $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie ein Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V$ derart existieren, dass das Bild $h(U \cap M)$ bereits im Teilraum $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ enthalten ist:

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^{k+1} = \dots = y^n = 0\}.$$



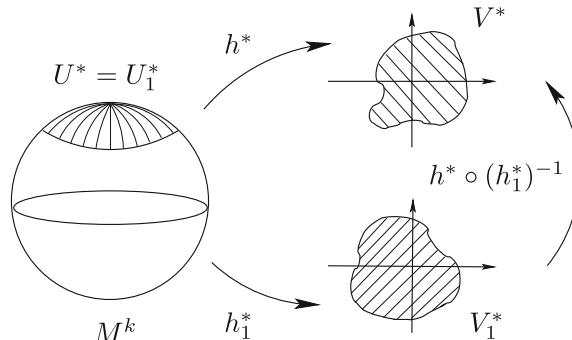
Die Menge $U^* := U \cap M$ samt der Abbildung $h^* := h|_{U^*} : U^* \rightarrow V^* := V \cap \mathbb{R}^k$ nennt man eine *Karte* um den Punkt x der Mannigfaltigkeit. Die Mengen U^* und V^* sind jeweils offene Teilmengen von M und \mathbb{R}^k .

Eine Familie die Mannigfaltigkeit M überdeckender Karten heißt ein *Atlas*. Den Begriff „Diffeomorphismus“ kann man im Sinne einer beliebigen C^l -Regularität ($l \geq 1$) verstehen, entsprechend ergeben sich dann Mannigfaltigkeiten der Regularitätsklasse C^l . Der Einfachheit halber wollen wir in diesem Kapitel alle Abbildungen, Mannigfaltigkeiten etc. der Klasse C^∞ annehmen und dann einfach von glatten Abbildungen, Mannigfaltigkeiten etc. sprechen. Wir merken an, dass ohne jegliche Änderungen die formulierten Aussagen unter der Voraussetzung einer C^2 -Regularität gelten.

Sind nun zwei Karten (h^*, U^*) und (h_1^*, U_1^*) der Mannigfaltigkeit gegeben, für die der Durchschnitt $U^* \cap U_1^* \neq \emptyset$ nicht leer ist, so stellt sich die Frage, wie sich jene zueinander verhalten. Die Abbildung

$$h^* \circ (h_1^*)^{-1} : h_1(U^* \cap U_1^*) \longrightarrow h^*(U^* \cap U_1^*)$$

heißt der *Kartenübergang* von der einen zur anderen Karte. Die Mengen $h_1(U^* \cap U_1^*)$ und $h^*(U^* \cap U_1^*)$ sind offene Teilmengen des Koordinatenraums \mathbb{R}^k und die Kartenübergangsfunktion $h^* \circ (h_1^*)^{-1}$ ist offensichtlich ein Diffeomorphismus.



Der Begriff der Dimension bedarf für Mannigfaltigkeiten ebenfalls einer Erläuterung. Wird eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^k homöomorph auf eine offene Teilmenge des Raums \mathbb{R}^l abgebildet, so stimmen die Dimensionen überein, $k = l$. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Differenzierbarkeit, die für uns immer erfüllt ist, ist dies einfach zu beweisen: Das Differential eines Diffeomorphismus in einem beliebigen Punkt liefert einen linearen Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen $T_x \mathbb{R}^k$ und $T_y \mathbb{R}^l$ und daraus folgt sofort $k = l$. Der entsprechende Sachverhalt für Homöomorphismen ist ein auf Brouwer (1910) zurückgehender, tiefliegender Satz der Topologie. In jedem Fall ist die in der Definition der Mannigfaltigkeit auftretende Zahl k eindeutig bestimmt und wird die *Dimension der Mannigfaltigkeit* genannt. Mitunter werden wir die Dimension einer Mannigfaltigkeit als oberen Index schreiben, also die Mannigfaltigkeit auch mit M^k bezeichnen.

Im ersten Satz beweisen wir, dass durch Gleichungen definierte Teilmengen des \mathbb{R}^n unter gewissen Voraussetzungen Untermannigfaltigkeiten sind. Dies wird uns zu vielen Beispielen führen.

Satz 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine glatte Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$M = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

Hat das Differential $Df(x)$ in jedem Punkte $x \in M$ der Menge M den maximalen Rang ($n - k$), so ist M eine glatte, k -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand von \mathbb{R}^n .

Beweis. Der Beweis beruht auf einer direkten Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. Ist $x_0 \in M$ ein Punkt aus M , so existieren eine offene Umgebung $x_0 \in U_{x_0} \subset U$ und ein Diffeomorphismus $h_{x_0} : U_{x_0} \rightarrow h_{x_0}(U_{x_0}) \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass die Abbildung $f \circ h_{x_0}^{-1} : h_{x_0}(U_{x_0}) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ gegeben ist durch die Formel

$$f \circ h_{x_0}^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^{k+1}, \dots, x^n).$$

Daraus folgt $U_{x_0} \cap M = h_{x_0}^{-1}(h_{x_0}(U_{x_0}) \cap \mathbb{R}^k)$ und wir haben die gesuchte Karte um den Punkt $x_0 \in M$ konstruiert. \square

Beispiel 1. Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Beispiel 2. Die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Zum Beweis betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \|x\|^2 - 1$. Dann gilt $Df(x) = (2x^1, \dots, 2x^{n+1})$ und der Rang der $(1 \times n)$ -Matrix $Df(x)$ auf S^n beträgt 1. Aus Satz 1 ergibt sich, dass S^n eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Beispiel 3. Wir betrachten eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie deren Graphen

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

$G(f)$ ist die Nullstellenmenge der Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, definiert durch $\Phi(x, y) = f(x) - y$, und das Differential $D\Phi$ hat in jedem Punkt den maximalen Rang m . Daher ist $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel 4. Der Rotationstorus ist die durch die Gleichung

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)^2 = r_2^2 - z^2$$

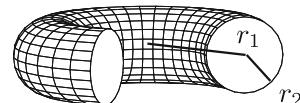
in \mathbb{R}^3 beschriebene Fläche ($0 < r_2 < r_1$).

Eine Parametrisierung erhält man durch die Formeln

$$x = (r_1 + r_2 \cos \varphi) \cos \psi, \quad y = (r_1 + r_2 \cos \varphi) \sin \psi, \quad z = r_2 \sin \varphi$$

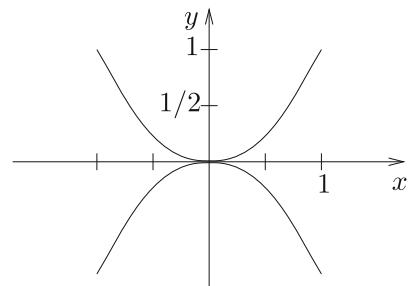
mit den Parametern $0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$. Die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - r_1)^2 - r_2^2 + z^2$ sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

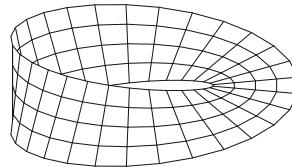


und man sieht sofort, dass der Vektor Df in keinem Punkte des Rotationstorus verschwindet. Satz 1 ist demnach anwendbar und zeigt, dass durch die betrachtete Gleichung eine Mannigfaltigkeit definiert wird.

Beispiel 5. Nicht jede durch eine Gleichung definierte Menge ist eine Mannigfaltigkeit. Betrachten wir beispielsweise in \mathbb{R}^2 die durch die Gleichung $x^4 = y^2$ beschriebene Menge. In einer Umgebung des Punktes $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist diese Menge keine Mannigfaltigkeit. In der Tat, eine Umgebung der Menge zerfällt nach Herausnahme des Punktes in vier Komponenten, kann daher nicht homöomorph zu einem Intervall sein. An der Stelle $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist die Voraussetzung von Satz 1, das Differential von $f(x, y) = x^4 - y^2$ betreffend, nicht erfüllt.



Beispiel 6. Es existieren andererseits Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^n , welche sich nicht durch Gleichungssysteme mit der Bedingung aus Satz 1 darstellen lassen. Später werden wir sehen, dass jede im Sinne von Satz 1 gegebene Mannigfaltigkeit eine spezielle Eigenschaft haben muss, sie ist orientierbar. Ein Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit ist das sog. *Möbiusband*.



Eine mögliche Parametrisierung ist

$$x = \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u), \quad y = \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u), \quad z = v \sin(u/2)$$

mit den Parametern $0 \leq u \leq 2\pi$, $-\pi \leq v \leq \pi$.

Mannigfaltigkeiten können außer durch Gleichungen auch durch die Angabe ihrer lokalen Parametrisierungen (Karten) definiert werden. Wir führen dieses Konstruktionsprinzip näher aus.

Satz 2. Sei M eine Teilmenge von \mathbb{R}^n und existiere zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine glatte Abbildung $f : W \rightarrow U$ derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $f(W) = M \cap U$;
- (2) f ist bijektiv;
- (3) das Differential $Df(y)$ hat den Rang k in allen Punkten $y \in W$;

(4) $f^{-1} : M \cap U \rightarrow W$ ist stetig.

Dann ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand in \mathbb{R}^n .

Beweis. Für einen beliebigen Punkt $x \in M$ wählen wir die Abbildung $f : W \rightarrow U$ mit den angegebenen Eigenschaften und bezeichnen mit y das Urbild von x , $f(y) = x$. Das Differential hat den Rang k und daher können wir o. B. d. A.

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial y^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial y^k} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial y^k} \end{bmatrix} \neq 0$$

voraussetzen. Wir betrachten die durch $g(a, b) := f(a) + (0, b)$ definierte Abbildung $g : W \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann stimmt die Determinante der Ableitung von g mit der obigen Determinante überein und ist insbesondere ungleich null. Unter Anwendung des Satzes über die Inversabbildung der Differentialrechnung erhalten wir zwei offene Mengen $(y, 0) \in V_1$ und $x \in V_2$ in \mathbb{R}^n derart, dass $g : V_1 \rightarrow V_2$ ein Diffeomorphismus ist. Diesen invertieren wir und bezeichnen den inversen Diffeomorphismus mit $h := g^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Nach Voraussetzung ist f^{-1} stetig und somit existiert eine offene Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\{f(a) : (a, 0) \in V_1\} = f(W) \cap \mathcal{O}.$$

Nun betrachten wir die Mengen $\tilde{V}_2 := V_2 \cap \mathcal{O}$ und $\tilde{V}_1 = g^{-1}(V_2)$. Dann gilt

$$\tilde{V}_2 \cap M = V_2 \cap \mathcal{O} \cap M = \{g(a, 0) : (a, 0) \in V_1\}$$

und wir erhalten

$$h(\tilde{V}_2 \cap M) = g^{-1}(\tilde{V}_2 \cap M) = \tilde{V}_1 \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Die Bedingung an eine Mannigfaltigkeit ist also in jedem Punkte der Menge M erfüllt. \square

Wir erweitern jetzt den Mannigfaltigkeitsbegriff dahingehend, dass wir auch Randpunkte zulassen werden. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass der Rand seinerseits eine glatte, randlose Mannigfaltigkeit ist (keine Ecken oder Kanten). Unter dem k -dimensionalen Halbraum \mathbb{H}^k verstehen wir die Menge

$$\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}.$$

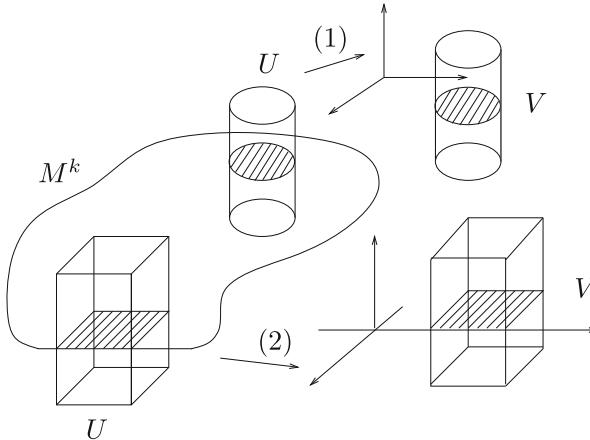
Definition 2. Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^n heißt k -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit Rand), falls für jeden Punkt $x \in M$ eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

- (1) Es existieren offene Mengen $x \in U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V$ mit

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

- (2) Es existieren offene Mengen $x \in U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V$, dessen k -te Komponente h^k im Punkte x verschwindet, $h^k(x) = 0$, mit

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{H}^k \times \{0\}).$$



Beide Bedingungen (1) und (2) können nicht gleichzeitig für ein und denselben Punkt $x \in M$ der Mannigfaltigkeit gelten. Andernfalls hätten wir Diffeomorphismen $h_1 : U_1 \rightarrow V_1$, $h_2 : U_2 \rightarrow V_2$ mit

$$h_1(U_1 \cap M) = V_1 \cap \mathbb{R}^k \quad \text{und} \quad h_2(U_2 \cap M) = V_2 \cap \mathbb{H}^k, \quad h_2^k(x) = 0.$$

Die Menge $h_1(U_1 \cap U_2)$ wäre dann eine offene Teilmenge in \mathbb{R}^k , welche unter der Kartenübergangsabbildung $h_2 \circ h_1^{-1}$ diffeomorph auf $h_2(U_1 \cap U_2)$ abgebildet wird. Wegen $h_2^k(x) = 0$ enthält die Menge $h_2(U_1 \cap U_2)$ einen Punkt aus dem Rand $\partial \mathbb{H}^k = \mathbb{R}^{k-1}$ des Halbraums, ist also keinesfalls offen in \mathbb{R}^k . Insgesamt widerspricht dies dem Satz über die Inversabbildung. Diese Überlegung rechtfertigt die folgende

Definition 3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit. Ein *Randpunkt* von M ist ein Punkt $x \in M$, für den die Bedingung (2) der Definition 2 erfüllt ist. Die Menge aller Randpunkte bezeichnet man mit ∂M und nennt sie den *Rand von M* .

Satz 3. Sei M eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist der Rand ∂M entweder leer oder eine glatte, $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand,

$$\partial\partial M = \emptyset.$$

Beweis. Wir fixieren einen Randpunkt $x \in \partial M$ und wählen offene Mengen $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{H}^k \times \{0\}).$$

Für jeden weiteren Randpunkt $x^* \in U \cap \partial M$ muss nach der zuvor angestellten Überlegung die k -te Komponente von h in x^* verschwinden, $h^k(x^*) = 0$. Also gilt

$$h(U \cap \partial M) = V \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\})$$

und somit ist $(h|_{U \cap \partial M}, U \cap \partial M)$ eine Karte auf dem Rand ∂M . \square

Beispiel 7. Der Rand des Möbiusbandes ist eine geschlossene räumliche Kurve.

Beispiel 8. Die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre S^{n-1} ist der Rand der n -dimensionalen Kugel D^n .

3.2. Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten

Überdeckt man eine Mannigfaltigkeit mit Karten, so ist jedes Kartengebiet eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und damit eine Menge, auf der aus der Analysis eine Differentialrechnung bekannt ist. Auf diese Weise lässt sich eine Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten entwickeln.

Wie im vorangegangenen Abschnitt gehen wir nun von einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^k und einer Karte $h : U \rightarrow V$ um einen Punkt x aus und bezeichnen mit $y := h(x)$ den Bildpunkt von x unter dieser Kartenabbildung. Dann ist $h^{-1} : V \rightarrow U$ glatt und $(Dh^{-1})_y = (h^{-1})_{*,y}$ eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen an \mathbb{R}^n (siehe Definition 2, Kap. 2)

$$(h^{-1})_{*,y} : T_y \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x \mathbb{R}^n.$$

Definition 4. Unter dem *Tangentialraum der Mannigfaltigkeit M^k* im Punkt x verstehen wir das Bild von $T_y \mathbb{R}^k$ unter der Abbildung $(h^{-1})_{*,y}$:

$$T_x M^k := (h^{-1})_{*,y}(T_y \mathbb{R}^k) \subset T_x \mathbb{R}^n.$$

Der Tangentialraum $T_x M^k$ ist ein k -dimensionaler Vektorraum, weil das Differential des Diffeomorphismus h^{-1} injektiv ist. Weiterhin müssen wir uns überlegen, dass der soeben definierte Tangentialraum an die Mannigfaltigkeit nicht von der Wahl der Karte abhängt. Dies ergibt sich sofort aus der nun folgenden äquivalenten Beschreibung des Tangentialraums.

Satz 4. Der Tangentialraum $T_x M^k$ besteht aus allen Vektoren $(x, v) \in T_x \mathbb{R}^n$, für die eine glatte Kurve $\gamma : [0, \pm \varepsilon] \rightarrow M^k \subset \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ existiert.

Beweis. Ein Vektor $\nu = (x, v) \in T_x M^k$ im Tangentialraum lässt sich darstellen als $v = (Dh^{-1})_y(w)$ für einen gewissen Vektor $w \in \mathbb{R}^k$. Das Bild unter h^{-1} der durch y in Richtung des Vektors w verlaufenden Geraden in \mathbb{R}^k ist die gesuchte Kurve $\gamma(t)$: aus

$$\gamma(t) = h^{-1}(y + tw)$$

folgt sofort $\gamma(0) = h^{-1}(y) = x$ und aus der Kettenregel erhalten wir deren Tangentialvektor

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (h^{-1}(y + tw))|_{t=0} = (Dh^{-1})_y(w) = v.$$

Die Umkehrung beweist man analog. □

Ist die Mannigfaltigkeit M^k durch $(n - k)$ Gleichungen definiert und sind die Differentiale der sie beschreibenden Funktionen linear unabhängig, so kann ihr Tangentialraum einfach angegeben werden.

Satz 5. Seien $f_1, \dots, f_{n-k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen und gelte

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-k} \neq 0.$$

Der Tangentialraum $T_x M^k$ der Mannigfaltigkeit

$$M^k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$$

besteht aus allen Vektoren $\nu \in T_x \mathbb{R}^n$ mit

$$df_1(\nu) = \dots = df_{n-k}(\nu) = 0.$$

Insbesondere sind die euklidischen Gradientenvektorfelder $\text{grad}(f_1), \dots, \text{grad}(f_{n-k})$ in den Punkten von M^k orthogonal zu den Tangentialräumen der Mannigfaltigkeit.

Beweis. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^k$ eine Kurve in M^k , so differenzieren wir die Gleichung

$$f_1(\gamma(t)) = \dots = f_{n-k}(\gamma(t)) = 0$$

nach dem Kurvenparameter t und erhalten

$$df_1(\dot{\gamma}(t)) = \dots = df_{n-k}(\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

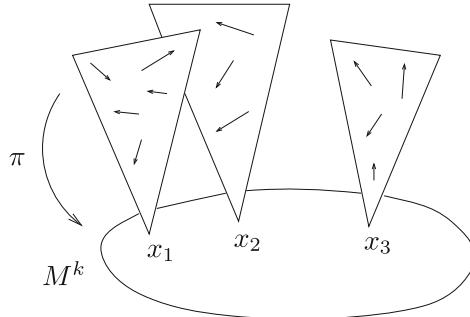
Der Tangentialraum $T_x M^k$ ist somit im Teilraum aller derjenigen Vektoren $\nu \in T_x \mathbb{R}^n$ enthalten, auf denen alle Differentiale df_1, \dots, df_{n-k} verschwinden. Ein Vergleich der Dimensionen dieser Vektorräume zeigt, dass diese zusammenfallen müssen.

□

Die Menge aller Tangentialräume an die Mannigfaltigkeit nennt man das *Tangentialbündel* von M^k und bezeichnet es mit TM^k . Es ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2k$. Wir können nämlich – zumindest in der Situation, dass M^k durch die Gleichungen $f_1 = \dots = f_{n-k} = 0$ gegeben ist – die Menge TM^k als Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ wiederum durch die Gleichungen

$$f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0 \quad \text{und} \quad df_1(x, v) = \dots = df_{n-k}(x, v) = 0$$

erhalten. Hierbei handelt es sich um $2(n - k)$ Bedingungen in \mathbb{R}^{2n} . Die entsprechende Funktionaldeterminante verschwindet nicht, weil die Differentiale df_i linear unabhängig sind. Durch die Formel $\pi(x, v) := x$ wird eine Projektion $\pi : TM^k \longrightarrow M^k$ des Tangentialbündels auf die Mannigfaltigkeit definiert, die jedem Vektor seinen Fußpunkt zuordnet.



Beispiel 9. Wir betrachten die Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Das Differential der Funktion $\|x\|^2 - 1$ ist $2(x^1, \dots, x^{n+1})$ und somit besteht der Tangentialraum an die Sphäre in einem Punkte aus allen dazu orthogonalen Vektoren:

$$TS^n = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1, \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Definition 5. Seien $M^k \subset \mathbb{R}^n$ und $N^l \subset \mathbb{R}^m$ zwei Mannigfaltigkeiten und $f : M^k \rightarrow N^l$ eine stetige Abbildung. Wir nennen f eine *differenzierbare Abbildung*, falls für jede Karte $h^{-1} : V \rightarrow M^k$ der Mannigfaltigkeiten M^k die auf der offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^k$ definierte Abbildung $f \circ h^{-1} : V \rightarrow N^l \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar ist.

Wie im euklidischen Raum können wir für glatte Abbildungen deren Differential als lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen einführen. Ist $(x, v) \in T_x M^k$ ein Tangentialvektor, so wählen wir eine Kurve $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M^k$ mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Dann ist $f \circ \gamma(t)$ eine durch $f(x) \in N^l$ verlaufende Kurve in N^l und ihre Tangente beschreibt die Anwendung des Differentials auf den gegebenen Tangentialvektor

$$f_{*,x}(x, v) := \left(f(x), \frac{d}{dt} f \circ \gamma(0) \right).$$

Das Differential einer glatten Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten hat die aus dem euklidischen Raum wohlbekannten Eigenschaften, wir fassen sie nochmals zusammen:

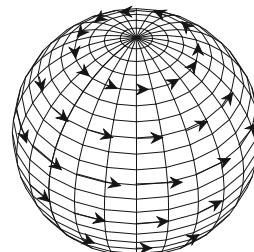
Satz 6. Das Differential $f_{*,x} : T_x M^k \rightarrow T_{f(x)} N^l$ einer glatten Abbildung ist eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen und für die Superposition zweier glatter Abbildungen f und g gilt

$$(g \circ f)_{*,x} = g_{*,f(x)} \circ f_{*,x}.$$

Die angeführte Formel ist die sog. *Kettenregel*, welche die Ableitung der Superposition zweier Abbildungen durch die einzelnen Ableitungen ausdrückt.

Definition 6. Ein *Vektorfeld* \mathcal{V} einer Mannigfaltigkeit M^k ist eine Zuordnung, welche in jedem Punkt $x \in M^k$ einen Vektor $\mathcal{V}(x) \in T_x M^k$ im entsprechenden Tangentialraum auszeichnet. Wird die Abbildung $\mathcal{V} : M^k \rightarrow T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ glatt, so sprechen wir von einem glatten Vektorfeld der Mannigfaltigkeit. Vektorfelder kann man wiederum addieren und mit Funktionen multiplizieren, der Vektorraum der glatten Vektorfelder ist ein Modul über dem Ring $C^\infty(M^k)$ aller C^∞ -Funktionen auf M^k .

Beispiel 10. Durch die Formel $\mathcal{V}(x) = (x, (x^2, -x^1, 0))$ wird ein Vektorfeld auf der 2-dimensionalen Sphäre definiert, welches entlang der Breitenkreise verläuft.



Betrachten wir eine Kartenabbildung $h : V \rightarrow M^k \subset \mathbb{R}^n$, die wir diesmal und mitunter auch später mit h statt mit h^{-1} bezeichnen wollen, so sind $h_*(\partial/\partial y^i)$ auf der Teilmenge $h(V) \subset M^k$ definierte, an M^k tangentiale Vektorfelder und sie bilden eine Basis in jedem der Tangentialräume. Der Einfachheit halber und sofern feststeht, auf welche Karte sich bezogen wird, bezeichnet man diese Vektorfelder

der Mannigfaltigkeit auch mit $\partial/\partial y^i$. Jedes andere Vektorfeld \mathcal{V} kann auf der Teilmenge $h(V) \subset M^k$ als Linearkombination

$$\mathcal{V}(y) = \sum_{i=1}^k V^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

dargestellt werden. Dabei sind $V^i(y)$ auf der Menge $h(V)$ definierte Funktionen, welche wir unter Verwendung der Kartenabbildung hin und wieder auch als Funktionen auf der Parametermenge V verstehen wollen. Diese Funktionen heißen die *Komponenten des Vektorfeldes* \mathcal{V} bzgl. der fixierten Karte.

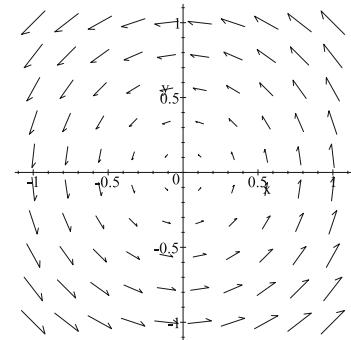
Beispiel 11. In den euklidischen Koordinaten des \mathbb{R}^2 betrachten wir das Vektorfeld

$$\mathcal{V} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Führen wir in $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ Polarkoordinaten durch die Formel

$$h(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ein ($0 < r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), so entspricht \mathcal{V} dem Vektorfeld $\partial/\partial\varphi$.



In der Tat, wir erhalten durch Differenzieren der Abbildung h die Formeln

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial r} = h_* \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x^1} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right)$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = h_* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x^1} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x^2} = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Differenzierbare Funktionen $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ können nach Vektorfeldern \mathcal{V} abgeleitet werden. In einem festen Punkt $x \in M^k$ wählen wir eine Kurve $\gamma : [0, \varepsilon] \rightarrow M^k$ mit den Anfangsbedingungen $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x)$. Die *Ableitung von f an der Stelle x in Richtung* $\mathcal{V}(x)$ wird jetzt durch die Formel

$$\mathcal{V}(f)(x) := \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)|_{t=0}$$

definiert. Damit entsteht eine auf der Mannigfaltigkeit M^k definierte C^∞ -Funktion $\mathcal{V}(f)$. Im folgenden Satz fassen wir die Eigenschaften dieser Differentiation zusammen:

Satz 7.

- (1) $(\mathcal{V} + \mathcal{W})(f) = \mathcal{V}(f) + \mathcal{W}(f);$
- (2) $\mathcal{V}(f_1 + f_2) = \mathcal{V}(f_1) + \mathcal{V}(f_2);$
- (3) $\mathcal{V}(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{V}(f_1) \cdot f_2 + f_1 \cdot \mathcal{V}(f_2);$

- (4) Ist in einer Karte das Vektorfeld \mathcal{V} in der Gestalt $\mathcal{V} = \sum V^i(y) \partial/\partial y^i$ dargestellt, so gilt

$$\mathcal{V}(f) = \sum_{i=1}^k V^i(y) \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i}.$$

Beweis. Wir zeigen die unter (4) angegebene Formel, die anderen Behauptungen ergeben sich unmittelbar. Entspricht dem Punkt $x \in M^k$ unter der Kartenabbildung $h : V \rightarrow M^k$ der Punkt $y \in V$, so wird $\gamma(t) = h(y + t(V^1(y), \dots, V^k(y)))$ eine Kurve in M^k mit den Anfangsbedingungen $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}(x)$. Die gewünschte Formel für $\mathcal{V}(f)(x)$ erhalten wir aus der Kettenregel:

$$\mathcal{V}(f)(x) = \frac{d}{dt} f \circ g (y + t(V^1(y), \dots, V^k(y))) = \sum_{i=1}^k V^i(y) \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i}. \quad \square$$

Als nächstes besprechen wir den wichtigen Begriff der Riemannschen Metrik einer Untermannigfaltigkeit M^k des euklidischen Raums. Das Skalarprodukt in \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit $\langle v, w \rangle$ und schränken es auf die Tangentialräume der Untermannigfaltigkeit ein.

Definition 7. Sei $M^k \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. In jedem Tangentialraum $T_x M^k$ wird durch die Formel

$$g_x((x, v), (x, w)) := \langle v, w \rangle$$

ein Skalarprodukt definiert. Die Familie $\{g_x\}_{x \in M}$ aller dieser Skalarprodukte heißt die *Riemannsche Metrik* von M^k .

In einer Karte $h : V \rightarrow M^k$ lässt sich die Riemannsche Metrik lokal durch die auf der Menge V definierten Funktionen g_{ij}

$$g_{ij}(y) = g_{h(y)} \left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y^i}, \frac{\partial h}{\partial y^j} \right\rangle$$

beschreiben. Die Komponenten der Riemannschen Metrik $g_{ij}(y)$ sind demnach die Skalarprodukte der partiellen Ableitungen der als vektorwertig aufgefassten Kartenabbildung h . Wenn klar ist, welche Karte gemeint ist, lässt man das h häufig weg (so auch in den folgenden Beispielen). Die $(k \times k)$ -Matrix (g_{ij}) ist symmetrisch und für alle $y \in V$ positiv definit. Mit $g(y)$ bezeichnen wir ihre Determinante, die stets eine positive Funktion ist. Wie bereits im ersten Kapitel für Bilinearformen geschehen, wollen wir vereinbaren, unter $(g^{ij}(y))$ die zu $(g_{ij}(y))$ inverse Matrix zu verstehen.

Beispiel 12. In den euklidischen Koordinaten des \mathbb{R}^n ist $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$ konstant eins für gleiche Indizes $i = j$ und ansonsten null.

Beispiel 13. In den Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ erhalten wir aus den Gleichungen (1) und (2) sofort folgende Koeffizienten der gewöhnlichen euklidischen Metrik

$$(3) \quad g_{rr} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 1, \quad g_{r\varphi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = r^2.$$

Insbesondere gilt $g(r, \varphi) = r^2$ in den Polarkoordinaten der Ebene.

Beispiel 14. Auf der Sphäre $S^2 - \{N, S\} \subset \mathbb{R}^3$ ohne Nord- und Südpol betrachten wir die durch

$$h(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 < \psi < \pi/2$$

definierten *sphärischen Koordinaten*. Eine Berechnung der Tangentialvektorfelder ergibt

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \cos \psi \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos \varphi \cos \psi \frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = -\cos \varphi \sin \psi \frac{\partial}{\partial x^1} - \sin \varphi \sin \psi \frac{\partial}{\partial x^2} + \cos \psi \frac{\partial}{\partial x^3},$$

woraus sofort die entsprechenden Formeln für die Koeffizienten der Riemannschen Metrik der Sphäre resultieren:

$$(6) \quad g_{\varphi\varphi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = \cos^2 \psi, \quad g_{\varphi\psi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right\rangle = 0, \quad g_{\psi\psi} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \psi}, \frac{\partial}{\partial \psi} \right\rangle = 1.$$

Die Determinante der sphärischen Metrik in diesen Koordinaten beträgt $g(\varphi, \psi) = \cos^2 \psi$; an ihr sieht man, dass die sphärischen Koordinaten an den Polen ausarten, weswegen wir diese herausgenommen hatten.

Wir benutzen die Riemannsche Metrik g einer Mannigfaltigkeit, um jeder glatten Funktion ein Vektorfeld zuzuordnen, den sog. Gradienten. Ist $x \in M^k$ ein fixierter Punkt und $\nu \in T_x M^k$ ein Tangentialvektor, so wählen wir zunächst ein Vektorfeld \mathcal{V} mit $\mathcal{V}(x) = \nu$. Durch die Zuordnung $\nu \mapsto \mathcal{V}(f)(x)$ entsteht ein lineares Funktional $T_x M^k \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum und es existiert ein Vektor $\text{grad}(f)(x) \in T_x M^k$ derart, dass

$$\mathcal{V}(f)(x) = g_x(\text{grad}(f)(x), \mathcal{V}(x))$$

für alle Vektorfelder gilt. Das Vektorfeld $\text{grad}(f)$ nennt man den *Gradienten* der glatten Funktion $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Satz 8. Sei $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $h : V \rightarrow M^k$ eine Karte mit den Koeffizienten g_{ij} der Riemannschen Metrik. Dann gilt

$$\text{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Beweis. Wir berechnen

$$g \left(\sum_{i,j=1}^k \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial y^m} \right) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i} g^{ij} g_{jm} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i} \delta_m^i = \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^m}.$$

Gemäß Satz 7 ist die rechte Seite genau $(\partial/\partial y^m)(f)$, woraus nach Definition des Gradienten die Behauptung folgt. \square

Beispiel 15. Die Formel für den Gradienten einer auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ des euklidischen Raums definierten Funktion lautet in kartesischen Koordinaten

$$(7) \quad \text{grad}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Beispiel 16. In den Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ gilt

$$g^{rr} = 1, \quad g^{r\varphi} = 0, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2}$$

und damit ergibt die Formel des letzten Satzes für eine Funktion f in den Variablen r, φ

$$(8) \quad \text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} g^{rr} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Beispiel 17. In sphärischen Koordinaten auf $S^2 - \{N, S\}$ ist

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \psi}, \quad g^{\varphi\psi} = 0, \quad g^{\psi\psi} = 1,$$

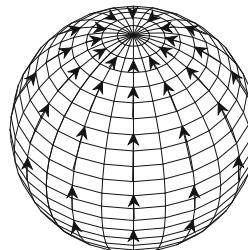
und wir erhalten folgende Formel für den Gradienten einer Funktion $f : S^2 - \{N, S\} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(9) \quad \text{grad}(f) = \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Betrachten wir zum Beispiel die Höhenfunktion $f(x^1, x^2, x^3) = x^3$ auf der Sphäre, so gilt in Kugelkoordinaten $f(\varphi, \psi) = \sin \psi$, und daher erhalten wir

$$\text{grad}(f) = \cos \psi \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

Daraus ersehen wir, dass das Vektorfeld $\text{grad}(f)$ auf der Sphäre S^2 genau in zwei Punkten verschwindet, im Nord- und im Südpol.



Vektorfelder und Riemannsche Metrik können in verschiedenen Koordinaten dargestellt werden. Wir leiten nun die Transformationsformeln für ihre Komponenten in unterschiedlichen Karten her. Zu diesem Zweck fixieren wir zwei Karten $h : V \rightarrow M^k$ und $\tilde{h} : \tilde{V} \rightarrow M^k$ und wollen die Punkte aus V mit $y = (y^1, \dots, y^k)$, diejenigen aus \tilde{V} mit $z = (z^1, \dots, z^k)$ bezeichnen. Die Kartenübergangsabbildungen nennen wir $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^k) := \tilde{h}^{-1} \circ h$ sowie $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^k) := h^{-1} \circ \tilde{h}$.

Satz 9.

- (1) Gegeben sei ein Vektorfeld \mathcal{V} mit den Komponenten V^1, \dots, V^k in der Karte h sowie den Komponenten $\tilde{V}^1, \dots, \tilde{V}^k$ in der Karte \tilde{h} . Dann gilt für jeden Index l zwischen 1 und k :

$$V^l(y) = \sum_{i=1}^k \tilde{V}^i(\phi(y)) \frac{\partial \psi^l}{\partial z^i}(\phi(y));$$

- (2) die Koeffizienten der Riemannschen Metrik g_{ij} bzgl. der Karte h und \tilde{g}_{ij} bzgl. der Karte \tilde{h} sind verbunden mittels der Formel

$$g_{ij}(y) = \sum_{l,m=1}^k \frac{\partial \phi^l}{\partial y^i} \frac{\partial \phi^m}{\partial y^j} \tilde{g}_{lm}(\phi(y)).$$

Insbesondere gilt für die Determinante der Riemannschen Metrik

$$g(y) = \det \left(\frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right)^2 \cdot \tilde{g}(\phi(y)).$$

Beweis. Die erste Formel ist eine Konsequenz der Kettenregel. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \tilde{h}_* \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \right) = h_* \circ \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \right) = h_* \left(\sum_{l=1}^k \frac{\partial \psi^l}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial y^l} \right) = \sum_{l=1}^k \frac{\partial \psi^l}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial y^l}$$

und somit für ein Vektorfeld in der Karte \tilde{h}

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^k \tilde{V}^i \frac{\partial}{\partial z^i} = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^k \tilde{V}^i \frac{\partial \psi^l}{\partial z^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

Die zweite Formel ist eine direkte Konsequenz der ersten:

$$\tilde{g}_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j} \right\rangle = \sum_{l,m=1}^k \frac{\partial \psi^l}{\partial z^i} \frac{\partial \psi^m}{\partial z^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial y^l}, \frac{\partial}{\partial y^m} \right\rangle = \sum_{l,m=1}^k \frac{\partial \psi^l}{\partial z^i} \frac{\partial \psi^m}{\partial z^j} g_{ij},$$

wenn man noch die (formal völlig gleichberechtigten) Rollen von h und \tilde{h} vertauscht. \square

Wir benutzen diese Transformationsformeln zur Definition der Divergenz eines Vektorfeldes. Es handelt sich dabei um eine Funktion auf der Mannigfaltigkeit, die wir durch eine lokale Formel erklären wollen. Allerdings haben wir dann zu beweisen, dass der verwendete Ausdruck unabhängig von der Wahl der Karte ist.

Definition 8. Sei $\mathcal{V} = \sum_i V^i(y) \partial/\partial y^i$ ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit M^k , ausgedrückt bzgl. der Koordinaten einer Karte $h : V \rightarrow M^k$, und $g(y) : V \rightarrow \mathbb{R}$ die Determinante der Riemannschen Metrik in dieser Karte. Wir definieren eine Funktion $\text{div}(\mathcal{V}) : h(V) \rightarrow \mathbb{R}$, die Divergenz von \mathcal{V} , durch die Formel

$$\text{div}(\mathcal{V})(h(y)) := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial (\sqrt{g} V^i(y))}{\partial y^i}.$$

Satz 10. Die definierenden Formeln für die Divergenz eines Vektorfeldes stimmen für zwei beliebige Karten $h : V \rightarrow M^k$ und $\tilde{h} : \tilde{V} \rightarrow M^k$ der Mannigfaltigkeit M^k in sich entsprechenden Punkten überein:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\sqrt{g} V^i(y))}{\partial y^i} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\sqrt{\tilde{g}} \tilde{V}^i(z))}{\partial z^i}.$$

Der Beweis verwendet eine Formel, welche die Ableitung einer Determinante durch ihre Minoren ausdrückt. Der Vollständigkeit halber führen wir diese hier an.

Lemma 1. Gegeben seien k^2 Funktionen $h_{ij}(x)$, definiert auf einer offenen Teilmenge V von \mathbb{R}^k . Wir bezeichnen mit $H(x) := \det(h_{ij})$ ihre Determinante und mit $\Delta_{ij}(x)$ die Minoren der Matrix $h_{ij}(x)$. Dann gilt

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x^r} = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^r} \Delta_{ij}(x).$$

Beweis. Die Determinante ist spaltenweise zu differenzieren:

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x^r} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{11}}{\partial x^r} & h_{12} & \cdots & h_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_{k1}}{\partial x^r} & h_{k2} & \cdots & h_{kk} \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1,k-1} & \frac{\partial h_{1k}}{\partial x^r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{k,k-1} & \frac{\partial h_{kk}}{\partial x^r} \end{bmatrix}.$$

Entwickeln wir jede dieser k Determinanten nach derjenigen Spalte, in der die Ableitung auftritt, so erhalten wir die gewünschte Formel. \square

Beweis von Satz 10. Unter Verwendung der Formeln des letzten Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\sqrt{g(y)} V^i(y))}{\partial y^i} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial V^i(y)}{\partial y^i} + \sum_{i=1}^k V^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} (\ln \sqrt{g(y)}) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial y^i} \left[\sum_{j=1}^k \tilde{V}^j(\phi(y)) \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j}(\phi(y)) \right] + \sum_{i=1}^k V^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \left[\ln \sqrt{\tilde{g}(\phi(y))} + \ln \left| \det \frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right| \right]. \end{aligned}$$

Wir führen die partielle Ableitung in der ersten Summe aus und vereinfachen den dann entstehenden Ausdruck unter Verwendung folgender Formel

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \phi^l}{\partial y^i} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j} = \delta_j^l.$$

Wir erhalten unmittelbar den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g(y)}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\sqrt{g(y)} V^i(y))}{\partial y^i} &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}(z)}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial(\sqrt{\tilde{g}(z)} \tilde{V}^i(z))}{\partial z^i} \\ &\quad + \sum_{i,j,l=1}^k \tilde{V}^j(\phi(y)) \left[\frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^j \partial z^l} \frac{\partial \phi^l}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial z^j} \ln \left| \det \frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right| \circ \psi \right]. \end{aligned}$$

Letztendlich müssen wir für jeden Index $1 \leq j \leq k$ die Gleichung

$$\sum_{i,l=1}^k \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^j \partial z^l} \frac{\partial \phi^l}{\partial y^i} + \frac{\partial}{\partial z^j} \ln \left| \det \frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right| \circ \psi = 0$$

beweisen. Der zweite Summand in dieser Gleichung kann unter Verwendung des Lemmas geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^j} \ln \left| \det \frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right| \circ \psi &= \left(\det \left(\frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right) \circ \psi \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\det \frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right) \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j} \\ &= \left(\det \left(\frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right) \circ \psi \right)^{-1} \sum_{i,\alpha,\beta=1}^k \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial y^i \partial y^\beta} \Delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j}. \end{aligned}$$

Die Matrix $(\partial \psi^i / \partial z^j)$ ist die Inversmatrix zu $(\partial \phi^m / \partial y^r)$ und nach Cramerscher Regel gilt

$$\frac{\partial \psi^\beta}{\partial z^\alpha} = \Delta_{\alpha\beta} \cdot \left(\det \left(\frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right) \circ \psi \right)^{-1}.$$

Damit entsteht

$$\frac{\partial}{\partial z^j} \ln \left| \det \frac{\partial \phi^m}{\partial y^r} \right| \circ \psi = \sum_{i,\alpha,\beta=1}^k \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial y^i \partial y^\beta} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial z^\alpha}$$

und die zu beweisende Gleichung lautet

$$\sum_{i,\alpha=1}^k \frac{\partial^2 \psi^i}{\partial z^j \partial z^\alpha} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^i} + \sum_{i,\alpha,\beta=1}^k \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial y^i \partial y^\beta} \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial z^\alpha} = 0.$$

Diese Identität folgt jedoch sofort daraus, dass ϕ und ψ zueinander inverse Abbildungen sind. Wir differenzieren nämlich die Gleichung

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^i}(\psi(z)) \cdot \frac{\partial \psi^i}{\partial z^j} = \delta_j^\alpha$$

nach der Variablen z^l , setzen danach die Indizes $\alpha = l$ gleich und summieren. Dann entsteht die gewünschte Gleichung. \square

Beispiel 18. In \mathbb{R}^n gilt in kartesischen Koordinaten die Formel

$$(10) \quad \operatorname{div}(\mathcal{V}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^i}{\partial x^i}.$$

Beispiel 19. In Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ gilt $g = r$ und daher erhalten wir für jedes Vektorfeld $\mathcal{V} = V^1 \partial/\partial r + V^2 \partial/\partial \varphi$ die Formel

$$(11) \quad \operatorname{div}(\mathcal{V}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rV^1)}{\partial r} + \frac{\partial(rV^2)}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial V^1}{\partial r} + \frac{1}{r} V^1 + \frac{\partial V^2}{\partial \varphi}.$$

Beispiel 20. In sphärischen Koordinaten auf S^2 gilt $g = \cos^2 \psi$, daher ergibt sich für jedes Vektorfeld $\mathcal{V} = V^1 \partial/\partial\varphi + V^2 \partial/\partial\psi$ die Formel

$$(12) \quad \text{div}(\mathcal{V}) = \frac{1}{\cos\psi} \left(\frac{\partial(\cos\psi \cdot V^1)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\cos\psi \cdot V^2)}{\partial\psi} \right) = \frac{\partial V^1}{\partial\varphi} + \frac{\partial V^2}{\partial\psi} - \tan\psi \cdot V^2.$$

Satz 11. Sei \mathcal{V} ein Vektorfeld und f eine glatte Funktion auf M^k . Dann gilt

$$\text{div}(f \cdot \mathcal{V}) = f \cdot \text{div}(\mathcal{V}) + \mathcal{V}(f).$$

Beweis. Es genügt, die angegebene Formel in einer beliebigen Karte zu beweisen. Wir erhalten diese Formel direkt:

$$\begin{aligned} \text{div}(f \cdot \mathcal{V}) &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot f \cdot V^i)}{\partial y^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial y^i} \sqrt{g} V^i + f \frac{\partial(\sqrt{g} V^i)}{\partial y^i} \right) \\ &= f \cdot \text{div}(\mathcal{V}) + \sum_{i=1}^n V^i \frac{\partial f}{\partial y^i} = f \cdot \text{div}(\mathcal{V}) + \mathcal{V}(f). \end{aligned} \quad \square$$

Der letzte Operator, den wir in diesem Abschnitt einführen wollen, ist der Laplace-Operator Δ . Er wirkt auf Funktionen und ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung.

Definition 9. Sei $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann definieren wir den *Laplace-Operator* von f als Funktion auf M^k durch die Formel

$$\Delta(f) := \text{div}(\text{grad}(f)).$$

Bemerkung. Der Operator $\Delta : C^\infty(M^k) \rightarrow C^\infty(M^k)$ ist ein linearer Operator, welcher im Vektorraum aller C^∞ -Funktionen von M^k wirkt. In der Mathematik gibt es – das Vorzeichen von Δ betreffend – zwei unterschiedliche Konventionen. Klassisch und vornehmlich in der Analysis wird Δ wie oben angegeben definiert. Dagegen ist es in zahlreichen Gebieten der Geometrie und Globalen Analysis üblich, den Laplace-Operator mittels der Formel $\Delta(f) = -\text{div}(\text{grad}(f))$ einzuführen und dann vom sog. *Laplace-Beltrami-Operator* zu sprechen. Dafür gibt es gute Gründe, wie wir im Zusammenhang mit den klassischen Integralsätzen noch sehen werden. Der Leser muss also jeweils die vom Autor gewählten Vorzeichenkonventionen beachten. In diesem Buch verwenden wir die in der Definition angegebene Wahl des Vorzeichens für den Laplace-Operator.

Satz 12. Der Laplace-Operator $\Delta : C^\infty(M^k) \rightarrow C^\infty(M^k)$ ist ein linearer Operator. Weiterhin gilt für zwei Funktionen f_1 und f_2 die Formel

$$\Delta(f_1 \cdot f_2) = f_1 \Delta(f_2) + f_2 \Delta(f_1) + 2 \langle \text{grad}(f_1), \text{grad}(f_2) \rangle.$$

Beweis. Die Linearität von Δ ist einfach, die zweite Formel ergibt sich durch Anwendung der entsprechenden Rechenregeln für die Operatoren grad und div wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta(f_1 \cdot f_2) &= \text{div}(\text{grad}(f_1 \cdot f_2)) \\ &= \text{div}(f_1 \cdot \text{grad}(f_2) + f_2 \cdot \text{grad}(f_1)) \\ &= f_1 \text{div}(\text{grad}(f_2)) + f_2 \text{div}(\text{grad}(f_1)) + 2 \langle \text{grad}(f_1), \text{grad}(f_2) \rangle. \end{aligned} \quad \square$$

In lokalen Koordinaten erhalten wir wegen

$$\text{grad}(f) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

unmittelbar die Formel

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial}{\partial y^j} \left(\sqrt{g} \frac{\partial(f \circ h)}{\partial y^i} g^{ij} \right).$$

Wir geben wiederum die explizite Gestalt des Laplace-Operators in den von uns fortlaufend diskutierten Beispielen an.

Beispiel 21. In \mathbb{R}^n in kartesischen Koordinaten gilt

$$(13) \quad \Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}.$$

Beispiel 22. In Polarkoordinaten von \mathbb{R}^2 erhalten wir

$$(14) \quad \Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Beispiel 23. In sphärischen Koordinaten auf S^2 erhalten wir die Formel

$$(15) \quad \Delta f = \frac{1}{\cos^2 \psi} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} - \tan \psi \frac{\partial f}{\partial \psi}.$$

Die Höhenfunktion $f(x^1, x^2, x^3) = x^3$ auf S^2 kann in sphärischen Koordinaten in der Gestalt $f = \sin \psi$ dargestellt werden. Dann erhält man

$$\Delta(f) = -2 \sin \psi = -2f,$$

d. h. f ist eine Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zum Eigenwert -2 . Weitere Eigenfunktionen von Δ auf S^2 entstehen dadurch, dass man von einem harmonischen und homogenen Polynom $P(x^1, x^2, x^3)$ in \mathbb{R}^3 ausgeht, $\Delta^{\mathbb{R}^3} P = 0$, und dieses auf die Sphäre S^2 einschränkt. Die so entstehende Funktion wird eine Eigenfunktion des Laplace-Operators (siehe Aufgabe 25).

3.3. Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten

Für jede Mannigfaltigkeit M^m betrachteten wir bisher ihren Tangentialraum $T_x M^m$ und Vektorfelder. Wir gehen nun den weiteren Schritt und bilden dessen äußere Potenz

$$\Lambda_x^k(M^m) := \Lambda^k(T_x^* M^m)$$

aller k -Formen $\omega_x^k : T_x M^m \times \dots \times T_x M^m \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in M^m$.

Definition 10. Eine k -Form ω^k auf einer Mannigfaltigkeit M^m ist eine Familie $\{\omega_x^k\}_{x \in M}$, die in jedem Punkte $x \in M^m$ eine k -Form $\omega_x^k \in \Lambda_x^k(M^m)$ auszeichnet.

Das Differential einer glatten Abbildung $f : N^n \rightarrow M^m$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten gestattet es, k -Formen von M^m zu k -Formen von N^n zurückzuziehen. Dies geschieht mittels der Formel

$$(f^*\omega^k)(v_1, \dots, v_k) = \omega^k(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)),$$

wobei $v_1, \dots, v_k \in T_y N^n$ Tangentialvektoren an N^n im Punkte $y \in N^n$ und $f_* : T_y N^n \rightarrow T_{f(y)} M^m$ das Differential von f an dieser Stelle sind. Die k -Formen $f^*\omega^k$ nennen wir die durch die Abbildung f induzierte oder zurückgezogene Form auf N^n . Diese Konstruktion können wir insbesondere auf eine Karte $h : V \rightarrow M^m$ der Mannigfaltigkeit M^m selbst anwenden. Damit entspricht jeder k -Form ω^k auf M^m bei fixierter Karte die k -Form $h^*(\omega^k)$ auf der offenen Menge V des Raumes \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{H}^m . Sind $y = (y^1, \dots, y^m)$ die Koordinaten, so lässt sich $h^*(\omega^k)$ mittels der Komponentenfunktionen ω_I darstellen,

$$h^*(\omega^k) = \sum_I \omega_I dy^I.$$

Die Summation verläuft über alle geordneten Indextupel $I = (i_1 < \dots < i_k)$, unter dy^I verstehen wir die k -Form $dy^I := dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$.

Definition 11. Eine k -Form ω^k einer Mannigfaltigkeit M^m nennt man *k -Differentialform* oder auch *glatte k -Form*, falls in jeder Karte $h : V \rightarrow M^m$ die Koeffizienten ω_I der k -Form glatte Funktionen auf der Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$ sind.

Differentialformen können addiert und mit auf M^m definierten Funktionen in nahe liegender Weise multipliziert werden. Damit wird die Menge $\Omega^k(M^m)$ aller C^∞ -Formen vom Grad k ein Modul über dem Ring $C^\infty(M^m)$ der glatten Funktionen der Mannigfaltigkeit. Auch das rein algebraisch definierte äußere Produkt zweier Formen überträgt sich sofort auf den Fall von Differentialformen.

Das äußere Differential von k -Formen – bekannt aus dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n und besprochen im Kapitel 2 – lässt sich nun mühelos auf die Situation von k -Formen auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dabei bleiben die bekannten Eigenschaften erhalten. Dies geschieht folgendermaßen: Ist ω^k eine k -Form auf M^m und $h : V \rightarrow M^m$ eine Karte, so betrachten wir zunächst die induzierte Form $h^*(\omega^k)$ und deren Differential $d(h^*(\omega^k))$. Letztere ist eine $(k+1)$ -Form auf der Menge V und kann zu einer $(k+1)$ -Form unter Verwendung der inversen Kartenabbildung $h^{-1} : h(V) \rightarrow V$ zurückgezogen werden. Damit entsteht eine $(k+1)$ -Form

$$d\omega^k := (h^{-1})^*(d(h^*\omega^k)),$$

definiert auf der offenen Menge $h(V) \subset M^m$. Die angegebene Konstruktion ist jedoch unabhängig von der Wahl der speziellen Karte und somit wird eindeutig und global auf der Mannigfaltigkeit M^m eine $(k+1)$ -Form $d\omega^k$ definiert. In der Tat, ist $h_1 : V_1 \rightarrow M^m$ eine weitere Karte mit $h(V) \cap h_1(V_1) \neq \emptyset$, so erhalten wir auf dem Durchschnitt $h(V) \cap h_1(V_1)$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} (h_1^{-1})^*(d(h_1^*\omega^k)) &= (h_1^{-1})^*(h_1^{-1} \circ h)^*(d((h_1^{-1} \circ h)^*h^*(\omega^k))) \\ &= (h_1^{-1})d((h_1^{-1} \circ h)^*(h_1^{-1} \circ h)^*h^*(\omega^k)) \\ &= (h_1^{-1})d(h^*\omega^k). \end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir die Vertauschbarkeit des äußeren Differentials mit dem Diffeomorphismus $(h_1^{-1} \circ h)$, eine aus Kapitel 2 wohl bekannte Eigenschaft.

Definition 12. Die konstruierte $(k+1)$ -Form $d\omega^k$ einer k -Form ω^k auf M^m heißt das *äußere Differential* von ω^k .

Alle bekannten Eigenschaften des äußeren Differentials übertragen sich nun aus dem euklidischen Raum auf die Situation von Mannigfaltigkeiten. Wir fassen dies im nächsten Satz nochmals zusammen.

Satz 13. Seien $\omega^k, \omega_1^k, \eta^l$ Formen auf der Mannigfaltigkeit M^m vom entsprechenden Grad. Dann gilt

- (1) $d(\omega^k + \omega_1^k) = d\omega^k + d\omega_1^k;$
- (2) $dd\omega^k = 0;$
- (3) $d(\omega^k \wedge \eta^l) = (d\omega^k) \wedge \eta^l + (-1)^k \omega^k \wedge (d\eta^l);$
- (4) Ist $f : N^n \rightarrow M^m$ eine glatte Abbildung, so ist f^* mit dem äußeren Differential vertauschbar: $d(f^*\omega^k) = f^*(d\omega^k).$

Die rein algebraische Operation des inneren Produktes zwischen einem Vektorfeld \mathcal{V} und einer k -Form ω^k überträgt sich gleichfalls auf die Situation, dass beide Objekte über einer Mannigfaltigkeit definiert sind.

Definition 13. Sei \mathcal{V} ein Vektorfeld, ω^k eine k -Form und η^l eine l -Form auf M^m . Die durch

$$(\mathcal{V} \lrcorner \omega^k)(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{k-1}) := \omega^k(\mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{k-1})$$

definierte $(k-1)$ -Form nennt man das *innere Produkt* von \mathcal{V} mit ω^k . Die durch

3.4. Orientierbare Mannigfaltigkeiten

Eine Orientierung eines reellen Vektorraums ist eine der beiden im ersten Kapitel besprochenen Äquivalenzklassen in der Menge seiner Basen. Dies können wir nun insbesondere auf den Tangentialraum $T_x M^m$ einer Mannigfaltigkeit anwenden und von einer Orientierung \mathcal{O}_x im Punkte $x \in M^m$ sprechen. Eine Orientierung der Mannigfaltigkeit M^m selbst besteht aus einer „stetigen“ Auswahl von Orientierungen in jedem ihrer Punkte.

Definition 14. Eine Orientierung \mathcal{O} einer Mannigfaltigkeit M^m ist eine Familie $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_x\}_{x \in M}$ von Orientierungen in allen Tangentialräumen $T_x M^m$, die in folgender Weise stetig vom Punkt x abhängen: Zu jedem Punkte $x \in M^m$ existiert eine diesen Punkt enthaltene Karte $h : V \rightarrow M^m$ derart, dass die Basis $\{h_*(\partial/\partial y^1), \dots, h_*(\partial/\partial y^m)\}$ der Orientierung $\mathcal{O}_{h(y)}$ für alle Punkte $y \in V$ entspricht.

Definition 15. Eine Mannigfaltigkeit M^m heißt *orientierbar*, falls sie wenigstens eine Orientierung besitzt.

Wir geben zunächst ein notwendiges und zugleich hinreichendes Kriterium für die Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit an, welches die Kartenübergangsabbildungen benutzt.

Satz 14. Sei \mathcal{O} eine Orientierung auf M^m . Dann existiert eine Familie $\{(h_i, V_i)\}_{i \in I}$ von Karten mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Bildmengen $h_i(V_i)$ überdecken die Mannigfaltigkeit,

$$M^m = \bigcup_{i \in I} h_i(V_i);$$

(2) Ist der Durchschnitt $h_i(V_i) \cap h_j(V_j) \neq \emptyset$ nicht leer, so ist die Determinante der Ableitung der Kartenübergangsabbildung $h_j^{-1} \circ h_i$ positiv,

$$\det(D(h_j^{-1} \circ h_i)) > 0.$$

Umgekehrt, existiert eine Familie von Karten mit diesen beiden Eigenschaften, so ist M^m orientierbar.

Beweis. Sei eine Orientierung \mathcal{O} von M^m gegeben. Dann wählen wir diejenigen Karten $h : V \rightarrow M^m$ aus, für welche die Basis $\{h_*(\partial/\partial y^1), \dots, h_*(\partial/\partial y^m)\}$ der Orientierung der Mannigfaltigkeit entspricht. Nach Definition der Orientierung überdecken diese Karten die Mannigfaltigkeit. Sind $h_i : V_i \rightarrow M^m$ und $h_j : V_j \rightarrow M^m$ zwei derartige Karten mit den Koordinaten $y = (y^1, \dots, y^m)$ und $z = (z^1, \dots, z^m)$, so gilt in sich entsprechenden Punkten

$$\{h_{i*}(\partial/\partial y^1), \dots, h_{i*}(\partial/\partial y^m)\} = \mathcal{O}_{h_i(y)} = \mathcal{O}_{h_j(z)} = \{h_{j*}(\partial/\partial z^1), \dots, h_{j*}(\partial/\partial z^m)\}.$$

Damit sind die Basen gleich orientiert, die Übergangsmatrix zwischen ihnen ist das Differential $D(h_j^{-1} \circ h_i)$ und wir erhalten

$$\det(D(h_j^{-1} \circ h_i)) > 0.$$

Die Umkehrung beweist man analog. \square

Wird eine Mannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ durch $(n-m)$ unabhängige Gleichungen beschrieben, so ist sie orientierbar. Wir führen den Beweis an.

Satz 15. Seien $f_1, \dots, f_{n-m} : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen, definiert auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, und gelte

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_{n-m} \neq 0$$

in jedem Punkt. Dann ist die Mannigfaltigkeit

$$M^m = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{n-m}(x) = 0\}$$

orientierbar.

Beweis. Wir betrachten die euklidischen Gradienten $\text{grad}(f_1), \dots, \text{grad}(f_{n-m})$ der Funktionen. Nach Voraussetzung sind diese Vektorfelder in jedem Punkt der Menge U linear unabhängig und in Punkten der Mannigfaltigkeit orthogonal zum Tangentialraum $T_x M^m$ (siehe Satz 5). Eine Orientierung \mathcal{O}_x in $T_x M^m$ legen wir durch die Forderung fest, dass eine Basis $v_1, \dots, v_m \in T_x M^m$ genau dann positiv orientiert sei, falls

$$d\mathbb{R}^n(\text{grad}(f_1)(x), \dots, \text{grad}(f_{n-m})(x), v_1, \dots, v_m) > 0$$

positiv ist. Dabei bezeichnet $d\mathbb{R}^n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ die Volumenform von \mathbb{R}^n . Eine leichte Überlegung zeigt, dass diese Bedingung eine Orientierung von M^m festlegt. \square

Eine orientierte Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ besitzt eine ausgezeichnete Differentialform vom höchsten Grad, die sog. Volumenform. Wir wählen in einem Tangentialraum $T_x M^m$ eine Basis $e_1, \dots, e_m \in T_x M^m$, bestehend aus zueinander orthogonalen Vektoren der Länge eins und der festgelegten Orientierung \mathcal{O}_x . Für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_m \in T_x M^m$ definieren wir

$$dM^m(v_1, \dots, v_m) = \det \begin{bmatrix} \langle v_1, e_1 \rangle, & \dots, & \langle v_1, e_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, e_1 \rangle, & \dots, & \langle v_m, e_m \rangle \end{bmatrix}.$$

Diese Definition ist eindeutig. Jede andere Basis e_1^*, \dots, e_m^* der gleichen Orientierung kann als Linearkombination $e_i^* = \sum A_{ij} e_j$ mit einer orthogonalen Matrix A positiver Determinante dargestellt werden. Dann aber gilt $\det(A) = 1$.

Definition 16. Die m -Form dM^m der orientierten Mannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Volumenform*.

Bemerkung. Auch wenn man die Volumenform traditionell mit dM^m bezeichnet, so ist sie doch *nicht* das äußere Differential einer $(m-1)$ -Form. Wir bemerken, dass die Volumenform in keinem Punkt der Mannigfaltigkeit verschwindet. Werten wir dM^m etwa auf einer orthogonalen Basis e_1, \dots, e_m der Orientierung aus, erhalten wir

$$dM^m(e_1, \dots, e_m) = 1.$$

Andererseits kann man die Orientierung aus der Volumenform ablesen. Eine Basis v_1, \dots, v_m ist nämlich genau dann positiv orientiert, falls

$$dM^m(v_1, \dots, v_m) > 0$$

gilt. Ändern wir die Orientierung der Mannigfaltigkeit, so ändert sich das Vorzeichen der Volumenform.

Satz 16. Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit M^m ist genau dann orientierbar, falls sie eine nirgends verschwindende Differentialform vom Grad m besitzt.

Beweis. Ist M^m orientierbar, so hat die Volumenform dM^m die gewünschte Eigenschaft. Umgekehrt, sei eine m -Form ω^m auf M^m gegeben, die in keinem Punkt verschwindet. Wir nennen dann eine Basis v_1, \dots, v_m positiv orientiert, falls

$$\omega^m(v_1, \dots, v_m) > 0$$

gilt. Damit entsteht eine Orientierung von M^m . \square

In einer Karte $h : V \rightarrow M^m$ ist die induzierte Volumenform $h^*(dM^m)$ proportional zu $dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$,

$$h^*(dM^m) = f(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m.$$

Wir berechnen die Funktion $f(y)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f^2(y) &= (h^*(dM^m)(\partial/\partial y^1, \dots, \partial/\partial y^m))^2 = \det^2(\langle h_*(\partial/\partial y^i), e_j \rangle) \\ &= \det(\langle h_*(\partial/\partial y^i), e_j \rangle) \cdot \det(\langle e_j, h_*(\partial/\partial y^l) \rangle) \\ &= \det(\langle h_*(\partial/\partial y^i), h_*(\partial/\partial y^l) \rangle) = \det(g_{il}). \end{aligned}$$

Damit ist $f^2(y)$ gleich der Determinante $\det(g_{ij}(y))$ der Riemannschen Metrik und wir erhalten die Formel

$$h^*(dM^m) = \sqrt{g(y)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m.$$

Beispiel 24. Ist $M^2 \subset \mathbb{R}^n$ ein Flächenstück und $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung, so benutzt man oft die klassischen Bezeichnungen

$$\begin{aligned} E &= g_{11}(x, y) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle \\ G &= g_{22}(x, y) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle \\ F &= g_{12}(x, y) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle. \end{aligned}$$

Die Formel für die Volumenform lautet dann

$$dM^2 = \sqrt{EG - F^2} dx \wedge dy.$$

Beispiel 25. Die Volumenform des \mathbb{R}^n in kartesischen Koordinaten ist

$$(16) \quad d\mathbb{R}^n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Beispiel 26. In Polarkoordinaten von $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ gilt $g(r, \varphi) = r^2$ und somit ist die Volumenform gegeben durch

$$(17) \quad d\mathbb{R}^2 = r \cdot dr \wedge d\varphi.$$

Beispiel 27. In sphärischen Koordinaten von S^2 gilt $g(\varphi, \psi) = \cos^2 \psi$ und somit ist die Volumenform gegeben durch

$$(18) \quad dS^2 = \cos \psi \cdot d\varphi \wedge d\psi.$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes \mathcal{V} kann im Fall einer orientierten Mannigfaltigkeit durch das äußere Differential und die Volumenform ausgedrückt werden.

Satz 17. Sei $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte Mannigfaltigkeit, dM^m ihre Volumenform und \mathcal{V} ein Vektorfeld mit der Divergenz $\text{div}(\mathcal{V})$. Dann gilt

$$d(\mathcal{V} \lrcorner dM^m) = \text{div}(\mathcal{V}) \cdot dM^m.$$

Beweis. In lokalen Koordinaten gehen wir aus von

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^m V^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{und} \quad dM^m = \sqrt{g} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m.$$

Dann erhalten wir

$$\mathcal{V} \lrcorner dM^m = \sqrt{g} \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} V^i dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^m$$

und die Formel

$$d(\mathcal{V} \lrcorner dM^m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\sqrt{g} V^i)}{\partial y^i} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \operatorname{div}(\mathcal{V}) \cdot dM^m$$

folgt direkt aus der Definition der Divergenz des Vektorfeldes. \square

Bemerkung. Wie im euklidischen Raum \mathbb{R}^n kann für jede (orientierte) Mannigfaltigkeit M^m die *duale 1-Form* $\omega_{\mathcal{V}}^1$ eines Vektorfeldes \mathcal{V} unter Verwendung der Volumenform und des Hodge-Operators erklärt werden:

$$\ast\omega_{\mathcal{V}}^1 := \mathcal{V} \lrcorner dM^m.$$

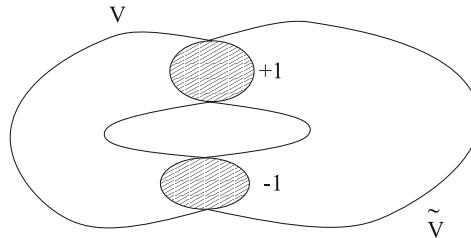
Die Divergenzformel schreibt sich dann in der Gestalt $d(\ast\omega_{\mathcal{V}}^1) = \operatorname{div}(\mathcal{V}) \cdot dM^m$.

Nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten existieren, jedoch ist der Beweis der Nichtorientierbarkeit einer gegebenen Mannigfaltigkeit mitunter ein wenig komplizierter als ein Orientierbarkeitsbeweis. Wir geben ein einfaches Kriterium für die Nichtorientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit an. Dieses kann zum Beispiel für den Nachweis verwendet werden, dass das Möbiusband nichtorientierbar ist.

Satz 18. Existieren in einer Mannigfaltigkeit zwei Karten $h : V \rightarrow M^m$ und $\tilde{h} : \tilde{V} \rightarrow M^m$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) V und \tilde{V} sind zusammenhängende Mengen, der Durchschnitt $h(V) \cap \tilde{h}(\tilde{V}) \subset M^m$ ist keine zusammenhängende Menge;
- (2) die Determinante $\det(D(\tilde{h}^{-1} \circ h))$ des Differentials der Kartenübergangsabbildung hat in zwei Punkten der Menge $h^{-1}(h(V) \cap \tilde{h}(\tilde{V}))$ unterschiedliches Vorzeichen,

so ist M^m keine orientierbare Mannigfaltigkeit.



Beweis. Angenommen, M^m wäre orientierbar. Die Mengen V und \tilde{V} sind als offene Teilmengen von \mathbb{R}^m orientierbar und somit können wir o. B. d. A. annehmen, dass die Kartenabbildungen h und \tilde{h} die Orientierungen erhalten. Wir betrachten die Volumenform dM^m und stellen diese in den beiden Koordinatensystemen dar:

$$h^*(dM^m) = \sqrt{g} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m, \quad \tilde{h}^*(dM^m) = \sqrt{\tilde{g}} dz^1 \wedge \dots \wedge dz^m.$$

Man beachte, dass hier in beiden Fällen das Vorzeichen "+" vorliegt, weil die Kartenabbildungen h, \tilde{h} orientationserhaltend sind. Wegen

$$(\tilde{h}^{-1} \circ h)^*(dz^1 \wedge \dots \wedge dz^m) = \det(D(\tilde{h}^{-1} \circ h)) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^m$$

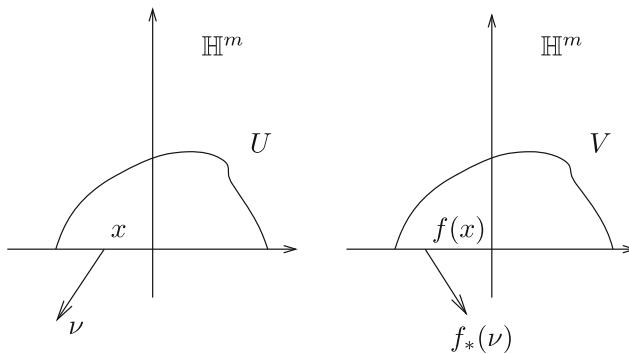
gilt dann

$$\sqrt{\tilde{g}} \cdot \det(D(\tilde{h}^{-1} \circ h)) = \sqrt{g}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn \sqrt{g} und $\sqrt{\tilde{g}}$ sind stets positiv. \square

Die Orientierung einer Mannigfaltigkeit induziert eindeutig eine Orientierung ihres Randes. Dabei benutzt man das auf dem Rand der Mannigfaltigkeit definierte Vektorfeld der äußeren Normalen. Seine Definition beruht auf folgendem

Lemma 2. *Sei $U \subset \mathbb{H}^m$ eine offene Teilmenge im Halbraum, $x \in U \cap \partial\mathbb{H}^m$ ein Punkt aus dem Rand $\partial\mathbb{H}^m$ und $f : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{H}^m$. Ist $\nu = (x, (v^1, \dots, v^m)) \in T_x\mathbb{H}^m$ ein Vektor an der Stelle x mit nichtpositiver m -ter Komponente $v^m \leq 0$, so hat der Bildvektor $f_*(\nu) = (f(x), (w^1, \dots, w^m))$ gleichfalls eine nichtpositive m -te Komponente $w^m \leq 0$.*



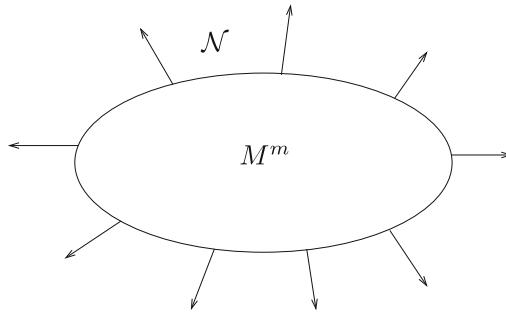
Beweis. Wir wählen die Gerade $\gamma(t) = x + t \cdot \nu$ und bemerken, dass wegen $v^m \leq 0$ der Punkt $\gamma(t)$ für kleine negative Parameter t in $U \cap \mathbb{H}^m$ liegt. Dann gilt $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = \nu$ und die m -te Komponente von $f_*(\nu)$ wird negativ:

$$\frac{d}{dt} f^m(x + t\nu) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f^m(x + t\nu) - 0}{t} \leq 0.$$

In einem Randpunkt $x \in \partial M^m \subset M^m$ einer Mannigfaltigkeit liegen zwei Tangentialräume vor. Einerseits ist dies der Tangentialraum $T_x M^m$ aus M^m , andererseits der $(m-1)$ -dimensionale Tangentialraum an den Rand, $T_x(\partial M^m) \subset T_x M^m$. Wir definieren in jedem Randpunkt $x \in \partial M^m$ einen Vektor $\mathcal{N}(x) \in T_x M^m$ tangential an M^m durch folgende Bedingungen:

- (1) $\mathcal{N}(x)$ ist orthogonal zu $T_x(\partial M^m)$;
- (2) $\mathcal{N}(x)$ hat die Länge 1;
- (3) ist $h : V \subset \mathbb{H}^m \rightarrow M^m$ eine Karte nahe dem Punkt $x \in M^m$, so ist die m -te Komponente des Vektors $(h)_*^{-1}(\mathcal{N}(x))$ negativ.

Definition 17. Das entlang des Randes konstruierte Vektorfeld \mathcal{N} heißt das *Vektorfeld der äußeren Normalen* des Randes.



Wir legen eine Orientierung des Randes ∂M^m einer bereits orientierten Mannigfaltigkeit M^m fest, indem wir eine Basis $v_1, \dots, v_{m-1} \in T_x(\partial M^m)$ genau dann positiv orientiert nennen wollen, falls die ergänzte Basis $N(x), v_1, \dots, v_{m-1}$ positiv orientiert in $T_x M^m$ ist. Eine leichte Überlegung zeigt, dass durch diese Bedingung tatsächlich eine Orientierung des Randes induziert wird. Für die entsprechenden Volumenformen gilt die wichtige Formel:

Satz 19. *Die Volumenform des Randes einer Mannigfaltigkeit ist das innere Produkt des Normalenvektorfeldes N mit dM^m :*

$$d(\partial M^m) = N \lrcorner dM^m.$$

Beweis. Im Vektorraum $T_x M^m$ wählen wir eine orthonormale Basis der Orientierung, bestehend aus dem Normalenvektor $e_1 := N(x)$ sowie weiteren Vektoren e_2, \dots, e_m . Sind v_1, \dots, v_{m-1} an den Rand tangentiale Vektoren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (N \lrcorner dM^m)(v_1, \dots, v_{m-1}) &= dM^m(e_1, v_1, \dots, v_{m-1}) \\ &= \det \begin{bmatrix} \langle v_1, e_2 \rangle & \dots & \langle v_1, e_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{m-1}, e_2 \rangle & \dots & \langle v_{m-1}, e_m \rangle \end{bmatrix} \\ &= d(\partial M^m)(v_1, \dots, v_{m-1}), \end{aligned}$$

weil die Vektoren v_1, \dots, v_{m-1} orthogonal zu e_1 sind. \square

In den weiteren Abschnitten dieses Buches orientieren wir den Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit stets auf die angegebene Weise.

Beispiel 28. Das Vektorfeld der äußeren Normalen der Sphäre $S^{n-1}(R)$ vom Radius R , aufgefasst als Rand der Kugel $D^n(R)$, hat die Gestalt

$$N(x) = \frac{1}{R} \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right).$$

Wir können die Volumenform von $S^{n-1}(R)$ mit Hilfe von $dS^{n-1}(R) = N \lrcorner d\mathbb{R}^n$ berechnen und erhalten die Formel

$$(19) \quad dS^{n-1}(R) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Damit lässt sich die Volumenform der Sphäre $S^{n-1}(R)$ mittels der Einbettung $i : S^{n-1}(R) \rightarrow \mathbb{R}^n$ als induzierte Form aus der auf \mathbb{R}^n definierten $(n-1)$ -Form

$$\omega^{n-1} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n$$

darstellen:

$$dS^{n-1}(R) = i^*(\omega^{n-1}).$$

Eine Berechnung des äußeren Differentials von ω^{n-1} in \mathbb{R}^n führt uns auf die Formel

$$d\omega^{n-1} = \frac{n}{R} d\mathbb{R}^n,$$

und eine Anwendung des Satzes von Stokes aus Kapitel 2 ergibt das Integral der Volumenform:

$$\int_{S^{n-1}(R)} dS^{n-1}(R) = \int_{D^n(R)} d\omega^{n-1} = \frac{n}{R} \text{vol}(D^n(R)).$$

3.5. Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten

Das Integral einer m -Form über einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit wird dadurch definiert, dass man die Mannigfaltigkeit in kleine, zu offenen Teilmengen von \mathbb{R}^m oder \mathbb{H}^m diffeomorphe Bestandteile zerlegt und die gegebene Form unter Verwendung ihrer Kartendarstellung jeweils einzeln im euklidischen Raum integriert. Die Summe der dann entstehenden Werte ist das Gesamtintegral der Form über der Mannigfaltigkeit. Dabei wollen wir uns von vornherein auf kompakte Mannigfaltigkeiten beschränken, damit wir es nur mit endlich vielen Summanden zu tun haben werden und anderenfalls auftretende Konvergenzfragen von Reihen nicht zu diskutieren sind. Eine genaue Darlegung dieser Integraldefinition benötigt die sog. *Zerlegung der Eins*. Dabei handelt es sich um eine spezielle Familie glatter Funktionen, welche wir zunächst besprechen. Wir erinnern daran, dass man unter dem *Träger* $\text{supp}(\varphi)$ einer Funktion $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{x \in M^m : \varphi(x) \neq 0\}$ versteht.

Satz 20. *Sei M^m eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann existieren glatte Funktionen und Karten*

$$\varphi_i : M^m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h_i : V_i \rightarrow M^m \quad (1 \leq i \leq l)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Der Träger der Funktion φ_i ist in $h_i(V_i)$ enthalten

$$\text{supp}(\varphi_i) \subset h_i(V_i);$$

- (2) die Funktionen φ_i sind nicht negativ und ihre Summe ist eins:

$$\sum_{i=1}^l \varphi_i(x) \equiv 1.$$

Beweis. In jedem Punkt $x \in M^m$ wählen wir eine Karte $h_x : V_x \rightarrow M^m$ mit $h_x(0) = x$. Dabei sind V_x offene Mengen in \mathbb{R}^m oder \mathbb{H}^m . Weiterhin wählen wir glatte, nicht negative Funktionen $\psi_x : \mathbb{R}^m, \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (1) $\psi_x(0) = 1$;
- (2) $\text{supp}(\psi_x) \subset V_x$.

Diese können wir durch die Festlegung

$$\tilde{\varphi}_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \notin h_x(V_x) \\ \psi_x(h_x^{-1}(y)) & \text{falls } y \in h_x(V_x) \end{cases}$$

zu einer Familie von nicht negativen, glatten Funktionen $\tilde{\varphi}_x : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ auf M^m übertragen. Nach Konstruktion gilt $\tilde{\varphi}_x(x) = 1$ und $\text{supp}(\tilde{\varphi}_x) \subset h_x(V_x)$. Die Kompaktheit von M^m ausnutzend, erhalten wir endlich viele Funktionen $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_l$ und Karten $(h_1, V_1), \dots, (h_l, V_l)$ mit

$$M^m = \bigcup_{i=1}^l \{x \in M^m : \tilde{\varphi}_i(x) \neq 0\}$$

und $\text{supp}(\tilde{\varphi}_i) \subset h_i(V_i)$. Die Summe $\psi := \sum_j \tilde{\varphi}_j$ ist in jedem Punkt positiv und die gesuchten Funktionen φ_i ergeben sich durch eine Normierung der Funktionen $\tilde{\varphi}_i$, $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i / \psi$. \square

Wir kommen jetzt zur Definition des Integrals einer m -Form ω^m über einer orientierten und kompakten Mannigfaltigkeit M^m . Dazu wählen wir Karten h_1, \dots, h_l sowie eine untergeordnete Teilung der Eins $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ mit den im vorhergehenden Satz formulierten Eigenschaften. Darüber hinaus mögen die Kartenabbildungen $h_i : V_i \rightarrow M^m$ orientierungserhaltend sein. Dann ist

$$h_i^*(\varphi_i \omega^m) := f_i(y) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m$$

eine m -Form auf V_i mit kompaktem Träger und wir definieren das Integral:

$$\int_{M^m} \omega^m := \sum_{i=1}^l \int_{V_i} h_i^*(\varphi_i \omega^m) = \sum_{i=1}^l \int_{V_i} f_i(y) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m.$$

Die folgende Überlegung zeigt, dass diese Integraldefinition unabhängig von der gewählten Zerlegung der Eins ist. Betrachten wir eine weitere Zerlegung $(\tilde{h}_\alpha, \tilde{V}_\alpha)$ und $\tilde{\varphi}_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, r$) und ist der Durchschnitt der Mengen $h_i(V_i) \cap \tilde{h}_\alpha(\tilde{V}_\alpha) \neq \emptyset$ nicht leer, so gilt

$$\int_{\tilde{V}_\alpha} \tilde{h}_\alpha^*(\tilde{\varphi}_\alpha \varphi_i \omega^m) = \int_{V_i} h_i^*(\tilde{\varphi}_\alpha \varphi_i \cdot \omega^m).$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 7, Kapitel 2, weil die Determinante des Differentials $D(h_i^{-1} \circ \tilde{h}_\alpha)$ ein positives Vorzeichen hat. Summieren wir jetzt sowohl über den Index $1 \leq i \leq l$ als auch den Index $1 \leq \alpha \leq r$, dann erhalten wir wegen $\sum_i \varphi_i \equiv \sum_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha \equiv 1$ sofort

$$\sum_{\alpha=1}^r \int_{\tilde{V}_\alpha} \tilde{h}_\alpha^*(\tilde{\varphi}_\alpha \cdot \omega^m) = \sum_{i=1}^l \int_{V_i} h_i^*(\varphi_i \cdot \omega^m).$$

Definition 18. Das m -dimensionale Volumen einer kompakten und orientierten Untermannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$\text{vol}(M^m) := \int_{M^m} dM^m.$$

Betrachten wir eine Kurve, die wir als 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M^1 \subset \mathbb{R}^n$ von \mathbb{R}^n auffassen können. Ist $h : (a, b) \rightarrow M^1$ eine Parametrisierung der Kurve, so gilt

$$\int_{M^1} dM^1 = \int_a^b \|\dot{h}(t)\| dt$$

und wir erhalten die Länge der Kurve. Allgemeiner, ist $h : V \rightarrow M^m$ eine Parametrisierung von M^m , so kann das Volumen von M^m unter Verwendung der Koeffizienten der Riemannschen Metrik geschrieben werden als

$$\text{vol}(M^m) = \int_V \sqrt{\det(g_{ij}(y))} dy.$$

Beispiel 29. Die letzte Formel des Abschnittes 3.4. zeigt, dass zwischen dem $(n-1)$ -dimensionalen Volumen der Sphäre $S^{n-1}(R)$ und dem n -dimensionalen Volumen der Kugel $D^n(R)$ vom Radius die Relation

$$\text{vol}(S^{n-1}(R)) = \frac{n}{R} \text{vol}(D^n(R))$$

besteht.

Beispiel 30. Die Koeffizienten der Riemannschen Metrik des in Beispiel 4 behandelten Rotationstorus sind

$$g_{\psi\psi} = (r_1 + r_2 \cos \varphi)^2, \quad g_{\psi\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = r_2^2.$$

Damit gilt $\sqrt{g} = r_2(r_1 + r_2 \cos \varphi)$ und wir erhalten

$$\text{vol}(T^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r_2(r_1 + r_2 \cos \varphi) d\varphi d\psi = 4\pi^2 r_1 r_2.$$

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zur Maßtheorie von Mannigfaltigkeiten ab. Sei $C^0(M^m)$ der Ring aller stetigen, auf der kompakten und orientierten Mannigfaltigkeit M^m definierten Funktionen. Durch

$$\mu(f) := \int_{M^m} f \cdot dM^m$$

wird ein lineares Funktional $\mu : C^0(M^m) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, welches positiv und monoton stetig im Sinne der folgenden Eigenschaften ist:

- (1) Ist $f \in C^0(M^m)$ eine nicht negative Funktion, so gilt $\mu(f) \geq 0$.
- (2) Ist f_n eine monoton wachsende, gegen $f \in C^0(M^m)$ konvergierende Folge, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n) = \mu(f).$$

Damit wird das Paar $(C^0(M^m), \mu)$ ein sog. *Daniell-Stone-Funktional* auf der Menge M^m . Im Rahmen der allgemeinen Maßtheorie ordnet man jedem D-S-Funktional μ auf einer Menge X zunächst ein äußeres Maß μ^* auf X zu. Die *Caratheodory-Konstruktion* führt sodann zu einer σ -Algebra von Teilmengen in X , auf der μ^* ein Maß wird. Wendet man diese allgemeinen Prinzipien auf eine kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit an, so erhält man das sog. *Lebesgue-Maß* von M^m . Es ist auf einer die Borel-Mengen umfassenden σ -Algebra definiert und beliebige beschränkte und Borel-messbare Funktionen zum Beispiel werden integrierbar. Für die Zwecke der Vektoranalysis benötigen wir diese Erweiterung des Maß- und Integrationsbegriffes für Mannigfaltigkeiten nicht, weil die in diesem Zusammenhang auftretenden Funktionen in der Regel zumindest stetig sind. Es ist jedoch interessant zu wissen, dass die hier behandelte Integration sich auf die skizzierte Weise in die allgemeine Maß- und Integrationstheorie einordnen lässt und der interessierte Leser sei auf einschlägige Lehrbücher verwiesen.

3.6. Der Satz von Stokes für Mannigfaltigkeiten

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir nun alle Begriffe zusammengestellt, die man zur Formulierung des Satzes von Stokes für Mannigfaltigkeiten benötigt.

Satz 21 (Satz von Stokes). *Sei M^k eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit und trage ihr Rand ∂M^k die induzierte Orientierung. Dann gilt für jede $(k-1)$ -Form ω^{k-1} auf M^k :*

$$\int_{\partial M^k} \omega^{k-1} = \int_{M^k} d\omega^{k-1}.$$

Hat insbesondere M^k keinen Rand, so ist für jede $(k-1)$ -Form ω^{k-1}

$$\int_{M^k} d\omega^{k-1} = 0.$$

Beweis. Nach Satz 20 können wir endlich viele, die Mannigfaltigkeit M^k überdeckende Karten $(V_1, h_1), \dots, (V_r, h_r)$ sowie eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $\varphi_1, \dots, \varphi_r : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ wählen. Wir nummerieren diese Karten so, dass für jeden Index i unterhalb eines gewissen Index r_0 die Menge V_i den Rand schneidet, $V_i \cap \partial M^k \neq \emptyset$, dagegen für alle Indizes $i > r_0$ die Menge V_i disjunkt zum Rand ist, $V_i \cap \partial M^k = \emptyset$. Aus $\sum_i \varphi_i = 1$ erhalten wir $\sum_i d\varphi_i = 0$ und formen damit das äußere Differential von ω^{k-1} um:

$$d\omega^{k-1} = \left(\sum_{i=1}^r \varphi_i \right) d\omega^{k-1} = \sum_{i=1}^r \varphi_i d\omega^{k-1} + \sum_{i=1}^r d\varphi_i \wedge \omega^{k-1} = \sum_{i=1}^r d(\varphi_i \omega^{k-1}).$$

Daraus folgt zunächst

$$\int_{M^k} d\omega^{k-1} = \sum_{i=1}^r \int_{V_i} d(h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})).$$

Für $r_0 + 1 \leq i \leq r$ ist V_i eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^k und $h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})$ eine k -Form auf V_i , deren Träger vollständig in V_i liegt. Zu jedem solchen Index i wählen wir

eine k -Kette c_i^k in \mathbb{R}^k , für die

$$\text{supp } h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1}) \subset \text{Int } c_i^k \subset c_i^k \subset V_i$$

gilt. Wenden wir nun den Satz von Stokes für Ketten (Satz 8, Kapitel 2) auf c_i^k an, so erhalten wir

$$\int_{V_i} d(h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})) = \int_{c_i^k} d(h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})) = \int_{\partial c_i^k} h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1}) = 0,$$

weil auf dem Rand der Kette die Form verschwindet. Wir behandeln nun die Indizes i zwischen 1 und r_0 . Für diese ist V_i eine offene Teilmenge des Halbraums \mathbb{H}^k und wir wählen wie eben Ketten c_i^k in \mathbb{H}^k , die die gleichen Trägereigenschaften in Bezug auf $h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})$ haben. Auch auf diese wenden wir den Satz von Stokes an und bekommen

$$\int_{V_i} d(h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})) = \int_{\partial c_i^k} h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1}).$$

Nun verschwindet $h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})$ aber nicht mehr auf $\partial c_i^k \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\})$, sondern nur in solchen Punkten von ∂c_i^k , welche im Inneren von \mathbb{H}^k liegen:

$$\int_{V_i} d(h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})) = \int_{V_i \cap \mathbb{R}^{k-1}} h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1}).$$

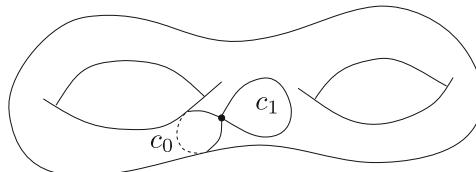
Die Paare $(V_i \cap \mathbb{R}^{k-1}, h_i|_{\mathbb{R}^{k-1}})$ bilden für $i = 1, \dots, r_0$ eine Überdeckung des Randes ∂M^k . Damit gilt nach Definition des Integrals

$$\int_{\partial M^k} \omega^{k-1} = \sum_{i=1}^{r_0} \int_{V_i \cap \mathbb{R}^{k-1}} h_i^*(\varphi_i \omega^{k-1})$$

und man erhält insgesamt die Behauptung. \square

In den folgenden Abschnitten werden wir zahlreiche Anwendungen des Satzes von Stokes kennen lernen. In Verallgemeinerung der Betrachtungen des Kapitel 2.5 studieren wir zunächst Kurvenintegrale und beweisen ein Analogon – allerdings nur für 1-Formen – des Poincaré-Lemmas. Dieses gilt für Mannigfaltigkeiten, in denen jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.

Definition 19. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M^k heißt *einfach zusammenhängend*, falls je zwei C^1 -Kurven $c_0, c_1 : [0, 1] \rightarrow M^k$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind. Auf dem nachstehenden Bild sind zwei solche Kurven eingezeichnet, die offensichtlich nicht homotop sind: diese Mannigfaltigkeit ist folglich nicht einfach zusammenhängend.



Nach Satz 9, Kapitel 2.5, dessen Beweis sich auf den Fall einer Mannigfaltigkeit unmittelbar überträgt, hängt in einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit das Kurvenintegral einer geschlossenen 1-Form ω^1 ausschließlich von den Endpunkten der Kurve ab. Fixieren wir einen Punkt $x_0 \in M^k$, so wird durch das Kurvenintegral entlang einer die Punkte x_0 und x verbindenden Kurve

$$f(x) = \int_{x_0}^x \omega^1$$

eindeutig eine Funktion auf der Mannigfaltigkeit definiert. Ihr Differential df stimmt mit ω^1 überein und wir erhalten den

Satz 22. *Jede geschlossene 1-Form einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist exakt.*

Beispiel 31. Die auf $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ definierte Windungsform ist geschlossen, aber nicht exakt. Dies zeigt, dass $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ keine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist.

3.7. Der Satz vom Igel

Wir betrachten zwei orientierte, kompakte Mannigfaltigkeiten M^k und N^k ohne Rand und der gleichen Dimension. Zwei Abbildungen $f_0, f_1 : M^k \rightarrow N^k$ zwischen ihnen heißen homotop, falls eine glatte Abbildung

$$F : M^k \times [0, 1] \longrightarrow N^k \quad \text{mit} \quad F(x, 0) = f_0(x) \quad \text{und} \quad F(x, 1) = f_1(x)$$

existiert. Wir beweisen den

Satz 23. *Ist ω^k eine k -Form auf N^k und sind $f_0, f_1 : M^k \rightarrow N^k$ homotope Abbildungen, so gilt*

$$\int_{M^k} f_0^*(\omega^k) = \int_{M^k} f_1^*(\omega^k).$$

Beweis. Die orientierte Mannigfaltigkeit $M^k \times [0, 1]$ hat den Rand

$$\partial(M^k \times [0, 1]) = M^k \times \{1\} - M^k \times \{0\},$$

wobei mit dem Minuszeichen die Umkehrung der Orientierung gemeint ist. Daher erhalten wir aus dem Satz von Stokes

$$\int_{M^k} f_1^*(\omega^k) - \int_{M^k} f_0^*(\omega^k) = \int_{\partial(M^k \times [0, 1])} F^*(\omega^k) = \int_{M^k \times [0, 1]} dF^*(\omega^k).$$

Die Form $dF^*(\omega^k) = F^*(d\omega^k) = 0$ verschwindet jedoch, weil die k -dimensionale Mannigfaltigkeit N^k keine nichttrivialen $(k+1)$ -Formen hat. \square

Satz 24. *Die antipodale Abbildung der Sphäre in sich $A : S^n \rightarrow S^n$, $A(x) = -x$ ist nur für ungerade Dimensionen n homotop zur Identität Id_{S^n} .*

Beweis. In \mathbb{R}^{n+1} betrachten wir die Form

$$\omega^n = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1},$$

deren Einschränkung auf die Sphäre S^n ihre Volumenform dS^n ist (Beispiel 28, Gleichung (19)). Falls A homotop zur Identität Id_{S^n} ist, folgt aus dem vorhergehenden Satz

$$\int_{S^n} A^*(\omega^n) = \int_{S^n} \omega^n = \text{vol}(S^n).$$

Die induzierte Form $A^*(\omega^n) = (-1)^{n+1}\omega^n$ ist proportional zur Form ω^n selbst. Daher erhalten wir die Bedingung

$$(-1)^{n+1}\text{vol}(S^n) = \text{vol}(S^n),$$

d. h. $(n + 1)$ muss eine gerade Zahl sein. \square

Satz 25 (Satz vom Igel). *Eine Sphäre S^{2k} gerader Dimension besitzt kein nirgends verschwindendes, stetiges, tangentiales Vektorfeld.*

Beweis. Angenommen, es existiert ein derartiges Vektorfeld auf der n -dimensionalen Sphäre S^n . Wir approximieren dieses Vektorfeld zunächst durch ein glattes Vektorfeld \mathcal{V} (Satz von Stone-Weierstrass) und normieren es gleichzeitig so, dass der Vektor $\mathcal{V}(x)$ in jedem Punkt die Länge eins hat. Das dann entstehende glatte, tangentiale Vektorfeld fassen wir als eine vektorwertige Funktion $\mathcal{V} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit den beiden Eigenschaften

$$\langle x, \mathcal{V}(x) \rangle = 0, \quad \|\mathcal{V}(x)\| = 1$$

auf. Wir definieren sodann die Homotopie $F : S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ der Sphäre in sich durch die Formel

$$F(x, t) = \cos(\pi t) \cdot x + \sin(\pi t) \cdot \mathcal{V}(x).$$

Die Länge von $F(x, t)$ beträgt stets eins, weil x und $\mathcal{V}(x)$ zueinander orthogonal sind. Weiterhin gilt $F(x, 0) = x$ und $F(x, 1) = -x$, d. h. F ist eine Homotopie zwischen der Identität und der antipodalen Abbildung der Sphäre S^n . Dann jedoch ist die Dimension n eine ungerade Zahl. \square

Dieser Satz gewinnt seinen Namen aus folgender Veranschaulichung auf S^2 : Ein Igel kann nicht stetig glatt gekämmt werden.

3.8. Die klassischen Integralsätze

Wir besprechen nun die bereits im Kapitel 2.6 für Ketten angeschnittenen klassischen Integralformeln. Im Vergleich dazu haben wir jetzt den Vorteil, die Ergebnisse anhand der in der Differentialrechnung für Mannigfaltigkeiten entwickelten Begriffe wie Divergenz, Gradient und Laplace-Operator formulieren zu können. Gleichzeitig wird die Orientierung der Mannigfaltigkeit und das äußere Normalenvektorfeld ihres Randes eine besondere Rolle spielen. Wir beweisen diese Integralformeln für eine beliebige kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit M^k (in \mathbb{R}^n). Es ist dies die endgültige Formulierung der klassischen Integralsätze, wie man sie in vielen Zweigen der Mathematik sowie in der theoretischen Elektrodynamik und Hydrodynamik braucht. Wir beginnen mit der *Ostrogradski-Formel*, die die Divergenz eines Vektorfeldes mit dessen Fluss durch die Oberfläche in Verbindung setzt.

Satz 26. Sei M^k eine orientierte, kompakte Mannigfaltigkeit mit äußerem Normalenvektorfeld \mathcal{N} des Randes. Dann gilt für jedes Vektorfeld $\mathcal{V} : M^k \rightarrow TM^k$ auf M^k die Formel:

$$\int_{M^k} \operatorname{div}(\mathcal{V}) dM^k = \int_{\partial M^k} \langle \mathcal{V}, \mathcal{N} \rangle d(\partial M^k).$$

Beweis. Aus Satz 17 wissen wir, dass die Divergenz und das innere Produkt der Volumenform über die Formel

$$\operatorname{div}(\mathcal{V}) \cdot dM^k = d(\mathcal{V} \lrcorner dM^k)$$

zueinander in Beziehung stehen. Eine direkte Anwendung des Satz von Stokes liefert somit

$$\int_{M^k} \operatorname{div}(\mathcal{V}) dM^k = \int_{M^k} d(\mathcal{V} \lrcorner dM^k) = \int_{\partial M^k} \mathcal{V} \lrcorner dM^k.$$

Sei nun $x \in \partial M^k$ ein Randpunkt. Wir zerlegen den Vektor $\mathcal{V}(x)$ in einen zum äußeren Normalenvektor proportionalen und einen vollständig im Tangentialraum $T_x \partial M^k$ des Randes enthaltenen Vektor $\mathcal{W}(x)$:

$$\mathcal{V}(x) = \langle \mathcal{V}(x), \mathcal{N}(x) \rangle \mathcal{N}(x) + \mathcal{W}(x).$$

Weiterhin bemerken wir, dass die Einschränkung auf den Rand ∂M^k des inneren Produktes $\mathcal{W} \lrcorner dM^k$ identisch verschwindet. Für das innere Produkt von \mathcal{V} mit der Volumenform dM^k bedeutet dies auf dem Rand ∂M^k

$$\mathcal{V} \lrcorner dM^k = \langle \mathcal{V}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} \lrcorner dM^k + \mathcal{W} \lrcorner dM^k = \langle \mathcal{V}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N}(x) \lrcorner dM^k$$

und wir erhalten

$$\int_{M^k} \operatorname{div}(\mathcal{V}) dM^k = \int_{\partial M^k} \langle \mathcal{V}, \mathcal{N} \rangle \mathcal{N} \lrcorner dM^k.$$

Nach Satz 19 stimmt $\mathcal{N}(x) \lrcorner dM^k$ mit der Volumenform des Randes $d(\partial M^k)$ überein. \square

Als direkte Anwendung der Ostrogradski-Formel erhalten wir den *Satz von Gauß*.

Satz 27. Seien \mathcal{V} ein Vektorfeld und f eine Funktion auf der orientierten, kompakten Mannigfaltigkeit M^k mit äußerem Normalenvektorfeld \mathcal{N} des Randes. Dann gilt:

$$\int_{M^k} \langle \mathcal{V}, \operatorname{grad}(f) \rangle dM^k + \int_{M^k} f \cdot \operatorname{div}(\mathcal{V}) dM^k = \int_{\partial M^k} f \cdot \langle \mathcal{V}, \mathcal{N} \rangle d(\partial M^k).$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der Ostrogradski-Formel und der aus Satz 11 bekannten Rechenregel

$$\operatorname{div}(f \cdot \mathcal{V}) = f \cdot \operatorname{div}(\mathcal{V}) + \mathcal{V}(f) = f \cdot \operatorname{div}(\mathcal{V}) + \langle \mathcal{V}, \operatorname{grad}(f) \rangle. \quad \square$$

Ebenso erhalten wir die Greenschen Formeln in einer Gestalt, die nicht auf den \mathbb{R}^2 beschränkt ist. Zunächst verallgemeinern wir die *erste Greensche Formel*.

Satz 28. Seien $f, g : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen auf der kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit M^k . Dann gilt:

$$\int_{M^k} f \Delta(g) dM^k + \int_{M^k} \langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle dM^k = \int_{\partial M^k} f \langle \text{grad}(g), \mathcal{N} \rangle d(\partial M^k).$$

Beweis. Nach Definition des Laplace-Operators haben wir

$$\int_{M^k} f \Delta(g) dM^k = \int_{M^k} f \text{div}(\text{grad}(g)) dM^k.$$

Nun wende man den Satz von Gauß an. \square

Durch zweimalige Anwendung der ersten Greenschen Formel erhält man die *zweite Greensche Formel*.

Satz 29. Für zwei glatte Funktionen $f, g : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{M^k} [g \Delta(f) - f \Delta(g)] dM^k = \int_{\partial M^k} [g \langle \text{grad}(f), \mathcal{N} \rangle - f \langle \text{grad}(g), \mathcal{N} \rangle] d(\partial M^k).$$

\square

Bemerkung. Das nur auf dem Rand der Mannigfaltigkeit definierte Skalarprodukt $\langle \text{grad}(f), \mathcal{N} \rangle$ bezeichnet man oft auch mit dem Symbol $\partial f / \partial \mathcal{N}$, weil es die Ableitung der Funktion f in Richtung des Vektors der äußeren Normalen ist. Dann erhält man eine andere Schreibweise der zweiten Greenschen Formel:

$$\int_{M^k} [g \cdot \Delta(f) - f \cdot \Delta(g)] dM^k = \int_{\partial M^k} \left[g \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathcal{N}} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}} \right] d(\partial M^k).$$

Korollar 1. Auf jeder kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit M^k ohne Rand gilt:

$$(1) \quad \int_{M^k} \text{div}(\mathcal{V}) dM^k = 0 \text{ für jedes Vektorfeld } \mathcal{V};$$

$$(2) \quad \int_{M^k} g \Delta(f) dM^k = \int_{M^k} f \Delta(g) dM^k = - \int_{M^k} \langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle dM^k \\ \text{für je zwei Funktionen } f, g \in C^\infty(M^k).$$

\square

Der Laplace-Operator ist demnach symmetrisch bzgl. des L^2 -Skalarprodukts. Die von uns getroffene Vorzeichenwahl impliziert zudem, dass er nicht positiv ist.

Korollar 2 (Satz von Hopf). Sei M^k eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand und gelte für die Funktion $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt die Bedingung $\Delta(f)(x) \geq 0$. Dann ist die Funktion f konstant.

Beweis. Integriert man die Voraussetzung $\Delta(f)(x) \geq 0$ über M^k und verwendet die eben bewiesene Symmetrie des Laplace-Operators, so ergibt sich zunächst

$$0 \leq \int_{M^k} 1 \cdot \Delta(f) dM^k = \int_{M^k} f \cdot \Delta(1) dM^k = 0,$$

d. h. der Laplace-Operator von f verschwindet identisch, $\Delta(f) = 0$. Indem man in der ersten Greenschen Formel (Satz 28) $f = g$ setzt und bemerkt, dass das Randintegral nach Voraussetzung an M^k verschwindet, folgt dann

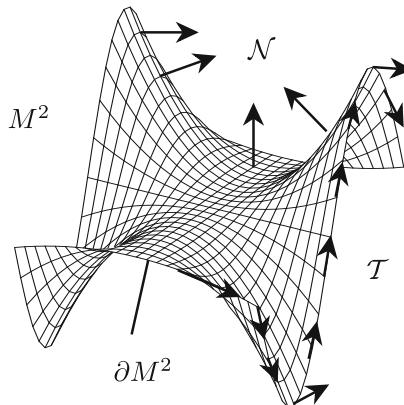
$$\int_{M^k} |\operatorname{grad}(f)|^2 dM^k = - \int_{M^k} f \Delta(f) dM^k = 0$$

und somit $\operatorname{grad}(f) = 0$. Damit ist f konstant, weil M^k zusammenhängend ist. \square

Zum Abschluss formulieren wir den *klassischen Satz von Stokes* im \mathbb{R}^3 . Im Gegensatz zur Divergenz und dem Gradienten, die wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels auf Mannigfaltigkeiten (neu) definiert haben, benötigen wir hierzu nur den aus Kapitel 2.3 bekannten Begriff der Rotation auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^3 .

Satz 30. Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte, orientierte Fläche, \mathcal{V} ein Vektorfeld, definiert auf einer offenen Teilmenge $M^2 \subset U \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{N} : M^2 \rightarrow S^2$ das äußere Einheitsnormalenfeld an die Fläche M^2 und $\mathcal{T} : \partial M^2 \rightarrow T(\partial M^2)$ das Einheits-tangentialvektorfeld auf der Randkurve ∂M^2 mit der induzierten Orientierung. Dann gilt:

$$\int_{M^2} \langle \operatorname{rot}(\mathcal{V}), \mathcal{N} \rangle dM^2 = \int_{\partial M^2} \langle \mathcal{V}, \mathcal{T} \rangle d(\partial M^2).$$



Beweis. Wir betrachten wie in Kapitel 2.3 die dem Vektorfeld $\mathcal{V} = V^1 \partial/\partial x^1 + V^2 \partial/\partial x^2 + V^3 \partial/\partial x^3$ auf U zugeordnete 1-Form

$$\omega_{\mathcal{V}}^1 := V^1 dx^1 + V^2 dx^2 + V^3 dx^3$$

und deren Differential

$$d\omega_{\mathcal{V}}^1 = \left[\frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right] dx^1 \wedge dx^2 + \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^3} \right] dx^1 \wedge dx^3 + \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right] dx^2 \wedge dx^3.$$

Wir erinnern daran, dass die Rotation von \mathcal{V} der 1-Form $*d\omega_{\mathcal{V}}^1$ entspricht. Ist andererseits $h : W \rightarrow M^2$ eine Parametrisierung der Fläche mit Komponenten

h^1, h^2, h^3 und den Koordinaten y^1, y^2 von W , so gilt für den Normalenvektor \mathcal{N} an die Fläche

$$\mathcal{N}(y^1, y^2) = \frac{\partial h}{\partial y^1} \times \frac{\partial h}{\partial y^2} / \left\| \frac{\partial h}{\partial y^1} \times \frac{\partial h}{\partial y^2} \right\|.$$

Zwei beliebige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ erfüllen die Identität

$$\|v \times w\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix}$$

und somit folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$\left\| \frac{\partial h}{\partial y^1} \times \frac{\partial h}{\partial y^2} \right\| = \sqrt{g}.$$

Für die erste Komponente des Normalenvektors \mathcal{N} bedeutet dies ausgeschrieben in den Koordinaten y^1, y^2 zum Beispiel

$$N^1 dM^2 = N^1 \sqrt{g} dy^1 \wedge dy^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial h^2}{\partial y^1} \frac{\partial h^3}{\partial y^2} - \frac{\partial h^2}{\partial y^2} \frac{\partial h^3}{\partial y^1} \right] \sqrt{g} dy^1 \wedge dy^2.$$

Andererseits berechnet man leicht die unter h zurückgezogenen Formen von dx^2 und dx^3

$$h^*(dx^2) = \frac{\partial h^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial h^2}{\partial y^2} dy^2, \quad h^*(dx^3) = \frac{\partial h^3}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial h^3}{\partial y^2} dy^2,$$

und ein direkter Vergleich impliziert die von den Koordinaten y^1, y^2 unabhängige Formel

$$N^1 dM^2 = dx^2 \wedge dx^3.$$

Analog zeigt man

$$N^2 dM^2 = -dx^1 \wedge dx^3, \quad N^3 dM^2 = dx^1 \wedge dx^2.$$

Das Skalarprodukt der Rotation von \mathcal{V} mit dem Einheitsnormalenvektorfeld \mathcal{N} , multipliziert mit der Volumenform dM^2 , ist demnach einfach das Differential von $\omega_{\mathcal{V}}^1$:

$$\begin{aligned} \langle \text{rot}(\mathcal{V}), \mathcal{N} \rangle dM^2 &= \\ &= \left[\frac{\partial V^3}{\partial x^2} - \frac{\partial V^2}{\partial x^3} \right] N^1 dM^2 + \left[\frac{\partial V^1}{\partial x^3} - \frac{\partial V^3}{\partial x^1} \right] N^2 dM^2 + \left[\frac{\partial V^2}{\partial x^1} - \frac{\partial V^1}{\partial x^2} \right] N^3 dM^2 \\ &= d\omega_{\mathcal{V}}^1. \end{aligned}$$

Deswegen können wir den Satz von Stokes anwenden in der Gestalt

$$\int_{M^2} \langle \text{rot}(\mathcal{V}), \mathcal{N} \rangle dM^2 = \int_{M^2} d\omega_{\mathcal{V}}^1 = \int_{\partial M^2} \omega_{\mathcal{V}}^1 = \int_{\partial M^2} [V^1 dx^1 + V^2 dx^2 + V^3 dx^3].$$

Ist aber \mathcal{T} das Einheitstangentenvektorfeld der Kurve ∂M^2 , so gilt $d(\partial M^2)(\mathcal{T}) = 1$, also

$$T^1 d(\partial M^2) = dx^1, \quad T^2 d(\partial M^2) = dx^2, \quad T^3 d(\partial M^2) = dx^3.$$

Jetzt können wir das letztgenannte Kurvenintegral umschreiben

$$\int_{\partial M^2} [V^1 dx^1 + V^2 dx^2 + V^3 dx^3] = \int_{\partial M^2} \langle \mathcal{V}, \mathcal{T} \rangle d(\partial M^2)$$

und es ergibt sich insgesamt die klassische Stokessche Integralformel. \square

3.9. Die Lie-Ableitung und die geometrische Interpretation der Divergenz

Ziel dieses Abschnittes ist die Behandlung der geometrischen Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes als die infinitesimale Volumenverzerrung seines Flusses. Wir erinnern daher zunächst an einige Ergebnisse der lokalen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen und führen den Fluss einer Mannigfaltigkeit sowie die Lie-Ableitung von Formen ein. Danach berechnen wir diese Lie-Ableitung mittels des äußeren Differentials, woraus sich in einem Spezialfall die gewünschte Interpretation der Divergenz ergibt.

Gegeben sei ein Vektorfeld \mathcal{V} einer Mannigfaltigkeit M^k . Eine *Integralkurve* von \mathcal{V} ist eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^k$, deren Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t) = \gamma_*(\partial/\partial t)$ an jeder Stelle mit dem dort gegebenen Vektor $\mathcal{V}(\gamma(t))$ übereinstimmt:

$$\dot{\gamma}(t) = \mathcal{V}(\gamma(t)).$$

Der bekannte Existenzsatz für autonome Differentialgleichungen besagt, dass zu jedem Anfangspunkt $x \in M^k$ eine maximale Integralkurve $\gamma_x : (a_x, b_x) \rightarrow M^k$, definiert auf einem die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ enthaltenden Intervall mit

$$\gamma_x(0) = x,$$

existiert und eindeutig durch diese Anfangsbedingung bestimmt ist. Wir bezeichnen mit $\Sigma_{\mathcal{V}}$ die Menge

$$\Sigma_{\mathcal{V}} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M^k : a_x < t < b_x\}$$

und nennen die durch die Formel

$$\Phi_t(x) = \Phi(t, x) := \gamma_x(t)$$

definierte Abbildung $\Phi : \Sigma_{\mathcal{V}} \rightarrow M^k$ den *Fluss des Vektorfeldes* \mathcal{V} . Sind die maximalen Integralkurven für alle Parameter $t \in \mathbb{R}$ definiert ($\Sigma_{\mathcal{V}} = \mathbb{R} \times M^k$), so heißt das Vektorfeld \mathcal{V} *vollständig*. Aus einem vollständigen Vektorfeld \mathcal{V} entsteht eine einparametrische Gruppe $\Phi_t : M^k \rightarrow M^k$ von Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit in sich:

$$\Phi_{t_0+t_1} = \Phi_{t_0} \circ \Phi_{t_1}.$$

Diese Relation zwischen den Diffeomorphismen ist eine leichte Konsequenz der Eindeutigkeit der Integralkurve bei vorliegender Anfangsbedingung. Umgekehrt, ist eine *einparametrische Diffeomorphismengruppe* gegeben, so erhalten wir ein Vektorfeld, indem wir die Tangenten der Trajektorien $\Phi_t(x)$ eines Punktes betrachten:

$$\mathcal{V}(x) := \frac{d}{dt} \Phi_t(x) \Big|_{t=0}.$$

Beispiel 32. Die einparametrische Transformationsgruppe in \mathbb{R}^2 des Vektorfeldes

$$\mathcal{V} = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$$

wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}^1 = -x^2, \quad \dot{x}^2 = x^1$$

bestimmt und ist die Gruppe aller Drehungen in der Ebene.

Beispiel 33. Die einparametrische Transformationsgruppe in \mathbb{R}^n des Vektorfeldes

$$\mathcal{V} = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

wird durch die Differentialgleichung

$$\dot{x}^1 = x^1, \quad \dots, \quad \dot{x}^n = x^n$$

bestimmt und ist die Gruppe aller Streckungen in \mathbb{R}^n .

Sei die Mannigfaltigkeit M^k eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann ist M^k ein vollständiger metrischer Raum: Jede Cauchy-Folge in M^k konvergiert. Für beschränkte Vektorfelder beweisen wir den

Satz 31. *Jedes beschränkte Vektorfeld einer vollständigen Mannigfaltigkeit ohne Rand ist ein vollständiges Vektorfeld. Insbesondere ist jedes Vektorfeld einer kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand vollständig.*

Beweis. Die maximale Länge des Vektorfeldes \mathcal{V} bezeichnen wir mit K ,

$$K := \sup \{ \|\mathcal{V}(x)\| : x \in M^k \}.$$

Sei $\gamma : (a, b) \rightarrow M^k$ eine maximale Integralkurve des Vektorfeldes und gelte $b < \infty$. Wir wenden auf die vektorwertige Funktion $\gamma : (a, b) \rightarrow M^k \subset \mathbb{R}^n$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an. Er besagt, dass zu je zwei Parametern $a < t_1 < t_2 < b$ ein weiterer Parameter $t_1 \leq t^* \leq t_2$ mit

$$\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| \leq |t_2 - t_1| \cdot \|\dot{\gamma}(t^*)\| = |t_2 - t_1| \cdot \|\mathcal{V}(\gamma(t^*))\| \leq |t_2 - t_1| \cdot K$$

existiert. Wählen wir eine gegen b konvergierende Folge $t_i \in (a, b)$, so ist diese eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , weil b endlich ist. Die letzte Abschätzung zeigt, dass die Bildfolge $\gamma(t_i) \in M^k$ gleichfalls eine Cauchy-Folge wird. Nach Voraussetzung ist M^k eine vollständige Mannigfaltigkeit und daher konvergiert die Folge $\gamma(t_i)$ in M^k . Diese Überlegung zeigt, dass der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) =: x^*$$

existiert. Der Punkt $x^* \in M^k$ ist ein innerer Punkt der Mannigfaltigkeit, denn nach Voraussetzung liegen keine Randpunkte vor. Wir wählen eine Karte $h : \mathbb{R}^k \rightarrow M^k$ um den Punkt $x^* = h(0)$ und stellen in ihr das Vektorfeld \mathcal{V} dar,

$$\mathcal{V} = V^1 \partial/\partial y^1 + \cdots + V^k \partial/\partial y^k.$$

Die Lösung $\gamma(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{y}^1 = V^1(y^1, \dots, y^k), \quad \dots, \quad \dot{y}^k = V^k(y^1, \dots, y^k)$$

konvergiert für $t \rightarrow b$ gegen den Punkt $0 \in \mathbb{R}^k$ und damit kann die Integralkurve $\gamma(t)$ über den Parameter b hinaus fortgesetzt werden. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von b , der aus der Annahme $b < \infty$ resultiert. \square

Wir kommen jetzt zur Lie-Ableitung einer Differentialform nach einem Vektorfeld. Ist ω^i eine i -Form, so erhalten wir durch Zurückziehen unter dem Fluss des Vektorfeldes eine t -parametrische Schar $\Phi_t^*(\omega^i)$ von Formen. Deren Ableitung nach dem Parameter an der Stelle $t = 0$ ist die sog. Lie-Ableitung. In diesen Begriff geht der Fluss des Vektorfeldes nur in einer kleinen Umgebung von Null ein und ist deswegen für beliebige Vektorfelder wohl definiert.

Definition 20. Die *Lie-Ableitung* $\mathcal{L}_V(\omega^i)$ einer i -Form ω^i ist die Form

$$\mathcal{L}_V(\omega^i) := \frac{d}{dt}(\Phi_t^*(\omega^i))_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^*(\omega^i) - \omega^i}{t}.$$

Satz 32. Die Lie-Ableitung einer Differentialform drückt sich durch das äußere Differential und das innere Produkt aus:

$$\mathcal{L}_V(\omega^i) = d(V \lrcorner \omega^i) + V \lrcorner (d\omega^i).$$

Beweis. Das äußere Produkt $\omega^i \wedge \eta^j$ ist bilinear und man beweist wie gewöhnlich die Produktregel

$$\mathcal{L}_V(\omega^i \wedge \eta^j) = \mathcal{L}_V(\omega^i) \wedge \eta^j + \omega^i \wedge \mathcal{L}_V(\eta^j).$$

Weiterhin kommutiert das äußere Differential d mit den induzierten Abbildungen Φ_t^* und somit gilt

$$\mathcal{L}_V(d\omega^i) = d(\mathcal{L}_V(\omega^i)).$$

Wir bezeichnen die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung mit $\mathcal{L}_V^*(\omega^i)$. Dann erhalten wir

$$\mathcal{L}_V^*(d\omega^i) = d(V \lrcorner d\omega^i) + V \lrcorner (dd\omega^i) = d(V \lrcorner d\omega^i) = d(V \lrcorner d\omega^i + d(V \lrcorner \omega^i)) = d(\mathcal{L}_V^*(\omega^i)).$$

Die einfache, rein algebraische Gleichung

$$V \lrcorner (\omega^i \wedge \eta^j) = (V \lrcorner \omega^i) \wedge \eta^j + (-1)^i \omega^i \wedge (V \lrcorner \eta^j)$$

führt zu der Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V^*(\omega^i \wedge \eta^j) &= d(V \lrcorner (\omega^i \wedge \eta^j)) + V \lrcorner d(\omega^i \wedge \eta^j) \\ &= d((V \lrcorner \omega^i) \wedge \eta^j + (-1)^i \omega^i \wedge (V \lrcorner \eta^j)) + V \lrcorner (d\omega^i \wedge \eta^j + (-1)^i \omega^i \wedge d\eta^j) \\ &= d(V \lrcorner \omega^i) \wedge \eta^j + (-1)^{i-1} (V \lrcorner \omega^i) \wedge d\eta^j + (-1)^i d\omega^i \wedge (V \lrcorner \eta^j) + \omega^i \wedge d(V \lrcorner \eta^j) \\ &\quad + (V \lrcorner d\omega^i) \wedge \eta^j + (-1)^{i+1} d\omega^i \wedge (V \lrcorner \eta^j) + (-1)^i (V \lrcorner \omega^i) \wedge d\eta^j + \omega^i \wedge (V \lrcorner d\eta^j) \\ &= (d(V \lrcorner \omega^i) + V \lrcorner d\omega^i) \wedge \eta^j + \omega^i \wedge (d(V \lrcorner \eta^j) + V \lrcorner d\eta^j) \\ &= \mathcal{L}_V^*(\omega^i) \wedge \eta^j + \omega^i \wedge \mathcal{L}_V^*(\eta^j). \end{aligned}$$

Letztendlich stimmen \mathcal{L} und \mathcal{L}^* für Funktionen überein:

$$\mathcal{L}_V(f) = V(f) = V \lrcorner df = \mathcal{L}_V^*(f)$$

und damit ist die Formel bewiesen. \square

Die Formel des vorhergehenden Satzes wenden wir auf die Volumenform einer orientierten Mannigfaltigkeit M^k an. Nach Definition der Divergenz eines Vektorfeldes erhalten wir dann

$$\mathcal{L}_V(dM^k) = d(V \lrcorner dM^k) = \text{div}(V) dM^k.$$

Fixieren wir einen Punkt $x \in M^k$ der Mannigfaltigkeit und wählen wir um ihn eine Umgebung $U(x, \varepsilon) \subset M^k$ vom Radius $\varepsilon > 0$, so erhalten wir nach Integration

$$\int_{U(x, \varepsilon)} \operatorname{div}(\mathcal{V}) \cdot dM^k = \frac{d}{dt} \int_{U(x, \varepsilon)} \Phi_t^*(dM^k) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\Phi_t(U(x, \varepsilon))) \Big|_{t=0}.$$

Dividieren wir beide Seiten durch das Volumen der Menge $U(x, \varepsilon)$ und bilden den Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$, so ergibt sich aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung unmittelbar die Formel

$$\operatorname{div}(\mathcal{V})(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{vol}(U(x, \varepsilon))} \frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\Phi_t(U(x, \varepsilon))) \Big|_{t=0} \right].$$

Diese Formel enthält eine geometrische Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes: Sie ist die Volumenverzerrung seines Flusses in infinitesimal kleiner Zeit und auf infinitesimal kleinen Gebieten um den Punkt x herum.

Korollar 3. *Die Divergenz eines Vektorfeldes verschwindet genau dann, falls sein Fluss $\Phi_t : M^k \rightarrow M^k$ aus volumenerhaltenden Diffeomorphismen besteht.*

Beweis. Für eine messbare Menge $A \subset M^k$ bezeichne $h_A(t) := \operatorname{vol}(\Phi_t(A))$ das Volumen der Menge $\Phi_t(A)$. Wir berechnen die Ableitung der Volumenänderung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h_A(t) \Big|_{t=t_1} &= \frac{d}{dt} \int_{\Phi_{t+t_1}(A)} dM^k \Big|_{t=0} = \int_{\Phi_{t_1}(A)} \frac{d}{dt} \Phi_t^*(dM^k) \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Phi_{t_1}(A)} \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(dM^k) = \int_{\Phi_{t_1}(A)} \operatorname{div}(\mathcal{V}) \cdot dM^k. \end{aligned}$$

Daraus sehen wir, dass der Fluss Φ_t das Volumen genau dann erhält, falls die Divergenz des Vektorfeldes \mathcal{V} identisch verschwindet. \square

Die Lie-Ableitung eines Vektorfeldes \mathcal{W} nach einem weiteren Vektorfeld \mathcal{V} wird analog zur Lie-Ableitung von Formen definiert, allerdings als der Kommutator der beiden Vektorfelder bezeichnet.

Definition 21. Seien \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei Vektorfelder und bezeichne Φ_t den Fluss des Vektorfeldes \mathcal{V} . Der Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ ist das Vektorfeld

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})_*(\mathcal{W}) - \mathcal{W}}{t}.$$

Wir beweisen eine wichtige Formel, die den Kommutator zweier Vektorfelder mit dem äußeren Differential von 1-Formen in Beziehung setzt.

Satz 33. *Sei ω^1 eine 1-Form und seien \mathcal{V}, \mathcal{W} zwei Vektorfelder. Dann gilt*

$$d\omega^1(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathcal{V}(\omega^1(\mathcal{W})) - \mathcal{W}(\omega^1(\mathcal{V})) - \omega^1([\mathcal{V}, \mathcal{W}]).$$

Dabei ist $\mathcal{V}(\omega^1(\mathcal{W}))$ die Ableitung der Funktion $\omega^1(\mathcal{W})$ in Richtung des Vektorfeldes \mathcal{V} .

Beweis. Ist $x \in M^k$ ein fixierter Punkt, so gilt nach Definition des Kommutators $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}](x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})_*(\mathcal{W}(\Phi_t(x))) - \mathcal{W}(x)}{t}.$$

Daraus ergibt sich die behauptete Formel aus Satz 32 und der nachstehenden Umformung:

$$\begin{aligned}
 \omega^1([\mathcal{V}, \mathcal{W}])(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})^*(\omega^1)(\mathcal{W}(\Phi_t(x))) - \omega^1(\mathcal{W}(x))}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t})^*(\omega^1) - \omega^1}{t}(\mathcal{W}(\Phi_t(x))) + \lim_{t \rightarrow 0} \omega^1 \left(\frac{\mathcal{W}(\Phi_t(x)) - \mathcal{W}(x)}{t} \right) \\
 &= -(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}\omega^1)(\mathcal{W})(x) + \mathcal{V}(\omega^1(\mathcal{W}))(x) \\
 &= -\mathcal{W}(\omega^1(\mathcal{V}))(x) - d\omega^1(\mathcal{V}, \mathcal{W})(x) + \mathcal{V}(\omega^1(\mathcal{W}))(x).
 \end{aligned}$$

□

Ist ω^1 insbesondere eine geschlossene Form, so erhalten wir

$$\omega^1([\mathcal{V}, \mathcal{W}]) = \mathcal{V}(\omega^1(\mathcal{W})) - \mathcal{W}(\omega^1(\mathcal{V})).$$

In lokalen Koordinaten stellen wir die Vektorfelder in ihren Komponenten dar

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^k V^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \mathcal{W} = \sum_{j=1}^k W^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

und wenden die vorherige Formel auf die geschlossene Form dy^l an:

$$dy^l([\mathcal{V}, \mathcal{W}]) = \sum_{i=1}^k V^i \frac{\partial W^l}{\partial y^i} - \sum_{i=1}^k W^i \frac{\partial V^l}{\partial y^i}.$$

Daraus ergibt sich der lokale Ausdruck für den Kommutator zweier Vektorfelder:

$$[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^k \left(V^i \frac{\partial W^l}{\partial y^i} - W^i \frac{\partial V^l}{\partial y^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y^l}.$$

Beispiel 34. Der Kommutator der auf \mathbb{R}^2 durch $\mathcal{V} = y \cdot \partial/\partial x$, $\mathcal{W} = \partial/\partial y$ gegebenen Vektorfelder ist das Vektorfeld $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = -\partial/\partial x$.

Die algebraischen Eigenschaften des Kommutators von Vektorfeldern fassen wir zusammen.

Satz 34. Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ Vektorfelder und f eine glatte Funktion auf einer Mannigfaltigkeit M^k . Dann gelten:

- (1) $[\mathcal{U} + \mathcal{V}, \mathcal{W}] = [\mathcal{U}, \mathcal{W}] + [\mathcal{V}, \mathcal{W}]$;
- (2) $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = -[\mathcal{W}, \mathcal{V}]$;
- (3) $[\mathcal{U}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]] + [\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{U}]] + [\mathcal{W}, [\mathcal{U}, \mathcal{V}]] = 0$ (Jacobi-Identität);
- (4) $[f \cdot \mathcal{V}, \mathcal{W}] = f \cdot [\mathcal{V}, \mathcal{W}] - \mathcal{W}(f) \cdot \mathcal{V}$.

Beweis. Diese Formeln ergeben sich unmittelbar aus dem lokalen Ausdruck für den Kommutator. Wir führen die Rechnung für die letzte der genannten Formeln

durch:

$$\begin{aligned}
 [f \cdot \mathcal{V}, \mathcal{W}] &= \sum_{i,l=1}^k \left(f \cdot V^i \frac{\partial W^l}{\partial y^i} - W^i \frac{\partial(f \cdot V^l)}{\partial y^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^l} \\
 &= f \cdot \sum_{i,l=1}^k \left(V^i \frac{\partial W^l}{\partial y^i} - W^i \frac{\partial V^l}{\partial y^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^l} - \left(\sum_{i=1}^k W^i \frac{\partial f}{\partial y^i} \right) \left(\sum_{l=1}^k V^l \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \\
 &= f \cdot [\mathcal{V}, \mathcal{W}] - \mathcal{W}(f) \cdot \mathcal{V}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Der Kommutator ist in folgendem Sinne eine natürliche Operation zwischen Vektorfeldern.

Satz 35. Ist $\Phi : M^k \rightarrow M^k$ ein Diffeomorphismus und sind \mathcal{V}, \mathcal{W} Vektorfelder der Mannigfaltigkeit M^k , so ist das Differential Φ_* mit dem Kommutator verträglich:

$$\Phi_*([\mathcal{V}, \mathcal{W}]) = [\Phi_*(\mathcal{V}), \Phi_*(\mathcal{W})].$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass für jede 1-Form ω^1 die Funktionen $\Phi^*(\omega^1)(\mathcal{W})$ und $\omega^1(\Phi_*(\mathcal{W}))$ durch die Formel

$$\Phi^*(\omega^1)(\mathcal{W}) = \omega^1(\Phi_*(\mathcal{W})) \circ \Phi^{-1}$$

verbunden sind. Aus Satz 33 erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
 \omega^1(\Phi_*[\mathcal{V}, \mathcal{W}]) &= (\Phi^*\omega^1)([\mathcal{V}, \mathcal{W}]) \circ \Phi \\
 &= \mathcal{V}((\Phi^*\omega^1)(\mathcal{W})) \circ \Phi - \mathcal{W}((\Phi^*\omega^1)(\mathcal{V})) \circ \Phi - d(\Phi^*\omega^1)(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \circ \Phi \\
 &= (\Phi_*\mathcal{V})(\omega^1(\Phi_*\mathcal{W})) - (\Phi_*\mathcal{W})(\omega^1(\Phi_*\mathcal{V})) - (d\omega^1)(\Phi_*\mathcal{V}, \Phi_*\mathcal{W}) \\
 &= \omega^1([\Phi_*(\mathcal{V}), \Phi_*(\mathcal{W})]).
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für jede 1-Form ω^1 , woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung. Die Einschränkung, dass Φ ein Diffeomorphismus sein möge, ist in der Praxis oft zu stark. Man kann die Verträglichkeit des Kommutators mit dem Differential mitunter auch unter schwächeren Voraussetzungen beweisen. Ist etwa $\Phi : M \rightarrow N$ glatt, so heißt das Vektorfeld \mathcal{V} auf M mit dem Vektorfeld \mathcal{W} auf N Φ -verbunden, falls in jedem Punkt $m \in M$

$$\Phi_{*,m}(\mathcal{V}(m)) = \mathcal{W}(\Phi(m))$$

gilt. Kann man nun beweisen, dass mit den Paaren $(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1)$ und $(\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2)$ notwendig auch $([\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2], [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2])$ Φ -verbunden sind, ergibt sich die gewünschte Verträglichkeitseigenschaft sofort. Um dies zu zeigen, wenden wir den Kommutator $[\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]$ auf eine Funktion $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ an:

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]_{\Phi(m)}(g) &= \mathcal{W}_1(\Phi(m))(\mathcal{W}_2 g) - \mathcal{W}_2(\Phi(m))(\mathcal{W}_1 g) \\
 &= \Phi_{*,m}(\mathcal{V}_1(m))(\mathcal{W}_2 g) - \Phi_{*,m}(\mathcal{V}_2(m))(\mathcal{W}_1 g) \\
 &= \mathcal{V}_1(m)((\mathcal{W}_2 g) \circ \Phi) - \mathcal{V}_2(m)((\mathcal{W}_1 g) \circ \Phi).
 \end{aligned}$$

Aber $(\mathcal{W}_i g) \circ \Phi = \mathcal{V}_i(g \circ \Phi)$, weil

$$\mathcal{V}_i(n)(g \circ \Phi) = \Phi_{*,n}(\mathcal{V}_i(n))(g) = \mathcal{W}_i(\Phi(n))(g) = (\mathcal{W}_i g)(\Phi(n)).$$

Damit folgt

$$[\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]_{\Phi(m)}(g) = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_m(g \circ \Phi) = \Phi_{*,m}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]_m(g),$$

d.h. die Vektorfelder $[\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2]$ und $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ sind in der Tat miteinander Φ -verbunden.

Der Kommutator zweier Vektorfelder ist ein Maß dafür, inwieweit die zu beiden Vektorfeldern gehörenden Flüsse untereinander kommutieren bzw. nicht kommutieren. Insofern erklärt sich der Name für das Vektorfeld $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$. Wir beweisen den

Satz 36. *Seien \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei vollständige Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M^k und bezeichne Φ_t und Ψ_s ihre Flüsse. Es verschwindet der Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ genau dann, wenn $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ für alle $-\infty < s, t < \infty$ gilt.*

Beweis. Wegen

$$\frac{d}{dt}(\phi_{-t})_*\mathcal{W}\Big|_{t=t_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{-t_1-h})_*\mathcal{W} - (\Phi_{-t_1})_*\mathcal{W}}{h} = (\Phi_{-t_1})_*([\mathcal{V}, \mathcal{W}])$$

verschwindet der Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ genau dann, falls das Vektorfeld \mathcal{W} invariant unter dem Fluss Φ_t ist, $(\Phi_t)_*\mathcal{W} = \mathcal{W}$. Diese Bedingung ist ihrerseits äquivalent zur Vertauschbarkeit $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ des Diffeomorphismus Φ_t mit dem Fluss Ψ_s von \mathcal{W} . \square

3.10. Harmonische Funktionen

Eine Funktion $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls sie Lösung der homogenen Laplace-Gleichung $\Delta(f) = 0$ ist. Als Spezialfall des Satzes von Hopf (Korollar 2) ergibt sich der folgende

Satz 37. *Jede harmonische Funktion auf einer kompakten, zusammenhängenden und orientierbaren Mannigfaltigkeit ohne Rand ist konstant.*

Ist der Rand der Mannigfaltigkeit M^k nicht leer, so sind für harmonische Funktionen zwei Randwertprobleme besonders wichtig.

Das Dirichlet-Problem: Gegeben sei eine Funktion $\varphi : \partial M^k \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist eine harmonische Funktion $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$, deren Werte auf dem Rand ∂M^k mit φ übereinstimmen:

$$\Delta(f) = 0 \quad \text{in } M^k \quad \text{und} \quad f|_{\partial M^k} = \varphi.$$

Das Neumann-Problem: Gegeben sei eine Funktion $\varphi : \partial M^k \rightarrow \mathbb{R}$. Gesucht ist eine harmonische Funktion $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$, deren Normalableitung auf dem Rand mit φ übereinstimmt:

$$\Delta(f) = 0 \quad \text{in } M^k \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathcal{N}} = \varphi \quad \text{auf } \partial M^k.$$

Die Lösung des Neumann-Problemes ist keinesfalls eindeutig. Mit jeder Lösung f ist auch $f + C$ für beliebige Konstante C eine Lösung dieses Problemes. Dies ist der einzige Freiheitsgrad, denn es gilt der

Satz 38. M^k sei eine kompakte, zusammenhängende und orientierte Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n und $\varphi : \partial M^k \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine glatte Funktion.

- (1) Das Dirichlet-Problem hat höchstens eine Lösung;
- (2) Sind f_1, f_2 zwei Lösungen des Neumann-Problems, so ist $f_1 - f_2$ konstant;
- (3) Das Verschwinden des Mittelwertes von φ ist notwendig für die Lösbarkeit des Neumann-Problems :

$$\int_{\partial M^k} \varphi d(\partial M^k) = 0.$$

Beweis. Sind f_1, f_2 zwei Lösungen des Dirichlet-Problems, so erhalten wir für die Differenz $u := f_1 - f_2$ die Gleichungen

$$\Delta(u) = 0 \quad \text{und} \quad u|_{\partial M^k} = 0.$$

Aus der ersten Greenschen Formel ergibt sich

$$0 = \int_{M^k} u \Delta(u) dM^k = - \int_{M^k} \|\operatorname{grad}(u)\|^2 dM^k + \int_{\partial M^k} u \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} d(\partial M^k)$$

und daher verschwindet der Gradient von u . Wegen $u|_{\partial M^k} = 0$ ist u dann aber identisch gleich null. Analog schließen wir für das Neumann-Problem. In diesem Fall erhalten wir aus den beiden Gleichungen

$$\Delta(u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathcal{N}} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial M^k$$

und der Greenschen Formel wiederum $\operatorname{grad}(u) = 0$, d. h. die Differenz $u = f_1 - f_2$ ist konstant. Besitzt das Neumann-Problem zu gegebener Funktion $\varphi : \partial M^k \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung, so gilt nach Anwendung der klassischen Integralformeln

$$0 = \int_{M^k} \Delta(f) dM^k = \int_{\partial M^k} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{N}} d(\partial M^k) = \int_{\partial M^k} \varphi \cdot d(\partial M^k). \quad \square$$

Das Dirichlet- und Neumann-Problem hat bei vorgegebener Randbedingung $\varphi : \partial M^k \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $\int \varphi = 0$ im Falle des Neumann-Problems) eine Lösung. Wir werden diesen Existenzsatz hier nicht für allgemeine Mannigfaltigkeiten beweisen, sondern beschränken uns dabei auf die Kugel $D^n(R) \subset \mathbb{R}^n$ vom Radius $R > 0$. In diesem Fall ist eine explizite, klassische Lösungsformel bekannt, welche wir herleiten werden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall der Dimension $n \geq 3$ und überlassen es dem Leser, die sich nur an wenigen Stellen unterscheidende Diskussion in der Dimension $n = 2$ durchzuführen. Zunächst beginnen wir mit einigen Vorbereitungen. Mit

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$$

bezeichnen wir den Abstand eines Punktes $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ zum Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 3. Sei $u(x)$ eine harmonische Funktion, definiert auf der Menge $\mathbb{R}^n - \{0\}$, und hänge u nur vom Radius r ab. Dann existieren Konstanten C_1 und C_2 mit

$$u(x) = C_1 + \frac{C_2}{r^{n-2}}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine glatte Funktion $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = h(r(x))$. Daraus folgen durch Differenzieren die Formeln

$$\frac{\partial u}{\partial x^i} = h'(r) \frac{x^i}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^i} = h''(r) \left(\frac{x^i}{r}\right)^2 + h'(r) \frac{r^2 - (x^i)^2}{r^3}$$

und wir erhalten eine Differentialgleichung für die Funktion $h(r)$:

$$0 = \Delta(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^i} = h''(r) + \frac{n-1}{r} h'(r).$$

Im Fall $n \geq 3$ ist $h(r) = C_1 + C_2 r^{2-n}$ die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung. \square

Sei $y \in \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt. Die auf der Menge $\mathbb{R}^n - \{y\}$ definierte Funktion $u(x) = \|x - y\|^{2-n}$ ist die Translation von r^{2-n} und daher eine harmonische Funktion. Andererseits sind die partiellen Ableitungen jeder harmonischen Funktion gleichfalls harmonische Funktionen. Damit wird

$$u(x) - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} y^i = \frac{\|x\|^2 - \|y\|^2}{\|x - y\|^n}$$

eine auf $\mathbb{R}^n - \{y\}$ definierte harmonische Funktion. Wir benutzen diese Familie harmonischer Funktionen in den folgenden Überlegungen. Mit S^{n-1} bezeichnen wir die $(n-1)$ -dimensionale Sphäre vom Radius $R = 1$.

Lemma 4. Sei $\|x\| < 1$ ein Punkt im Inneren der Einheitskugel D^n . Dann gilt

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} \cdot dS^{n-1}(y) = \text{vol}(S^{n-1}).$$

Beweis. Zunächst beweisen wir, dass die Funktion

$$h(x) := \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} dS^{n-1}(y)$$

nur vom Radius $r = r(x)$ abhängt. Ist nämlich $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare, orthogonale Abbildung, so erhalten wir wegen $|\det(DT)| = |\det(T)| = 1$ aus der entsprechenden Transformationsformel für die Volumenform der Sphäre

$$T^*(dS^{n-1}) = T^*(\mathcal{N} \lrcorner d\mathbb{R}^n) = \mathcal{N} \lrcorner (T^*(d\mathbb{R}^n)) = \mathcal{N} \lrcorner d\mathbb{R}^n = dS^{n-1}$$

somit die gewünschte Eigenschaft:

$$\begin{aligned} h(Tx) &= \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|Tx\|^2}{\|Tx - y\|^n} dS^{n-1}(y) = \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - T^{-1}(y)\|^n} dS^{n-1}(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - z\|^n} dS^{n-1}(z) = h(x). \end{aligned}$$

Weiterhin ist $h(x)$ eine harmonische Funktion,

$$\Delta(h)(x) = \int_{S^{n-1}} \Delta_x \left(\frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} \cdot dS^{n-1}(y) \right) = 0.$$

Aus dem ersten Lemma folgt, dass Konstanten C_1, C_2 mit $h(x) = C_1 + C_2 \cdot r^{2-n}$ existieren. An der Stelle $x = 0$ ist $h(x)$ eine reguläre Funktion mit dem Wert $h(0) = \text{vol}(S^{n-1})$. Damit muss die Konstante C_2 verschwinden und C_1 gleich $\text{vol}(S^{n-1})$ sein. \square

Die Lösung des Dirichlet-Problems für die Einheitskugel $D^n \subset \mathbb{R}^n$ und eine explizite Formel zugleich ist Gegenstand des nächsten Satzes.

Satz 39. *Für jede stetige Funktion $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$f(x) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n} \varphi(y) dS^{n-1}(y)$$

im Inneren der Einheitskugel eine harmonische Funktion und in Randpunkten $z \in S^{n-1}$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t \cdot z) = \varphi(z).$$

Beweis. Die Funktion $(1 - \|x\|^2)\|x - y\|^{-n}$ ist harmonisch bezüglich der Variablen x und daher wird die definierte Funktion $f(x)$ gleichfalls harmonisch. Wir beweisen, dass $f(z)$ auf dem Rand S^{n-1} in der angegebenen Weise mit $\varphi(z)$ übereinstimmt. Dabei bezeichnen wir mit $m := \sup\{|\varphi(y)| : y \in S^{n-1}\}$ das Maximum des Betrages von φ und fixieren eine positive Zahl $\varepsilon > 0$. Die stetige Funktion φ ist auf der kompakten Menge S^{n-1} gleichmäßig stetig. Es existiert somit eine Zahl $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei Punkte $y, z \in S^{n-1}$ der Sphäre aus $\|y - z\| < \delta$ die Abschätzung $|\varphi(y) - \varphi(z)| < \varepsilon$ folgt. Wir zerlegen die Sphäre $S^{n-1} = D_1 \cup D_2$ in die Bestandteile

$$D_1 = \{y \in S^{n-1} : \|y - z\| < \delta\}, \quad D_2 = \{y \in S^{n-1} : \|y - z\| \geq \delta\}.$$

Für $y \in D_2$ und $0 \leq t \leq 1$ schätzen wir den Abstand von y zu der durch 0 und $z \in S^{n-1}$ begrenzten Strecke ab:

$$\begin{aligned} \|y - tz\|^2 &= 1 - 2t\langle y, z \rangle + t^2 = (t - \langle y, z \rangle)^2 + 1 - \langle y, z \rangle^2 \geq 1 - \langle y, z \rangle^2 \\ &\geq 1 - \langle y, z \rangle = \frac{1}{2}(2 - 2\langle y, z \rangle) = \frac{1}{2}\|y - z\|^2 \geq \frac{\delta^2}{2}. \end{aligned}$$

Die Differenz

$$f(t \cdot z) - \varphi(z) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|tz\|^2}{\|tz - y\|^n} (\varphi(y) - \varphi(z)) \cdot dS^{n-1}(y)$$

zerlegen wir in die Integrale über D_1 und D_2 . Das erste Integral können wir dem Betrage nach vergrößern durch

$$\left| \int_{D_1} \right| \leq \varepsilon \cdot \int_{S^{n-1}} \frac{1 - \|tz\|^2}{\|tz - y\|^n} \cdot dS^{n-1}(y) = \varepsilon \text{vol}(S^{n-1}),$$

das zweite Integral behandeln wir unter Verwendung der gewonnenen Ungleichung:

$$\left| \int_{D_2} \right| \leq 2m(1 - t^2) \left(\frac{\sqrt{2}}{\delta} \right)^n \text{vol}(S^{n-1}).$$

Zusammenfassend existiert somit zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass für alle $0 \leq t < 1$ die Ungleichung

$$|f(t \cdot z) - \varphi(z)| \leq \varepsilon + 2m \left(\frac{\sqrt{2}}{\delta} \right)^n (1 - t^2)$$

gilt. Damit ist der obere Grenzwert durch ε beschränkt,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \sup |f(t \cdot z) - \varphi(z)| \leq \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle positiven Zahlen $\varepsilon > 0$ und daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t \cdot z) = \varphi(z). \quad \square$$

Wir besprechen jetzt einige Folgerungen aus der das Dirichlet-Problem lösenden Formel. Ist $f : \overline{D^n}(R) \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, definiert auf der abgeschlossenen Kugel vom Radius $R > 0$, so ist $\tilde{f}(z) := f(R \cdot z)$ eine harmonische Funktion auf der Einheitskugel. Eine Anwendung des vorherigen Satzes und die Rückkehr zur Variablen $x = R \cdot z \in D^n(R)$ ergibt letztendlich die *Poisson-Formel für harmonische Funktionen*:

$$f(x) = \frac{R^{n-2}}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|x - Ry\|^n} f(R \cdot y) dS^{n-1}(y).$$

Die Auswertung der Poisson-Formel an der Stelle $x = 0$ führt uns auf den *Gaußschen Mittelwertsatz für harmonische Funktionen*.

Satz 40. *Der Wert einer harmonischen Funktion f im Zentrum der Kugel stimmt mit dem mittleren Wert der harmonischen Funktion auf dem Rand der Kugel überein,*

$$f(0) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} f(R \cdot y) dS^{n-1}(y).$$

Wir wenden den Gaußschen Mittelwertsatz im Beweis des *Maximum-Prinzips für harmonische Funktionen* an.

Satz 41. *Jede harmonische Funktion f auf einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit $M^n \subset \mathbb{R}^n$, die ihren maximalen Wert im Inneren von M^n annimmt, ist konstant.*

Beweis. Bezeichne m den maximalen Wert von f und $\Omega = \{x \in M^n \setminus \partial M^n : f(x) = m\}$ die Menge aller inneren Punkte von M^n , in denen f diesen maximalen Wert erreicht. Nach Voraussetzung ist Ω eine nichtleere, abgeschlossene Menge in $M^n \setminus \partial M^n$. Es genügt somit zu beweisen, dass Ω eine offene Teilmenge von $M^n \setminus \partial M^n$ ist. Wählen wir einen Punkt $x_0 \in \Omega$ und einen Radius R_0 so, dass die Kugel $D^n(x_0, R_0)$ mit dem Zentrum x_0 und dem Radius R_0 vollständig in $M^n \setminus \partial M^n$ enthalten ist. Nach Gaußschem Mittelwertsatz gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} f(x_0 + R_0 \cdot y) dS^{n-1}(y) \leq m = f(x_0).$$

Daraus folgt, dass f konstant gleich m auf der Sphäre mit dem Zentrum x_0 und dem Radius R_0 ist. Diese Überlegung ist nun gleichfalls auf jedem kleineren Radius

$R_0^* \leq R_0$ unterhalb von R_0 anwendbar. Insgesamt ergibt sich, dass $f \equiv m$ konstant auf der Kugel $D^n(x_0, R_0)$ ist, d. h. $D^n(x_0, R_0)$ ist in Ω enthalten. Damit ist Ω eine offene Teilmenge. \square

Abschließend beweisen wir eine weitere Anwendung der Poisson-Formel, das *Liouville-Theorem für harmonische Funktionen*.

Satz 42. *Jede von unten (oben) beschränkte harmonische Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist konstant.*

Beweis. Indem wir gegebenenfalls f durch die Addition einer Konstanten abändern, können wir o. B. d. A. voraussetzen, dass die Funktion f nicht-negativ ist. Wir legen einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fest und wählen den Radius R so groß, dass x_0 in der Kugel $D^n(0, R)$ liegt. Nach Poisson-Formel, Gaußschem Mittelwertsatz und der Voraussetzung $f \geq 0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{R^{n-2}}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \frac{R^2 - \|x_0\|^2}{\|x_0 - R \cdot y\|^n} \cdot f(R \cdot y) \cdot dS^{n-1}(y) \\ &\leq \frac{R^{n-2}}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \frac{R^2 - \|x_0\|^2}{\|x_0\| - \|R \cdot y\|^n} \cdot f(R \cdot y) \cdot dS^{n-1}(y) \\ &= \frac{R^{n-2}(R^2 - \|x_0\|^2)}{\text{vol}(S^{n-1}) \|x_0\| - R^n} \int_{S^{n-1}} f(R \cdot y) \cdot dS^{n-1}(y) \\ &= \frac{R^{n-2}(R^2 - \|x_0\|^2)}{\text{vol}(S^{n-1}) \|x_0\| - R^n} \cdot f(0). \end{aligned}$$

Im Grenzwert $R \rightarrow \infty$ erhalten wir für alle Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$f(x_0) \leq f(0)$$

und das Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen impliziert, dass f konstant ist. \square

3.11. Der Laplace-Operator auf Differentialformen

Dieser Abschnitt ist eine Ergänzung der bisher dargelegten Vektoranalysis auf Mannigfaltigkeiten. Wir werden den auf Formen wirkenden Laplace-Operator und dessen Eigenschaften besprechen. Dabei gehen wir von einer orientierten Mannigfaltigkeit M^m der Dimension m samt einer Familie nicht-ausgearteter Skalarprodukte

$$g_x : T_x M^m \times T_x M^m \rightarrow \mathbb{R}$$

aus und nehmen an, dass diese Skalarprodukte glatt vom Punkte abhängen. Darunter verstehen wir, dass für je zwei glatte Vektorfelder \mathcal{V} und \mathcal{W} auf M^m die Funktion $g(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ glatt ist. Eine derartige Familie $\{g_x\}_{x \in M^m}$ nennt man eine *pseudo-Riemannsche Metrik* von M^m und diese muss im Allgemeinen weder positiv-definit sein noch durch Einschränkung des Skalarproduktes eines umliegenden euklidischen Raumes entstehen.

In dieser Situation ist jeder Tangentialraum ein reeller, orientierter Vektorraum und mit k bezeichnen wir den Index des Skalarproduktes. Gemäß Kapitel 1 existiert in jedem Punkte eine Volumenform $dM^m(x) \in \bigwedge_x^m(M^m)$ und ein Hodge-Operator

$$* : \bigwedge_x^i(M^m) \rightarrow \bigwedge_x^{m-i}(M^m).$$

Insgesamt erhalten wir eine m -Form dM^m auf der Mannigfaltigkeit sowie einen $*$ -Operator, welcher jeder glatten i -Form eine glatte $(m-i)$ -Form zuordnet. Die algebraischen Rechenregeln aus Kapitel 1 können dabei nach wie vor angewendet werden. Wir verwenden diese sowie den Satz von Stokes, um den zum äußeren Differential $d : \Omega^i(M^m) \rightarrow \Omega^{i+1}(M^m)$ auf i -Formen wirkenden adjungierten Operator $\delta : \Omega^{i+1}(M^m) \rightarrow \Omega^i(M^m)$ zu bestimmen. Der *adjungierte Operator* wird bekanntlich durch die Forderung

$$\int_{M^m} (d\omega^i, \eta^{i+1}) \cdot dM^m = \int_{M^m} (\omega^i, \delta\eta^{i+1}) \cdot dM^m$$

festgelegt. Dabei sind ω^i und η^{i+1} Formen mit kompaktem, zum Rand von M^m disjunktem Träger und $(d\omega^i, \eta^{i+1})$ bezeichnet das auf Formen induzierte Skalarprodukt. Nach Satz 5, Kapitel 1 gilt

$$\begin{aligned} (d\omega^i, \eta^{i+1}) \cdot dM^m &= (-1)^k d\omega^i \wedge (*\eta^{i+1}) \\ &= (-1)^k d(\omega^i \wedge (*\eta^{i+1})) + (-1)^{k+i+1} \omega^i \wedge (d * \eta^{i+1}). \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Gleichung und verwenden wir abermals die genannten algebraischen Formeln, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{M^m} (d\omega^i, \eta^{i+1}) \cdot dM^m &= (-1)^{k+i+1} (-1)^{i(m-i)+k} \int_{M^m} \omega^i \wedge **(d * \eta^{i+1}) \\ &= (-1)^{i(m-i)+i+1+k} \int_{M^m} (\omega^i, *d * \eta^{i+1}) \cdot dM^m. \end{aligned}$$

Damit gilt der

Satz 43. *Der zum äußeren Differential $d : \Omega^i(M^m) \rightarrow \Omega^{i+1}(M^m)$ adjungierte Operator δ einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit vom Index k ist gegeben durch*

$$\delta(\eta^{i+1}) = (-1)^{k+m+i+1} * d * \eta^{i+1}.$$

Definition 22. Sei M^m eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der auf den i -Formen wirkende *Hodge-Laplace-Operator* $\Delta : \Omega^i(M^m) \rightarrow \Omega^i(M^m)$ wird definiert durch

$$\Delta := d\delta + \delta d.$$

Beispiel 35. Ist $\omega^0 = f$ eine Funktion, so gilt im Sinne dieser Definition

$$\Delta f = \delta df = (-1)^{k+1} * d * df$$

und im Fall eines positiv-definiten Skalarproduktes stimmt Δ mit dem Laplace-Beltrami-Operator (siehe Bemerkung nach Satz 11, Kapitel 3.2) überein. Betrachten wir dagegen in \mathbb{R}^{n+1} das pseudo-euklidische Skalarprodukt der Signatur $(n, 1)$,

so entsteht als Hodge-Laplace-Operator der Ausdruck

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^1} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^n} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^{n+1}}.$$

Der \mathbb{R}^{n+1} mit diesem Skalarprodukt, aufgefasst als pseudo-Riemannsche Metrik, heißt der *Minkowski-Raum*. Sein auf Funktionen wirkender Laplace-Operator ist daher genau der Wellenoperator.

Definition 23. Eine i -Form ω^i , definiert auf einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, heißt *harmonisch*, falls $\Delta(\omega^i) = 0$ gilt.

Im nächsten Satz stellen wir die Eigenschaften des Hodge-Laplace-Operators zusammen, die sich sofort aus der Definition ergeben.

Satz 44.

- (1) Sind ω^i, η^i Formen mit kompaktem, zum Rand der Mannigfaltigkeit disjunktem Träger, so gilt

$$\int_{M^m} (\Delta(\omega^i), \eta^i) \cdot dM^m = \int_{M^m} (\omega^i, \Delta(\eta^i)) \cdot dM^m.$$

- (2) $\Delta \circ d = d \circ \Delta$ und $\Delta \circ \delta = \delta \circ \Delta$.

□

Abschließend betrachten wir den Fall einer kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand mit einer Riemannschen Metrik ($k = 0$). Dann ist die Differentialgleichung $\Delta(\omega^i) = 0$ zweiter Ordnung äquivalent zu zwei Differentialgleichungen erster Ordnung. Es gilt der

Satz 45. Sei M^m eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand mit positiv-definiter Metrik. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1) ω^i ist eine harmonische Form, $\Delta(\omega^i) = 0$;
(2) ω^i ist eine geschlossene und kugeschlossene Form, $d\omega^i = 0 = \delta\omega^i$.

Beweis. Ist ω^i harmonisch, so gilt

$$0 = \int_{M^m} (\omega^i, \Delta(\omega^i)) \cdot dM^m = \int_{M^m} (d\omega^i, d\omega^i) \cdot dM^m + \int_{M^m} (\delta\omega^i, \delta\omega^i) \cdot dM^m.$$

Daraus folgt $d\omega^i = 0 = \delta\omega^i$, weil die Metrik positiv-definit ist. □

Korollar 4. Sei M^m eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand mit positiv-definiter Riemannscher Metrik. Ist jede geschlossene 1-Form auf M^m exakt, so existieren keine nicht-trivialen harmonischen Formen.

Beweis. Eine harmonische 1-Form ω^1 ist insbesondere eine geschlossene Form und daher kann ω^1 als Differential einer Funktion dargestellt werden, $\omega^1 = df$. Wegen

$$0 = \delta\omega^1 = \delta df = \Delta(f)$$

ist f eine harmonische Funktion und nach dem Satz von Hopf (Korollar 2) konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von M^m . Dann aber verschwindet die 1-Form $\omega^1 = df = 0$. □

Beispiel 36. Die Voraussetzung der Folgerung ist beispielsweise für Mannigfaltigkeiten M^m erfüllt, die sich als Vereinigung $M^m = U \cup V$ zweier offener Mengen $U, V \subset M^m$ darstellen lassen, wobei

- (1) der Durchschnitt $U \cap V$ zusammenhängend ist,
- (2) U und V diffeomorph zu sternförmigen Gebieten in \mathbb{R}^m sind.

In der Tat, aus dem Poincaré-Lemma folgt die Existenz zweier Funktionen $f_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega^1 = df_U$ über U und $\omega^1 = df_V$ über V . In Punkten des Durchschnitts gilt dann

$$d(f_U - f_V) = 0$$

und somit ist $f_U - f_V = C$ konstant. Nun ist

$$f(x) = \begin{cases} f_V(x) + C & \text{falls } x \in V \\ f_U(x) & \text{falls } x \in U \end{cases}$$

eine auf der Mannigfaltigkeit M^m eindeutig definierte Funktion mit $\omega^1 = df$. Die Sphäre S^n lässt im Fall $n \geq 2$ eine Zerlegung der geforderten Art zu, und wir sehen, dass S^n keine harmonischen 1-Formen bezüglich einer beliebigen Riemannschen Metrik besitzen kann.

Beispiel 37. In \mathbb{R}^4 betrachten wir den 2-dimensionalen Torus

$$T^2 = \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$$

und bezeichnen mit $i : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die Einbettung. Die auf T^2 induzierten Formen

$$\omega^1 := i^*(-x^2 dx^1 + x^1 dx^2) \quad \text{und} \quad \eta^1 := i^*(-x^4 dx^3 + x^3 dx^4)$$

sind harmonische 1-Formen von T^2 . Zum Beweis dessen verwenden wir die Parametrisierung $h : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow T^2$, definiert durch die Formel

$$h(\varphi, \psi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi).$$

In dieser Karte gilt

$$h^*(\omega^1) = d\varphi \quad \text{und} \quad h^*(\eta^1) = d\psi$$

und somit sind ω^1 und η^1 auf T^2 geschlossene Formen. Die Berechnung der Koeffizienten der Riemannschen Metrik führt auf die Matrix

$$\begin{bmatrix} g_{\varphi\varphi} & g_{\varphi\psi} \\ g_{\psi\varphi} & g_{\psi\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus ersehen wir, dass ω^1 und η^1 sich unter dem Hodge-Operator des Torus T^2 entsprechen:

$$*\omega^1 = \eta^1, \quad *\eta^1 = -\omega^1.$$

Dann aber sind ω^1 und η^1 auch kogeschlossen, $\delta\omega^1 = *d*\omega^1 = *d\eta^1 = 0$.

Harmonische Formen spielen in der Topologie und globalen Differentialgeometrie eine wesentliche Rolle. Wir formulieren an dieser Stelle das Hauptergebnis der Hodge-Theorie, ein Beweis kann in diesem elementaren Text nicht angegeben werden. Ist (M^m, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, so führen wir folgende Vektorräume ein:

(1) der Raum $\mathcal{H}^i(M^m, g)$ aller harmonischen i -Formen,

$$\mathcal{H}^i(M^m, g) = \{\omega^i : \Delta(\omega^i) = 0\};$$

(2) der Raum $\mathcal{E}^i(M^m)$ der exakten Differentialformen,

$$\mathcal{E}^i(M^m) = \{\omega^i : \text{es existiert eine } (i-1)\text{-Form } \eta^{i-1} \text{ mit } d\eta^{i-1} = \omega^i\};$$

(3) der Raum $\mathcal{CE}^i(M^m, g)$ der koexakten Differentialformen

$$\mathcal{CE}^i(M^m, g) = \{\omega^i : \text{es existiert eine } (i+1)\text{-Form } \eta^{i+1} \text{ mit } \delta\eta^{i+1} = \omega^i\}.$$

Satz 46 (Satz von Hodge).

- (1) *Der Raum $\mathcal{H}^i(M^m, g)$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Er ist isomorph zur de Rham-Kohomologie $H_{DR}^i(M^m)$. Jede Kohomologieklassse geschlossener Formen enthält bei gegebener Metrik genau eine harmonische Form;*
- (2) *Bezüglich des L^2 -Skalarproduktes sind $\mathcal{H}^i, \mathcal{E}^i$ und \mathcal{CE}^i zueinander orthogonale Teilmengen des Raumes $\Omega^i(M^m)$ aller quadratisch-integrierbaren i -Formen und zerlegen diese in die Summe*

$$\Omega^i = \mathcal{H}^i \oplus \mathcal{E}^i \oplus \mathcal{CE}^i.$$

Aus der Hodge-Zerlegung erhält man nun sofort den *Satz von Helmholtz* für 3-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Anschaulich gesprochen besagt er, dass sich jedes Vektorfeld in die Summe eines Gradientenfeldes, eines Rotationsfeldes und eines harmonischen Feldes zerlegt. Insbesondere ist das Vektorfeld die Summe eines rotationsfreien und eines divergenzfreien Vektorfeldes. Im letzten Kapitel werden wir den analogen Satz für hinreichend schnell im Unendlichen abfallende Vektorfelder des \mathbb{R}^3 im Rahmen der Elektrodynamik im Detail diskutieren und beweisen.

Korollar 5. *Zu jedem Vektorfeld \mathcal{V} auf einer orientierten, kompakten, 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 ohne Rand existieren eine Funktion f , ein Vektorfeld \mathcal{W} sowie eine harmonische 1-Form η^1 derart, dass die Gleichung*

$$\omega_{\mathcal{V}}^1 = \omega_{\text{grad}(f)}^1 + \omega_{\text{rot}(\mathcal{W})}^1 + \eta^1$$

gilt. Insbesondere ist $\omega_{\mathcal{V}}^1$ die Summe einer geschlossenen und einer kgeschlossenen 1-Form.

Beweis. Indem man den Satz von Hodge auf die dem Vektorfeld \mathcal{V} zugeordnete 1-Form $\omega_{\mathcal{V}}^1$ anwendet, erhält man die Existenz einer Funktion f , einer 2-Form β^2 sowie einer harmonischen 1-Form η^1 , die insgesamt der Gleichung

$$\omega_{\mathcal{V}}^1 = df + \delta\beta^2 + \eta^1$$

genügen. Aus Kapitel 2.3 wissen wir, dass der Gradient einer Funktion dem Differential df entspricht,

$$df = \omega_{\text{grad}(f)}^1.$$

Sei \mathcal{W} das der 1-Form $*\beta^2$ zugeordnete Vektorfeld:

$$*\beta^2 =: \omega_{\mathcal{W}}^1.$$

Die Rotation des Vektorfeldes \mathcal{W} ist dasjenige Vektorfeld, welches durch die definierende Gleichung

$$d\omega_{\mathcal{W}}^1 = * \omega_{\text{rot}(\mathcal{W})}^1$$

bestimmt wird. Dann aber folgt

$$\delta\beta^2 = *d*\beta^2 = *d\omega_{\mathcal{W}}^1 = **\omega_{\text{rot}(\mathcal{W})}^1 = \omega_{\text{rot}(\mathcal{W})}^1,$$

weil in der Dimension $m = 3$ für eine positiv-definite Riemannsche Metrik auf den 1-Formen $** = \text{Id}$ gilt. Dies beendet den Beweis. \square

Aufgaben

- 1.** a) Die Gleichung

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^n)^2}{a_n^2} = 1, \quad a_1, \dots, a_n > 0 \text{ fest},$$

definiert eine $(n - 1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , den Ellipsoiden;

- b) Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$ fest) definiert eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 , den Zylinder;
c) Wir betrachten für jedes $c \in \mathbb{R}$ die durch

$$M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = c\}$$

definierte Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Für welche Parameterwerte c ist M_c eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 ?

- 2.** Man zeige oder widerlege die Umkehrung von Satz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ glatt und M die Nullstellenmenge von f , $M := \{x \in U : f(x) = 0\}$. Gilt die Abschätzung $\text{rk } Df(x) < n - k$ für mindestens ein $x \in M$, so ist M keine Untermannigfaltigkeit.

- 3.** Man zeige, dass durch die Formel

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2(z/a), \quad a > 0 \text{ konstant}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 definiert wird, die zudem durch

$$h(v^1, v^2) = (a \cosh(v^1/a) \cos v^2, a \cosh(v^1/a) \sin v^2, v^1)$$

parametrisiert wird. Diese Fläche heißt in der Differentialgeometrie *Katenoid*.

- 4.** Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom $f = \sum_{i=0}^k a_i z^i$ ohne doppelte Nullstellen. Wir betrachten für jede natürliche Zahl $l \geq 2$ die Menge

$$M = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^l - f(z) = 0\}.$$

Beweise, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ ist. Durch $(z, w) \mapsto w$ wird eindeutig eine Abbildung $G : M \rightarrow \mathbb{C}$ definiert und es gilt $G^l(z, w) = f(z)$. Die Menge M ist eine sog. *Riemannsche Fläche*. Auf ihr ist die l -te Wurzel aus $f(z)$ eindeutig erklärt.

5. Wir betrachten die *spezielle lineare Gruppe* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ aller reellwertigen (2×2) -Matrizen der Determinante 1:

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}.$$

Man beweise, dass die $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit und dass ihr Tangentialraum im neutralen Element E durch

$$T_E \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}$$

gegeben ist. Hinweis: Man verwende Satz 4 und die (bekannte) Formel $\det(\exp A) = e^{\mathrm{tr} A}$.

6. Man beweise, dass die *orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ der orthogonalen $(n \times n)$ -Matrizen

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A \cdot A^t = E\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} ist, deren Dimension man ferner bestimme. Ist die Untergruppe $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ aller orthogonalen Matrizen der Determinante 1 ebenfalls eine Untermannigfaltigkeit, und wenn ja, welche Dimension hat sie und in welcher Beziehung steht sie zur $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$?

7. Die Menge aller Einheitstangentialvektoren $T_1 S^2$ an die Sphäre S^2

$$T_1 S^2 = \{(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|x\| = \|v\| = 1, \langle x, v \rangle = 0\}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und diffeomorph zur Mannigfaltigkeit

$$\{(z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{C}^3 : |z^1|^2 + |z^2|^2 + |z^3|^2 = 1, (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 = 0\}.$$

8. Das Produkt einer Mannigfaltigkeit M ohne Rand mit einer beliebigen Mannigfaltigkeit N ist wieder eine Mannigfaltigkeit und hat den Rand $\partial(M \times N) = M \times \partial N$.

9. Das Tangentialbündel TM jeder Mannigfaltigkeit M ist stets eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

10. Der topologische Rand $\mathrm{Fr}(A)$ einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle von A mit der abgeschlossenen Hülle seines Komplements,

$$\mathrm{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}.$$

Man beweise:

- a) Ist $M^m \subset \mathbb{R}^m$ eine abgeschlossene, m -dimensionale Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^m , so gilt $\partial M^m = \mathrm{Fr}(M^m)$;
- b) Ist $M^m \subset \mathbb{R}^n$ ($m < n$) eine Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand echt kleinerer Dimension, so gilt stets $\mathrm{Fr}(M^m) = M^m$.

11. Man gebe drei in jedem Punkte zueinander orthogonale stetige Vektorfelder der Länge eins auf der Sphäre S^3 an.

12. Man gebe auf jeder Sphäre ungerader Dimension ein stetiges Vektorfeld der Länge eins an.

13. Stellen Sie das Vektorfeld $\mathcal{V}(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} (\partial/\partial x + \partial/\partial y)$ in den Polarkoordinaten von \mathbb{R}^2 dar.

14. Wir betrachten auf der Sphäre S^2 das Vektorfeld

$$\mathcal{V}(x, y, z) = ((x, y, z), (-y, x, 0)).$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{V} nicht das Gradientenfeld einer Funktion $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sein kann. Welcher allgemeiner Sachverhalt verbirgt sich hinter diesem Beispiel?

15. Man berechne die lokalen Koeffizienten (g_{ij}) der Riemannschen Metrik sowie die Volumenform folgender Untermannigfaltigkeiten in den angegebenen Karten:

a) für die Sphäre S^n in der Karte der stereographischen Projektion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$:

$$h(y^1, \dots, y^n) = \left(\frac{2y^1}{|y|^2 + 1}, \dots, \frac{2y^n}{|y|^2 + 1}, \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} \right);$$

b) für die Pseudosphäre, der Drehfläche der Schleppkurve, in der Parametrisierung

$$h(u^1, u^2) = (a \sin u^1 \cos u^2, a \sin u^1 \sin u^2, a(\cos u^1 + \ln \tan(u^1/2))).$$

16. Man berechne die Formeln für den Gradienten einer Funktion, für die Divergenz eines Vektorfeldes sowie für den Laplace-Operator auf der Sphäre S^2 in den Koordinaten der stereographischen Projektion.

17. Auf einer (zu beschreibenden !) offenen Teilmenge des \mathbb{R}^3 führen wir durch die Karte

$$h(r, \varphi, \psi) = (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)$$

auf dem Parameterbereich $r \in]0, \infty[$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in]-\psi/2, \psi/2[$ Koordinaten ein. Man berechne die Koeffizienten der Riemannschen Metrik sowie die Formeln für den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator in diesen Koordinaten.

18. Seien M^k und N^k k -dimensionale Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung $f : M^k \rightarrow N^k$ heißt *winkeltreu* oder auch *konform*, wenn für zwei beliebige Vektoren $w_1, w_2 \in T_x M^k$ und ihre Bildvektoren $\nu_i = f_{*,x}(w_i) \in T_{f(x)} N^k$ die Winkel zwischen ihnen übereinstimmen:

$$\frac{\langle \nu_1, \nu_2 \rangle}{\|\nu_1\| \cdot \|\nu_2\|} = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{\|w_1\| \cdot \|w_2\|}.$$

Ist insbesondere (h, U) eine Karte einer Mannigfaltigkeit M^k , so ist die Kartenabbildung h genau dann in diesem Sinne winkeltreu, wenn die in ihr augedrückte Riemannsche Metrik ein Vielfaches der k -dimensionalen Einheitsmatrix E ist:

$$(g_{ij}(y)) = \lambda(y) \cdot E, \quad \lambda(y) > 0.$$

19. Man beweise die Orientierbarkeit der Sphäre S^n unter Verwendung der stereographischen Projektion und Satz 14.

20. Sei M^k eine Mannigfaltigkeit, $h : U \rightarrow M^k$ eine Karte sowie $\gamma : [a, b] \rightarrow h(U) \subset M^k$ eine Kurve auf M^k , welche ganz im Bild der Kartenabbildung h liegt. Wir stellen die Kurve γ in den Koordinaten (h, U) dar als $h^{-1} \circ \gamma(t) = (y^1(t), \dots, y^k(t))$. Man beweise, dass die Länge der Kurven mittels der Koeffizienten der Riemannschen Metrik g_{ij} in der Karte (h, U) über die Formel

$$l(\gamma) = \int_a^b \left[\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dy^i(t)}{dt} \frac{dy^j(t)}{dt} \right]^{1/2} dt$$

berechnet werden kann.

21. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine positive Funktion und $M^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = f^2(x)\}$ die dazugehörige Rotationsfläche in \mathbb{R}^3 . Man beweise die Volumenformel

$$\text{vol}(M^2) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

22. Man berechne folgende Oberflächenintegrale:

- a) $\int_{M^2} (x + y + z) \cdot dM^2$ für $M^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$;
- b) $\int_{M^2} (x^2 + y^2) \cdot dM^2$, wobei M^2 der Rand der durch die Ungleichung $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ beschriebenen Menge in \mathbb{R}^3 ist.

23. Berechne folgende Oberflächenintegrale:

- a) $\int_{S^2(R)} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$;
- b) $\int_{M^2} [(y - z)dy \wedge dz + (z - x)dz \wedge dx + (x - y)dx \wedge dy]$, wobei M^2 der Rand der durch die Ungleichungen $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$ beschriebenen Menge in \mathbb{R}^3 ist.

24. In einer Karte $h : V \rightarrow M^k$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit M^k sei eine 1-Form ω^1 gegeben in der Gestalt $\omega^1 = \sum_i f_i dy^i$. Dann gilt für den adjungierten Operator die Formel

$$\delta(\omega^1) = \frac{-1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial}{\partial y^i} (\sqrt{g} g^{ij} f_j).$$

25. Sei M^k eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit ohne Rand. Eine Funktion $f : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Eigenfunktion* des Laplace-Operators zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, falls $\Delta f = \lambda f$ gilt. Man beweise:

- a) Sind f_1 und f_2 Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so gilt

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2} = \int_{M^k} f_1(x) f_2(x) dM^k = 0;$$

- b) Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre vom Radius 1, $\Delta^{\mathbb{R}^3}$ der Laplace-Operator des \mathbb{R}^3 , Δ^{S^2} der Laplace-Operator von S^2 und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ gilt

$$(\Delta^{\mathbb{R}^3} f)|_{S^2} = \frac{\partial^2 f}{(\partial r)^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial r} + \Delta^{S^2}(f|_{S^2}).$$

- c) Sei $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ein homogenes Polynom vom Grad m , welches harmonisch ist, d. h. $\Delta^{\mathbb{R}^3} P(x) = 0$ erfüllt. Man zeige, dass dann $P|_{S^2}$ eine Eigenfunktion des Laplace-Operators von S^2 ist, und bestimme den Eigenwert.

26. Sei $M^k \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit und $f : M^k \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Die Wärmeleitungsgleichung lautet

$$\Delta_x f(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}.$$

Man beweise: Ist f eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und gilt $f(x, 0) = 0$ für alle $x \in M^k$ sowie $f(y, t) = 0$ für alle Randpunkte $y \in \partial M^k$ und alle Zeiten $t \in [0, t_0]$, so ist f identisch gleich null auf der Menge $M^k \times [0, t_0]$.

27. Sei M^{n-1} Rand einer kompakten, n -dimensionalen Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $\mathcal{N}(x)$ das Normalenvektorfeld. Ist $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^n$ ein konstanter Vektor, so gilt

$$\int_{M^{n-1}} \langle \mathcal{N}(x), \mathcal{V} \rangle \cdot dM^{n-1} = 0.$$

28. Man beweise für die Lie-Ableitung und das innere Produkt die folgenden Kommutatorformeln:

- a) $[\mathcal{L}_{\mathcal{V}}, i_{\mathcal{W}}] = i_{[\mathcal{V}, \mathcal{W}]}$;
 b) $[\mathcal{L}_{\mathcal{V}}, \mathcal{L}_{\mathcal{W}}] = \mathcal{L}_{[\mathcal{V}, \mathcal{W}]}$.

Kapitel 4

Pfaffsche Systeme

4.1. Geometrische Distributionen

Sind $f_1, \dots, f_{m-k} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit linear unabhängigen Differentialen, so werden durch die Gleichungen

$$M_{c_1, \dots, c_{m-k}}^k = \{x \in \mathbb{R}^m : f_1(x) = c_1, \dots, f_{m-k}(x) = c_{m-k}\}$$

glatte, k -dimensionale Mannigfaltigkeiten definiert. Linearisieren wir dieses im Allgemeinen nichtlineare Gleichungssystem, indem wir zu den Tangentialbündeln der Mannigfaltigkeiten übergehen, so werden diese durch das System

$$TM_{c_1, \dots, c_{m-k}}^k = \{\nu \in T\mathbb{R}^m : df_1(\nu) = 0, \dots, df_{m-k}(\nu) = 0\}$$

beschrieben. Damit entsteht in jedem Punkt von \mathbb{R}^m ein k -dimensionaler Teilraum des Tangentialraums an \mathbb{R}^m . Vollständig äquivalent können wir diese Familie von Teilmengen auch durch andere Systeme von 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ beschreiben. Ist zum Beispiel (h_{ij}) eine Matrix von Funktionen mit nirgends verschwindender Determinante und betrachten wir die 1-Formen $\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} h_{ij} \cdot df_j$, so gilt

$$TM_{c_1, \dots, c_{m-k}}^k = \{\nu \in T\mathbb{R}^m : \omega_1(\nu) = 0, \dots, \omega_{m-k}(\nu) = 0\}.$$

Allerdings, ausschließlich aus der Kenntnis der Formen ω_i können wir jetzt nicht mehr die Niveaupläne zurückgewinnen. Allgemein entsteht das Problem, unter welchen Bedingungen bei vorgegebenen linear unabhängigen 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ durch das Gleichungssystem (Pfaffsche System)

$$\omega_1 = \dots = \omega_{m-k} = 0$$

eine Familie k -dimensionaler Mannigfaltigkeiten beschrieben wird. Der Satz von Frobenius beantwortet diese Frage vollständig. In diesem Kapitel werden wir seinen Beweis darstellen sowie diverse Anwendungen behandeln.

Definition 1. Eine k -dimensionale geometrische Distribution (oder Pfaffsches System) auf M^m ist eine Familie $\mathcal{E}^k = \{E^k(x)\}_{x \in M^m}$, bestehend aus k -dimensionalen Unterräumen $E^k(x) \subset T_x M^m$ der Tangentialräume von M^m , welche in folgendem Sinne glatt vom Punkte abhängen: Für jeden Punkt $x_0 \in M^m$ existieren eine Umgebung $x_0 \in U \subset M^m$ und auf U definierte Vektorfelder $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ derart, dass $E^k(x)$ in allen Punkten $x \in U$ die lineare Hülle der Vektoren $\mathcal{V}_1(x), \dots, \mathcal{V}_k(x)$ ist.

Beispiel 1. Jedes nirgends verschwindende Vektorfeld \mathcal{V} auf M^m induziert eine eindimensionale Distribution. Dabei besteht $E^1(x)$ aus allen Vielfachen des Vektors $\mathcal{V}(x)$. Umgekehrt, ist \mathcal{E}^1 eine eindimensionale Distribution, so ist \mathcal{E}^1 lokal durch ein nirgends verschwindendes Vektorfeld gegeben.

Beispiel 2. Sind $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ linear unabhängige 1-Formen auf M^m , so wird durch

$$E^k(x) = \{\nu \in T_x M^m : \omega_1(\nu) = \dots = \omega_{m-k}(\nu) = 0\}$$

eine k -dimensionale Distribution definiert.

In Anlehnung an den Begriff der Integralkurve eines Vektorfeldes betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten von Distributionen.

Definition 2. Sei \mathcal{E}^k eine k -dimensionale Distribution auf M^m . Eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $N^k \subset M^m$ heißt *Integralmannigfaltigkeit* von \mathcal{E}^k , falls die Tangentialräume von N^k mit den Räumen der Distribution zusammenfallen:

$$T_x N^k = E^k(x) \quad \text{für alle } x \in N^k.$$

Definition 3. Eine k -dimensionale Distribution \mathcal{E}^k nennt man *integrierbar*, falls durch jeden Punkt $x \in M^m$ der Mannigfaltigkeit M^m wenigstens eine Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{E}^k verläuft.

Beispiel 3. Ist die Distribution \mathcal{E}^k im Sinne von Beispiel 2 durch die linear unabhängigen 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ definiert, so ist eine Untermannigfaltigkeit $i : N^k \rightarrow M^m$ genau dann Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{E}^k , falls die Einschränkungen der Formen auf N^k verschwinden:

$$i^*(\omega_1) = \dots = i^*(\omega_{m-k}) = 0.$$

Der lokale Existenzsatz für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen kann wie folgt formuliert werden:

Satz 1. *Jede eindimensionale geometrische Distribution ist integrierbar.*

Beispiel 4. Dieses Beispiel zeigt, dass der vorherige Satz für höherdimensionale Distributionen nicht richtig ist. In \mathbb{R}^3 betrachten wir die nirgends verschwindende 1-Form $\omega = x \cdot dy + dz$ sowie die durch ω bestimmte 2-dimensionale Distribution

$$E^2 = \{\nu \in T \mathbb{R}^3 : \omega(\nu) = 0\}.$$

Beweis. Angenommen, \mathcal{E}^2 wäre integrierbar. Dann müsste eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $h : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $h^*(\omega) = 0$ und $\text{rank}(D(h)) \equiv 2$ existieren. Zum Beispiel kann h als Karte einer Integralmannigfaltigkeit gewählt werden. In den Komponenten von \mathbb{R}^3 besteht $h = (h^1, h^2, h^3)$ aus 3 Funktionen und die Bedingung $h^*(\omega) = 0$ führt zu der Gleichung

$$0 = h^1 dh^2 + dh^3$$

in $W \subset \mathbb{R}^2$. Durch Differenzieren und äußere Multiplikation mit der 1-Form dh^2 erhalten wir

$$0 = dh^1 \wedge dh^2, \quad 0 = dh^2 \wedge dh^3.$$

Multiplizieren wir jetzt $0 = h^1 dh^2 + dh^3$ nochmals mit dh^1 und berücksichtigen wir die bereits bekannte Gleichung $dh^1 \wedge dh^2 = 0$, so ergibt sich zusätzlich

$$dh^1 \wedge dh^3 = 0.$$

Insgesamt verschwinden alle zweifachen Produkte $dh^i \wedge dh^j = 0$, und dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass das Differential $D(h)$ der Abbildung $h : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ den maximalen Rang zwei hat. Es existiert also überhaupt keine Integralmannigfaltigkeit der durch $\omega = x \cdot dy + dz$ definierten 2-dimensionalen Distribution in \mathbb{R}^3 . \square

Für höherdimensionale Distributionen auf einer Mannigfaltigkeit entsteht somit das Problem, unter welchen Bedingungen sie integrierbar sind. Die Antwort auf diese Frage ist der Inhalt des Satzes von Frobenius. Die Formulierung dieses Satzes erfordert zusätzlich noch den Begriff einer involutiven Distribution.

Definition 4. Eine Distribution \mathcal{E}^k auf der Mannigfaltigkeit M^m heißt *involutiv*, falls für je zwei Vektorfelder \mathcal{V}, \mathcal{W} auf M^m , deren Vektoren $\mathcal{V}(x), \mathcal{W}(x) \in E^k(x)$ in jedem Punkte in der Distribution liegen, der Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}](x) \in E^k(x)$ gleichfalls Werte in \mathcal{E}^k hat.

Satz 2 (Satz von Frobenius). *Sei \mathcal{E}^k eine k -dimensionale Distribution auf der Mannigfaltigkeit M^m , welche durch $(m-k)$ linear unabhängige Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ definiert ist:*

$$\mathcal{E}^k = \{\nu \in TM^m : \omega_1(\nu) = \dots = \omega_{m-k}(\nu) = 0\}.$$

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1) \mathcal{E}^k ist integrierbar;
- (2) \mathcal{E}^k ist involutiv;
- (3) für jeden Punkt $x_0 \in M^m$ existiert eine Umgebung $x_0 \in U \subset M^m$ und 1-Formen θ_{ij} , definiert auf U derart, dass

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j$$

gilt ($1 \leq i \leq m - k$);

- (4) für alle Indizes $1 \leq i \leq m - k$ verschwindet das äußere Produkt

$$d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k}) = 0.$$

Bemerkung. Die im Frobenius-Theorem auftretende vierte Bedingung nennt man die *Integrabilitätsbedingung* der geometrischen Distribution bzw. des Pfaffschen Systems.

Bemerkung. Eine eindimensionale Distribution ist durch insgesamt $(m - 1)$ 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-1}$ bestimmt und dann wird $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-1})$ eine $(m+1)$ -Form auf der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Diese ist trivialerweise null und die Integrabilitätsbedingungen des Frobenius-Satzes sind automatisch erfüllt, siehe Satz 1.

Die wesentliche Aussage des Satzes von Frobenius ist die Implikation (3) \Rightarrow (1), deren Beweis ausführlich in Abschnitt 4.2 dargelegt wird. In diesem Abschnitt werden wir zunächst die einfachen Äquivalenzen in der Formulierung des Satzes von Frobenius beweisen; dabei handelt es sich um die Äquivalenzen (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4) sowie um die Implikation (1) \Rightarrow (4).

Beweis der Äquivalenz (3) \Leftrightarrow (4). Angenommen, es existieren lokal 1-Formen θ_{ij} mit $d\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j$. Dann folgt

$$d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k}) = \sum_{j=1}^{m-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k}) = 0,$$

weil das äußere Quadrat jeder 1-Form Null ist. Umgekehrt, sei die Bedingung (4) erfüllt. In einer Umgebung $x_0 \in U \subset M^m$ des fixierten Punktes ergänzen wir die linear unabhängigen 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ durch 1-Formen η_1, \dots, η_k derart, dass in jedem Punkt $x \in U$ die 1-Formen $\{\omega_1, \dots, \omega_{m-k}, \eta_1, \dots, \eta_k\}$ eine Basis in $\Lambda_x^1(M^m)$ bilden. Die 2-Form $d\omega_i$ ($1 \leq i \leq m-k$) kann in der Gestalt

$$d\omega_i = \sum_{\alpha, \beta=1}^{m-k} C_{\alpha\beta} \cdot \omega_\alpha \wedge \omega_\beta + \sum_{\alpha=1}^{m-k} \sum_{j=1}^k D_{\alpha j} \cdot \omega_\alpha \wedge \eta_j + \sum_{j,l=1}^k E_{jl} \cdot \eta_j \wedge \eta_l$$

mit Funktionen $C_{\alpha\beta}, D_{\alpha j}$ und E_{jl} dargestellt werden. Aus der Bedingung $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k}) = 0$ folgt

$$\sum_{j,l=1}^k E_{jl} \cdot \eta_j \wedge \eta_l \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k}) = 0$$

und damit verschwinden die hier auftretenden Koeffizienten, $E_{jl} = 0$. Indem wir die 1-Formen

$$\theta_{i\alpha} := - \sum_{\beta=1}^{m-k} C_{\alpha\beta} \cdot \omega_\beta - \sum_{j=1}^k D_{\alpha j} \cdot \eta_j$$

einführen, erhalten wir für das äußere Differential $d\omega_i$ die gewünschte Gestalt:

$$d\omega_i = \sum_{\alpha=1}^{m-k} \theta_{i\alpha} \wedge \omega_\alpha. \quad \square$$

Beweis der Implikation (3) \Rightarrow (2). Sind \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei Vektorfelder mit Werten in der Distribution \mathcal{E}^k , dann gilt $\omega_i(\mathcal{V}) = \omega_i(\mathcal{W}) = 0$. Aus $d\omega_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathcal{V}(\omega_i(\mathcal{W})) - \mathcal{W}(\omega_i(\mathcal{V})) - \omega_i([\mathcal{V}, \mathcal{W}])$ erhalten wir

$$d\omega_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = -\omega_i([\mathcal{V}, \mathcal{W}]).$$

Ist nun die Bedingung (3) für die Distribution \mathcal{E}^k erfüllt, so gilt

$$d\omega_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \sum_{j=1}^{m-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$$

und damit verschwinden alle 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ auf dem Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$. Dieses Vektorfeld nimmt daher Werte in \mathcal{E}^k an, d. h. die Distribution \mathcal{E}^k ist involutiv. \square

Beweis der Implikation (2) \Rightarrow (4). Sei \mathcal{E}^k eine k -dimensionale involutive Distribution. Die Form $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k})$ ist eine Form vom Grade $(m-k+2)$. Setzen wir in diese Form $(m-k+2)$ Vektorfelder ein, so können wir o. B. d. A. voraussetzen, dass zwei dieser Vektorfelder Werte in \mathcal{E}^k annehmen. Diese bezeichnen wir mit \mathcal{V} und \mathcal{W} . Aufgrund der Involutivität von \mathcal{E}^k gilt

$$\omega_j(\mathcal{V}) = \omega_j(\mathcal{W}) = 0 \quad \text{und} \quad d\omega_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = -\omega_i([\mathcal{V}, \mathcal{W}]) = 0.$$

Damit verschwindet das äußere Produkt $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k})$ auf jedem $(m-k+2)$ -Tupel von Vektorfeldern. \square

Beweis der Implikation (1) \Rightarrow (4). Der Beweis dieser Implikation verläuft analog zum vorhergehenden Beweis. Sei \mathcal{E}^k eine integrierbare Distribution, $x_0 \in M^m$ ein fixierter Punkt und $h : W \rightarrow M^m$ die Parametrisierung einer Integralmannigfaltigkeit durch den Punkt. Dann gilt $h^*(\omega_i) = 0$ ($1 \leq i \leq m-k$) und somit folgt $h^*(d\omega_i) = 0$. Daher verschwindet die 2-Form $d\omega_i$ auf dem k -dimensionalen Unterraum $\mathcal{E}^k(x_0)$:

$$d\omega_i|_{E^k(x_0) \times E^k(x_0)} = 0.$$

Setzen wir jetzt wiederum $(m-k+2)$ Vektoren in die Form $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k})$ ein, so liegen mindestens zwei dieser Vektoren im Unterraum $E^k(x_0)$. Für diese beiden Vektoren \mathcal{V} und \mathcal{W} gilt $\omega_j(\mathcal{V}) = \omega_j(\mathcal{W}) = 0$ und $d\omega_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$. Wir folgern wie zuvor, dass die Form $d\omega_i \wedge (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{m-k}) = 0$ verschwindet. \square

4.2. Der Beweis des Satzes von Frobenius

Die den Kern des Satzes von Frobenius betreffende Implikation $(3) \Rightarrow (1)$ ist eine lokale Aussage, daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Mannigfaltigkeit M^m eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^m ist. Wir beweisen einen allgemeineren Sachverhalt, aus dem sich der Beweis dieser Implikation ergeben wird.

Satz 3. *Seien $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ linear unabhängige 1-Formen auf einer offenen Teilmenge $M^m \subset \mathbb{R}^m$ mit*

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} \theta_{ij} \wedge \omega_j$$

für gewisse 1-Formen θ_{ij} . Dann existieren zu jedem Punkt $x \in M^m$ eine Umgebung $x \in U \subset M^m$ sowie auf der Menge U definierte Funktionen h_{ij} und f_j mit

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} h_{ij} \cdot df_j.$$

Beweis der Implikation $(3) \Rightarrow (1)$. Sei \mathcal{E}^k eine Distribution mit der in der Bedingung (3) formulierten Eigenschaft. Nach Satz 3 können wir in einer Umgebung U eines beliebigen Punktes $x_0 \in M^m$ die Formen ω_i in der Gestalt

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} h_{ij} \cdot df_j$$

für gewisse Funktionen darstellen. Nach Voraussetzung sind die 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ linear unabhängig. Damit sind die Differentiale df_1, \dots, df_{m-k} gleichfalls linear unabhängig und die Menge

$$N^k = \{x \in U : f_1(x) = f_1(x_0), \dots, f_{m-k}(x) = f_{m-k}(x_0)\}$$

ist eine den Punkt $x_0 \in M^m$ enthaltene Untermannigfaltigkeit. In einem beliebigen Punkte $x \in N^k$ bestimmen wir deren Tangentialraum:

$$\begin{aligned} T_x N^k &= \{\nu \in TM^m : df_1(\nu) = \dots = df_{m-k}(\nu) = 0\} \\ &\subset \{\nu \in TM^m : \omega_1(\nu) = \dots = \omega_{m-k}(\nu) = 0\} = E^k(x). \end{aligned}$$

Aus Dimensionsgründen stimmen die beiden Vektorräume überein, d. h. N^k ist eine durch den Punkt $x_0 \in M^m$ verlaufende Integralmannigfaltigkeit der Distribution \mathcal{E}^k und die Integrierbarkeit der Distribution \mathcal{E}^k ist gezeigt. \square

Der Beweis von Satz 3 wird nun in zwei Schritten durchgeführt. Zunächst reduzieren wir den Beweis auf den Fall eines Systems von 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ spezieller Normalform. Zu diesem Ziel stellen wir den euklidischen Raum \mathbb{R}^m als Produkt $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ dar und bezeichnen seine Punkte mit den Koordinaten $y = (y^1, \dots, y^k) \in \mathbb{R}^k$ sowie $z = (z^1, \dots, z^{m-k}) \in \mathbb{R}^{m-k}$. Es ist ausreichend, die Behauptung des Satzes 3 für 1-Formen vom Typ

$$\omega_i = dz^i - \sum_{j=1}^k A_{ij}(y, z) dy^j \quad (1 \leq i \leq m-k)$$

zu beweisen. In der Tat, stellen wir die linear unabhängigen 1-Formen ω_i in den Koordinaten (x^1, \dots, x^m) dar

$$\omega_i = \sum_{\alpha=1}^m p_{i\alpha} dx^\alpha,$$

so können wir zunächst annehmen, dass die Determinante der Teilmatrix (p_{ij}) bestehend aus den ersten $(m-k)$ Spalten und Zeilen nicht verschwindet. Sei (q_{ij}) die inverse Matrix und betrachte die 1-Formen

$$\omega_i^* = \sum_{\alpha=1}^{m-k} q_{i\alpha} \omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m-k} \sum_{\beta=1}^m q_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \cdot dx^\beta = dx^i - \sum_{\beta=m-k+1}^m \left[\sum_{\alpha=1}^{m-k} q_{i\alpha} p_{\alpha\beta} \right] dx^\beta.$$

Die Formen ω_i^* sind also von dem angegebenen Typ. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} d\omega_i^* &= \sum_{\alpha=1}^{m-k} dq_{i\alpha} \wedge \omega_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{m-k} q_{i\alpha} d\omega_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m-k} dq_{i\alpha} \wedge \omega_\alpha + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m-k} q_{i\alpha} \theta_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m-k} \left(\sum_{\beta=1}^{m-k} p_{\beta\alpha} dq_{i\beta} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{m-k} q_{i\gamma} p_{\beta\alpha} \theta_{\gamma\beta} \right) \wedge \omega_\alpha^* \end{aligned}$$

und das Formensystem $\omega_1^*, \dots, \omega_{m-k}^*$ genügt gleichfalls der Bedingung

$$d\omega_i^* = \sum_{\alpha=1}^{m-k} \theta_{i\alpha}^* \wedge \omega_\alpha^*$$

für gewisse 1-Formen $\theta_{i\alpha}^*$. Gilt der Satz 3 für dieses Formensystem, so erhalten wir Funktionen h_{ij}^* und f_j^* mit

$$\omega_i^* = \sum_{j=1}^{m-k} h_{ij}^* \cdot df_j^*$$

und eine Umrechnung liefert

$$\omega_i = \sum_{\alpha=1}^{m-k} p_{i\alpha} \cdot \omega_\alpha^* = \sum_{\alpha=1}^{m-k} \sum_{j=1}^{m-k} h_{\alpha j}^* p_{i\alpha} \cdot df_j^*.$$

Zusammenfassend ist es ausreichend, Satz 3 für Formen vom Typ

$$\omega_i = dz^i - \sum_{j=1}^k A_{ij}(y, z) \cdot dy^j$$

zu beweisen. Den Punkt $x = (y, z)$, in dessen Umgebung wir das Formensystem ω_i in der angegebenen Gestalt durch Funktionen darstellen wollen, können wir o. B. d. A. als den Koordinatenursprung $x = 0$ in \mathbb{R}^m annehmen. Zu festen Parametern $(y^1, \dots, y^k) \in \mathbb{R}^k$ nahe $0 \in \mathbb{R}^k$ betrachten wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den entsprechenden Anfangsbedingungen:

$$\dot{z}^i(t) = \sum_{j=1}^k A_{ij}(t \cdot y, z(t)) \cdot y^j, \quad z^i(0) = z^i, \quad 1 \leq i \leq m-k.$$

Die nahe null eindeutig bestimmte Lösung dieser Differentialgleichung bezeichnen wir mit $F^i(t, y, z)$. Dies sind $(m-k)$ glatte Funktionen der Variablen $t \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^k$ und $z \in \mathbb{R}^{m-k}$, definiert in einer Umgebung von null in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Weiterhin gilt für kleine Parameter $F^i(\mu \cdot t, y, z) = F^i(t, \mu \cdot y, z)$, denn die Funktionen

$$G^i(t, y, z) := F^i(\mu \cdot t, y, z)$$

erfüllen die Anfangsbedingungen $G^i(0, y, z) = z^i$ und sind Lösungen der zum Vektor $\mu \cdot y$ gehörenden Differentialgleichung

$$\dot{G}^i(t, y, z) = \mu \cdot \dot{F}^i(\mu \cdot t, y, z) = \sum_{j=1}^k A_{ij}(\mu \cdot t \cdot y, G^1, \dots, G^{m-k}) \cdot (\mu y^i).$$

In $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ führen wir jetzt nahe null mittels der Gleichungen

$$u := y, \quad F(1, u, v) := z$$

eine Koordinatentransformation durch. Die Matrix der Ableitung dieser Transformation ist

$$\left. \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|_0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix},$$

weil

$$\left. \frac{\partial z^i}{\partial v^j} \right|_0 = \left. \frac{\partial F^i(1, 0, v)}{\partial v^j} \right|_0 = \left. \frac{\partial v^i}{\partial v^j} \right|_0 = \delta_j^i$$

aufgrund der Differentialgleichung und deren Anfangsbedingung gilt. Diese Betrachtung zeigt, dass die beiden angegebenen Gleichungen nahe null einen lokalen Diffeomorphismus des Raumes \mathbb{R}^m in sich beschreiben. Wir stellen die 1-Formen $\omega_1, \dots, \omega_{m-k}$ in den $\{u, v\}$ -Koordinaten dar:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} B_{ij}(u, v) \cdot dv^j + \sum_{j=1}^k P_{ij}(u, v) \cdot du^j.$$

Es genügt offenbar zu beweisen, dass die Funktionen $P_{ij} \equiv 0$ identisch verschwinden. Zunächst beweisen wir die Identität

$$\sum_{j=1}^k P_{ij}(t \cdot y, v) \cdot y^j \equiv 0.$$

Dafür betrachten wir die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^k(t, y) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}(u, v)$, welche den Raum $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^k$ mit den Koordinaten (t, y) in den Raum $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, versehen mit den Koordinaten (u, v) , abbilden soll und bei festem Punkt $v \in \mathbb{R}^{m-k}$ durch die Formel $\Phi(t, y) := (ty, v)$ definiert ist. Dann gilt

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^k P_{ij}(t \cdot y, v)(t \cdot dy^j + y^j \cdot dt).$$

Andererseits ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^k(t, y) \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}(y, z)$ in den (y, z) -Koordinaten von \mathbb{R}^m gegeben durch $\Phi(t, y) = (t \cdot y, F(1, ty, v)) = (t \cdot y, F(t, y, v))$. Aus der Normalform

$$\omega_i = dz^i - \sum_{j=1}^k A_{ij} \cdot dy^j$$

erhalten wir für die induzierte Form $\Phi^*(\omega_i)$ den anderen Ausdruck

$$\Phi^*(\omega_i) = \frac{\partial F^i}{\partial t} \cdot dt + \sum_{j=1}^k \frac{\partial F^i}{\partial y^j} \cdot dy^j - \sum_{j=1}^k A_{ij}(y^j \cdot dt + t \cdot dy^j).$$

Vergleichen wir in $\Phi^*(\omega_i)$ den Koeffizienten bei dem Bestandteil von dt , so entsteht unter Berücksichtigung der Differentialgleichung die gesuchte Identität

$$0 = \frac{\partial F^i}{\partial t}(t, y, v) - \sum_{j=1}^k A_{ij} \cdot y^j = \sum_{j=1}^k P_{ij}(t \cdot y, v) \cdot y^j.$$

Im letzten Schritt des Beweises des Satzes von Frobenius leiten wir nunmehr her, dass die Funktionen $P_{ij} = 0$ verschwinden. Dazu ziehen wir wiederum die Abbildung $\Phi(t, y, v) := (t \cdot y, v)$ heran, wollen jetzt jedoch Φ als eine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}(t, y, v)$ nach $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}(u, v)$ verstehen (v ist nicht mehr konstant). Aus der bereits bewiesenen Identität folgt die Formel

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^{m-k} B_{ij}(t \cdot y, v) \cdot dv^j + \sum_{j=1}^k P_{ij}(t \cdot y, v) \cdot t \cdot dy^j.$$

Mit P_{ij}^* bezeichnen wir die Funktion

$$P_{ij}^*(t, y, v) := t \cdot P_{ij}(t \cdot y, u).$$

Dann gilt

$$\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^k P_{ij}^*(t, y, v) \cdot dy^j + \{\text{Terme in } dv^i\}$$

und für das äußere Differential erhalten wir den Ausdruck

$$d\Phi^*(\omega_i) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial P_{ij}^*}{\partial t} \cdot dt \wedge dy^j + \{\text{Terme ohne } dt\}.$$

Nach Voraussetzung existieren 1-Formen mit $d\omega_i = \sum_{j=1}^{m-k} \theta_{ij} \wedge \omega^j$ und diese stellen wir in der Gestalt $\Phi^*(\theta_{ij}) := H_{ij} dt + \{\text{Terme in } dy^i, dv^j\}$ dar. Wir erhalten eine homogene Differentialgleichung für die uns interessierenden Funktionen

$$\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{m-k} H_{i\alpha} P_{\alpha j}^*$$

mit der Anfangsbedingung $P_{ij}^*(0, y, v) = 0$. Die einzige Lösung dieser homogenen Differentialgleichung zu dieser Anfangsbedingung ist $P_{ij}^*(t, y, v) \equiv 0$ und daraus folgt $P_{ij}(t \cdot y, v) = 0$ sofort. Der Beweis des Frobenius-Satzes ist erbracht.

4.3. Einige Anwendungen des Satzes von Frobenius

Der einfachste Fall ist der einer $(m-1)$ -dimensionalen Distribution \mathcal{E}^{m-1} auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^m . Ist \mathcal{E}^{m-1} durch eine nicht verschwindende 1-Form ω definiert, so reduziert sich die Integrierbarkeit der Distribution darauf, dass die 3-Form

$$d\omega \wedge \omega = 0$$

verschwindet. Die Methode der expliziten Integration des $(m - 1)$ -dimensionalen Pfaffschen Systems beruht auf der Suche eines sog. integrierenden Faktors und der Anwendung des Poincaré-Lemmas.

Definition 5. Ein *integrierender Faktor* einer 1-Form ω ist eine nirgends verschwindende Funktion $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass die 1-Form $f \cdot \omega$ geschlossen ist,

$$d(f \cdot \omega) = 0.$$

Satz 4. Gegeben sei eine nirgends verschwindende 1-Form ω auf der Mannigfaltigkeit M^m .

- (1) Existiert ein integrierender Faktor für ω , so gilt $d\omega \wedge \omega = 0$. In diesem Fall ist die Distribution \mathcal{E}^{m-1} integrierbar;
- (2) gilt $d\omega \wedge \omega = 0$, so existiert in der Umgebung jedes Punktes von M^m ein integrierender Faktor der 1-Form ω ;
- (3) die Integralmannigfaltigkeiten der Distribution \mathcal{E}^{m-1} sind lokal die Niveaumäßigkeiten der durch die Gleichungen

$$d(f \cdot \omega) = 0, \quad f \cdot \omega = dg$$

aus dem integrierenden Faktor f bestimmten Funktion g .

Beweis. Aus $d(f \cdot \omega) = 0$ folgt $df \wedge \omega + f \cdot d\omega = 0$. Multiplizieren wir diese Gleichung nochmals mit der 1-Form ω , so entsteht $f \cdot d\omega \wedge \omega = 0$. Wegen $f \neq 0$ erhalten wir $d\omega \wedge \omega = 0$ als notwendige Bedingung für die Existenz eines integrierenden Faktors. Gilt andererseits $d\omega \wedge \omega = 0$, so ergibt sich die Existenz eines integrierenden Faktors direkt aus Satz 3, Kapitel 4.2. \square

In der Dimension $m = 2$ verschwindet die 3-Form $d\omega \wedge \omega = 0$ aus rein algebraischen Gründen. Damit gilt

Korollar 1. Jede nichtverschwindende 1-Form einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit besitzt lokal einen integrierenden Faktor.

Beispiel 5. In \mathbb{R}^2 betrachten wir die Differentialgleichung

$$P(t, x) + Q(t, x) \dot{x} = 0.$$

In einem Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, in dem P und Q nicht gleichzeitig verschwinden, können wir die 1-Form

$$\omega = P \cdot dt + Q \cdot dx$$

und deren integrierenden Faktor $f(t, x)$ betrachten. Die äquivalente Differentialgleichung

$$(f \cdot P)(t, x) + (f \cdot Q)(t, x) \dot{x} = 0$$

heißt *vollständige Differentialgleichung* und die Lösungskurven sind implizit durch die Gleichung

$$g(t, x) = \text{const}$$

mit $dg = f \cdot \omega$ gegeben. Der Satz von Frobenius besagt also, dass es mit der skizzierten Methode immer möglich ist, die eingangs betrachtete Differentialgleichung

zu lösen. Allerdings liefert er keinen Algorithmus, wie der integrierende Faktor gefunden werden kann. In einfachen Fällen kann man diesen direkt angeben. Können wir beispielsweise nur von den Variablen t und x abhängende Funktionen $F(t)$ und $G(x)$ mit

$$\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} = Q(t, x)F(t) - P(t, x)G(x)$$

finden, dann ist $f(t, x) = e^{\int F(t)dt}e^{\int G(x)dx}$ ein integrierender Faktor.

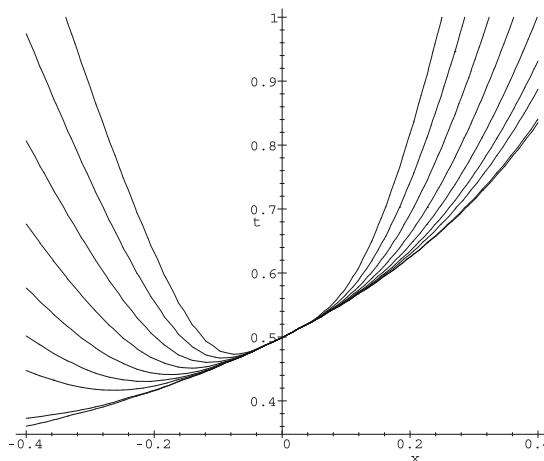
Beispiel 6. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(2t^2 + 3tx - 4t)\dot{x} + (3x - 2tx - 3x^2) = 0.$$

Dann können wir $F(t) = 2/t$ und $G(x) = -5/x$ wählen und erhalten den integrierenden Faktor $f = t^2x^{-5}$. Die Lösungen der Differentialgleichung sind unter Verwendung dieses integrierenden Faktors die durch die Gleichung

$$t^3x^{-4} - \frac{1}{2}t^4x^{-4} - t^3x^{-3} \equiv \text{const}$$

beschriebenen Kurven (vgl. Abbildung).



Die Kurven $t^3 - \frac{1}{2}t^4 - t^3x = cx^4$ für verschiedene Werte von c

Auf der Mannigfaltigkeit M^m sei jetzt sowohl eine Riemannsche Metrik \langle , \rangle als auch eine durch eine 1-Form ω beschriebene $(m-1)$ -dimensionale, integrierbare Distribution \mathcal{E}^{m-1} gegeben. Das vermittels der Riemannschen Metrik zur 1-Form duale Vektorfeld bezeichnen wir mit \mathcal{W} . Es wird durch eine der beiden äquivalenten Gleichungen

$$*\omega = \mathcal{W} \lrcorner dM^m \quad \text{oder} \quad \omega(\mathcal{V}) = \langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle$$

eindeutig bestimmt. Die Distribution \mathcal{E}^{m-1} kann unter Verwendung des Vektorfeldes \mathcal{W} beschrieben werden als

$$\mathcal{E}^{m-1} = \{\nu \in TM^m : \langle \nu, \mathcal{W} \rangle = 0\}$$

und daher ist \mathcal{W} ein zu den Integralmannigfaltigkeiten N^{m-1} der Distribution orthogonales Vektorfeld. Normieren wir \mathcal{W} auf Länge eins, so ist die Volumenform jeder Integralmannigfaltigkeit durch die Formel

$$dN^{m-1} = \frac{1}{\|\mathcal{W}\|} \cdot \mathcal{W} \lrcorner dM^m$$

gegeben. Wir studieren das Verhalten der Integralmannigfaltigkeiten $N^{m-1} \subset M^m$ der Distribution unter dem Fluss $\Phi_t : M^m \rightarrow M^m$ des Vektorfeldes \mathcal{W} . Zunächst berechnen wir die Lie-Ableitung der 1-Form ω nach dem zu ihr gehörenden Vektorfeld \mathcal{W} . Wegen $\omega(\mathcal{W}) = \|\mathcal{W}\|^2$ erhalten wir aus der Formel $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\omega) = d(\mathcal{W} \lrcorner \omega) + \mathcal{W} \lrcorner (d\omega)$ sofort den Ausdruck

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\omega))(\mathcal{V}) = \mathcal{W}(\omega(\mathcal{V})) - \omega([\mathcal{W}, \mathcal{V}]).$$

Insbesondere für an die Distribution tangentiale Vektorfelder \mathcal{V} vereinfacht sich diese Formel zu

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{W}}(\omega))(\mathcal{V}) = -\omega([\mathcal{W}, \mathcal{V}]) = -\langle \mathcal{W}, [\mathcal{W}, \mathcal{V}] \rangle$$

und es ergibt sich unmittelbar der

Satz 5. *Der Fluss Φ_t eines Vektorfeldes \mathcal{W} bildet die Integralmannigfaltigkeiten der Distribution \mathcal{E}^{m-1} genau dann in Integralmannigfaltigkeiten ab, falls*

$$\mathcal{V}(\|\mathcal{W}\|^2) + d\omega(\mathcal{W}, \mathcal{V}) = -\langle \mathcal{W}, [\mathcal{W}, \mathcal{V}] \rangle = 0$$

für jedes Vektorfeld \mathcal{V} auf M^m mit Werten in \mathcal{E}^{m-1} gilt.

Korollar 2. *Ist eine Distribution \mathcal{E}^{m-1} durch eine geschlossene 1-Form ω gegeben, so transformiert der Fluss des dualen Vektorfeldes \mathcal{W} genau dann Integralmannigfaltigkeiten wiederum in Integralmannigfaltigkeiten, falls die Länge $\|\mathcal{W}\|$ auf jeder zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeit konstant ist.*

Korollar 3. *Ist eine Distribution \mathcal{E}^{m-1} durch eine 1-Form ω konstanter Länge gegeben und transformiert der Fluss des dualen Vektorfeldes \mathcal{W} Integralmannigfaltigkeiten wiederum in Integralmannigfaltigkeiten, dann gilt $d\omega = 0$. In diesem Fall besteht \mathcal{E}^{m-1} lokal aus Niveaumäßigkeiten einer Funktion, deren Gradient eine konstante Länge hat.*

Beweis. Aus Satz 5 folgt zunächst $\mathcal{W} \lrcorner d\omega = 0$. In einem Punkt $x \in M^m$ wählen wir eine orthogonale Basis e_1, \dots, e_m im Tangentialraum so, dass \mathcal{W} proportional zu e_1 ist, $\mathcal{W} = a \cdot e_1$. Bezeichnet $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ die duale Basis, so wird $\omega = a \cdot \sigma_1$ proportional zu σ_1 . Die 2-Form

$$d\omega = \sum_{i < j} b_{ij} \sigma_i \wedge \sigma_j$$

stellen wir in dieser Basis dar. Wegen $0 = d\omega \wedge \omega$ besteht die 2-Form $d\omega$ nur aus den $(m-1)$ Summanden $d\omega = b_{12}\sigma_1 \wedge \sigma_2 + \dots + b_{1m}\sigma_1 \wedge \sigma_m$. Dann aber bedeutet die Bedingung

$$0 = \mathcal{W} \lrcorner d\omega = a(b_{12}\sigma_2 + \dots + b_{1m}\sigma_m),$$

dass ω eine geschlossene Form ist. \square

Wir berechnen die infinitesimale Volumenänderung einer kompakten Integralmannigfaltigkeit N^{m-1} unter dem Fluss Φ_t des Vektorfeldes \mathcal{W} . Die Lie-Ableitung der Volumenform dN^{m-1} ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathcal{W}}(dN^{m-1}) &= \mathcal{L}_{\mathcal{W}} \left[\frac{1}{\|\mathcal{W}\|} \cdot \mathcal{W} \lrcorner dM^m \right] = \mathcal{W} \lrcorner d \left(\frac{1}{\|\mathcal{W}\|} \mathcal{W} \lrcorner dM^m \right) \\ &= \left[\operatorname{div}(\mathcal{W}) - \frac{1}{2} \mathcal{W}(\ln \|\mathcal{W}\|^2) \right] dN^{m-1}, \end{aligned}$$

und somit erhalten wir den

Satz 6. *Die Ableitung der Volumenänderung einer kompakten Integralmannigfaltigkeit N^{m-1} der Distribution \mathcal{E}^{m-1} unter dem Fluss des Vektorfeldes \mathcal{W} ist durch die Formel*

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\Phi_t(N^{m-1})) \Big|_{t=0} = \int_{N^{m-1}} \left[\operatorname{div}(\mathcal{W}) - \frac{1}{2} \mathcal{W}(\ln \|\mathcal{W}\|^2) \right] dN^{m-1}$$

gegeben.

Besteht die Distribution \mathcal{E}^{m-1} insbesondere aus den Niveauflächen einer Funktion $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ und wählen wir das Vektorfeld $\mathcal{W} = \operatorname{grad}(f)$ als den Gradienten der Funktion, so ist $\operatorname{div}(\mathcal{W}) = \Delta(f)$ der Laplace-Operator von f . In diesem Fall erhalten wir das

Korollar 4. *Die Volumenänderung einer kompakten Niveaufläche N^{m-1} einer Funktion $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ unter dem Fluss des Gradientenvektorfeldes ist durch die Formel*

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\Phi_t(N^{m-1})) \Big|_{t=0} = \int_{N^{m-1}} \left[\Delta(f) - \frac{1}{2} \operatorname{grad}(f)(\ln \|\operatorname{grad}(f)\|^2) \right] dN^{m-1}$$

gegeben.

Bemerkung. In all diesen Formeln verstehen wir sowohl den Laplace-Operator als auch die Divergenz und den Gradienten jeweils bezüglich der Mannigfaltigkeit M^m berechnet.

Beispiel 7. Wir betrachten eine Funktion $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ und setzen voraus, dass eine weitere Funktion $\mu : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(\|\operatorname{grad}(f)\|^2) = 2\mu df$$

existiert. Nach Satz 5 und Satz 6 bildet der Fluss des Gradientenvektorfeldes $\operatorname{grad}(f)$ die Niveauflächen von f in Niveauflächen ab, und die Veränderung des Volumens wird durch die Formel

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\Phi_t(N^{m-1})) \Big|_{t=0} = \int_{N^{m-1}} (\Delta(f) - \mu) dN^{m-1}$$

beschrieben. Im Fall der Sphären $S^{m-1}(R) \subset \mathbb{R}^m$ sind diese die Niveauflächen der Funktion $f(x) = \|x\|^2$ und wir erhalten $\|\text{grad}(f)\|^2 = 4\|x\|^2$ sowie $\Delta(f) = 2m$. Damit ist $\Delta(f) - \mu \equiv 2(m-1)$ konstant und für den Fluss $\Phi_t(x) = e^{2t} \cdot x$ ergibt sich eine die Evolution des Volumens beschreibende Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\Phi_t(S^{m-1})) = 2(m-1) \text{vol}(\Phi_t(S^{m-1})).$$

Die zweite Anwendung des Frobenius-Satzes wird eine wichtige Rolle im Kapitel über die Flächentheorie spielen.

Satz 7. Sei $\Omega = (\omega_{ij})$ eine $(k \times k)$ -Matrix von 1-Formen, definiert auf einer Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m$, und sei A_0 eine invertierbare $(k \times k)$ -Matrix. In einer zusammenhängenden Umgebung $0 \in V$ existiert genau dann eine $(k \times k)$ -Matrix $A = (f_{ij})$ von Funktionen mit

$$\Omega = dA \cdot A^{-1} \quad \text{und} \quad A(0) = A_0,$$

wenn

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega$$

gilt. In diesem Fall ist die Funktionenmatrix A eindeutig bestimmt. Ist zudem Ω eine antisymmetrische Matrix ($\Omega + \Omega^t = 0$) und A_0 eine orthogonale Matrix ($A_0 \cdot A_0^t = E$) und ist die Integrabilitätsbedingung $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$ erfüllt, so ist die Lösung $A(x)$ in jedem Punkt der Menge V eine orthogonale Matrix.

Beweis. Zunächst ist die Bedingung $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$ notwendig für die Lösbarkeit der Gleichung $\Omega = dA \cdot A^{-1}$. Aus $dA = \Omega \cdot A$ folgt nämlich

$$0 = ddA = d(\Omega \cdot A) = (d\Omega) \cdot A - \Omega \wedge dA = (d\Omega - \Omega \wedge \Omega) \cdot A.$$

Die Matrix A ist invertierbar und daher erhalten wir $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$. Die Eindeutigkeit der Lösung ist gleichfalls einfach. Sind $A(x)$ und $B(x)$ zwei Lösungen, so verschwindet wegen

$$d(B^{-1}) = -B^{-1} \cdot (dB) \cdot B^{-1}$$

das Differential $d(B^{-1} \cdot A)$:

$$\begin{aligned} d(B^{-1} \cdot A) &= d(B^{-1}) \cdot A + B^{-1} dA = -B^{-1} \cdot (dB) \cdot B^{-1} \cdot A + B^{-1} \cdot \Omega \cdot A \\ &= -B^{-1} \Omega \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A + B^{-1} \cdot \Omega \cdot A = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $B^{-1} \cdot A$ konstant und im Punkte $x = 0$ gleich der Einheitsmatrix. Daraus folgt $A(x) = B(x)$ für alle Punkte $x \in V$. Wir beweisen nun die Existenz einer Lösung unter der Bedingung $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$. Zu diesem Ziel betrachten wir im Raum $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k^2}$ mit den Koordinaten $(x^1, \dots, x^m, z^{ij})$ die $(k \times k)$ -Matrix von 1-Formen

$$\Lambda = dZ - \Omega \cdot Z = (dz^{ij} - \sum_{r=1}^k \omega_{ir} \cdot z^{rj}).$$

Dann erhalten wir wegen $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$:

$$\begin{aligned} d\Lambda &= ddZ - d\Omega \wedge Z + \Omega \wedge dZ = -\Omega \wedge \Omega \wedge Z + \Omega \wedge dZ \\ &= -\Omega \wedge \Omega \wedge Z + \Omega \wedge (\Lambda + \Omega \wedge Z) = \Omega \wedge \Lambda. \end{aligned}$$

Das Formensystem $dz^{ij} - \sum_{r=1}^k \omega_{ir} z^{rj}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k^2}$ und nach dem Satz von Frobenius existiert eine m -dimensionale Integralmannigfaltigkeit $M^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k^2}$ durch den Punkt $(0, A_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k^2}$. Der Tangentialraum $T_{(0,A_0)} M^m$ dieser Integralmannigfaltigkeit hat nur den Nullvektor gemeinsam mit \mathbb{R}^{k^2} ,

$$T_{(0,A_0)} M^m \cap \mathbb{R}^{k^2} = \{0\}.$$

Dies folgt direkt aus der Gestalt der Form Λ , weil der Tangentialraum an M^m durch die Gleichungen $\Lambda = 0$ gegeben ist. Die Integralmannigfaltigkeit M^m ist dann der Graph einer auf einer offenen Menge $0 \in W \subset \mathbb{R}^m$ definierten Abbildung $A : W \rightarrow \mathbb{R}^{k^2}$ mit der Anfangsbedingung $A(0) = A_0$. Aus

$$A^*(\Lambda) = A^*(dZ - \Omega \cdot Z) = dA - \Omega \cdot A$$

ersehen wir, dass die $(k \times k)$ -Matrix A die gesuchte Lösung der Differentialgleichung ist. Die weiteren Behauptungen des Satzes ergeben sich aus der Formel

$$d(A^t \cdot A) = (dA)^t \cdot A + A^t \cdot dA = A^t \cdot \Omega^t \cdot A + A^t \cdot \Omega \cdot A.$$

Ist nämlich Ω eine antisymmetrische Matrix und $dA = \Omega \cdot A$ eine Lösung der Differentialgleichung, so erhalten wir $d(A^t \cdot A) = 0$ unmittelbar. \square

Aufgaben

1. In \mathbb{R}^3 betrachten wir die 1-Form

$$\omega = \frac{1}{yz} dx + \frac{1}{xz} dy + \frac{1}{xy} dz.$$

Man beweise, dass die durch $\omega = 0$ definierte Distribution integrierbar ist. Man bestimme weiterhin einen integrierenden Faktor für ω , d. h. eine Funktion f mit $d(f \cdot \omega) = 0$.

2. P und Q seien Funktionen der Variablen x, y, u, v . In \mathbb{R}^4 betrachten wir die 1-Formen

$$\omega_1 = dx - P \cdot du + Q \cdot dv, \quad \omega_2 = dy - Q \cdot du - P \cdot dv.$$

- a) Unter welchen Bedingungen ist die Distribution $\omega_1 = \omega_2 = 0$ integrierbar ?
- b) Mit den komplexen Variablen $z := x + iy$, $w := u + iv$ sei die Funktion $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(z, w) = P + iQ$ definiert. Man beweise, dass die Integrabilitätsbedingung des Systems $\omega_1 = \omega_2 = 0$ zum Beispiel in dem Fall erfüllt ist, dass f eine holomorphe Funktion ist.

3. In \mathbb{R}^3 ist eine durch die Form

$$\omega = P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz$$

definierte Distribution genau dann integrierbar, falls die Determinante

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

verschwindet. Diese Formel ist so zu verstehen, dass nach Entwicklung der Determinante die Differentialoperatoren auf die jeweilige Funktion anzuwenden sind.

4. Man löse das Anfangswertproblem $\dot{x} = e^x \cos t$, $x(0) = x_0$

- a) mittels Trennung der Variablen;
- b) durch Bestimmen eines integrierenden Faktors.

5. Die Methode, eine Differentialgleichung durch Auffinden eines integrierenden Faktors zu lösen, ist insbesondere dann von Interesse, wenn eine Trennung der Variablen nicht möglich ist. Als Beispiel hierzu löse man die Differentialgleichung $\dot{x}(x^3 - tx) = 1$, $x(0) = x_0$. Wie könnte man die Gleichung allerdings doch auf eine Trennung der Variablen zurückführen?

6. Man löse die Differentialgleichungen

- a) $(e^{2t} - x^2) + x \cdot \dot{x} = 0$;
- b) $\sin t + e^x + \cos t \cdot \dot{x} = 0$;

7. Sei $\Omega = (\omega_{ij})$ eine $(k \times k)$ -Matrix von 1-Formen, definiert auf einer offenen Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^m$. Man beweise: Es existiert genau dann lokal eine $(k \times k)$ -Matrix A , bestehend aus Funktionen mit

$$dA = \Omega \cdot A - A \cdot \Omega, \quad A(0) = A_0,$$

falls eine 1-Form σ derart existiert, dass die Matrix $\Sigma := \Omega - \sigma \cdot E$ die Gleichung $d\Sigma = \Sigma \wedge \Sigma$ erfüllt.

Kapitel 5

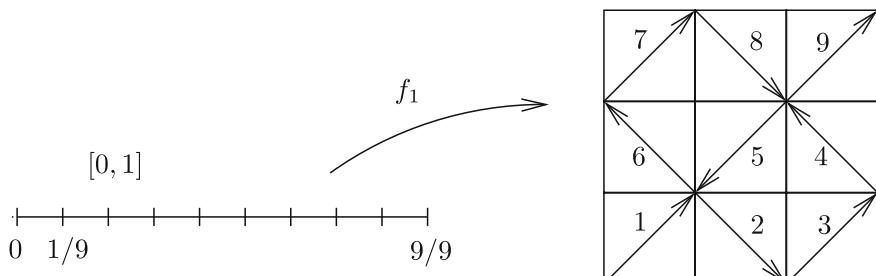
Kurven und Flächen im dreidimensionalen Raum

5.1. Kurven im dreidimensionalen Raum

Der Kurvenbegriff im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 ist so einfach nicht, wie es auf den ersten Blick den Anschein haben könnte. Lange Zeit ging man im 19. Jahrhundert davon aus, es handle sich um eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^3$, welche sich stetig vermittels eines reellen Parameters beschreiben lässt. In diesem Sinne wäre also eine Kurve das surjektive Bild einer stetigen Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^3$. Die Injektivität von f zu fordern geht insofern zu weit, als dann Kurven mit Selbstschnitten ausgeschlossen wären. Davon abgesehen, dass die Forderung der Stetigkeit zu schwach ist, um eine derartige „Kurve“ der Differentialrechnung zugänglich zu machen, brachte ein wesentlich wichtigerer Grund diese Vorstellung von einer Kurve ins Wanken. Es gilt der

Satz 1 (Peano 1890). *Es existiert eine stetige, surjektive Abbildung des Intervalls auf das Quadrat.*

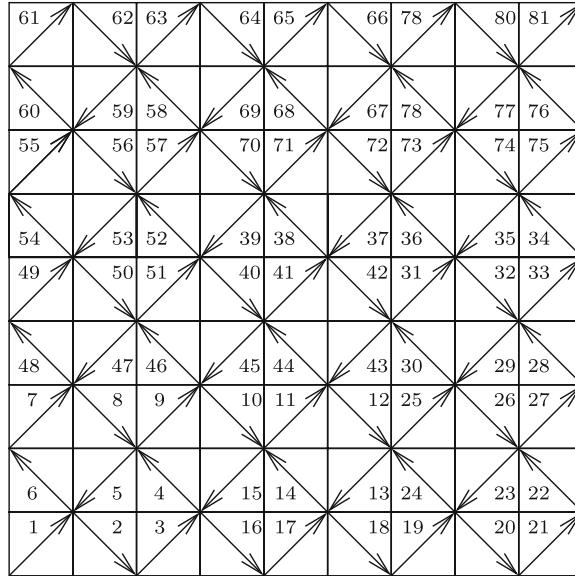
Beweis. Die Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ konstruieren wir als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Abbildungen f_i . Im ersten Schritt zerlegen wir das Intervall $[0, 1]$ in neun Teilintervalle gleicher Länge und nehmen eine analoge Zerlegung des Quadrates vor. Die Abbildung f_1 soll nun jedes der Teilintervalle $[(i-1)/9, i/9]$ auf die Diagonale des i -ten Würfels stetig und bijektiv abbilden (siehe Bild).



Die Abbildung f_2 entsteht auf die gleiche Weise, nur führen wir jetzt die Unterteilung in jedem der Intervalle $[(i-1)/9, i/9]$ und in jedem der Teilquadrate nochmals durch. Dann erhalten wir 81 Intervalle und Quadrate und f_2 bildet die kleinen Intervalle stetig und bijektiv auf die Diagonalen der kleinen Quadrate so ab, dass $f_2([(i-1)/9, i/9])$ im i -ten Quadrat der ersten Zerlegungsstufe liegt. Nach

Konstruktion gilt dann $f_1(i/9) = f_2(i/9)$. Auf diese Weise entsteht eine Folge von stetigen Abbildungen mit

- (1) $\|f_n(t) - f_{n+1}(t)\| \leq \sqrt{2}/3^n$ für alle $t \in [0, 1]$;
- (2) $f_n(i/3^{n+1}) = f_{n+1}(i/3^{n+1}) = f_{n+2}(i/3^{n+1})$ für alle $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq 3^{n+1}$.



Die genannte Abschätzung hat die Cauchy-Bedingung

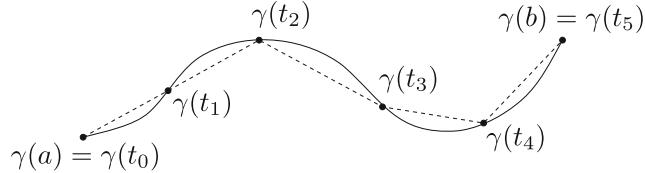
$$\|f_n(t) - f_m(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3^{n-1}}$$

für alle $t \in [0, 1]$ und $m \geq n$ zur Folge. Damit konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$. Nach Konstruktion liegen jedoch alle Punkte der Gestalt $(\frac{k}{3^n}, \frac{l}{3^m})$ im Bild der Abbildung f . Das Intervall $[0, 1]$ ist kompakt und damit ist die Bildmenge $f([0, 1])$ gleichfalls eine kompakte Teilmenge des Quadrates. Die beschriebene, auf jeden Fall im Bild von f liegende Menge ist dicht im Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ und somit folgt $f([0, 1]) = [0, 1] \times [0, 1]$, d. h. f ist stetig und surjektiv. \square

Die allgemeine Topologie wurde von diesem Beispiel wesentlich beeinflusst. Es zeigt nämlich auch, dass die „Dimension“ eines topologischen Raumes unter stetigen Abbildungen wachsen kann und diese Größe genauer zu präzisieren ist (topologische Dimensionstheorie). Wir gehen auf diese Frage nicht weiter ein und wenden uns jetzt glatten Kurven in \mathbb{R}^3 zu. Darunter könnten wir glatte, eindimensionale Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^3 verstehen, würden dann jedoch Selbstschnitte von Kurven ausschließen. Aus diesem Grunde fassen wir den Kurvenbegriff etwas allgemeiner.

Definition 1. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine glatte Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines Intervalls nach \mathbb{R}^3 , deren Ableitung nirgends verschwindet.

Wir wählen auf der Kurve γ endlich viele Punkte $P_0 = \gamma(t_0)$, $P_1 = \gamma(t_1)$, $P_2 = \gamma(t_2), \dots$, $P_k = \gamma(t_k)$, welche einer wachsenden Parameterfolge $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ entsprechen.



Ersetzen wir die Kurve durch den durch diese Punkte verlaufenden Polygonzug \mathcal{P} und messen wir dessen Länge, so erhalten wir

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k \|P_i - P_{i-1}\| = \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Die *Länge* $L(\gamma)$ der Kurve wird als das Supremum der Längen aller dieser die Kurve approximierenden Polygonzüge definiert,

$$L(\gamma) := \sup(L(\mathcal{P})).$$

Sie muss für differenzierbare Kurven nicht notwendigerweise endlich sein. Ist aber γ der Klasse C^1 , so nimmt die stetige Funktion $\|\dot{\gamma}(t)\|$ auf $[a, b]$ Maximum und Minimum an, es existiert also ein $\alpha > 0$ mit $\|\dot{\gamma}(t)\| \leq \alpha$. Damit impliziert die Mittelwertungleichung für vektorwertige Funktionen

$$\|\gamma(t) - \gamma(t')\| \leq \alpha|t - t'| \quad \text{für alle } t, t' \in [a, b],$$

und wir erhalten sofort für eine beliebige Zerlegung die Abschätzung

$$L(\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^k \alpha(t_i - t_{i-1}) = \alpha(b - a) < \infty.$$

Stetig differenzierbare Kurven auf abgeschlossenen Intervallen haben also endliche Länge. Ganz allgemein zeigt man unter Verwendung der Mittelwertungleichung für eine nur differenzierbare Kurve γ die einfache Formel

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Hierbei ist $\dot{\gamma}(t)$ die Ableitung von $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ nach dem Parameter t , der sogenannte *Geschwindigkeitsvektor*.

Leicht überzeugt man sich davon, dass hinreichend kleine Bildmengen parametrisierter Kurven Untermannigfaltigkeiten sind. Wegen $d\gamma(t)/dt \neq 0$ ist bei festem Anfangspunkt die Längenfunktion

$$L(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(\mu)\| \cdot d\mu$$

eine monoton wachsende Funktion. Ein Kurvenpunkt wird eindeutig durch denjenigen Parameter festgelegt, der die Länge des Kurvenstückes vom Anfangspunkt zu diesem betrachteten Punkt angibt. Mit anderen Worten, invertieren wir die Längenfunktion, so wird $\gamma \circ L^{-1} : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung $\gamma(s)$ der

Kurve und der Ableitungsvektor bezogen auf diesen Längenparameter s hat die Länge eins, $\|\gamma'(s)\| = 1$. Eine derartige Parametrisierung nennt man die *natürliche Parametrisierung* der Kurve. Die dargelegte Überlegung zeigt, dass diese aus einer beliebigen Parametrisierung stets hergestellt werden kann. Wir treffen folgende Vereinbarung: Ist die Kurve in einer beliebigen Parametrisierung $\gamma(t)$ gegeben, so bezeichnen wir mit $\dot{\gamma}(t)$ etc. die Ableitung nach dem Parameter t ; liegt jedoch die Kurve in ihrer natürlichen Parametrisierung vor, so sei $\gamma'(s)$ die Ableitung nach dem Längenparameter der Kurve.

Beispiel 1. Wir betrachten die *Schraubenlinie* in der Parametrisierung

$$\gamma(t) = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t, b \cdot t).$$

Wegen $\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die Längenfunktion gegeben durch $L(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t$. Der natürliche Parameter ist $s = L(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t$ und daraus entsteht die natürliche Parametrisierung, indem man den Parameter t durch den Parameter s ersetzt:

$$\gamma(s) = \left(a \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b \cdot s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Jeder Kurve ordnen wir in Punkten vom allgemeinen Typ drei Vektoren zu. Der erste dieser Vektoren ist der Tangentialvektor normiert auf Länge eins.

Definition 2. Ist $\gamma(s)$ eine Kurve in natürlicher Parametrisierung, so nennt man den Vektor $\vec{t}(s) := \gamma'(s)$ den *Einheitstangentialvektor* an die Kurve.

Die Krümmung einer Kurve in einem Punkt ist ein Maß für die Winkeländerung der Tangentialvektoren pro Längeneinheit. Genauer:

Definition 3. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $p \in \mathcal{C}$ ein Kurvenpunkt. Die *Krümmung* $\kappa(p)$ der Kurve \mathcal{C} im Punkte p ist der Grenzwert

$$\kappa(p) = \lim_{q \rightarrow p} \frac{\phi}{\hat{pq}},$$

wobei ϕ der Winkel zwischen den Tangentialvektoren in den Punkten p, q und \hat{pq} die Länge des Kurvenstückes zwischen den Punkten p und q ist.

Satz 2. In der natürlichen Parametrisierung der Kurve gilt $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$.

Beweis. Setzen wir $p = \gamma(s)$ und $q = \gamma(s + h)$, so gilt $\hat{pq} = h$ in der natürlichen Parametrisierung der Kurve und der Winkel ϕ berechnet sich unter Verwendung der Formel für den Winkel in einem gleichschenkligen Dreieck durch

$$\sin(\phi/2) = \|\vec{t}(s + h) - \vec{t}(s)\|/2.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{\phi}{\hat{pq}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi/2}{\sin(\phi/2)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(\phi/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\vec{t}(s + h) - \vec{t}(s)\|}{h} = \|\gamma''(s)\|.$$

□

In einer beliebigen Parametrisierung der Kurve gilt die durch eine leichte Umrechnung zu erhaltende Formel (vgl. Aufgabe 1):

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}.$$

Definition 4. Der *Hauptnormalenvektor* \vec{h} einer Kurve in Punkten nicht verschwindender Krümmung ist die normalisierte Ableitung des Einheitstangentialvektors,

$$\vec{h}(s) := \frac{1}{\kappa(s)} \vec{t}'(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

Das Vektorprodukt

$$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{h}(s)$$

nennt man den *Binormalenvektor* der Kurve.

In jedem Kurvenpunkt nicht verschwindender Krümmung liegen daher drei paarweise orthogonale Vektoren $\vec{t}(s)$, $\vec{h}(s)$ und $\vec{b}(s)$ der Länge eins vor, das sog. *Frenet-Reper* der Kurve. Abschließend führen wir eine letzte geometrische Größe einer Raumkurve ein, die Windung.

Definition 5. Die *Windung* (oder *Torsion*) einer Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ der Klasse C^3 in Punkten nicht verschwindender Krümmung ist das Skalarprodukt

$$\tau(s) = -\left\langle \frac{d\vec{b}(s)}{ds}, \vec{h}(s) \right\rangle.$$

Für die Formel der Windung in beliebiger Parametrisierung verweisen wir auf Aufgabe 1.

Die Strukturgleichungen einer Kurve im euklidischen Raum sind die *Frenet-Formeln*, welche die Ableitungen des Frenet-Repers durch eben dieses Reper ausdrücken.

Satz 3 (Fundamentalsatz der Kurventheorie). *In der natürlichen Parametrisierung einer Kurve der Klasse C^3 nicht verschwindender Krümmung gilt*

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{h}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{h}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix}.$$

Sind $\gamma, \gamma^* : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei Kurven gleicher Krümmung und gleicher Windung in der natürlichen Parametrisierung, so existiert eine euklidische Bewegung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma^*(s) = A \circ \gamma(s)$. Sind eine positive Funktion $\kappa(s)$ und eine beliebige Funktion $\tau(s)$ auf einem Intervall $[0, L]$ gegeben, dann existiert eine Kurve, deren Krümmung und Windung gleich den vorgegebenen Funktionen sind.

Beweis. Nach Definition des Hauptnormalenvektors gilt $\vec{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \vec{h}(s)$. Wegen $\|\vec{h}(s)\| \equiv 1$ ist die Ableitung $\vec{h}'(s)$ orthogonal zu $\vec{h}(s)$, kann also als Linearkombination von $\vec{t}(s)$ und $\vec{b}(s)$ dargestellt werden. Aus

$$\left\langle \frac{d\vec{h}(s)}{ds}, \vec{t}(s) \right\rangle = \frac{d}{ds} \left\langle \vec{h}(s), \vec{t}(s) \right\rangle - \left\langle \vec{h}(s), \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \right\rangle = 0 - \left\langle \vec{h}(s), \kappa(s) \cdot \vec{h}(s) \right\rangle = -\kappa(s)$$

und der Definition der Windung ergibt sich die zweite der Frenet-Formeln. Dann aber gilt

$$\frac{d\vec{b}(s)}{ds} = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} \times \vec{h}(s) + \vec{t} \times \frac{d\vec{h}(s)}{ds} = -\tau(s) \cdot \vec{h}(s).$$

Denken wir uns die Vektoren des Frenet-Repers als Zeilenvektoren, so wird durch

$$A := \begin{bmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{h}(s) \\ \vec{b}(s) \end{bmatrix}$$

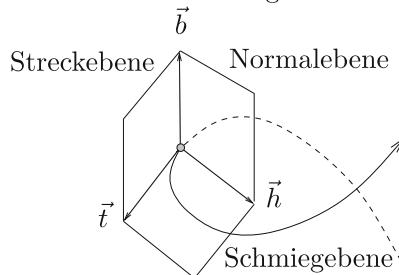
auf dem Intervall $[0, L]$ eine (3×3) -Matrix A von Funktion mit $dA \cdot A^{-1} = \Omega$ definiert, wobei die schiefsymmetrische Matrix Ω von 1-Formen aus Krümmung und Windung besteht:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot ds.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Kurve zu gegebener Krümmung und Windung folgt direkt aus Kapitel 4, Satz 7, weil die Integrabilitätsbedingung $d\Omega - \Omega \wedge \Omega = 0$ trivialerweise erfüllt ist. Anzumerken bleibt einzig, dass die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems $dA = \Omega \cdot A$ auf dem gesamten Intervall definiert ist, in dem die Krümmung $\kappa(s)$ und die Windung $\tau(s)$ vorgegeben sind. Nachdem wir bei vorliegenden Funktionen $\kappa(s), \tau(s)$ zunächst die Matrix $A(s)$ aus der Gleichung $dA = \Omega \cdot A$ bestimmen, erhalten wir die Kurve $\gamma(s)$ durch eine nochmalige Integration

$$\gamma(s) = \int \vec{t}(s) \cdot ds. \quad \square$$

Bemerkung. Die von dem Tangentialvektor \vec{t} und dem Hauptnormalenvektor \vec{h} aufgespannte Ebene nennt man die *Schmiegebene* der Kurve in einem Punkt. Der Binormalenvektor \vec{b} ist zu dieser Ebene orthogonal.



Die dritte Frenet-Formel ergibt $|\tau(s)| = \|\vec{b}'(s)\|$ und daher kann der Absolutbetrag $|\tau(p)|$ der Windung einer Kurve in einem Punkt p als der Grenzwert

$$|\tau(p)| = \lim_{q \rightarrow p} \frac{\psi}{\hat{pq}}$$

erhalten werden, wobei ψ der Winkel zwischen den Schmiegebenen der Kurve in den Punkten p, q ist (siehe Beweis von Satz 2). Damit ist der Absolutbetrag

der Windung ein Maß dafür, wie stark sich die Kurve aus ihrer Schmiegebene „herauswindet“.

Wir behandeln jetzt einige spezielle Kurven und erläutern, in welcher Weise die Frenet-Formeln beim Studium der Kurven angewandt werden können.

Definition 6. Eine Kurve, deren Tangenten mit einer festen Richtung des \mathbb{R}^3 einen konstanten Winkel bilden, heißt *Böschungslinie*.

Geraden und Schraubenlinien sind Böschungslinien. Diese können dadurch charakterisiert werden, dass der Quotient $\tau(s)/\kappa(s)$ konstant ist.

Satz 4 (Lancret 1802). *Eine Kurve der Klasse C^3 mit nicht verschwindender Krümmung ist genau dann eine Böschungslinie, falls $\tau(s)/\kappa(s)$ konstant ist.*

Beweis. Existiert ein Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $\langle \vec{t}(s), \vec{a} \rangle$ konstant ist, so differenzieren wir diese Gleichung und erhalten wegen $\kappa(s) \neq 0$, dass das Skalarprodukt $\langle \vec{h}(s), \vec{a} \rangle \equiv 0$ verschwindet. Ein weiteres Differenzieren führt unter Verwendung der Frenet-Formeln zu

$$\tau(s) \cdot \langle \vec{b}(s), \vec{a} \rangle = \kappa(s) \cdot \langle \vec{t}, \vec{a} \rangle.$$

Nun liegt der Vektor \vec{a} in der $\{\vec{t}, \vec{b}\}$ -Ebene und $\langle \vec{t}, \vec{a} \rangle$ ist konstant. Damit ist $\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ gleichfalls konstant und somit wird der Quotient τ/κ konstant. Umgekehrt, ist τ/κ konstant, dann betrachten wir den Vektor

$$\vec{a} = \frac{\tau}{\kappa} \cdot \vec{t}(s) + \vec{b}(s).$$

Aus den Frenet-Formeln folgt

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = \frac{\tau}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} + \frac{d\vec{b}}{ds} = \tau \cdot \vec{h} - \tau \cdot \vec{h} = 0$$

und daher ist \vec{a} ein konstanter Vektor. Das Skalarprodukt $\langle \vec{t}(s), \vec{a} \rangle = \tau/\kappa$ ist gleichfalls konstant und die Kurve eine Böschungslinie. \square

Kurven, die auf einer Sphäre im dreidimensionalen Raum liegen, lassen sich durch eine ähnliche Relation zwischen Krümmung und Windung charakterisieren.

Satz 5. *Eine Kurve der Klasse C^4 nicht verschwindender Krümmung $\kappa \neq 0$ und Windung $\tau \neq 0$ liegt genau dann auf einer Sphäre vom Radius $R > 0$, falls in der natürlichen Parametrisierung folgende Bedingung gilt:*

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau} \right)^2 = R^2.$$

Beweis. Differenzieren wir die Gleichung $\|\gamma(s)\|^2 \equiv R^2$, so erhalten wir $\langle \vec{t}, \gamma \rangle = 0$ und daher ist $\gamma(s)$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{h}(s)$ und $\vec{b}(s)$:

$$\gamma(s) = \alpha(s) \cdot \vec{h}(s) + \beta(s) \cdot \vec{b}(s).$$

Wegen $\|\gamma(s)\|^2 \equiv R^2$ gilt $\alpha^2(s) + \beta^2(s) \equiv R^2$. Differenzieren wir $\langle \vec{t}(s), \gamma(s) \rangle \equiv 0$ abermals, dann entsteht $\kappa(s) \cdot \langle \vec{h}(s), \gamma(s) \rangle + 1 \equiv 0$, also

$$\alpha(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}.$$

Wir differenzieren die Gleichung $\kappa(s) \cdot \langle \vec{h}(s), \gamma(s) \rangle + 1 \equiv 0$ und erhalten nach leichter Umrechnung

$$\beta(s) = -\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}.$$

Die angegebene notwendige Bedingung für eine sphärische Kurve folgt unmittelbar:

$$R^2 = \alpha^2(s) + \beta^2(s) = \frac{1}{\kappa^2(s)} + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \right)^2.$$

Umgekehrt, ist diese Relation zwischen Krümmung und Windung für eine C^4 -Kurve erfüllt, so differenzieren wir zunächst diese Gleichung

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \right) = 0.$$

Danach betrachten wir den Vektor

$$\vec{a}(s) := \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \vec{h}(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \cdot \vec{b}(s).$$

Unter Ausnutzung der Frenet-Formeln und der vorherigen Relation zwischen Windung und Krümmung berechnen wir dessen Ableitung,

$$\frac{d}{ds} \vec{a}(s) = 0.$$

Damit ist $\vec{a} := \vec{a}(s)$ konstant und es gilt

$$\|\gamma(s) - \vec{a}\|^2 = \frac{1}{\kappa^2(s)} + \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)} \right)^2 = R^2,$$

d. h. die Kurve $\gamma(s)$ liegt auf einer Sphäre vom Radius R mit dem Zentrum \vec{a} . \square

Wir wenden uns jetzt ebenen Kurven zu. Zunächst können diese als diejenigen Kurven beschrieben werden, deren Windung verschwindet.

Satz 6. Eine Kurve der Klasse C^3 mit nicht verschwindender Krümmung $\kappa(s) \neq 0$ liegt genau dann in einer Ebene des \mathbb{R}^3 , falls die Windung $\tau(s) \equiv 0$ identisch verschwindet.

Beweis. Sei \vec{a} ein Vektor orthogonal zu derjenigen Ebene von \mathbb{R}^3 , in welcher die Kurve liegt. Alle Tangentialvektoren $\vec{t}(s)$ befinden sich in dieser 2-Ebene, $\langle \vec{t}(s), \vec{a} \rangle \equiv 0$. Wir differenzieren diese Gleichung und erhalten wegen $\kappa(s) \neq 0$ sofort $\langle \vec{h}(s), \vec{a} \rangle \equiv 0$. Damit stimmt \vec{a} mit dem Binormalenvektor $\vec{b}(s)$ überein.

Anders betrachtet, der Binormalenvektor $\vec{b}(s)$ ist konstant. Aus $0 = \vec{b}'(s) = -\tau(s) \cdot \vec{h}(s)$ folgt dann sofort, dass die Windung $\tau(s) \equiv 0$ verschwindet. Die Umkehrung beweist man analog. \square

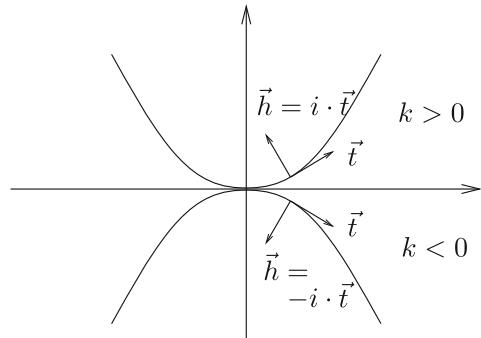
Die Krümmung einer ebenen Kurve kann mit einem Vorzeichen versehen werden. Der Hauptnormalenvektor ist nämlich proportional zu dem um den Winkel $\pi/2$ in positiver Richtung gedrehten Tangentialvektor. Wir versehen die ebene Krümmung einer ebenen Kurve genau dann mit einem positiven Vorzeichen, falls dieser Proportionalitätsfaktor positiv ist. Identifizieren wir \mathbb{R}^2 mit den komplexen Zahlen, so entspricht der Drehung um $\pi/2$ die Multiplikation mit der Zahl $i \in \mathbb{C}$. Dies führt unter Verwendung der Multiplikation komplexer Zahlen zu der

Definition 7. Sei $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eine ebene Kurve in natürlicher Parametrisierung. Die ebene Krümmung $k(s)$ ist die durch die Gleichung

$$\frac{d}{ds} \vec{t}(s) = k(s) \cdot i \cdot \vec{t}(s)$$

definierte Funktion $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Der Absolutbetrag $|k(s)|$ der ebenen Krümmung stimmt mit der Krümmung $\kappa(s)$ der Kurve, aufgefasst als Raumkurve, überein.

Beispiel 2. Für die beiden Parabeln $\gamma(t) = (t, \pm t^2)$ sieht man sofort ein, dass diejenige in der oberen Halbebene positiv, diejenige in der unteren Halbebene negativ gekrümmmt ist. Intuitiv gesprochen zeigt der Hauptnormalenvektor zum Krümmungsmittelpunkt der Kurve.



Unter einer geschlossenen Kurve $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ verstehen wir eine solche, die im gleichen Punkt beginnt und endet und deren Tangentialvektoren in diesem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen: $\gamma(0) = \gamma(L)$ und $\vec{t}(0) = \vec{t}(L)$.

Satz 7. Sei $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} k(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^L k(s) ds$$

ist eine ganze Zahl, die Umlaufzahl der geschlossenen Kurve.

Beweis. Wir betrachten $t^* : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $t^*(s) = \exp \left[i \int_0^s k(u) du \right]$.

Dann gilt $dt^*(s)/ds = i \cdot k(s) \cdot t^*(s)$ und somit folgt $(\vec{t}(s)/t^*(s))' = 0$. Die Tangentialvektoren $\vec{t}(s)$ sind daher durch die Formel

$$\vec{t}(s) = C \cdot \exp \left[i \int_0^s k(u) du \right]$$

für eine gewisse Konstante C gegeben. Wegen $\vec{t}(0) = \vec{t}(L)$ ist $\int_0^L k(s) ds$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π . \square

Den Abschnitt über Kurven abschließend, behandeln wir die sog. *Fenchel-Gleichung*, welche die totale Krümmung einer geschlossenen Raumkurve nach unten durch 2π abschätzt. Dabei werden wir zunächst ebene Kurven betrachten und anschließend das Resultat auf Raumkurven verallgemeinern. Zunächst benötigen wir eine Hilfsbetrachtung.

Lemma 1. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion der Klasse C^1 und verbinde die Funktion $f(t) := e^{\varphi(t) \cdot i}$ die Zahlen ± 1 , $f(a) = 1$, $f(b) = -1$. Dann gilt

$$(1) \quad \int_a^b |\dot{f}(\mu)| d\mu \geq \pi;$$

(2) die Gleichheit in dieser Abschätzung tritt genau dann ein, falls die Ableitung $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen nicht wechselt und $|\varphi(b) - \varphi(a)| = \pi$ gilt.

Beweis. Aus $\dot{f}(\mu) = i\dot{\varphi}(\mu)e^{i\varphi(\mu)}$ erhalten wir

$$\int_a^b |\dot{f}(\mu)| d\mu \geq \left| \int_a^b \dot{\varphi}(\mu) d\mu \right| = |\varphi(b) - \varphi(a)|.$$

Wegen $f(a) = 1$ und $f(b) = -1$ existieren ganze Zahlen k, l mit $\varphi(a) = 2k\pi$ und $\varphi(b) = 2l\pi + \pi$. Dann folgt

$$\int_a^b |\dot{f}(\mu)| d\mu \geq \pi |1 + 2(k - l)| \geq \pi.$$

Die Gleichheitsdiskussion ergibt sich aus den angeführten Abschätzungen unmittelbar. \square

Wir vereinbaren, eine Kurve *konvex* zu nennen, falls sie keine ihrer Tangenten schneidet.

Satz 8. Sei $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eine geschlossene ebene Kurve. Die totale Krümmung der Kurve beträgt mindestens 2π :

$$\int_{\gamma} |k(s)| ds = \int_0^L |k(s)| ds \geq 2\pi.$$

Gleichheit in dieser Abschätzung tritt dann und nur dann ein, falls die geschlossene Kurve γ ein konkaves Gebiet berandet.

Beweis. Jedem Kurvenpunkt ordnen wir den Tangentialvektor der Kurve zu. Damit entsteht eine Abbildung des Intervalltes in den Einheitskreis S^1 mit $\vec{t}(0) = \vec{t}(L)$. Die Bildmenge $\vec{t}([0, L]) \subset S^1$ ist eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge von S^1 , also ein Kreisbogen. Dieser Kreisbogen enthält wenigstens ein Paar $\pm z_0^*$ gegenüberliegender Zahlen. Andernfalls existierte nämlich eine Zahl $z_0^* \in S^1$ derart, dass weder $+z_0^*$ noch $-z_0^*$ im Kreisbogen liegen. Dann hätte $\frac{1}{z_0^*}\vec{t}(s)$ einen ausschließlich positiven oder negativen Imaginärteil, wegen

$$\int_0^L \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_0^*} \vec{t}(s) \right) \cdot ds = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_0^*} \int_0^L \vec{t}(s) ds \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_0^*} (\gamma(L) - \gamma(0)) \right) = 0$$

ergibt sich ein Widerspruch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $z_0 = 1$ und $\vec{t}(0) = \vec{t}(L) = 1$ annehmen. Weiterhin existiert ein Parameterwert $0 < s_1 < L$ mit $\vec{t}(s_1) = -1$. Wenden wir das obige Lemma an, erhalten wir

$$\int_0^{s_1} |k(s)|ds = \int_0^{s_1} |\vec{t}'(\mu)|d\mu \geq \pi, \quad \int_{s_1}^L |k(s)|ds = \int_{s_1}^L |\vec{t}'(\mu)|d\mu \geq \pi$$

und somit insgesamt $\int_0^L |k(s)|ds \geq 2\pi$. Die Ungleichung für ebene Kurven ist damit bewiesen. Im Gleichheitsfall folgt aus dem Lemma, dass die ebene Krümmung $k(s)$ der Kurve auf dem Intervall $[0, s_1]$ und $[s_1, L]$ jeweils das Vorzeichen nicht wechselt und

$$\left| \int_0^{s_1} k(s)ds \right| = \pi = \left| \int_{s_1}^L k(s)ds \right|$$

gilt. Wir schließen jetzt den Fall aus, dass $k(s)$ auf den beiden Intervallen $[0, s_1]$ und $[s_1, L]$ unterschiedliche Vorzeichen haben könnte. Wäre dies der Fall, so hätten wir

$$k(0) = k(s_1) = k(L) = 0$$

und $k(s)$ wäre z. B. ≥ 0 auf dem Intervall $[0, s_1]$ und ≤ 0 auf $[s_1, L]$. Dann gilt jedoch für alle Parameter $s \in [0, L]$ die Ungleichung

$$0 \leq \int_0^s k(\mu)d\mu \leq \pi$$

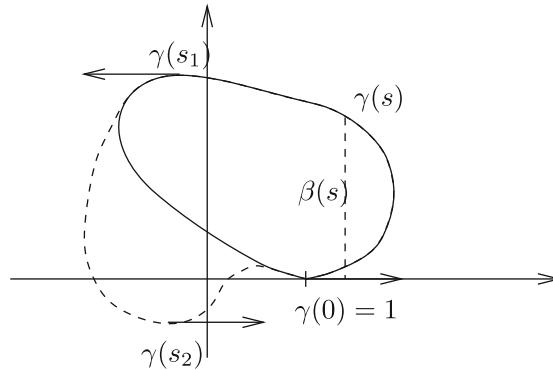
und der Tangentialvektor $\vec{t}(s) = \exp \left[i \int_0^s k(\mu)d\mu \right]$ liegt stets in der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}|z| \geq 0\}$, ein Widerspruch¹ zu

$$\int_0^L \vec{t}(s)ds = \gamma(L) - \gamma(0) = 0.$$

Die ebene Krümmung $k(s)$ der Kurve hat also ein konstantes Vorzeichen, etwa $k(s) \geq 0$. In diesem Fall befindet sich die gesamte Kurve vollständig auf einer Seite der Tangente an die Kurve in einem beliebigen Punkt. Wir zeigen das Argument in $s = 0$ für $\gamma(0) = \vec{t}(0) = 1$, der allgemeine Fall geht analog, nur mit hässlicheren Formeln. Wir betrachten die Funktion $\beta(s)$, welche die Höhe des Kurvenpunktes $\gamma(s)$ über der durch $\gamma(0)$ verlaufenden Tangente misst, $\beta(s) := \operatorname{Im}\gamma(s)$. Die Ableitung von $\beta(s)$ ist leicht zu berechnen:

$$\beta'(s) = \operatorname{Im}\vec{t}(s) = \operatorname{Im}\exp \left[i \int_0^s k(u)du \right] = \sin \left(\int_0^s k(u)du \right).$$

¹Bei umgekehrter Vorzeichenreihenfolge argumentiert man mit der unteren Halbebene.

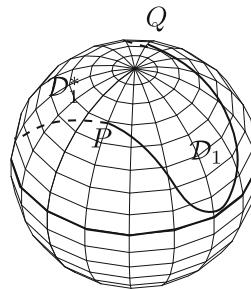


Die Krümmung ist nicht negativ und daher ist $\beta(s)$ für Parameterwerte nahe $s = 0$ gleichfalls nicht negativ. Um das Vorzeichen wechseln zu können, müsste $\beta'(s)$ im Intervall $[0, s]$ einmal Null sein, also $\int_0^s k(u)du = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sein; wir wissen bereits, dass dies genau bei $s = s_1$ der Fall ist mit $k = 1$. Insgesamt: $\beta(0) = 0$, auf $[0, s_1]$ ist β monoton wachsend, also $\beta(s_1) \geq 0$. Wenn β einmal negative Werte hätte, dann müsste β' eine weitere Nullstelle s_2 auf $[s_1, L]$ mit $\beta(s_2) < 0$ haben, weil in $s = L$ wieder $\beta(L) = 0$ sein muss. Eine solche existiert aber nicht (die nächste Nullstelle ist $s = L$). Insgesamt ergibt sich, dass die Höhenfunktion nicht negativ ist, und daher liegt die Kurve vollständig auf einer Seite der Tangente (nämlich oberhalb – bei negativer Krümmung unterhalb). \square

Wir verallgemeinern die Ungleichung des vorhergehenden Satzes auf Raumkurven. Dazu benötigen wir eine Vorbetrachtung.

Lemma 2. *Ist $\mathcal{D} \subset S^2$ eine geschlossene Kurve in der Sphäre vom Radius eins und ist deren Länge nicht größer als 2π , so ist \mathcal{D} in einer Halbsphäre enthalten.*

Beweis. Mittels zweier Punkte P und Q zerlegen wir die Kurve in zwei Kurvenstücke $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ gleicher Länge von P nach Q . Der Nordpol $N = (0, 0, 1)$ liege auf dem kürzeren Stück des durch P und Q verlaufenden Großkreises der Sphäre. Wir bezeichnen mit \mathcal{D}_1^* das durch eine Drehung um den Winkel π um die z -Achse aus \mathcal{D}_1 entstehende Kurvenstück. Die Vereinigung $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_1^*$ ist eine geschlossene Kurve auf der Sphäre, deren Länge mit der Länge der Ausgangskurve \mathcal{D} übereinstimmt. Schneidet das Kurvenstück \mathcal{D}_1 den Äquator $S^1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$ von S^2 , so enthält die Kurve $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_1^*$ gegenüberliegende Punkte der Sphäre und deren Länge beträgt demnach mindestens 2π . Mehr als 2π kann diese Länge nach Voraussetzung nicht betragen. Daher schneidet \mathcal{D}_1 den Äquator S^1 überhaupt nicht, falls die Länge der Kurve \mathcal{D} kleiner als 2π ist. Andernfalls sind \mathcal{D}_1 bzw. \mathcal{D}_2 Halbkreise auf dem Äquator. In beiden Fällen ist die Kurve \mathcal{D} in der oberen Halbsphäre enthalten. \square



Satz 9 (Satz von Fenchel). *Die totale Krümmung einer geschlossenen Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ beträgt mindestens 2π ,*

$$\int_{\mathcal{C}} \kappa(s) \cdot ds \geq 2\pi.$$

Die Gleichheit tritt genau dann ein, wenn \mathcal{C} eine ebene, ein konkaves Gebiet berandende Kurve ist.

Beweis. Gegeben sei eine nichtebene Kurve. Wir betrachten deren Tangentenabbildung $\vec{t} : [0, L] \rightarrow S^2$, welche eine „Kurve“ in der Sphäre S^2 ist. Deren Länge stimmt mit der totalen Krümmung der Ausgangskurve überein:

$$L(\vec{t}) = \int_0^L \|\vec{t}'(s)\| \cdot ds = \int_0^L \kappa(s) \cdot ds.$$

Zunächst bemerken wir, dass das Bild von \vec{t} nicht vollständig in einer Halbsphäre von S^2 enthalten sein kann. Wäre dies der Fall, so existierte ein Vektor $\vec{a} \in S^2$ mit $\langle \vec{a}, \vec{t}(s) \rangle \geq 0$ für alle Parameterwerte. Das Integral von $\vec{t}(s)$ verschwindet jedoch, weil wir von einer geschlossenen Kurve ausgehen. Damit folgt $\langle \vec{a}, \vec{t}(s) \rangle \equiv 0$ und die Kurve \mathcal{C} wäre eine ebene Kurve. Die Behauptungen des Satzes von Fenchel ergeben sich nun aus dem vorherigen Lemma und Satz 8. \square

5.2. Die Strukturgleichungen einer Fläche

Eine Fläche ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . Ähnlich wie im Fall der Kurven möchten wir Selbstdurchdringungen zulassen und werden auch parametrisierte Flächen betrachten. Darunter verstehen wir Abbildungen $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert auf einer offenen Teilmenge U von \mathbb{R}^2 (oder allgemeiner, einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit U) mit der Eigenschaft, dass das Differential $D(F)$ in jedem Punkte den Rang zwei hat. In diesem wie im Fall einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit $M : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Inklusion in den dreidimensionalen Raum und fassen diese Abbildung als eine vektorwertige Funktion auf. Lokal wählen wir ein orthonormales Tangentialreper e_1, e_2 an die Fläche und bezeichnen mit $e_3 := e_1 \times e_2$ den Normalenvektor der Fläche. Dabei fassen wir – ohne eine andere Notation einzuführen – e_1, e_2 und e_3 mitunter auch als vektorwertige Funktionen auf der Mannigfaltigkeit M^2 auf. Mit

σ_1 und σ_2 bezeichnen wir das zu $\{e_1, e_2\}$ duale Reper von 1-Formen. Das Differential dM der identischen Abbildung auf der Fläche ist die identische Abbildung in jedem der Tangentialräume an die Fläche. Daher gilt die Gleichung

$$dM = \sigma_1 \cdot e_1 + \sigma_2 \cdot e_2,$$

welche nichts anderes als die Zerlegung eines Tangentialvektors bezüglich der Basis e_1, e_2 zum Inhalt hat. Das äußere Produkt $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ ist eine von der Wahl des orthonormalen Repers e_1, e_2 vorgegebener Orientierung unabhängige 2-Form auf der Fläche und stimmt mit deren Volumenform überein,

$$dM^2 = \sigma_1 \wedge \sigma_2.$$

Bilden wir die Skalarprodukte $\langle e_i, e_j \rangle$ der vektorwertigen Funktionen e_i , so sind dies konstante Funktionen auf M^2 . Nach Differenzieren erhalten wir

$$\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0$$

und die hierbei auftretenden 1-Formen bezeichnen wir mit $\omega_{ij} := \langle de_i, e_j \rangle$. Wir fassen die Differentialformen zu einer antisymmetrischen (3×3) -Matrix Ω zusammen:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Differentiale der vektorwertigen Funktionen e_i können durch die eingeführten Formen in der Gestalt

$$de_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \cdot e_j$$

dargestellt werden. Insgesamt konstruierten wir lokal 5 Differentialformen vom Grad eins, die Formen σ_i und ω_{ij} . Diese sind nicht unabhängig voneinander, die sog. Strukturgleichungen einer Fläche beinhalten die Relationen zwischen ihnen. Besonders wichtig wird die Tatsache werden, dass die Form ω_{12} vollständig durch σ_1 und σ_2 determiniert ist. Später wird sich daraus direkt ergeben, dass die Gaußsche Krümmung eine Größe der inneren Geometrie der Fläche ist (Theorema Egregium, Gauß 1827).

Satz 10 (Strukturgleichungen einer Fläche).

$$(1) \quad d\sigma_1 = \omega_{12} \wedge \sigma_2, \quad d\sigma_2 = \omega_{21} \wedge \sigma_1.$$

Die Form ω_{12} ist vollständig durch die Formen σ_1 und σ_2 bestimmt.

$$(2) \quad \sigma_1 \wedge \omega_{13} + \sigma_2 \wedge \omega_{23} = 0$$

$$(3) \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega.$$

Beweis. Wir differenzieren die Funktion M zweimal

$$\begin{aligned} 0 &= ddM = d(\sigma_1 \cdot e_1 + \sigma_2 \cdot e_2) \\ &= (d\sigma_1 - \omega_{12} \wedge \sigma_2) \cdot e_1 + (d\sigma_2 - \omega_{21} \wedge \sigma_1) \cdot e_2 - (\sigma_1 \wedge \omega_{13} + \sigma_2 \wedge \omega_{23}) \cdot e_3 \end{aligned}$$

und erhalten die ersten beiden Strukturgleichungen. Die dritte der Gleichungen ergibt sich, indem man $0 = d\sigma_i = \sum_k (d\omega_{ik} - \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{jk}) \cdot e_k$ verwendet. Die Form ω_{12} kann folgendermaßen aus σ_1 und σ_2 bestimmt werden: Die Differentiale

$$d\sigma_1 = A \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2, \quad d\sigma_2 = B \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

stellen wir als Vielfache der 2-Form $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ dar. Nach der ersten Strukturgleichung gilt

$$\omega_{12} = A \cdot \sigma_1 + B \cdot \sigma_2.$$

□

Ist eine Parametrisierung $F : U \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^3$ einer Fläche vermöge eines Gebietes $U \subset \mathbb{R}^2$ gegeben, so können wir die 1-Formen σ_i und ω_{ij} zurückziehen. Diese Formen bezeichnen wir mit $\sigma_i^* := F^*(\sigma_i)$ bzw. mit $\omega_{ij}^* := F^*(\omega_{ij})$. Natürlich gelten dann die Strukturgleichungen der Fläche entsprechend:

$$d\sigma_i^* = \sum_{j=1}^2 \omega_{ij}^* \wedge \sigma_j^*, \quad \sigma_1^* \wedge \omega_{13}^* + \sigma_2^* \wedge \omega_{23}^* = 0, \quad d\Omega^* = \Omega^* \wedge \Omega^*.$$

Wir beweisen jetzt eine erste Formulierung des Fundamentalsatzes der Flächentheorie. Er gestattet es, eine Fläche lokal im dreidimensionalen Raum durch das System der 1-Formen und den aus den Strukturgleichungen resultierenden Beziehungen zwischen ihnen zu bestimmen.

Satz 11 (Fundamentalsatz der Flächentheorie – erste Formulierung). *Auf einer einfach zusammenhängenden, offenen Teilmenge U von \mathbb{R}^2 seien 4 Differentialformen $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}$ vom Grad eins gegeben. Die Formen $\bar{\sigma}_1$ und $\bar{\sigma}_2$ seien linear unabhängig in jedem Punkte. Die 1-Form $\bar{\omega}_{12}$ bestimmen wir aus ihnen durch die Gleichungen*

$$d\bar{\sigma}_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\sigma}_2, \quad d\bar{\sigma}_2 = -\bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\sigma}_1.$$

Mit der antisymmetrischen Fortsetzung $\bar{\omega}_{ji} := -\bar{\omega}_{ij}$ setzen wir voraus, dass das vorgegebene Formensystem die Strukturgleichungen

$$\bar{\sigma}_1 \wedge \bar{\omega}_{13} + \bar{\sigma}_2 \wedge \bar{\omega}_{23} = 0, \quad d\bar{\Omega} = \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega}$$

erfüllt. Dann existiert eine parametrisierte Fläche $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein orthonormales Reper tangentialer Vektorfelder derart, dass die induzierten Formen σ_i^ und ω_{ij}^* mit den vorgegebenen Formen $\bar{\sigma}_i$ bzw. $\bar{\omega}_{ij}$ übereinstimmen. Das Flächenstück samt dem orthonormalen Reper ist bis auf eine euklidische Bewegung von \mathbb{R}^3 eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die aus 1-Formen bestehende (3×3) -Matrix $\bar{\Omega}$ ist schiefsymmetrisch und erfüllt die Integrabilitätsbedingung $d\bar{\Omega} = \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega}$. Zu gegebener Anfangsbedingung $A_0 \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ existiert nach Kapitel 4, Satz 7, eine Matrix \bar{A} , bestehend aus Funktionen mit $\bar{\Omega} \cdot \bar{A} = d\bar{A}$. Die Zeilen dieser Matrix sind orthogonal und haben die Länge eins. Damit definieren diese Zeilen drei vektorwertige Funktionen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und es gilt

$$d\bar{e}_i = \sum_{j=1}^3 \bar{\omega}_{ij} \cdot \bar{e}_j.$$

Wir betrachten die 1-Form

$$\phi := \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{e}_1 + \bar{\sigma}_2 \cdot \bar{e}_2.$$

Die Berechnung des Differentials von ϕ ergibt die Formel

$$d\phi = (d\bar{\sigma}_1 - \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\sigma}_2) \cdot \bar{e}_1 + (d\bar{\sigma}_2 - \bar{\omega}_{21} \wedge \bar{\sigma}_1) \cdot \bar{e}_2 - (\bar{\sigma}_1 \wedge \bar{\omega}_{13} + \bar{\sigma}_2 \wedge \bar{\omega}_{13}) \cdot \bar{e}_3 = 0.$$

Nach Poincaré-Lemma (Kapitel 3.6, Satz 22) existiert eine Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $dF = \phi = \bar{\sigma}_1 \cdot \bar{e}_1 + \bar{\sigma}_2 \cdot \bar{e}_2$ und damit ist die gesuchte parametrisierte Fläche samt orthonormalen Reper gefunden. An zwei Stellen in diesem Beweis hatten wir eine Differentialgleichung integriert und somit einen Freiheitsgrad in der Anfangsbedingung. Zunächst hängt die Lösung \bar{A} der Differentialgleichung $\bar{\Omega} \cdot \bar{A} = d\bar{A}$ von der Vorgabe einer orthogonalen Matrix $A_0 \in \text{SO}(3, \mathbb{R})$ ab. Die Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist im zweiten Schritt durch die Differentialgleichung $dF = \phi$ nur bis auf einen konstanten Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ bestimmt. Insgesamt sehen wir, dass die Fläche bei vorgegebenen Formen $\bar{\sigma}_i$ und $\bar{\omega}_{ij}$ bis auf eine euklidische Bewegung bestimmt ist. \square

Beispiel 3. Wir diskutieren den Fall einer Drehfläche in \mathbb{R}^3 . Betrachte eine ebene Kurve in der (x, z) -Ebene mit Komponentenfunktionen $r(s) > 0$ und $z(s)$. Die Fläche F entsteht dadurch, dass man diese Leitkurve um die z -Achse dreht, und hat demnach auf $U = \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$ die Parametrisierung

$$F(s, \varphi) = (r(s) \sin \varphi, r(s) \cos \varphi, z(s)).$$

Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, dass die erzeugende Kurve der Fläche F auf Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. es möge in jedem Punkt die Bedingung

$$(*) \quad (r')^2 + (z')^2 = 1$$

gelten (siehe Aufgabe 14 für den allgemeinen Fall). Wir berechnen zunächst die beiden Tangentialvektoren an die Fläche

$$\frac{\partial}{\partial s} = (r' \sin \varphi, r' \cos \varphi, z'), \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = (r \cos \varphi, -r \sin \varphi, 0)$$

sowie deren Skalarprodukte

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = (r')^2 + (z')^2 = 1, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = r^2.$$

Indem wir den zweiten Tangentialvektor geeignet normieren, gelangen wir zu dem Orthonormalreper

$$e_1 := \frac{\partial}{\partial s}, \quad e_2 := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und der hierzu dualen Basis

$$\sigma_1 = ds, \quad \sigma_2 = r d\varphi.$$

Der Einheitsnormalenvektor auf der Fläche F ist das Kreuzprodukt von e_1 mit e_2 :

$$e_3 := e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} z' \sin \varphi \\ z' \cos \varphi \\ -r' \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das Differential der vektorwertigen Funktion $e_1 = (r' \sin \varphi, r' \cos \varphi, z')$ komponentenweise

$$de_1 = (r'' \sin \varphi ds + r' \cos \varphi d\varphi, r'' \cos \varphi ds - r' \sin \varphi d\varphi, z'' ds)$$

und prüfen nach, dass

$$de_1 = r' d\varphi e_2 + \frac{r''}{z'} ds e_3$$

gilt. In der Tat, setzen wir e_2 und e_3 in diese Linearkombination ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} r' d\varphi e_2 + \frac{r''}{z'} ds e_3 &= (r' \cos \varphi d\varphi, -r' \sin \varphi d\varphi, 0) + \frac{r''}{z'} (z' \sin \varphi d\varphi, z' \cos \varphi ds, -r' ds) \\ &= (r'' \sin \varphi ds + r' \cos \varphi d\varphi, r'' \cos \varphi ds - r' \sin \varphi d\varphi, -r'' r'/z' ds). \end{aligned}$$

Da aber durch Differenzieren aus der Relation (*) die Beziehung $r' r'' + z' z'' = 0$ folgt, ist dies gleich de_1 . Analog beweist man

$$de_2 = -r' d\varphi e_1 - z' d\varphi e_3, \quad de_3 = \frac{-r''}{z'} ds e_1 + z' d\varphi e_2$$

und deswegen haben wir die Matrix Ω der 1-Formen ω_{ij} vollständig bestimmt:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r' d\varphi & \frac{r''}{z'} ds \\ -r' d\varphi & 0 & -z' d\varphi \\ \frac{-r''}{z'} ds & z' d\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir zeigen an diesem Beispiel weiterhin, wie man die Form ω_{12} aus σ_1 und σ_2 direkt bestimmen kann. Aus $d\sigma_1 = 0$ und $d\sigma_2 = r' \cdot ds \wedge d\varphi = r'/r \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$ erhalten wir die Formel

$$\omega_{12} = \frac{r'}{r} \cdot \sigma_2 = r' \cdot d\varphi$$

aus dem in Beweis von Satz 10 angegebenen Berechnungsverfahren. Fast noch schneller ergibt sich ω_{12} aus der Definition:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \langle de_1, e_2 \rangle = (r'' \sin \varphi ds + r' \cos \varphi d\varphi) \cos \varphi \\ &\quad + (r'' \cos \varphi ds - r' \sin \varphi d\varphi)(-\sin \varphi) \\ &= r' d\varphi. \end{aligned}$$

Beispiel 4. Sei $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion zweier Variablen auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und F ihr Graph

$$F(x, y) = (x, y, h(x, y)).$$

Wir schreiben partielle Ableitungen als unteren Index. Aus den beiden Tangentialvektoren

$$\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0, h_x) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} = (0, 1, h_y)$$

bestimmt man zum Beispiel das Orthonormalreper der gleichen Orientierung

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{h_x h_y}{\sqrt{1+h_x^2} \sqrt{1+h_x^2 + h_y^2}} \left(\frac{1+h_x^2}{h_x h_y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

sowie die hierzu dualen 1-Formen

$$\sigma_1 = \sqrt{1+h_x^2} dx + \frac{h_x h_y}{\sqrt{1+h_x^2}} dy, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt{1+h_x^2 + h_y^2}}{\sqrt{1+h_x^2}} dy.$$

Daraus erhält man etwa das Volumenelement

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sqrt{1+h_x^2 + h_y^2} dx \wedge dy.$$

Die volle Matrix Ω zu berechnen ist etwas aufwendig. Aufgrund ihrer geometrischen Relevanz bestimmen wir für später die Form $\omega_{12} = \langle de_1, e_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \frac{h_x h_y}{\sqrt{1+h_x^2} \sqrt{1+h_x^2 + h_y^2}} \left(-d \left(\frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \right) + \frac{1}{h_x} d \left(\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \right) \right) \\ &= \frac{h_y dh_x}{(1+h_x^2) \sqrt{1+h_x^2 + h_y^2}}. \end{aligned}$$

Bei der Diskussion der Krümmungseigenschaften von Flächen werden wir feststellen, dass man aus holomorphen Funktionen besonders interessante Graphen gewinnen kann. Wir führen diese deswegen jetzt ein.

Beispiel 5. Ist etwa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann erhält man die Betragsfläche von f , indem man in den soeben hergeleiteten Formeln $h = |f| = (f \bar{f})^{1/2}$ setzt. Die Ableitungen nach dem komplexen Parameter z stehen mit den reellen Ableitungen nach dessen Real- und Imaginärteil über die Formeln

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

in Beziehung zueinander, sodass es möglich ist, h_x und h_y nur durch die Ableitungen von f und \bar{f} nach z auszudrücken. Diese werden wir mit ' bezeichnen. Leicht beweist man nun, dass

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{f' \bar{f}}{2h}, \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = \frac{f \bar{f}'}{2h}$$

gilt, woraus sich die gesuchten Ableitungen

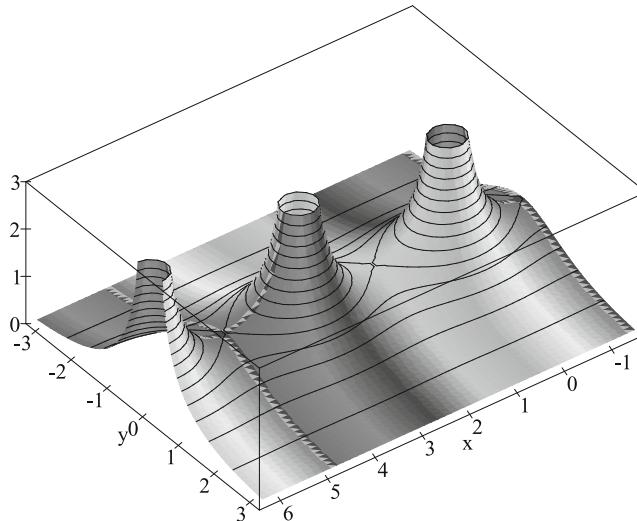
$$h_x = \frac{1}{2h} (f' \bar{f} + f \bar{f}') \quad \text{und} \quad h_y = \frac{i}{2h} (f' \bar{f} - f \bar{f}')$$

ergeben. Nach Umformung bedeutet dies zum Beispiel

$$1 + h_x^2 + h_y^2 = 1 + |f'|^2$$

und durch direktes Einsetzen in die Formel des letzten Beispiels kann man einen expliziten Ausdruck für die Form ω_{12} in Abhängigkeit von den komplexen Ableitungen der Funktion f gewinnen. Indem man auf einer Betragsfläche die Linien

konstanten Betrages und konstanten Arguments einträgt, gewinnt man ein übersichtliches Bild des Funktionsverlaufs im Komplexen. Als Beispiel möge die Funktion $f(z) = 1/\sin(z)$ außerhalb ihrer Pole dienen, eingefärbt nach dem Winkel und versehen mit den Höhenlinien des Betrages:



Betragsfläche von $f(z) = 1/\sin(z)$

Beispiel 6. Wir zerlegen eine holomorphe Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ in ihren Real- und Imaginärteil $f = u + iv$. Indem man in Beispiel 4 für h die Funktion $h = u$ bzw. $h = v$ setzt, erhält man die Real- und die Imaginärteilträume von f . Es gelten die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

aus denen man zunächst mit der Formel für $\partial/\partial z$ des vorherigen Beispiels $f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ und daraus

$$1 + u_x^2 + u_y^2 = 1 + v_x^2 + v_y^2 = 1 + |f'|^2$$

einsieht. Wir verzichten an dieser Stelle darauf, die explizite Formel für ω_{12} auszuschreiben.

5.3. Die erste und die zweite Grundform einer Fläche

In der klassischen Differentialgeometrie ist es üblich, eine Fläche durch zwei quadratische Matrizen, ihre sog. erste und zweite Grundform, zu beschreiben. Davon ist uns die erste bereits aus dem dritten Kapitel bekannt, denn bei der ersten Grundform handelt es sich einfach um die Riemannsche Metrik, die die metrischen Verhältnisse in jedem Tangentialraum beschreibt. Die zweite Grundform ist von der konkreten Realisierung der Fläche im euklidischen Raum abhängig.

Um nun die erste Grundform in der Sprache der Differentialformen definieren zu können, führen wir auf den 1-Formen neben dem bereits bekannten äußeren noch ein weiteres, das *symmetrische Produkt* ein.

Definition 8. Ist M^n eine Mannigfaltigkeit und σ, μ zwei 1-Formen auf M^n , so definieren wir eine symmetrische Bilinearform $\sigma \odot \mu : TM^n \times TM^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\sigma \odot \mu(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \frac{1}{2}(\sigma(\mathcal{V})\mu(\mathcal{W}) + \sigma(\mathcal{W})\mu(\mathcal{V})).$$

Dabei ist es oft in der Literatur üblich, das Zeichen \odot wegzulassen. Das symmetrische Quadrat einer 1-Form σ bezeichnet man oft mit $\sigma^2 := \sigma \odot \sigma$.

Aus der Definition folgt sofort, dass insbesondere auf einer Fläche mit Orthonormalreper e_1, e_2 und dualer Basis der 1-Formen σ_1, σ_2 die Gleichung

$$\sigma_i \odot \sigma_i(e_j, e_k) = \sigma_i(e_j)\sigma_i(e_k) = \delta_{ij}\delta_{ik}$$

gilt, die Bilinearform

$$I := \sigma_1 \odot \sigma_1 + \sigma_2 \odot \sigma_2$$

bezüglich der Basis e_1, e_2 also genau das euklidische Standardskalarprodukt ist. Diese nennen wir die *erste Grundform* der Fläche; sie stimmt mit der in Kapitel 3 definierten Riemannschen Metrik überein. Geometrische Größen der Fläche, die nur von der ersten Grundform abhängen, nennt man Größen der inneren Geometrie.

Beispiel 7. Für die Drehfläche aus Beispiel 3 war $\sigma_1 = ds$ und $\sigma_2 = r d\varphi$, also ist die erste Grundform gegeben durch

$$I = ds \odot ds + r^2 d\varphi \odot d\varphi,$$

was man auch in der Schreibweise $I = ds^2 + r^2 d\varphi^2$ findet.

Beispiel 8. Die erste Fundamentalform eines Graphen (Beispiel 4) ist

$$I = (1 + h_x^2) dx^2 + 2 h_x h_y dx dy + (1 + h_y^2) dy^2.$$

Beispiel 9. Auf der oberen Halbebene $\mathcal{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ betrachten wir die 1-Formen

$$\sigma_1 = \frac{dx}{y}, \quad \sigma_2 = \frac{dy}{y}.$$

Durch sie wird die Riemannsche Metrik

$$I = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

definiert. Die Halbebene \mathcal{H}^2 versehen mit dieser Metrik nennt man die *hyperbolische Ebene*. Die nur von σ_1 und σ_2 abhängende Form ω_{12} ist gleich σ_1 .

Sind \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei an die Fläche M^2 tangentiale Vektorfelder, verstehen wir \mathcal{W} als vektorwertige Funktion und differenzieren wir \mathcal{W} als solche nach dem Vektorfeld \mathcal{V} , dann bezeichnen wir die entstehende vektorwertige Funktion mit $\mathcal{V}(\mathcal{W})$. Im Allgemeinen ist $\mathcal{V}(\mathcal{W})$ nicht tangential an die Fläche, es gilt jedoch der

Satz 12. Sind \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei an die Fläche tangentiale Vektorfelder, so ist die Differenz $\mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V})$ ebenfalls tangential und gleich dem Kommutator der Vektorfelder:

$$\mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V}) = [\mathcal{V}, \mathcal{W}].$$

Beweis. Wir benutzen die Strukturgleichungen der Fläche für den Beweis. \mathcal{V} und \mathcal{W} sind tangentiale Vektorfelder und somit verschwinden die Skalarprodukte $\langle \mathcal{V}, e_3 \rangle = \langle \mathcal{W}, e_3 \rangle = 0$ identisch. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V}), e_3 \rangle &= -\langle \mathcal{W}, de_3(\mathcal{V}) \rangle + \langle \mathcal{V}, de_3(\mathcal{W}) \rangle \\ &= -\langle \mathcal{W}, \omega_{31}(\mathcal{V})e_1 + \omega_{32}(\mathcal{V})e_2 \rangle + \langle \mathcal{V}, \omega_{31}(\mathcal{W})e_1 + \omega_{32}(\mathcal{W})e_2 \rangle \\ &= \sigma_1 \wedge \omega_{31}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) + \sigma_2 \wedge \omega_{32}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \end{aligned}$$

und wegen der Strukturgleichung $\sigma_1 \wedge \omega_{31} + \sigma_2 \wedge \omega_{32} = 0$ ist $\mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V})$ ein tangentiales Vektorfeld auf der Fläche. Weiterhin erhalten wir aus Kapitel 3.9 und den Strukturgleichungen ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_i(\mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V})) &= \langle \mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V}), e_i \rangle \\ &= \mathcal{V}(\langle \mathcal{W}, e_i \rangle) - \langle \mathcal{W}, de_i(\mathcal{V}) \rangle - \mathcal{W}(\langle \mathcal{V}, e_i \rangle) + \langle \mathcal{V}, de_i(\mathcal{W}) \rangle \\ &= \mathcal{V}(\langle \mathcal{W}, e_i \rangle) - \mathcal{W}(\langle \mathcal{V}, e_i \rangle) + \sum_{j=1}^2 \sigma_j \wedge \omega_{ij}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \\ &= \mathcal{V}(\sigma_i(\mathcal{W})) - \mathcal{W}(\sigma_i(\mathcal{V})) - d\sigma_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \sigma_i([\mathcal{V}, \mathcal{W}]). \end{aligned}$$

Daher stimmt $\mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V})$ mit dem Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}]$ überein. \square

Die vektorwertige Funktion $\mathcal{V}(\mathcal{W})$ zerlegen wir in ihren tangentialen und normalen Bestandteil. Der tangentiale Bestandteil wird mit $\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W}$ bezeichnet, während der normale Anteil auf die sog. zweite Grundform $\text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ der Fläche führt.

Definition 9. Seien \mathcal{V} und \mathcal{W} tangentiale Vektorfelder an eine Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$. Den tangentialen Bestandteil

$$\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W} := \mathcal{V}(\mathcal{W}) - \langle \mathcal{V}(\mathcal{W}), e_3 \rangle \cdot e_3 = \mathcal{V}(\mathcal{W}) + \langle \mathcal{W}, de_3(\mathcal{V}) \rangle \cdot e_3$$

von $\mathcal{V}(\mathcal{W})$ nennt man die *kovariante Ableitung des Vektorfeldes* \mathcal{W} nach dem Vektorfeld \mathcal{V} . Der normale Anteil der vektorwertigen Funktion $\mathcal{V}(\mathcal{W})$ wird mit $\text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ bezeichnet

$$\text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \langle \mathcal{W}, de_3(\mathcal{V}) \rangle$$

und ist die *zweite Grundform der Fläche*.

Bemerkung. Die zweite Grundform der Fläche hängt von der Orientierung von M^2 ab. Wechseln wir diese, so wechselt der Normalenvektor e_3 und damit auch II das Vorzeichen.

Zunächst stellen wir die Eigenschaften der kovarianten Ableitung ∇ zusammen.

Satz 13.

- (1) $\nabla_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2) = \nabla_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}_1) + \nabla_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}_2);$
- (2) $\nabla_{\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2} \mathcal{W} = \nabla_{\mathcal{V}_1} \mathcal{W} + \nabla_{\mathcal{V}_2} \mathcal{W};$
- (3) ist $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so gilt

$$\nabla_{\mathcal{V}}(f \cdot \mathcal{W}) = df(\mathcal{V}) \cdot \mathcal{W} + f \cdot \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W} \quad \text{und} \quad \nabla_{f \cdot \mathcal{V}} \mathcal{W} = f \cdot \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W};$$
- (4) $\mathcal{V} \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \rangle = \langle \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \rangle + \langle \mathcal{W}_1, \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}_2 \rangle;$
- (5) $\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W} - \nabla_{\mathcal{W}} \mathcal{V} = [\mathcal{V}, \mathcal{W}].$

Beweis. Die Additivität von $\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}$ ist eine direkte Konsequenz der Definition. Die letzte Formel folgt aus dem vorhergehenden Satz. Die restlichen Behauptungen sind leicht nachzuprüfen, beispielsweise gilt

$$\nabla_{\mathcal{V}}(f \cdot \mathcal{W}) = \mathcal{V}(f \cdot \mathcal{W}) + \langle f \cdot \mathcal{W}, de_3(\mathcal{V}) \rangle \cdot e_3 = df(\mathcal{V}) \cdot \mathcal{W} + f \cdot \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}. \quad \square$$

Stellen wir das Vektorfeld \mathcal{W} in einem orthonormalen Reper e_1, e_2 der Fläche dar, $\mathcal{W} = W^1 \cdot e_1 + W^2 \cdot e_2$, so erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\nabla_{\mathcal{V}} e_1 = de_1(\mathcal{V}) + \langle e_1, de_3(\mathcal{V}) \rangle e_3 = \omega_{12}(\mathcal{V})e_2 + \omega_{13}(\mathcal{V})e_3 + \omega_{31}(\mathcal{V})e_3 = \omega_{12}(\mathcal{V})e_2$$

die wichtige Formel

$$\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W} = (dW^1(\mathcal{V}) + \omega_{21}(\mathcal{V}) \cdot W^2) \cdot e_1 + (dW^2(\mathcal{V}) + \omega_{12}(\mathcal{V}) \cdot W^1) \cdot e_2.$$

Die Form ω_{12} hängt nur von σ_1, σ_2 ab und daher ist die kovariante Ableitung $\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}$ gleichfalls nur von den Größen der inneren Geometrie der Fläche abhängig. Die zweite Grundform $\Pi(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ist eine symmetrische Bilinearform auf dem Tangentialbündel der Fläche.

Satz 14. Sind \mathcal{V} und $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ tangentiale Vektorfelder an die Fläche und f_1, f_2 glatte Funktionen, so gilt

- (1) die zweite Grundform ist symmetrisch: $\Pi(\mathcal{V}, \mathcal{W}_1) = \Pi(\mathcal{W}_1, \mathcal{V});$
- (2) $\Pi(\mathcal{V}, f_1 \cdot \mathcal{W}_1 + f_2 \cdot \mathcal{W}_2) = f_1 \cdot \Pi(\mathcal{V}, \mathcal{W}_1) + f_2 \cdot \Pi(\mathcal{V}, \mathcal{W}_2).$

Beweis. Wir zeigen die Symmetrie der zweiten Grundform, die zweite Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Definition. Mit \mathcal{V} und \mathcal{W} ist auch der Kommutator $[\mathcal{V}, \mathcal{W}] = \mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V})$ ein tangentiales Vektorfeld. Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}, de_3(\mathcal{W}) \rangle &= -\langle \mathcal{W}(\mathcal{V}), e_3 \rangle = -\langle \mathcal{V}(\mathcal{W}), e_3 \rangle + \langle \mathcal{V}(\mathcal{W}) - \mathcal{W}(\mathcal{V}), e_3 \rangle \\ &= -\langle \mathcal{V}(\mathcal{W}), e_3 \rangle = \langle \mathcal{W}, de_3(\mathcal{V}) \rangle, \end{aligned}$$

d. h. $\Pi(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ist symmetrisch. \square

Aufgrund der Strukturgleichung $de_3 = \omega_{31} \cdot e_1 + \omega_{32} \cdot e_2$ kann die zweite Grundform als symmetrisches Produkt folgender 1-Formen dargestellt werden:

$$\Pi = \omega_{31} \odot \sigma_1 + \omega_{32} \odot \sigma_2.$$

In dem Orthonormalreper e_1, e_2 schreibt sich die zweite Grundform deswegen als die symmetrische Matrix

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi(e_1, e_1) & \Pi(e_1, e_2) \\ \Pi(e_1, e_2) & \Pi(e_2, e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{31}(e_1) & \omega_{31}(e_2) \\ \omega_{32}(e_1) & \omega_{32}(e_2) \end{bmatrix}.$$

Ist andererseits $F : U \rightarrow M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche und wählen wir den Normalenvektor

$$e_3 = \frac{\frac{\partial F}{\partial y^1} \times \frac{\partial F}{\partial y^2}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial y^1} \times \frac{\partial F}{\partial y^2} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^1} \times \frac{\partial F}{\partial y^2} \right),$$

so ist die zweite Grundform durch eine symmetrische (2×2) -Matrix

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

mit den Koeffizienten

$$b_{ij} = - \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}, e_3 \right\rangle = - \frac{1}{\sqrt{g}} \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}, \frac{\partial F}{\partial y^1} \times \frac{\partial F}{\partial y^2} \right\rangle$$

gegeben. Jeder Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ sind somit zwei symmetrische Bilinearformen I und II zugeordnet, von denen die erste Grundform positiv definit in allen Punkten ist. Diese beiden Grundformen sind nicht voneinander unabhängig. Aus den Strukturgleichungen der Fläche werden sich zwei Differentialgleichungen ergeben, welche diese beiden Grundformen miteinander verbinden. Um diese Relationen einfach formulieren zu können, führen wir den Krümmungstensor der Fläche ein. Dabei handelt es sich um eine Transformation $\mathcal{R} : TM^2 \times TM^2 \times TM^2 \rightarrow TM^2$, die je drei Vektoren einen tangentialen Vektor zuordnet.

Definition 10. Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ tangentiale Vektorfelder an die Fläche, so wird der Krümmungstensor $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}$ durch die folgende Formel definiert:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} := \nabla_{\mathcal{U}}\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W} - \nabla_{\mathcal{V}}\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{W} - \nabla_{[\mathcal{U}, \mathcal{V}]}\mathcal{W}.$$

Eine formale Konsequenz der im Satz 13 angegebenen Eigenschaften der kovarianten Ableitung $\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W}$ von Vektorfeldern sind nun die nachstehenden entsprechenden Eigenschaften des Krümmungstensors. Wir überlassen es dem Leser, diese einfachen Rechnungen nachzuvollziehen.

Satz 15. Für tangentiale Vektorfelder $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ und Funktionen f gilt:

- (1) $\mathcal{R}(f \cdot \mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = \mathcal{R}(\mathcal{U}, f \cdot \mathcal{V})\mathcal{W} = \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})(f \cdot \mathcal{W}) = f \cdot \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}$
- (2) $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = -\mathcal{R}(\mathcal{V}, \mathcal{U})\mathcal{W}$
- (3) $\text{I}(\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = -\text{I}(\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1)$
- (4) $\text{I}(\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = \text{I}(\mathcal{R}(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)\mathcal{U}, \mathcal{V})$
- (5) $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} + \mathcal{R}(\mathcal{V}, \mathcal{W})\mathcal{U} + \mathcal{R}(\mathcal{W}, \mathcal{U})\mathcal{V} = 0.$

Mit Hinblick darauf, dass die kovariante Ableitung $\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W}$ zweier Tangentialvektoren nur von den Formen σ_1, σ_2 der inneren Geometrie abhängt, trifft Gleichtes auf den Krümmungstensor zu. Wir beweisen eine lokale Formel für $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}$, welche diesen Sachverhalt spezifiziert.

Satz 16. Ist e_1, e_2 ein orthonormales Reper auf M^2 , so gilt

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = d\omega_{12}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) (\sigma_1(\mathcal{W})e_2 - \sigma_2(\mathcal{W})e_1).$$

Beweis. Aufgrund der im letzten Satz angegebenen Eigenschaften des Krümmungstensors ist es ausreichend, diese Formel nur für die Basisvektorfelder $\mathcal{U} = e_1$, $\mathcal{V} = e_2$, $\mathcal{W} = e_1$ zu beweisen. Dann jedoch erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(e_1, e_2)e_1 &= \nabla_{e_1}(\nabla_{e_2}e_1) - \nabla_{e_2}(\nabla_{e_1}e_1) - \nabla_{[e_1, e_2]}e_1 \\ &= \nabla_{e_1}(\omega_{12}(e_2)e_2) - \nabla_{e_2}(\omega_{12}(e_1)e_2) - \omega_{12}([e_1, e_2])e_2 \\ &= (\omega_{12}(e_2)e_2 - \omega_{12}(e_1)e_2 - \omega_{12}([e_1, e_2]))e_2 \\ &\quad + (\omega_{12}(e_2)\omega_{21}(e_1) - \omega_{12}(e_1)\omega_{21}(e_2))e_1 \\ &= d\omega_{12}(e_1, e_2)e_2,\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck stimmt mit der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung überein. \square

Die erste Grundform ist positiv-definit und daher lässt die symmetrische zweite Grundform sich durch einen symmetrischen Endomorphismus

$$S : TM^2 \longrightarrow TM^2$$

darstellen, $\text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \text{I}(\mathcal{V}, S(\mathcal{W}))$. Aus $\text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \langle \mathcal{V}, de_3(\mathcal{W}) \rangle$ ersieht man, dass S in der Gestalt

$$S = de_3 = \omega_{31} \cdot e_1 + \omega_{32} \cdot e_2$$

geschrieben werden kann. Die kovariante Ableitung eines beliebigen Endomorphismus $E : TM^2 \rightarrow TM^2$ des Tangentialbündels ist eine 2-Form $\nabla E : TM^2 \times TM^2 \rightarrow TM^2$ mit Werten in TM^2 und diese ist definiert durch die Gleichung

$$\nabla E(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := \nabla_{\mathcal{V}}(E(\mathcal{W})) - \nabla_{\mathcal{W}}(E(\mathcal{V})) - E([\mathcal{V}, \mathcal{W}]).$$

Mit diesen eingeführten Bezeichnungen formulieren und beweisen wir jetzt diejenigen Differentialgleichungen, welche die erste und zweite Grundform einer Fläche untereinander verbinden.

Satz 17 (Gauß- und Codazzi-Mainardi-Gleichung).

- (1) $\nabla S = 0$ *(Codazzi-Mainardi-Gleichung),*
- (2) $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = \text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cdot S(\mathcal{U}) - \text{II}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \cdot S(\mathcal{V})$ *(Gauß-Gleichung).*

Beweis. Aus $dS = dde_3 = 0$ folgt unter Verwendung der Formel für das äußere Differential einer 1-Form zunächst

$$0 = \mathcal{V}(S(\mathcal{W})) - \mathcal{W}(S(\mathcal{V})) - S([\mathcal{V}, \mathcal{W}]).$$

Gehen wir zu den tangentialen Bestandteilen über und berücksichtigen wir, dass $S([\mathcal{V}, \mathcal{W}])$ bereits tangential ist, so ergibt sich

$$0 = \nabla_{\mathcal{V}}(S(\mathcal{W})) - \nabla_{\mathcal{W}}(S(\mathcal{V})) - S([\mathcal{V}, \mathcal{W}])$$

und $\nabla S = 0$ ist gezeigt. Durch direktes Einsetzen der zweiten Fundamentalform $\text{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \langle \mathcal{V}, de_3(\mathcal{W}) \rangle$ bzw. $S(\mathcal{U}) = de_3(\mathcal{U})$ und aus $de_3 = \omega_{31} \cdot e_1 + \omega_{32} \cdot e_2$

erhält man nach Anwendung des vorherigen Satzes die Gauß-Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cdot S(\mathcal{U}) - \mathrm{II}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \cdot S(\mathcal{V}) &= \omega_{13} \wedge \omega_{32}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \cdot (\sigma_1(\mathcal{W}) \cdot e_2 - \sigma_2(\mathcal{W}) \cdot e_1) \\ &= d\omega_{12}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \cdot (\sigma_1(\mathcal{W}) \cdot e_2 - \sigma_2(\mathcal{W}) \cdot e_1) \\ &= \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}. \end{aligned} \quad \square$$

Wir beweisen im Weiteren, dass die Vorgabe einer positiv-definiten ersten Grundform und einer zweiten Grundform eindeutig bis auf euklidische Bewegungen in \mathbb{R}^3 eine Fläche bestimmen, sofern zwischen den beiden Grundformen die aus den Gauß- und Codazzi-Mainardi-Gleichungen notwendigen Relationen bestehen.

Satz 18 (Fundamentalsatz der Flächentheorie – zweite Formulierung). *Auf einer einfach zusammenhängenden, offenen Teilmenge U von \mathbb{R}^2 seien zwei symmetrische Bilinearformen $\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{II}} : TU \times TU \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, von denen die erste $\bar{\mathbf{I}}$ in jedem Punkte positiv-definit sei. Durch die Gleichung*

$$\begin{aligned} 2\bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{U}}\mathcal{V}, \mathcal{W}) &= \mathcal{U}(\bar{\mathbf{I}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) + \mathcal{V}(\bar{\mathbf{I}}(\mathcal{U}, \mathcal{W})) - \mathcal{W}(\bar{\mathbf{I}}(\mathcal{U}, \mathcal{V})) + \bar{\mathbf{I}}([\mathcal{U}, \mathcal{V}], \mathcal{W}) + \\ &\quad + \bar{\mathbf{I}}(\mathcal{V}, [\mathcal{W}, \mathcal{U}]) - \bar{\mathbf{I}}(\mathcal{U}, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]) \end{aligned}$$

definieren wir mittels $\bar{\mathbf{I}}$ eine kovariante Ableitung $\bar{\nabla}$ von Vektorfeldern nach Vektorfeldern sowie die Krümmungstransformation

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} := \bar{\nabla}_{\mathcal{U}}\bar{\nabla}_{\mathcal{V}}\mathcal{W} - \bar{\nabla}_{\mathcal{V}}\bar{\nabla}_{\mathcal{U}}\mathcal{W} - \bar{\nabla}_{[\mathcal{U}, \mathcal{V}]}\mathcal{W}.$$

Stellen wir die zweite vorgegebene Form $\bar{\mathbf{II}}$ durch einen symmetrischen Endomorphismus $\bar{S} : TU \rightarrow TU$ in der Gestalt $\bar{\mathbf{II}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \bar{\mathbf{I}}(\mathcal{U}, \bar{S}(\mathcal{V}))$ dar und gelten die Gleichungen

- (1) $\bar{\nabla} \bar{S} = 0$,
- (2) $\bar{\mathcal{R}}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = \bar{\mathbf{II}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cdot \bar{S}(\mathcal{U}) - \bar{\mathbf{II}}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \cdot \bar{S}(\mathcal{V})$,

so existiert eine parametrisierte Fläche $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ derart, dass die induzierten ersten und zweiten Grundformen dieser Fläche mit $\bar{\mathbf{I}}$ und $\bar{\mathbf{II}}$ übereinstimmen,

$$\bar{\mathbf{I}} = F^*(\mathbf{I}), \quad \bar{\mathbf{II}} = F^*(\mathbf{II}).$$

Die parametrisierte Fläche ist bis auf eine euklidische Bewegung von \mathbb{R}^3 eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir führen den Beweis direkt auf den Fundamentalsatz der Flächentheorie in seiner ersten Formulierung (siehe Kapitel 5.2) zurück. Zu diesem Ziel wählen wir auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ ein bzgl. der Bilinearform $\bar{\mathbf{I}}$ orthonormales Reper $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ von Vektorfeldern und bezeichnen mit $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ das duale Reper von 1-Formen. Wir definieren weitere 1-Formen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{12}(\mathcal{V}) &:= \bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{V}}\bar{e}_1, \bar{e}_2) \\ \bar{\omega}_{13}(\mathcal{V}) &:= \bar{\mathbf{II}}(\mathcal{V}, \bar{e}_1) = \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{V}), \bar{e}_1) \\ \bar{\omega}_{23}(\mathcal{V}) &:= \bar{\mathbf{II}}(\mathcal{V}, \bar{e}_2) = \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{V}), \bar{e}_2). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein System $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\omega}_{12}, \bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}\}$ von 1-Formen, welches wir durch die Antisymmetrieforderung $\bar{\omega}_{ji} := -\bar{\omega}_{ij}$ erweitern können. Die vorausgesetzten Gleichungen implizieren die Integrabilitätsbedingungen des Fundamentalsatzes der Flächentheorie in seiner ersten Formulierung. Dazu bemerken wir zuerst, dass aus der die kovariante Ableitung $\bar{\nabla}$ definierenden Gleichung direkt die Formeln

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\bar{\mathbf{I}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) &= \bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \mathcal{V}, \mathcal{W}) + \bar{\mathbf{I}}(\mathcal{V}, \bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \mathcal{W}) \\ \bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \mathcal{V} - \bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \mathcal{U} &= [\mathcal{U}, \mathcal{V}] \end{aligned}$$

folgen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d\bar{\sigma}_1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \mathcal{U}(\bar{\sigma}_1(\mathcal{V})) - \mathcal{V}(\bar{\sigma}_1(\mathcal{U})) - \bar{\sigma}_1([\mathcal{U}, \mathcal{V}]) \\ &= \mathcal{U}(\bar{\mathbf{I}}(\mathcal{V}, \bar{e}_1)) - \mathcal{V}(\bar{\mathbf{I}}(\mathcal{U}, \bar{e}_1)) - \bar{\mathbf{I}}([\mathcal{U}, \mathcal{V}], \bar{e}_1) \\ &= \bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \mathcal{V} - \bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \mathcal{U} - [\mathcal{U}, \mathcal{V}], \bar{e}_1) + \bar{\mathbf{I}}(\mathcal{V}, \bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1) - \bar{\mathbf{I}}(\mathcal{U}, \bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \bar{e}_1) \\ &= \bar{\omega}_{12}(\mathcal{U}) \cdot \bar{\sigma}_2(\mathcal{V}) - \bar{\omega}_{12}(\mathcal{V}) \cdot \bar{\sigma}_2(\mathcal{U}) = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\sigma}_2(\mathcal{U}, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Also gilt $d\bar{\sigma}_1 = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\sigma}_2$ und analog verifiziert man $d\bar{\sigma}_2 = \bar{\omega}_{21} \wedge \bar{\sigma}_1$. Im nächsten Schritt berechnen wir $\bar{\sigma}_1 \wedge \bar{\omega}_{13} + \bar{\sigma}_2 \wedge \bar{\omega}_{23} = 0$. Dies folgt aus

$$\bar{\sigma}_1 \wedge \bar{\omega}_{13}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) + \bar{\sigma}_2 \wedge \bar{\omega}_{23}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \bar{\Pi}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) - \bar{\Pi}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0,$$

weil die zweite Bilinearform symmetrisch ist. Für die weiteren Rechnungen bemerken wir, dass aus $\bar{\mathbf{I}}(\bar{e}_1, \bar{e}_1) \equiv 1$ sofort $\bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1, \bar{e}_1) = 0$ folgt, und daher ist $\bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1$ parallel zu \bar{e}_2 . Aus diesem Grunde gilt für beliebige Vektorfelder \mathcal{U}, \mathcal{V} stets

$$\bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1, \bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \bar{e}_2) = 0.$$

Wir nutzen diese Gleichung und die vorausgesetzte Gauß-Gleichung zur Berechnung der Form $d\bar{\omega}_{12}$:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_{12}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \mathcal{U}(\bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \bar{e}_1, \bar{e}_2)) - \mathcal{V}(\bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1, \bar{e}_2)) - \bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla}_{[\mathcal{U}, \mathcal{V}]} e_1, e_2) \\ &= \bar{\mathbf{I}}(\bar{\mathcal{R}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \bar{e}_1, \bar{e}_2) = \bar{\Pi}(\mathcal{V}, \bar{e}_1) \cdot \bar{\Pi}(\mathcal{U}, \bar{e}_2) - \bar{\Pi}(\mathcal{U}, \bar{e}_1) \cdot \bar{\Pi}(\mathcal{V}, e_2) \\ &= \bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{32}(\mathcal{U}, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung ergibt sich die gewünschte Strukturgleichung $d\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{13} \wedge \bar{\omega}_{32}$. Analog berechnen wir $d\bar{\omega}_{13}$, indem wir die Codazzi-Mainardi-Gleichung verwenden:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_{13}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= \mathcal{U}(\bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{V}), \bar{e}_1)) - \mathcal{V}(\bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{U}), \bar{e}_1)) - \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}([\mathcal{U}, \mathcal{V}]), \bar{e}_1) \\ &= \bar{\mathbf{I}}(\bar{\nabla} \bar{S}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \bar{e}_1) + \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{V}), \bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1) - \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{U}), \bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \bar{e}_1) \\ &= \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{V}), \bar{e}_2) \cdot \bar{\mathbf{I}}(\bar{e}_2, \bar{\nabla}_{\mathcal{U}} \bar{e}_1) - \bar{\mathbf{I}}(\bar{S}(\mathcal{U}), \bar{e}_2) \cdot \bar{\mathbf{I}}(\bar{e}_2, \bar{\nabla}_{\mathcal{V}} \bar{e}_1) \\ &= \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\omega}_{23}(\mathcal{U}, \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Daraus ersehen wir $d\bar{\omega}_{13} = \bar{\omega}_{12} \wedge \bar{\omega}_{23}$ und eine analoge Rechnung zeigt $d\bar{\omega}_{23} = \bar{\omega}_{21} \wedge \bar{\omega}_{13}$. Insgesamt erfüllt das Formensystem $\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\omega}_{12}, \bar{\omega}_{13}, \bar{\omega}_{23}\}$ die Integrabilitätsbedingungen des Fundamentalsatzes aus Kapitel 5.2 und damit ist die Existenz einer parametrisierten Fläche $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F^*(\mathbf{I}) = \bar{\mathbf{I}}$ und $F^*(\mathbf{II}) = \bar{\mathbf{II}}$ bewiesen. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich aus der entsprechenden Eindeutigkeit jenes Satzes. \square

5.4. Gaußsche und mittlere Krümmung

Wir betrachten eine Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ und ihre erste Grundform, die induzierte Riemannsche Metrik. Nach Wahl eines lokalen orthonormalen Repers $\{e_1, e_2\}$ haben wir das duale Reper von 1-Formen σ_1, σ_2 und die 1-Form $\omega_{12} = \langle de_1, e_2 \rangle = \langle \nabla e_1, e_2 \rangle$ ist vollständig durch die Formen σ_1, σ_2 bestimmt. Ihr äußeres Differential $d\omega_{12}$ ist eine 2-Form. Daher existiert eine Funktion G mit

$$d\omega_{12} = -G \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2.$$

Die Funktion G ist unabhängig von der Wahl des lokalen Repers der Vektorfelder. Jedes weitere Reper $\{e_1^*, e_2^*\}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} e_1^* &= \mu \cos \varphi \cdot e_1 + \sin \varphi \cdot e_2 \\ e_2^* &= -\mu \sin \varphi \cdot e_1 + \cos \varphi \cdot e_2, \end{aligned}$$

wobei $\mu = \pm 1$ konstant und φ eine Funktion auf denjenigen Teil von M^2 ist, auf welchem die beiden orthonormalen Repere zugleich definiert sind. Die dualen Repere sind folglich gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \mu \cdot \cos \varphi \cdot \sigma_1 + \sin \varphi \cdot \sigma_2 \\ \sigma_2^* &= -\mu \cdot \sin \varphi \cdot \sigma_1 + \cos \varphi \cdot \sigma_2 \end{aligned}$$

und wir erhalten $\sigma_1^* \wedge \sigma_2^* = \mu \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$. Andererseits ist die Form ω_{12}^* gleich $\omega_{12}^* = \langle de_1^*, e_2^* \rangle = \mu \cdot \omega_{12} + d\varphi$ und somit ergibt sich die Formel $d\omega_{12}^* = \mu \cdot d\omega_{12}$. Diese Überlegung zeigt, dass die Funktion G eindeutig definiert ist.

Definition 11. Die *Gaußsche Krümmung* $G : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist die durch die Gleichung

$$d\omega_{12} = -G \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

erklärte Funktion.

Bemerkung. Die Gaußsche Krümmung hängt ausschließlich von der ersten Grundform der Fläche ab. Liegt diese vor, so wählen wir ein orthonormales Reper von 1-Formen σ_1, σ_2 . Aus den Gleichungen

$$d\sigma_1 = A \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2 \quad \text{und} \quad d\sigma_2 = B \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

bestimmen wir zwei Funktionen A, B und bilden sodann die 1-Form

$$\omega_{12} = A \cdot \sigma_1 + B \cdot \sigma_2.$$

Die definierende Gleichung für die Gaußsche Krümmung ist letztendlich

$$d\omega_{12} = -G \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2.$$

Auf diese Weise kann man die Gaußsche Krümmung praktisch berechnen.

Die zuvor angegebene Formel für den Krümmungstensor der Fläche kann unter Verwendung der Gaußschen Krümmung einfacher geschrieben werden:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = G \cdot (\sigma_2(\mathcal{W}) \cdot e_1 - \sigma_1(\mathcal{W}) \cdot e_2) \cdot dM^2(\mathcal{U}, \mathcal{V}),$$

und wir können andererseits G durch den Krümmungstensor ausdrücken.

Satz 19. Die Gaußsche Krümmung einer Fläche ist

$$G = \langle \mathcal{R}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle,$$

wobei \mathcal{R} der Krümmungstensor und $\{e_1, e_2\}$ ein orthonormales Reper von Vektorfeldern sind.

Wir wenden uns jetzt den Invarianten der zweiten Grundform zu, welche wir mittels der Riemannschen Metrik als einen symmetrischen Endomorphismus

$$S : TM^2 \rightarrow TM^2$$

auffassen. Diesen nennt man die *Weingarten-Abbildung* der Fläche. Deren normierte Spur ist die mittlere Krümmung der Fläche.

Definition 12. Die *mittlere Krümmung* H einer Fläche ist die Funktion

$$H := \text{tr}(S)/2.$$

Die mittlere Krümmung einer Fläche kann als die Divergenz (in \mathbb{R}^3) des Normalvektorfeldes bestimmt werden. Es gilt der

Satz 20. Sei M^2 eine Fläche und \mathcal{N} ein Vektorfeld der Länge eins, definiert auf einer offenen Umgebung von M^2 in \mathbb{R}^3 . Ist die Einschränkung $\mathcal{N}|_{M^2}$ von \mathcal{N} auf M^2 normal an die Fläche, so gilt

$$H = \frac{1}{2} \text{div}(\mathcal{N}),$$

wobei die Divergenz in \mathbb{R}^3 bezüglich der euklidischen Metrik gemeint ist.

Beweis. Wir erhalten wegen $\langle \mathcal{N}, d\mathcal{N} \rangle \equiv 0$

$$2H = \langle e_1, d\mathcal{N}(e_1) \rangle + \langle e_2, d\mathcal{N}(e_2) \rangle + \langle \mathcal{N}, d\mathcal{N}(\mathcal{N}) \rangle.$$

Die letzte Summe ist in \mathbb{R}^3 jedoch unabhängig von der speziellen Wahl der orthogonormalen Basis. Damit ergibt sich

$$2H = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z} \right\rangle = \text{div}(\mathcal{N}). \quad \square$$

Die zweite Fundamentalform S hat außer der Spur noch eine weitere Invariante, die Determinante. Diese führt jedoch zu keiner neuen geometrischen Größe, denn es gilt der

Satz 21. Die Determinante der zweiten Grundform ist die Gaußsche Krümmung,

$$\det(S) = G.$$

Beweis. Im Tangentialraum $T_x M^2$ an einer beliebigen Stelle $x \in M^2$ der Fläche wählen wir eine Basis $\{e_1, e_2\}$, bestehend aus orthogonormalen Eigenvektoren des symmetrischen Endomorphismus. Sind κ_1, κ_2 die Eigenwerte, so hat S bezüglich dieser Basis die Matrix

$$S = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}.$$

Aus der Gauß-Gleichung folgt jetzt die Behauptung direkt:

$$\begin{aligned} G &= \langle \mathcal{R}(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = \langle \text{II}(e_2, e_2)S(e_1), e_1 \rangle - \langle \text{II}(e_1, e_2)S(e_2), e_1 \rangle \\ &= \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(S). \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Der vorherige Satz gestattet es, die zur inneren Geometrie einer Fläche gehörende Gaußsche Krümmung aus der zweiten Grundform zu berechnen. Ist im Tangentialraum $T_x M^2$ der Fläche in einem Punkt eine beliebige (nicht notwendig orthonormale) Basis v_1, v_2 gegeben, so bezeichnen wir die Matrizen der ersten und zweiten Grundform mit g und b :

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \quad g_{ij} = \text{I}(v_i, v_j) \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad b_{ij} = \text{II}(v_i, v_j).$$

Dann können die Gaußsche und die mittlere Krümmung aus den Formeln

$$G = \frac{\det(b)}{\det(g)} \quad \text{und} \quad H = \frac{1}{2} \text{tr}(b \cdot g^{-1})$$

berechnet werden. Der Beweis ergibt sich aus einer allgemeinen Betrachtung. Eine symmetrische Bilinearform B in einem reellen Vektorraum V hat zunächst nur eine Invariante, die Signatur. Liegt jedoch zusätzlich ein nichtausgeartetes Skalarprodukt G vor, so induziert dies einen Isomorphismus $G : V^* \rightarrow V$ zwischen dem Vektorraum V und seinem Dualraum V^* . Dann können wir B als einen G -symmetrischen Endomorphismus $S := B \circ G^{-1} : V \rightarrow V$ im Vektorraum V auffassen und alle Koeffizienten seines charakteristischen Polynoms sind Invarianten von B bzgl. G . Diese sind in einer beliebigen Basis berechenbar in dem Sinne, dass das Resultat von der Basis nicht abhängt. Zwei der Invarianten des charakteristischen Polynoms sind die Spur und die Determinante.

Beispiel 10. Für die hyperbolische Ebene \mathcal{H}^2 aus Beispiel 9 rechnet man leicht nach, dass $d\omega_{12} = \sigma_1 \wedge \sigma_2$ gilt. Damit hat sie die Gaußsche Krümmung -1 . Eine vollständige Realisierung von \mathcal{H}^2 im dreidimensionalen Raum existiert nicht (Hilbert 1901), wohl aber können gewisse offene Mengen der hyperbolischen Ebene als Flächen realisiert werden. Die mittlere Krümmung ist dann eindeutig nicht bestimmt, sie hängt von der konkreten Realisierung als Fläche im \mathbb{R}^3 ab; eine solche stellen wir am Ende der nun folgenden Betrachtungen über Drehflächen vor.

Beispiel 11. Für die Drehfläche aus Beispiel 3 gilt

$$de_3 = -\frac{r''}{z'} ds \cdot e_1 + z' d\varphi \cdot e_2.$$

Damit können wir die Weingarten-Abbildung sogleich explizit ausrechnen:

$$S\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = -\frac{r''}{z'} \cdot e_1 = -\frac{r''}{z'} \cdot \frac{\partial}{\partial s}, \quad S\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = z' \cdot e_2 = \frac{z'}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

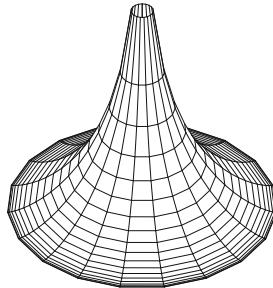
die Weingarten-Abbildung ist also in der Basis $\partial/\partial s, \partial/\partial \varphi$ gegeben durch die Matrix

$$S = \begin{bmatrix} -r''/z' & 0 \\ 0 & z'/r \end{bmatrix}.$$

Aus ihr erhalten wir sofort die Gaußsche und die mittlere Krümmung

$$G = -\frac{r''}{r}, \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{z'}{r} - \frac{r''}{z'} \right).$$

Beispiele von Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung sind der Zylinder ($G = 0$, $r = 1$, $z = s$), die Sphäre ($G = 1$, $r = \sin s$, $z = \cos s$) oder die *Pseudosphäre* ($G = -1$): Sie ist ein Beispiel einer (notwendig nicht kompakten) Fläche konstanter negativer Krümmung und damit ein dreidimensionales Modell der hyperbolischen Geometrie. Sie entsteht als die Drehfläche der *Schleppkurve* (auch *Traktrix* genannt) mit Parametrisierung $\gamma(s) = \left(e^{-s}, \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2t}} dt \right)$.



Beispiel 12. Die Gaußsche Krümmung des Graphen einer Funktion $h(x, y)$ (Beispiel 4) berechnet man am besten über das Differential der Form ω_{12} und erhält so den Ausdruck

$$G = \frac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}.$$

Zur Berechnung der mittleren Krümmung ist es sinnvoll, den Graphen als die Nullstellenmenge der Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) := h(x, y) - z$ aufzufassen. Aus Satz 5, Kapitel 3 wissen wir sodann, dass das auf Länge eins normierte Gradientenvektorfeld

$$\frac{\text{grad}(g)}{\|\text{grad}(g)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} (h_x, h_y, -1)$$

in jedem Punkt senkrecht auf der Fläche steht. Damit kann die mittlere Krümmung als die Divergenz dieses Vektorfeldes berechnet werden (Satz 20) und es ergibt sich die Formel

$$H = \frac{(1 + h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2)h_{yy}}{2(1 + h_x^2 + h_y^2)^{3/2}}.$$

Beispiel 13. Um diese Formel für die Gaußsche Krümmung auf die Betragsfläche einer holomorphen Funktion f (Beispiel 5) anwenden zu können, müssen wir noch die zweiten Ableitungen von $h = |f|$ bestimmen. Aus

$$h_x = \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \quad \text{und} \quad h_y = i \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} \right)$$

schließt man zunächst formal

$$h_{xx} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}^2}, \quad h_{yy} = -\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}^2}, \quad h_{xy} = i \left[\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}^2} \right].$$

Nach Ausmultiplizieren erhält man für den Zähler der Gaußschen Krümmung

$$h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2 = 4 \left[\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} \right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}^2} \right].$$

Diese Ableitungen berechnet man nun:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{f'' \bar{f}}{2h} - \frac{(f' \bar{f})^2}{4h^3}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \bar{z}^2} = \frac{f \bar{f}''}{2h} - \frac{(f \bar{f}')^2}{4h^3}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{f' \bar{f}'}{4h},$$

woraus man schließlich

$$h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2 = |f''|^2 \left(\operatorname{Re} \frac{f'^2}{f f''} - 1 \right)$$

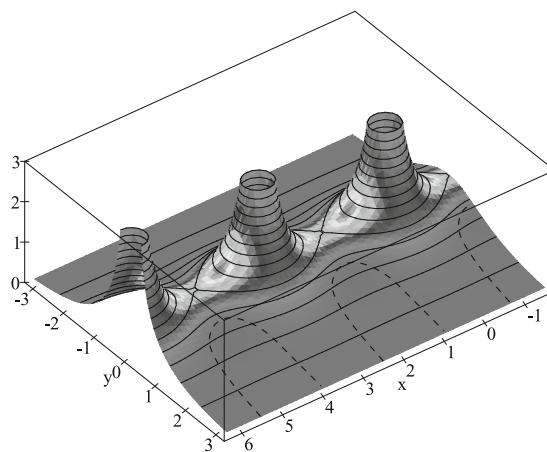
und die gewünschte Formel für die Gaußsche Krümmung

$$G = \frac{|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2} \left(\operatorname{Re} \frac{f'^2}{f f''} - 1 \right)$$

erhält. In dem von uns diskutierten Beispiel $f(z) = 1/\sin z$ hat die Gaußsche Krümmung die Form

$$G = \left| 2 \frac{\cos^2 z}{\sin^3 z} + \frac{1}{\sin z} \right|^2 \left[\operatorname{Re} \frac{\cos^2 z}{1 + \cos^2 z} - 1 \right] \left[1 + \left| \frac{\cos z}{\sin^2 z} \right|^2 \right]^{-2}.$$

Das Bild zeigt die Betragsfläche, schattiert nach der Gaußschen Krümmung.



Von besonderem Interesse ist diejenige Kurve auf der Fläche, die die Punkte positiver Gaußscher Krümmung von denen negativer Gaußscher Krümmung trennt. Sie wird hier implizit durch die Gleichung

$$\operatorname{Re} \frac{\cos^2 z}{1 + \cos^2 z} = 1$$

beschrieben und ist im vorangegangenen Bild gestrichelt eingezeichnet.

Beispiel 14. Wir setzen die Diskussion der Real- und Imaginärteilträume einer holomorphen Funktion $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$ fort (Beispiel 6). Aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen hatten wir dort bereits

$$1 + u_x^2 + u_y^2 = 1 + v_x^2 + v_y^2 = 1 + |f'|^2$$

eingesehen. Leicht beweist man nun, dass für die zweite Ableitung von f

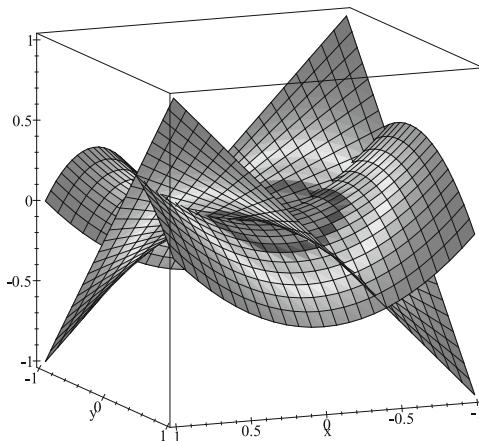
$$f'' = u_{xx} - iu_{xy} = v_{xy} + iv_{xx}$$

gilt. Aus der Formel für die Gaußsche Krümmung eines Graphen erhalten wir damit den bemerkenswerten Umstand, dass die Real- und die Imaginärteilträume gleiche Gaußsche Krümmung haben, nämlich

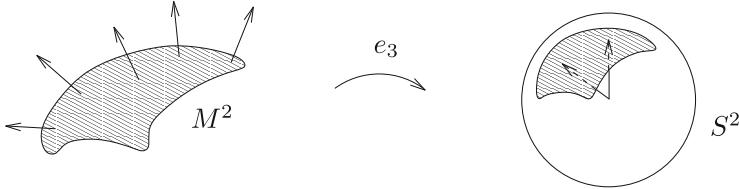
$$G = \frac{-|f''|^2}{(1 + |f'|^2)^2}.$$

Das folgende Bild illustriert diesen Sachverhalt am Beispiel der Funktion $f(z) = z^2$, welches wieder nach der Gaußschen Krümmung schattiert ist. Die spitz in den Ecken zulaufende Fläche ist $\operatorname{Im} z^2$, die sattelähnliche Fläche ist $\operatorname{Re} z^2$. Es ist

$$G = \frac{-4}{(1 + 4|z|^2)^2}, \quad H(\operatorname{Re} z^2) = \frac{4(y^2 - x^2)}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{3/2}}, \quad H(\operatorname{Im} z^2) = \frac{-8xy}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{3/2}}.$$



Wir interpretieren die Formel für die Gaußsche Krümmung als Determinante der zweiten Grundform differentialgeometrisch. Zu diesem Ziel fassen wir den Normalenvektor e_3 als eine Abbildung aus der Fläche M^2 mit Werten in der Einheitsphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ auf.



Die Volumenform dS^2 der Sphäre, ausgewertet auf zwei Vektoren $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in T_x S^2$ an der Stelle $x \in S^2$, ist gegeben durch das Vektorprodukt:

$$dS^2(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \langle \mathcal{V} \times \mathcal{W}, x \rangle.$$

Diese Formel ist ein Spezialfall der im Kapitel 3.4, Beispiel 28 angegebenen allgemeinen Gestalt der Volumenform einer Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Die induzierte 2-Form $e_3^*(dS^2)$ auf M^2 ist nun leicht zu berechnen:

$$\begin{aligned} e_3^*(dS^2)(\mathcal{V}, \mathcal{W}) &= \langle de_3(\mathcal{V}) \times de_3(\mathcal{W}), e_3 \rangle \\ &= \langle (\omega_{31}(\mathcal{V}) \cdot e_1 + \omega_{32}(\mathcal{V}) \cdot e_2) \times (\omega_{31}(\mathcal{W}) \cdot e_1 + \omega_{32}(\mathcal{W}) \cdot e_2), e_3 \rangle \\ &= -\omega_{13} \wedge \omega_{32}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = -d\omega_{12}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = G \cdot dM^2(\mathcal{V}, \mathcal{W}). \end{aligned}$$

Das Resultat fassen wir zusammen:

Satz 22. Ist $e_3 : M^2 \rightarrow S^2$ die Einheitsnormalenabbildung der Fläche und G ihre Gaußsche Krümmung, so ist die induzierte 2-Form $e_3^*(dS^2)$ gleich der mit der Gaußschen Krümmung multiplizierten Volumenform:

$$e_3^*(dS^2) = G \cdot dM^2.$$

Fixieren wir einen Punkt $x \in M^2$ auf der Fläche und bezeichnen wir mit $D(x, \varepsilon)$ die Menge aller Flächenpunkte mit einem Abstand kleiner als ε zu x , so wird die zweidimensionale Oberfläche der Menge $D^*(x, \varepsilon) := e_3(D(x, \varepsilon)) \subset S^2$ unter Verwendung der Transformationsformel für das Integral wie folgt berechenbar:

$$\text{vol}_{S^2}(D^*(x, \varepsilon)) = \int_{D^*(x, \varepsilon)} dS^2 = \pm \int_{D(x, \varepsilon)} e_3^*(dS^2) = \pm \int_{D(x, \varepsilon)} G \cdot dM^2.$$

Dividieren wir beide Seiten durch die Oberfläche $\text{vol}_{M^2}(D(x, \varepsilon))$ und nutzen wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung für stetige Funktionen aus, so erhalten wir die Formel

$$|G(x)| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{vol}_{S^2}(D^*(x, \varepsilon))}{\text{vol}_{M^2}(D(x, \varepsilon))}.$$

Dies war die ursprüngliche geometrische Definition der Krümmung einer Fläche im dreidimensionalen Raum. Sie ist – in Analogie zur Krümmung einer Kurve – die infinitesimale Volumenverzerrung der Normalenabbildung der Fläche. Bei diesem Zugang zur Krümmung ist es zunächst keinesfalls selbstverständlich, dass die Gaußsche Krümmung nur von der ersten Grundform der Fläche abhängt. Dieser

Sachverhalt ist der Inhalt des Theorema Egregium (Gauß 1827). Aus unseren Darlegungen ergibt es sich unmittelbar.

Die totale Gaußsche Krümmung einer kompakten, orientierten Fläche ohne Rand hängt nur von der Topologie der Mannigfaltigkeit ab. Wir beweisen die sog. Gauß-Bonnet-Formel, welche diesen Sachverhalt explizit ausdrückt. Dafür benötigen wir eine Vorbetrachtung.

Lemma 3. *Sei \mathcal{V} ein Vektorfeld der Länge eins auf einer orientierten Fläche M^2 und $\{e_1, e_2\}$ ein orthonormales Reper der Orientierung. Stellen wir \mathcal{V} als Linearkombination $\mathcal{V} = \cos \tau \cdot e_1 + \sin \tau \cdot e_2$ dar, so ist die 1-Form*

$$\chi_{\mathcal{V}} := \omega_{12} + d\tau$$

unabhängig von der Wahl des Repers. Das äußere Differential der 1-Form $\chi_{\mathcal{V}}$ ist

$$d\chi_{\mathcal{V}} = -G \cdot dM^2.$$

Beweis. Jedes weitere Reper e_1^*, e_2^* ist der Gestalt

$$\begin{aligned} e_1^* &= \cos \varphi \cdot e_1 + \sin \varphi \cdot e_2 \\ e_2^* &= -\sin \varphi \cdot e_1 + \cos \varphi \cdot e_2, \end{aligned}$$

und wir kennen die Formel $\omega_{12}^* = \omega_{12} + d\varphi$ bereits. Weiterhin gilt $\tau^* = \tau - \varphi$, also $\omega_{12}^* + d\tau^* = \omega_{12} + d\tau$. \square

Aus dem Satz von Stokes erhalten wir nun direkt

Satz 23. *Sei M^2 eine orientierte, kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand und \mathcal{V} ein Vektorfeld der Länge eins, definiert außerhalb endlich vieler Punkte $x_1, \dots, x_k \in M^2$. Sind $D(x_i, \varepsilon) \subset M^2$ Umgebungen der Punkte x_i vom Radius $\varepsilon > 0$, so gilt*

$$\int_{M^2} G \cdot dM^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^k \int_{\partial D(x_i, \varepsilon)} \chi_{\mathcal{V}} \right).$$

Damit ist gezeigt, dass das Integral der Gaußschen Krümmung von der Geometrie der Fläche unabhängig ist. Wir werten die letzte Formel explizit durch die Wahl spezieller Vektorfelder aus. Dies geschieht durch Wahl einer sogenannten *Morse-Funktion* (nach Marston Morse (1892-1977), der diese Idee zuerst hatte) oder *Höhen-Funktion* (dies ist die Intuition dabei, siehe später).

Definition 13 (Morse-Funktion). Sei M^2 eine zweidimensionale kompakte Fläche ohne Rand, $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Ein Punkt $x_0 \in M^2$ heißt *kritisch*, falls $df(x_0) = 0$ (in Koordinaten (x, y) um x_0 : $\partial_x f = \partial_y f = 0$). Die *Hessesche Form* im kritischen Punkt x_0 ist die Bilinearform $\text{Hess}(f)(x_0) : T_{x_0} M^2 \times T_{x_0} M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $\text{Hess}(f)(x_0)(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \mathcal{V}(\mathcal{W}(f))(x_0)$ definiert ist und in lokalen Koordinaten die Form

$$\text{Hess}(f)(x_0) = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x^2 & \partial^2 f / \partial x \partial y \\ \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial y^2 \end{bmatrix}$$

hat. x_0 ist ein *nichtausgearteter kritischer Punkt*, falls $\det \text{Hess}(f)(x_0) \neq 0$ gilt. Sind alle kritischen Punkte von f nichtausgeartet, so heißt f eine *Morse-Funktion* von M^2 . Aus der Analysis-Grundvorlesung ist bekannt:

- x_0 ist genau dann ein lokales Minimum, falls $\text{Hess}(f)(x_0)$ positiv definit ist,
- x_0 ist genau dann ein Sattelpunkt, falls die Eigenwerte von $\text{Hess}(f)(x_0)$ verschiedenes Vorzeichen haben,
- x_0 ist genau dann ein lokales Maximum, falls $\text{Hess}(f)(x_0)$ negativ definit ist.

Wir bezeichnen die Anzahl der kritischen Punkte gleicher Art mit

$$m_0(f) := \text{die Anzahl der Minima von } h$$

$$m_1(f) := \text{die Anzahl der Sattelpunkte von } h$$

$$m_2(f) := \text{die Anzahl der Maxima von } h.$$

Das Vektorfeld $\mathcal{V} = \text{grad}(f)/\|\text{grad}(f)\|$ ist außerhalb der Menge der kritischen Punkte erklärt. Wir berechnen die Grenzwerte und erhalten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D(x_i, \varepsilon)} \chi_{\mathcal{V}} = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } x_i \text{ ein Minimum oder Maximum ist;} \\ -2\pi & \text{falls } x_i \text{ ein Sattelpunkt ist.} \end{cases}$$

Zum Beweis wählen wir Koordinaten x, y , in denen die Funktion f ihre Normalform $f(x, y) = \frac{1}{2}(\pm x^2 \pm y^2)$ hat ($++$: Minimum, $+-, -+$: Sattelpunkt, $--$: Maximum). Uns interessiert nur der Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ dieser Integrale und daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Metrik als flach voraussetzen. Aus

$$\frac{\text{grad} f}{\|\text{grad}(f)\|} = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial y}$$

erhalten wir

$$\cos \tau = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \tau = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ist τ_{++} die Winkelfunktion für ein Minimum, dann gilt für die anderen Vorzeichenkombinationen

$$\tau_{--} = \tau_{++} + \pi, \quad \tau_{+-} = -\tau_{++}, \quad \tau_{-+} = \pi - \tau_{++}.$$

Im Differential wirkt sich die Verschiebung um π nicht aus, so dass wir auf die Formel

$$d\tau = \pm \frac{-y \cdot dx + x \cdot dy}{x^2 + y^2},$$

kommen, in der das positive Vorzeichen im Falle eines Minimums oder Maximums, dagegen ein negatives Vorzeichen in Sattelpunkten zu wählen ist. Natürlich ist τ einfach die uns wohlbekannte Windungsform, so dass aus

$$\int_{S^1} d\tau = \pm 2\pi$$

die gesuchten Grenzwerte folgen und der Gauß-Bonnet-Satz bewiesen ist.

Satz 24 (Gauß-Bonnet-Formel). *Sei M^2 eine kompakte, orientierte Fläche ohne Rand und $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit ausschließlich nichtausgearteten*

kritischen Punkten. Dann gilt

$$\int_{M^2} G \cdot dM^2 = 2\pi \cdot (m_0(f) - m_1(f) + m_2(f)),$$

wobei $m_0(f), m_1(f), m_2(f)$ die Anzahl der Minima, Sattelpunkte bzw. Maxima von f ist.

Korollar 1. Sei M^2 eine kompakte, orientierte Fläche ohne Rand.

- (1) Das Integral der Gaußschen Krümmung hängt nur von der Topologie der Fläche, jedoch nicht von den Grundformen ab;
- (2) die alternierende Summe $m_0(f) - m_1(f) + m_2(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Funktion f mit ausschließlich nichtausgearteten kritischen Punkten.

Definition 14. Die Eulersche Charakteristik $\chi(M^2)$ einer kompakten Fläche ohne Rand ist die Zahl

$$\chi(M^2) := m_0(f) - m_1(f) + m_2(f).$$

In diesem Sinne kann die Gauß-Bonnet-Formel im Falle kompakter, orientierter Flächen ohne Rand in der Gestalt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} G \cdot dM^2 = \chi(M^2)$$

geschrieben werden.

Beispiel 15. Die Eulersche Charakteristik der Sphäre S^2 beträgt 2. In der Tat, die Höhenfunktion $h(x, y, z) = z$ hat auf $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ein Minimum, ein Maximum und keinen Sattelpunkt. Damit gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{M^2} G \cdot dM^2 = 2$$

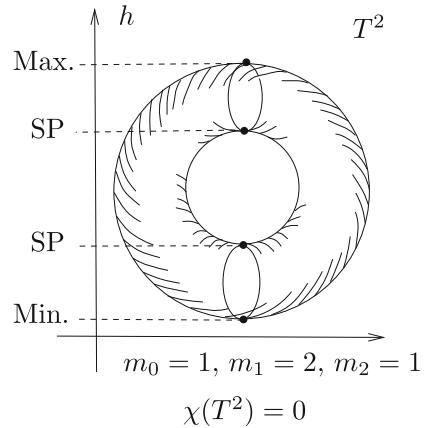
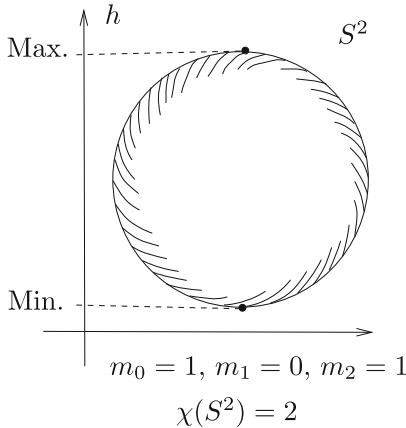
für jede Fläche M^2 , welche diffeomorph (aber nicht notwendig isometrisch) zu S^2 ist.

Beispiel 16. Die Eulersche Charakteristik des Torus T^2 beträgt null. Leicht findet man zum Beispiel auf dem Rotationstorus (siehe Kapitel 3.1) eine Funktion mit einem Minimum, einem Maximum und zwei Sattelpunkten. Damit gilt

$$\int_{M^2} G \cdot dM^2 = 0$$

für jede Fläche, welche diffeomorph zum Torus ist.

Beispiel 17. Analog zeigt man, dass eine randlose orientierte Fläche vom Geschlecht g (= Anzahl Henkel) die Euler-Charakteristik $2 - 2g$ hat.



Die Gauß-Bonnet-Formel in ihrer allgemeinen Form beinhaltet für jedes Vektorfeld \mathcal{V} der Länge eins mit endlich vielen Singularitäten eine weitere Aussage. Wir bemerken zunächst, dass der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D(x_i, \varepsilon)} \chi_{\mathcal{V}}$$

analog wie im Fall eines Gradientenvektorfeldes auch für ein beliebiges Vektorfeld berechenbar ist. Zunächst wählen wir Koordinaten y_1, y_2 um den Punkt $x_i \in M^2$ derart, dass dieser Punkt den Koordinaten $y_1 = 0, y_2 = 0$ entspricht. Das Vektorfeld \mathcal{V} stellen wir in diesen Koordinaten dar,

$$\mathcal{V} = V^1 \frac{\partial}{\partial y_1} + V^2 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Wie zuvor können wir o. B. d. A. annehmen, dass die Metrik in dieser Umgebung des Punktes flach ist, weil wir nicht das Integral selbst, sondern nur den Grenzwert zu bestimmen haben. Dann gilt $(V^1)^2 + (V^2)^2 \equiv 1$ und $\cos \tau = V^1, \sin \tau = V^2$. Daraus erhalten wir $-\sin \tau \cdot d\tau = dV^1, \cos \tau \cdot d\tau = dV^2$ und die Form $\chi_{\mathcal{V}} = d\tau$ ist gegeben durch

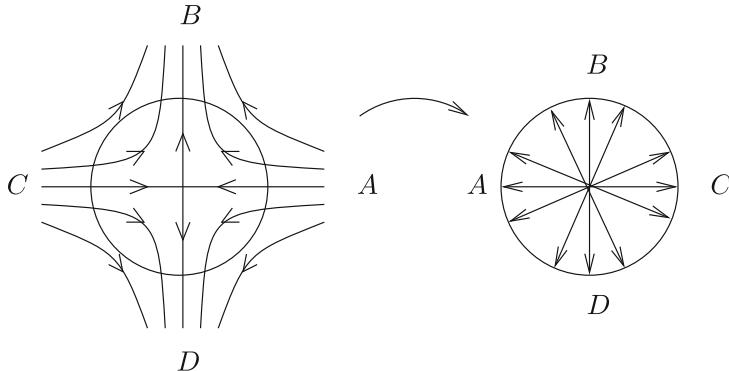
$$\chi_{\mathcal{V}} = d\tau = V^1 \cdot dV^2 - V^2 \cdot dV^1.$$

Damit gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D(x_i, \varepsilon)} \chi_{\mathcal{V}} = \int_{S^1} (V^1 \cdot dV^2 - V^2 \cdot dV^1) := 2\pi \operatorname{Ind}(\mathcal{V}, x_i).$$

Diese Zahl nennt man den *Index des Vektorfeldes* \mathcal{V} im singulären Punkt $x_i \in M^2$. Seine geometrische Bedeutung erschließt sich aus folgendem Bild: Links ist ein Vektorfeld dargestellt (der Kreis dient der Erklärung, gehört aber nicht zum eigentlichen Vektorfeld). In A beginnend durchlaufen wir den Kreis einmal in positiver Richtung und tragen auf S^1 den auf Länge 1 normierten Vektor ein, der in dem jeweiligen Punkt in Richtung des Vektorfeldes zeigt. Im hier gezeigten Fall

entspricht einem Umlauf in positiver Richtung ein einfacher Umlauf in negativer Richtung: der Index des Vektorfeldes ist -1 .



Aus dem Gauß-Bonnet-Satz erhalten wir

Satz 25 (Hopf-Poincaré). *Sei M^2 eine kompakte, orientierte Fläche ohne Rand und \mathcal{V} ein Vektorfeld der Länge eins, definiert auf der Menge $M^2 \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$. Dann hängt die Summe*

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}(\mathcal{V}, x_i) = \chi(M^2)$$

nicht von der Wahl des Vektorfeldes ab.

Eine weitere Integralformel betrifft das Integral der mittleren Krümmung. Sie geht auf Steiner (1840) und Minkowski (1900) zurück und spielt in der Theorie der Eiflächen eine wichtige Rolle.

Satz 26 (Minkowski-Steiner). *Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte und orientierte Fläche ohne Rand und mit Einheitsnormalenfeld e_3 . Dann gilt*

$$\int_{M^2} H(x) \cdot dM^2(x) = \int_{M^2} \langle x, e_3(x) \rangle G(x) \cdot dM^2(x).$$

Beweis. Auf der Fläche M^2 betrachten wir die Funktionen $p_i(x) = \langle M(x), e_i(x) \rangle$ und berechnen die Differentiale dieser drei Funktionen unter Verwendung der Strukturgleichung:

$$\begin{aligned} dp_1 &= \sigma_1 + \omega_{12} \cdot p_2 + \omega_{13} \cdot p_3 \\ dp_2 &= \sigma_2 + \omega_{21} \cdot p_1 + \omega_{23} \cdot p_3 \\ dp_3 &= \omega_{31} \cdot p_1 + \omega_{32} \cdot p_2. \end{aligned}$$

Wir bemerken weiterhin, dass die 1-Form

$$\omega := p_1 \cdot \omega_{23} + p_2 \cdot \omega_{31}$$

unabhängig von der Wahl des tangentialen Repers e_1, e_2 definiert ist. Damit ist ω eine auf M^2 global definierte Form. Wir berechnen das Differential von ω , die

Strukturgleichungen sowie die Formeln für die Differentiale dp_i ausnutzend. Dann ergibt sich

$$d\omega = \sigma_1 \wedge \omega_{23} + \sigma_2 \wedge \omega_{31} + 2 \cdot p_3 \cdot \omega_{13} \wedge \omega_{23} = -2H(x) \cdot dM^2 + 2p_3(x) \cdot G(x) \cdot dM^2.$$

Der Satz von Stokes impliziert jetzt die Minkowski-Steiner-Integralformel. \square

Die Eigenwerte κ_1, κ_2 der zweiten Fundamentalform nennt man die *Hauptkrümmungen* der Fläche in einem Punkt. Ihr arithmetisches Mittel ist die mittlere Krümmung der Fläche, während ihr Produkt die Gaußsche Krümmung ergibt,

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2), \quad G = \kappa_1 \cdot \kappa_2.$$

Die Punkte einer Fläche werden in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Hauptkrümmungen in verschiedene Typen unterteilt. Ein Flächenpunkt heißt

- (1) *elliptisch*, falls $\kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$;
- (2) *hyperbolisch*, falls $\kappa_1 \cdot \kappa_2 < 0$;
- (3) *parabolisch*, falls $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = 0$ und $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 > 0$;
- (4) *Flachpunkt* oder *Nabelpunkt*, falls $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$

gilt. *Umbilische Punkte* sind Flächenpunkte, in denen die Hauptkrümmungen $\kappa_1 = \kappa_2$ zusammenfallen. Ein umbilischer Punkt ist entweder elliptisch oder flach.

Beispiel 18. Die in der Betragsfläche der Funktion $f(z) = 1/\sin z$ eingezeichnete Linie verschwindender Gaußscher Krümmung (Abb. S. 149) besteht aus parabolischen Punkten, weswegen sie *parabolische Kurve* genannt wird. Sie trennt per Definition die hyperbolischen von den elliptischen Punkten.

Satz 27. Besteht eine Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ausschließlich aus umbilischen Punkten, so ist sie Stück einer Ebene oder einer Sphäre.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $S = \kappa \cdot \text{Id}$ ein Vielfaches der Identität. Aufgrund der Codazzi-Gleichung

$$0 = \nabla S = \nabla(\kappa \cdot \text{Id}) = \nabla(\kappa) \cdot \text{Id}$$

ist κ konstant. Im Fall $\kappa = 0$ ist der Normalenvektor e_3 konstant, es gilt nämlich $de_3 = \omega_{31} \cdot e_1 + \omega_{32} \cdot e_2 = 0$. Damit ist M^2 Stück einer Ebene. Ist $\kappa \neq 0$, so erhalten wir aus $\kappa \cdot dM = \kappa \cdot \text{Id} = S = de_3$ die Gleichung $d(e_3 - \kappa M) = 0$ und damit ist $e_3 - \kappa M$ ein konstanter Vektor a . Dann gilt

$$\|a + \kappa M\|^2 \equiv 1,$$

d. h. M^2 ist Stück einer Sphäre. \square

Satz 28. Eine Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ verschwindender Gaußscher Krümmung $G \equiv 0$ und konstanter mittlerer Krümmung $H \neq 0$ ist Teil eines Zylinders.

Beweis. Die erste Hauptkrümmung $\kappa_1 = 0$ verschwindet und die zweite Hauptkrümmung $\kappa_2 \neq 0$ ist konstant. In einem Orthonormalreper e_1, e_2 , bestehend aus Eigenvektoren der zweiten Fundamentalform, erhalten wir die Formeln

$$\omega_{13} = 0 \quad \text{und} \quad \omega_{23} = \kappa_2 \cdot \sigma_2.$$

Wir differenzieren beide Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} = \kappa_2 \cdot \omega_{12} \wedge \sigma_2 \\ 0 &= \omega_{21} \wedge \omega_{13} = d\omega_{23} = \kappa_2 \cdot d\sigma_2. \end{aligned}$$

Wegen $\kappa_2 \neq 0$ ist einerseits ω_{12} proportional zu σ_2 und σ_2 ist eine geschlossene Form, $d\sigma_2 = 0$. Dann aber gilt $d\sigma_1 = \omega_{12} \wedge \sigma_2 = 0$, also insgesamt

$$d\sigma_1 = 0, \quad d\sigma_2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega_{12} = 0.$$

Aus den Strukturgleichungen ergibt sich

$$de_1 = 0, \quad de_2 = \kappa_2 \cdot \sigma_2 \cdot e_3, \quad de_3 = \kappa_2 \cdot \sigma_2 \cdot e_2.$$

Daher ist e_1 konstant und die Fläche M^2 liegt auf einem Zylinder, dessen Achse in Richtung e_1 weist. \square

Satz 29. Es existiert kein Flächenstück $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $G = -1$ und $H = 0$.

Beweis. Sind κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen, so folgt aus $0 \equiv H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ und $-1 = G = \kappa_1 \kappa_2$ sofort $\kappa_1 = -\kappa_2 = 1$. Daher erhalten wir bezüglich eines tangentialen Orthonormalrepers, bestehend aus Eigenvektoren der zweiten Fundamentalform, die Gleichungen

$$\omega_{13} = \sigma_1 \quad \text{und} \quad \omega_{23} = -\sigma_2.$$

Wir differenzieren diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} = -\omega_{12} \wedge \sigma_2 \\ d\sigma_2 &= -d\omega_{23} = -\omega_{21} \wedge \omega_{13} = \omega_{12} \wedge \sigma_1. \end{aligned}$$

Andererseits ist die Form $\omega_{12} = A \cdot \sigma_1 + B \cdot \sigma_2$ eine Linearkombination von σ_1, σ_2 mit den aus den Gleichungen

$$d\sigma_1 = A \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2 \quad \text{und} \quad d\sigma_2 = B \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2$$

zu bestimmenden Koeffizienten A und B . Dann aber folgt

$$\begin{aligned} A \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2 &= d\sigma_1 = -\omega_{12} \wedge \sigma_2 = -A \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2 \\ B \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2 &= d\sigma_2 = \omega_{12} \wedge \sigma_1 = -B \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2, \end{aligned}$$

also $A = B = 0$. Die Form $\omega_{12} = 0$ verschwindet, ein Widerspruch zu $G = -1$. \square

Definition 15. Eine Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ verschwindender mittlerer Krümmung $H \equiv 0$ heißt *Minimalfläche*.

Der vorhergehende Satz besagt, dass keine Minimalflächen konstanter, nichtverschwindender Gaußscher Krümmung existieren. Allgemeiner, betrachten wir die Normalenabbildung $e_3 : M^2 \rightarrow S^2$ einer Minimalfläche, so erhalten wir wegen $\kappa_1 = -\kappa_2 = \sqrt{-G}$ die Formeln

$$\omega_{13} = \sqrt{-G} \sigma_1, \quad \omega_{23} = -\sqrt{-G} \sigma_2.$$

Aus $de_3 = \omega_{31} \cdot e_1 + \omega_{32} \cdot e_2$ folgt für zwei tangentiale Vektoren $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in TM^2$ unmittelbar

$$\langle de_3(\mathcal{V}), de_3(\mathcal{W}) \rangle = -G \cdot \langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle.$$

Sind I_{S^2} und I_{M^2} die Grundformen der Sphäre S^2 bzw. der Fläche M^2 , dann ist die induzierte Grundform (Riemannsche Metrik) $e_3^*(I_{S^2})$ proportional zu I_{M^2} :

$$e_3^*(I_{S^2}) = -G \cdot I_{M^2}.$$

Damit erhalten wir den

Satz 30. *Die Normalenabbildung $e_3 : M^2 \rightarrow S^2$ einer Minimalfläche ist winkel-erhaltend und die auf M^2 definierte Riemannsche Metrik $g^* := -G \cdot I_{M^2}$ ist eine Metrik positiver konstanter Gaußscher Krümmung.*

Die vektorwertige Positionsfunction $M : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ einer Minimalfläche führt uns auf harmonische Funktionen.

Satz 31. *Sei $M : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und Δ ihr auf Funktionen wirkender Laplace-Operator. Dann ist M^2 genau dann eine Minimalfläche, falls die vektorwertige Funktion M harmonisch ist, $\Delta(M) = 0$.*

Beweis. Den Laplace-Operator können wir durch das äußere Differential und den Hodge-Operator ausdrücken (siehe Kapitel 3.11). Aus den Strukturgleichungen ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} \Delta(M) \cdot dM^2 &= d * d(M) = d * (\sigma_1 \cdot e_1 + \sigma_2 \cdot e_2) = d(\sigma_2 \cdot e_1 - \sigma_1 \cdot e_2) \\ &= de_1 \wedge \sigma_2 + d\sigma_2 \cdot e_1 - de_2 \wedge \sigma_1 - d\sigma_1 \cdot e_2 \\ &= (\omega_{12} \cdot e_2 + \omega_{13} \cdot e_3) \wedge \sigma_2 + \omega_{21} \wedge \sigma_1 \cdot e_1 \\ &\quad - (\omega_{21} \cdot e_1 + \omega_{23} \cdot e_3) \wedge \sigma_1 - \omega_{12} \wedge \sigma_2 \cdot e_2 \\ &= (\omega_{13} \wedge \sigma_2 - \omega_{23} \wedge \sigma_1) \cdot e_3 \\ &= -(\kappa_1 + \kappa_2) \cdot \sigma_1 \wedge \sigma_2 \cdot e_3 = -2H \cdot e_3 \cdot dM^2. \end{aligned} \quad \square$$

Korollar 2. *Es existiert keine kompakte Minimalfläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ohne Rand.*

Beweis. Die Komponenten der Positionsfunction M der Fläche wären nach dem Satz von Hopf (siehe Kapitel 3.8) konstant, ein Widerspruch. \square

Die Normalenabbildung $e_3 : M^2 \rightarrow S^2$ einer Minimalfläche nicht verschwindender Gaußscher Krümmung ist ein lokaler, konformer Diffeomorphismus. Die stereographische Projektion von $S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\}$ auf \mathbb{R}^2 ist gleichfalls ein konformer Diffeomorphismus. Invertieren wir daher die Normalenabbildung $e_3 : M^2 \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so können wir jede Minimalfläche lokal durch eine Parametrisierung $F : U \rightarrow M^2$ mit

$$(*) \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial y^1}, \frac{\partial F}{\partial y^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial y^2}, \frac{\partial F}{\partial y^2} \right\rangle \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial F}{\partial y^1}, \frac{\partial F}{\partial y^2} \right\rangle = 0$$

darstellen. Derartige Koordinaten nennt man ganz allgemein *isotherme Koordinaten*. Die Minimalität der Fläche in diesen Koordinaten ist äquivalent dazu, dass $F = F(y^1, y^2)$ harmonisch bezüglich des Laplace-Operators $\Delta = \partial^2/(\partial y^1)^2 + \partial^2/(\partial y^2)^2$ von \mathbb{R}^2 ist,

$$\Delta(F) = 0.$$

Identifizieren wir \mathbb{R}^2 mit den komplexen Zahlen \mathbb{C} , so kann lokal jede harmonische Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ als Realteil einer holomorphen Abbildung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$

repräsentiert werden, eine einfache Konsequenz der Cauchy-Riemann-Gleichungen und des Poincaré-Lemmas. Die reellen partiellen Ableitungen von Φ können durch die komplexe Ableitung ($z = y^1 + iy^2$) ausgedrückt werden, weil Φ holomorph ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y^1} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y^2} = i \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir die Ableitung $\partial \Phi / \partial z$ mit Ψ und schreiben wir $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ in den Komponenten von \mathbb{C}^3 aus, so ist die Bedingung (*) äquivalent zur quadratischen Gleichung

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung werden durch zwei beliebige holomorphe Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ beschrieben:

$$\Psi_1(z) = \frac{f(z)}{2}(1 - g^2(z)), \quad \Psi_2(z) = i \frac{f(z)}{2}(1 + g^2(z)), \quad \Psi_3(z) = f(z)g(z).$$

Insgesamt erhalten wir den

Satz 32 (Weierstraß-Darstellung einer Minimalfläche). *Jede Minimalfläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ nicht verschwindender Gaußscher Krümmung kann lokal mittels zweier holomorpher Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ repräsentiert werden. Eine Parametrisierung wird durch die Formel*

$$F = \operatorname{Re} \left(\int \frac{f(z)}{2}(1 - g^2(z)) dz, i \int \frac{f(z)}{2}(1 + g^2(z)) dz, \int f(z)g(z) dz \right)$$

hergestellt.

Bemerkung. Eine einfach zusammenhängende Minimalfläche tritt stets als *eine* Minimalfläche in einer S^1 -parametrischen Schar auf. Anders ausgedrückt, sie kann deformiert werden. Ist nämlich $\Phi := \Phi_R + i \cdot \Phi_I : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ holomorph, so erhalten wir durch

$$\operatorname{Re}(e^{i\alpha}\Phi) = \cos(\alpha) \cdot \Phi_R - \sin(\alpha) \cdot \Phi_I$$

eine Schar von Minimalflächen, weil die quadratische Gleichung $\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = 0$ homogen ist.

Beispiel 19. Bereits durch Einsetzen relativ leichter Funktionen erhält man sehr hübsche nicht triviale Minimalflächen. Betrachten wir zum Beispiel das Tripel holomorpher Funktionen

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3) = \left(\frac{1 - z^2}{2iz^2}, \frac{1 + z^2}{2z^2}, \frac{1}{iz} \right),$$

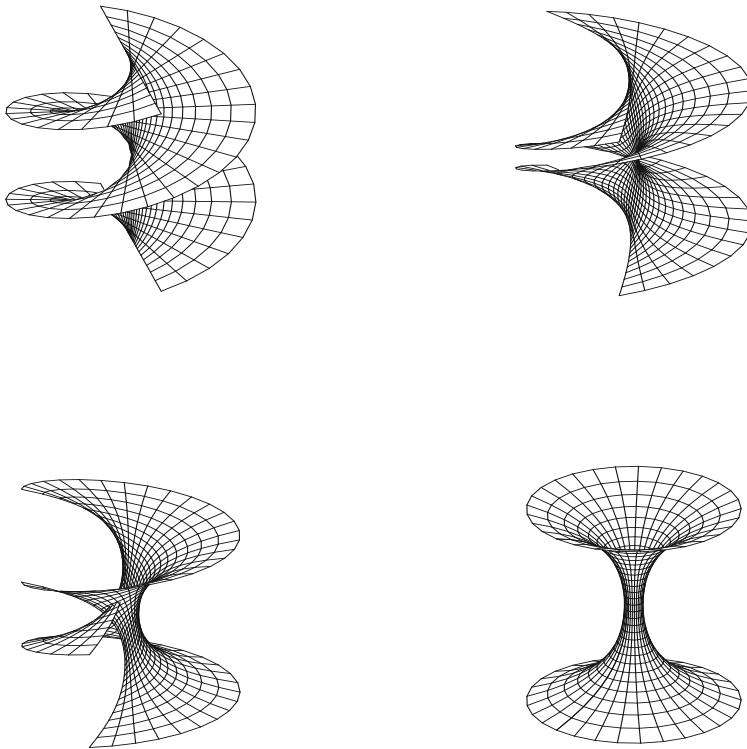
welches die Bedingung $\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = 0$ erfüllt, und deren komplexe Stammfunktionen

$$F = (F_1, F_2, F_3) = \left(-\frac{1}{2i}(z + 1/z), \frac{1}{2}(z - 1/z), \frac{1}{i} \ln z \right).$$

Der Real- und der Imaginärteil dieser Funktionen liefern jeweils eine Minimalfläche, welche man zueinander adjungiert nennt. Setzt man $\ln z = \varrho + i\tau$, so sind diese in Formeln gegeben durch

$$\begin{aligned} F_R &:= \operatorname{Re}(F) = (-\sinh \varrho \sin \tau, \sinh \varrho \cos \tau, \tau), \\ F_I &:= \operatorname{Im}(F) = (-\cosh \varrho \cos \tau, -\cosh \varrho \sin \tau, \varrho). \end{aligned}$$

Demnach ist durch $F_\alpha = \cos \alpha F_R + \sin \alpha F_I$ eine einparametrische Schar von Minimalflächen gegeben, die F_R in F_I überführt. Die Fläche F_R ist eine Schraubfläche, auch Helikoid genannt, F_I dagegen die Drehfläche der Kettenlinie, das Katenoid. Die folgende Bildfolge illustriert die Deformation dieser beiden Minimalflächen ineinander. Weitere Beispiele klassischer Minimalflächen findet der Leser in den Übungsaufgaben.



5.5. Kurven auf Flächen und geodätische Linien

Wir betrachten eine orientierte Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ im dreidimensionalen Raum und in ihr eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M^2$ von der wir annehmen wollen, dass sie in der natürlichen Parametrisierung vorliegt. Dann ist der Tangentialvektor $\vec{t}(s)$ der

Kurve tangential an die Fläche. Diesen bezeichnen wir mit $e_1(s)$. Ist $e_3(s)$ der Normalenvektor an die Fläche M^2 entlang der Kurve, so wird durch die Gleichung $e_1(s) \times e_2(s) = e_3(s)$ ein dritter, tangentialer Vektor an M^2 entlang der Kurve bestimmt. Auf diese Weise entsteht in den Kurvenpunkten ein orthonormales Reper, das sog. *Darboux-Reper* der Kurve γ bezüglich der Fläche M^2 . Im Gegensatz zum Frenet-Reper ist das Darboux-Reper einer Kurve auf einer Fläche in allen Kurvenpunkten erklärt, also auch in Punkten verschwindender Krümmung. Den Krümmungsvektor $\vec{k}(s) := \kappa(s) \cdot \vec{h}(s)$ der Kurve γ in \mathbb{R}^3 zerlegen wir uns in einen Bestandteil $\vec{k}_g(s)$ tangential an die Fläche und einen zu dieser orthogonalen Vektor \vec{k}_n .

Definition 16. Das entlang der Kurve erklärte Vektorfeld $\vec{k}_g(s)$ heißt der *geodätische Krümmungsvektor*, das Vektorfeld $\vec{k}_n(s)$ der *normale Krümmungsvektor* der Kurve bezüglich der Fläche. Es gilt

$$\vec{k}(s) = \kappa(s) \cdot \vec{h}(s) = \vec{k}_g(s) + \vec{k}_n(s).$$

Der Vektor $\vec{k}_n(s) := \kappa_n(s) \cdot e_3$ ist proportional zum Normalenvektor der Fläche mit einem Faktor $\kappa_n(s)$, der *normale Krümmung* heißt. Analog ist $\vec{k}_g(s) := -\kappa_g(s) \cdot e_2$ proportional zu e_2 , weil der Hauptnormalenvektor $\vec{h}(s)$ orthogonal zum Tangentialvektor ist. Daraus erhalten wir die *geodätische Krümmung* $\kappa_g(s)$ der Kurve und das Quadrat der Krümmung $\kappa(s)$ der Kurve ist insgesamt die Summe

$$\kappa^2(s) = \kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s).$$

Aus der Umformung der geodätischen Krümmung

$$\kappa_g(s) = \langle \vec{k}_g, e_2 \rangle = \langle \vec{k}, e_2 \rangle = -\langle de_1(e_1), e_2 \rangle = -\omega_{12}(e_1) = -I(\nabla_{e_1} e_1, e_2)$$

ergibt sich der

Satz 33. Die geodätische Krümmung einer Kurve auf einer Fläche hängt nur von der ersten Grundform der Fläche ab, es gilt im Darboux-Reper die Formel

$$\kappa_g(s) = -I(\nabla_{e_1} e_1, e_2).$$

Auf ähnliche Weise können wir die normale Krümmung $\kappa_n(s)$ einer Kurve durch die zweite Grundform der Fläche und den Tangentialvektor ausdrücken:

$$\kappa_n = \langle \vec{k}_n, e_3 \rangle = \langle \vec{k}, e_3 \rangle = \left\langle \frac{d\vec{t}}{ds}, e_3 \right\rangle = \langle de_1(e_1), e_3 \rangle = -\omega_{13}(e_1) = -II(\vec{t}, \vec{t}).$$

Insbesondere erhalten wir den

Satz 34. Sind γ und γ^* zwei in einem Punkt der Fläche M^2 tangentiale Kurven, so stimmen ihre normalen Krümmungen in diesem Punkt überein.

Wir betrachten jetzt eine Variation der Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M^2$ innerhalb der Fläche M^2 mit festem Anfangs- und Endpunkt. Diese können wir uns als eine Familie von Kurven

$$\gamma\varepsilon(s) := \gamma(s) + \varepsilon \cdot h(s) \cdot e_2(s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

mit einer in den Enden des Intervallses verschwindenden Funktion vorstellen, $h(a) = h(b) = 0$. Die Länge der Kurve γ_ε ist

$$L(\gamma_\varepsilon(s)) = \int_a^b \left\| \vec{t}(s) + \varepsilon \frac{dh}{ds}(s) \cdot e_2(s) + \varepsilon \cdot h(s) \cdot \frac{de_2}{ds}(s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\| ds$$

und deren Ableitung nach dem Parameter ε beträgt

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(L(\gamma_\varepsilon(s)) \right)_{|\varepsilon=0} = \int_a^b \left\langle \vec{t}(s), \frac{dh}{ds}(s) \cdot e_2(s) + h(s) \frac{de_2}{ds}(s) \right\rangle ds.$$

Aus den Formeln $\langle \vec{t}(s), e_2(s) \rangle = 0$ und

$$\left\langle \vec{t}(s), \frac{de_2}{ds}(s) \right\rangle = \langle e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = \omega_{21}(e_1) = \kappa_g(s)$$

folgt dann letztendlich

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(L(\gamma_\varepsilon(s)) \right)_{|\varepsilon=0} = \int_a^b h(s) \cdot \kappa_g(s) ds.$$

Daraus erhalten wir den

Satz 35. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow M^2$ eine Kurve auf der Fläche, welche den kürzesten Abstand zwischen den Punkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ in der Fläche hat, so verschwindet die geodätische Krümmung der Kurve

$$\kappa_g(s) = 0.$$

Definition 17. Eine Kurve auf der Fläche heißt *geodätische Linie*, falls deren geodätische Krümmung verschwindet. Diese Bedingung ist äquivalent zu $\nabla_{\vec{t}} \vec{t} = 0$.

Verschwindet die geodätische Krümmung $\kappa_g = 0$, so ist der Krümmungsvektor $\kappa(s) \vec{h}(s) = \vec{k}(s) = \vec{k}_n(s)$ proportional zum Normalenvektor e_3 an die Fläche. Eine Kurve nicht verschwindender Krümmung $\kappa(s) \neq 0$ ist demnach genau dann eine geodätische Linie der Fläche M^2 , falls der Hauptnormalenvektor $\vec{h}(s)$ mit dem Normalenvektor e_3 der Fläche übereinstimmt:

$$\vec{h}(s) = \pm e_3(\gamma(s)).$$

Geodätische Linien realisieren den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten der Fläche nur in dem Fall, dass die beiden Punkte hinreichend nahe beieinander liegen. Eine geodätische Linie großer Länge muss nicht unbedingt die kürzeste Verbindung auf der Fläche zwischen ihren Endpunkten sein. Entsprechende Beispiele – etwa auf S^2 oder dem Zylinder – sind einfach zu konstruieren (siehe Beispiel 21). In lokalen Koordinaten y^1, y^2 auf einer Fläche stellen wir die Kurve in der Form $\gamma(s) = (y^1(s), y^2(s))$ dar. Sind $g_{ij}(y^1, y^2)$ die Koeffizienten der Riemannschen Metrik und ist s der natürliche Parameter der Kurve, so gilt

$$\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(y^1(s), y^2(s)) \cdot \frac{dy^i}{ds} \cdot \frac{dy^j}{ds} = 1.$$

Die *Christoffel-Symbole* Γ_{ij}^k zweiter Art stellen die kovarianten Ableitungen der Basisvektorfelder $\partial/\partial y^i$ als Linearkombinationen eben dieser dar:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} =: \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Wegen

$$\nabla_{\vec{t}} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \sum_{i,k=1}^2 \frac{dy^i}{ds} \cdot \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}$$

gilt für den Tangentialvektor \vec{t} insgesamt die Formel

$$\nabla_{\vec{t}} \vec{t} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{d^2 y^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{dy^i}{ds} \cdot \frac{dy^j}{ds} \right) \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Wir fassen diese Überlegung im folgenden Satz zusammen:

Satz 36. Eine in den lokalen Koordinaten dargestellte Kurve $\gamma(s) = (y^1(s), y^2(s))$ ist genau dann eine geodätische Linie, falls für $k = 1, 2$ das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2 y^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{dy^i}{ds} \frac{dy^j}{ds} = 0$$

gilt.

Hierbei handelt es sich um ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung. Die allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sichern die Existenz genau einer geodätischen Linie durch einen vorgegebenen Punkt und in vorgegebener Richtung zu.

Korollar 3. Zu jedem Punkt $x \in M^2$ und jedem Tangentialvektor $\mathcal{V} \in T_x M^2$ der Länge eins einer Fläche ohne Rand existiert genau eine geodätische Linie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^2$ mit den Anfangsbedingungen $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = \mathcal{V}$.

Beispiel 20. Sei $\gamma(s)$ eine geodätische Linie der zweidimensionalen Sphäre S^2 vom Radius $R > 0$. Wegen $\kappa_g = 0$ stimmen die normale Krümmung κ_n und die räumliche Krümmung κ der Kurve überein. Damit gilt

$$\kappa = |\kappa_n| = \text{II}(\vec{t}, \vec{t}) = \frac{1}{R},$$

weil die Sphäre ausschließlich aus umbilischen Punkten besteht. Der Normalenvektor an die Sphäre ist durch $e_3(x) = \frac{1}{R}x$ gegeben und wir erhalten einerseits

$$\frac{d^2 \vec{t}(s)}{ds^2} = \frac{d}{ds} \vec{k}(s) = \frac{d}{ds} \vec{k}_n(s) = -\frac{1}{R} \frac{d}{ds} e_3(\gamma(s)) = -\frac{1}{R^2} \frac{d\gamma(s)}{ds} = -\frac{\vec{t}(s)}{R^2},$$

andererseits folgt aus den Frenet-Formeln der Kurve

$$\frac{d^2 \vec{t}(s)}{ds^2} = \frac{1}{R} \frac{d\vec{h}(s)}{ds} = -\frac{1}{R^2} \vec{t}(s) + \frac{1}{R} \tau \cdot \vec{b}(s).$$

In Konsequenz verschwindet die Windung τ der Kurve identisch. Die Kurve $\gamma(s)$ ist also eine ebene Kurve in S^2 konstanter Krümmung $1/R$, d. h. ein Großkreis von S^2 .

Beispiel 21. Aus $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$ folgt sofort, dass jede Kurve verschwindender Krümmung eine geodätische Linie ist. Anders formuliert, liegt eine Gerade des \mathbb{R}^3 in einer Fläche, so ist sie notwendig eine geodätische Linie dieser Fläche.

Beispiel 22. Wir betrachten den Zylinder M^2 in \mathbb{R}^3 , dessen Achse parallel zu dem Einheitsvektor \vec{a} ist. Der Normalenvektor in einem Punkt $x \in M^2$ ist proportional zur Projektion von x auf die zu \vec{a} orthogonale Ebene,

$$e_3(x) = \frac{x - \langle x, \vec{a} \rangle \vec{a}}{\|x - \langle x, \vec{a} \rangle \vec{a}\|}.$$

Für eine geodätische Linie $\gamma(s)$ des Zylinders erhalten wir aus $\vec{h}(s) = e_3(\gamma(s))$ sofort die Gleichungen $\langle \vec{h}(s), \vec{a} \rangle = 0$ und

$$C := \langle \vec{h}(s), \gamma(s) \rangle = \langle e_3(\gamma(s)), \gamma(s) \rangle = \|\gamma(s) - \langle \gamma(s), \vec{a} \rangle \vec{a}\|.$$

Dabei ist C positiv und konstant, weil $\gamma(s)$ in dem Zylinder liegt. Wegen $d\vec{t}(s)/ds = \kappa(s) \cdot \vec{h}(s)$ und $d\vec{b}(s)/ds = -\tau(s) \cdot \vec{h}(s)$ ergibt sich aus $\langle \vec{h}(s), \vec{a} \rangle = 0$, dass

$$A := \langle \vec{t}(s), \vec{a} \rangle \quad \text{und} \quad B := \langle \vec{b}(s), \vec{a} \rangle$$

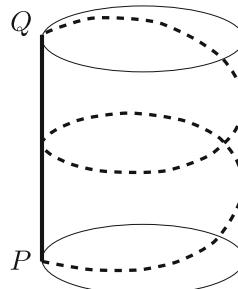
konstant sind. Im Fall $A = 0$ liegt die Kurve in einer zu \vec{a} orthogonalen affinen Ebene auf dem Zylinder und ist ein Kreis. Im Fall $A \neq 0$ differenzieren wir die Gleichung $\langle \vec{h}(s), \vec{a} \rangle = 0$ einmal und die Frenet-Formeln ergeben die Relation

$$-A \cdot \kappa(s) + B \cdot \tau(s) = 0.$$

Indem wir die Konstante C^2 zweimal differenzieren, erhalten wir weiterhin

$$C \cdot \kappa(s) + 1 = A^2.$$

Sowohl die Krümmung $\kappa(s)$ als auch die Windung $\tau(s)$ sind also konstant und die Kurve $\gamma(s)$ ist eine Schraubenlinie (siehe Aufgabe 6). Zusammenfassend sind die geodätischen Linien des Zylinders Schraubenlinien, Kreise und die zur \vec{a} -Achse parallelen Geraden. Zwei Punkte P und Q des Zylinders können mit unendlich vielen geodätischen Kurven verbunden werden, von denen nur eine die kürzeste Verbindung zwischen ihnen ist:



Die Geodätengleichungen sind nicht lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deswegen im Allgemeinen schwer lösbar. Etwas besser sieht die Lage aus, wenn aufgrund der Symmetrie der Fläche hinreichend viele Funktionen existieren, die entlang der geodätischen Linie konstant sind:

Definition 18. Eine Funktion $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* des geodätischen Flusses, wenn f auf allen Tangentenkurven $\gamma'(t)$ geodätischer Linien konstant ist.

Ein nicht triviales erstes Integral ist immer die Länge von γ' selbst, welches man als Energie interpretiert. In ihm kommt zum Ausdruck, dass geodätische Linien auf Bogenlänge parametrisiert sind. Weitere erste Integrale erhält man nach dem *Satz von Noether* aus Scharen von Isometrien der Fläche:

Satz 37. Sei \mathcal{V} ein tangentiales Vektorfeld an eine Fläche M^2 mit einem Fluss $\Phi_t : M^2 \rightarrow M^2$, der nur aus Isometrien bestehen möge. Dann ist die Funktion

$$f_{\mathcal{V}} : TM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) = I(\mathcal{W}, \mathcal{V})$$

ein erstes Integral des geodätischen Flusses.

Beweis. Wir betrachten eine geodätische Linie $\gamma(s)$ auf M^2 in natürlicher Parametrisierung. Die im Satz definierte Funktion hat für $\mathcal{W} = \gamma'$ die Ableitung nach dem Parameter s

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), \mathcal{V}(\gamma'(s)) \rangle = \langle \gamma''(s), \mathcal{V}(\gamma'(s)) \rangle + \langle \gamma'(s), d\mathcal{V}(\gamma'(s)) \rangle.$$

Der Vektor γ'' ist genau der Krümmungsvektor der Kurve in \mathbb{R}^3 und steht für eine geodätische Linie immer senkrecht auf der Fläche. Dies begründet das Verschwinden des ersten Summanden. Andererseits besteht der Fluss Φ_t nach Voraussetzung aus Isometrien:

$$\langle \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \rangle = \langle d\Phi_t(\mathcal{W}_1), d\Phi_t(\mathcal{W}_2) \rangle.$$

Differenziert man diese Identität und wertet sie an der Stelle $t = 0$ aus, ergibt sich

$$\langle d\mathcal{V}(\mathcal{W}_1), \mathcal{W}_2 \rangle + \langle d\mathcal{V}(\mathcal{W}_2), \mathcal{W}_1 \rangle = 0$$

und der zweite Term verschwindet ebenfalls, weil er antisymmetrisch in $\gamma'(s)$ sein muss. \square

Beispiel 23. Wir wollen nun die geodätischen Linien auf den von uns bereits ausführlich diskutierten Drehflächen mit auf Länge parametrisierter Erzeugenden beschreiben. In den Koordinaten s und φ der Fläche ist die geodätische Linie parametrisiert als $\gamma(t) = (s(t), \varphi(t))$ und hat das erste Integral

$$E := \|\gamma'(t)\|^2 = s'^2 + r(s)^2 \varphi'^2.$$

Weil die Drehung um einen Winkel φ um die z -Achse eine Isometrie der Fläche ist, erfüllt das Vektorfeld $\partial/\partial\varphi$ die Voraussetzungen des Satzes von Noether und führt auf das weitere erste Integral

$$M := \langle \gamma', \partial/\partial\varphi \rangle = r^2 \varphi'.$$

Die Existenz dieser zweiten Invariante ist als *Satz von Clairaut* (1731) bekannt und hat folgende geometrische Interpretation. Wir betrachten eine geodätische Linie

durch einen Punkt der Fläche sowie den Breitenkreis $\eta(t) = (s_0, \varphi(t))$ durch eben diesen Punkt. Der Winkel α zwischen der Geodäte und dem Breitenkreis berechnet sich aus

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \gamma', \eta' \rangle}{\|\gamma'\| \cdot \|\eta'\|} = \frac{r^2 \varphi'^2}{\sqrt{E} \cdot \sqrt{r^2 \varphi'^2}} = \frac{r \varphi'}{\sqrt{E}}$$

und deswegen ist M genau dann konstant, wenn $r(s) \cdot \cos(\alpha)$ konstant ist. Für die qualitative Diskussion der geodätischen Linien setzen wir nun $E = 1$. Indem wir $\varphi' = M/r^2$ in $E = 1$ einsetzen, erhalten wir

$$s'^2 r^2 = r^2 - M^2, \text{ also } 0 \leq M^2 \leq r^2.$$

Wenn M identisch verschwindet, muss $\varphi' = 0$, also φ konstant sein. Dies entspricht genau der erzeugenden Kurve der Drehfläche; jede Profilkurve von F ist also geodätisch. Im anderen Extremfall $M^2 = r^2$ muss $s' = 0$, also s konstant sein. Dies ist ein Breitenkreis auf F ; allerdings ist zu beachten, dass in diesem Fall durch Differenzieren von $M^2 = r^2$ sofort $r r' = 0$ folgt, was $r' = 0$ impliziert. Ein Breitenkreis von F ist genau dann geodätisch, wenn die Radiusfunktion r dort ein Extremum hat. Es verbleibt der generische Fall $0 < M^2 < r^2$. Die Bedingung $E = 1$ ist äquivalent zu

$$s' = \pm \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - M^2}.$$

Fasst man s als Funktion von φ auf, um den Kurvenparameter t zu eliminieren, so ist $ds/d\varphi = s'/\varphi'$, also

$$\frac{ds}{d\varphi} = \pm \frac{r}{M} \sqrt{r^2 - M^2}$$

und damit

$$M \int_{s_0}^{s(\varphi)} \frac{1}{r(\tilde{s}) \sqrt{r(\tilde{s})^2 - M^2}} d\tilde{s} = \int_0^\varphi d\tilde{\varphi} = \pm \varphi.$$

Eine Parametrisierung der geodätischen Linien erhält man hieraus für solche Flächen, für die das links stehende Integral elementar integrierbar und nach s auflösbar ist.

Beispiel 24. Sei \mathcal{H}^2 die hyperbolische Ebene aus Beispiel 9. Wir parametrisieren die Geodäte γ wieder in der Form $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ und erhalten als Bedingung, dass γ auf Bogenlänge parametriert sei,

$$\frac{x'^2}{y'^2} + \frac{y'^2}{y^2} = 1.$$

Weil die Metrik nicht von x abhängt, sind die Translationen in x -Richtung Isometrien mit zugehörigem Vektorfeld $\partial/\partial x$. Damit ist

$$M := \langle \gamma', \partial/\partial x \rangle = x'/y^2$$

ein erstes Integral. Wenn M verschwindet, muss x konstant sein und die geodätischen Linien sind genau die zur y -Achse parallelen offenen Halbgeraden. Im allgemeinen Fall setzen wir M in die erste Bedingung ein, was nach einer kurzen Umformung

$$y' = \pm y \sqrt{1 - M^2 y^2}$$

impliziert. Wieder fassen wir y als Funktion von x auf und setzen $r := 1/|M|$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \pm \frac{1}{y} \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Diese Gleichung kann man elementar integrieren und erhält mit einer Integrationskonstanten a

$$-\sqrt{r^2 - y^2} = \pm(x - a), \quad \text{also } (x - a)^2 + y^2 = r^2.$$

Die Spur der geodätischen Linie ist damit ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt auf der x -Achse liegt.

Wir wenden uns nochmals der Gauß-Bonnet-Formel zu. Sei M^2 eine orientierte, kompakte Fläche mit Rand ∂M^2 und \mathcal{V} ein Vektorfeld der Länge eins, definiert auf M^2 mit Ausnahme endlich vieler Punkte x_1, \dots, x_k im Inneren von M^2 . Weiterhin setzen wir voraus, dass \mathcal{V} auf dem Rand ∂M^2 orthogonal zu ∂M^2 und nach außen gerichtet sei. Betrachten wir die im Kapitel 5.4 eingeführte 1-Form $\chi_{\mathcal{V}}$, so gilt mit den dort bewiesenen Formeln

$$\int_{M^2} d\chi_{\mathcal{V}} = \int_{\partial M^2} \chi_{\mathcal{V}} - 2\pi \sum_{i=1}^k \text{Ind}(\mathcal{V}, x_i).$$

An der Nähe des Randes ∂M^2 wählen wir ein orthonormales Reper e_1, e_2 mit $e_1 = \mathcal{V}$. Dann ist $\chi_{\mathcal{V}} = \omega_{12}$ und e_2 der Einheitstangentialvektor an den Rand. Wegen $\omega_{12}(e_2) = I(\nabla_{e_2} e_1, e_2) = -I(e_1, \nabla_{e_2} e_2) = \kappa_g$ erhalten wir die Gauß-Bonnet-Formel für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Satz 38 (Gauß-Bonnet-Formel). *Sei M^2 eine kompakte, orientierte Fläche mit Rand und \mathcal{V} ein Vektorfeld der Länge eins, definiert auf M^2 mit Ausnahme von endlich vielen Punkten x_1, \dots, x_k im Inneren von M^2 . Weiterhin sei \mathcal{V} auf dem Rand orthogonal zum Rand und nach außen gerichtet. Dann gilt*

$$\int_{M^2} G \cdot dM^2 + \int_{\partial M^2} \kappa_g \cdot d(\partial M^2) = 2\pi \cdot \sum_{i=1}^k \text{Ind}(\mathcal{V}, x_i).$$

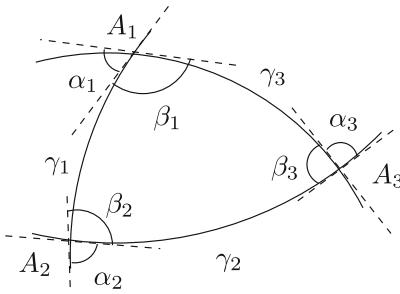
Analog zum Fall einer Fläche ohne Rand ergeben sich hieraus die ähnlichen Konsequenzen. Einerseits ist die Summe der Integrale

$$\int_{M^2} G \cdot dM^2 + \int_{\partial M^2} \kappa_g \cdot d(\partial M^2)$$

von der ersten Grundform unabhängig. Andererseits ist die Summe der Indizes des Vektorfeldes \mathcal{V} nicht abhängig vom Vektorfeld \mathcal{V} . Ohne Beweis formulieren wir noch eine einfache Konsequenz dieser Formel.

Satz 39. *Sei $P_n \subset S^2$ ein einfach zusammenhängendes n -Eck auf der Sphäre, bestehend aus n glatten Kurvenbögen γ_i , die in n Ecken A_i unter den Außenwinkeln α_i zusammenstoßen. Dann gilt:*

$$\int_{P_n} G \cdot dS^2 + \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \kappa_g \cdot ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi.$$



Ein geodätisches Dreieck Δ ($k_g = 0, n = 3$) mit Innenwinkeln $\beta_i = \pi - \alpha_i$ erfüllt damit die Gleichung

$$\int_{\Delta} G \cdot dS^2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi.$$

Dies ist das *Theorema Elegantissimum* von Gauß (1827): *Die Gesamtkrümmung (curvatura integra) eines geodätischen Dreiecks ist gleich seinem Winkelexzess (über zwei Rechte).*

Hat G konstantes Vorzeichen $\geq 0, = 0, \leq 0$, so folgt auch, dass die Winkelsumme entsprechend immer $\geq \pi, = \pi$ oder $\leq \pi$ sein muss. Hat das Flächenstück sogar konstante Gaußsche Krümmung $G = G_0$, so ist $\int G$ das G_0 -fache des Flächeninhalts \mathcal{A} des Dreiecks, also folgt der Satz von Harriot (1603): *Der Flächeninhalt eines Dreiecks auf der Einheitskugel ist gleich seinem Winkelexzess.*

5.6. Abbildungen zwischen Flächen

Die Länge $\|\mathcal{V}\| = \sqrt{I(\mathcal{V}, \mathcal{V})}$ eines Tangentialvektors kann durch Längenmessungen von Kurven bestimmt werden. Zu diesem Ziel wählen wir eine Kurve γ in beliebiger Parametrisierung auf der Fläche M^2 , deren Tangente bei $t = 0$ mit \mathcal{V} übereinstimmt, $\dot{\gamma}(0) = \mathcal{V}$. Die Länge des Kurvenstückes $\gamma([0, t])$ beträgt

$$L(t) = \int_0^t \sqrt{I(\dot{\gamma}(\mu), \dot{\gamma}(\mu))} d\mu$$

und deren Ableitung bei $t = 0$ ist

$$\frac{dL(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \sqrt{I(\mathcal{V}, \mathcal{V})}.$$

Die erste Grundform der Fläche wird also vollständig durch die Längen von Kurvenstücken festgelegt, und umgekehrt natürlich. Daher hat jede Abbildung $f : M^2 \rightarrow \bar{M}^2$ zwischen zwei Flächen, welche die Länge von Kurvenstücken nicht verändert, ein die ersten Grundformen $I_{\bar{M}^2}$ und I_{M^2} erhaltendes Differential $df : TM^2 \rightarrow T\bar{M}^2$,

$$f^*(I_{\bar{M}^2}) = I_{M^2}.$$

Definition 19. Eine Isometrie $f : M^2 \rightarrow \bar{M}^2$ zwischen zwei Flächen ist eine längentreue glatte Abbildung.

Die Gaußsche Krümmung einer Fläche ist eine von der ersten Grundform abhängige geometrische Größe. Daraus ergibt sich unmittelbar der

Satz 40. *Sei $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^2$ eine Isometrie. Dann stimmen die Gaußschen Krümmungen $G_{\overline{M}^2}, G_{M^2}$ in sich entsprechenden Flächenpunkten überein,*

$$G_{M^2}(x) = G_{\overline{M}^2}(f(x)).$$

Korollar 4. *Es existiert keine isometrische Abbildung einer offenen Teilmenge von S^2 auf eine offene Teilmenge des euklidischen Raumes \mathbb{R}^2 .*

Aus diesem Grunde und insbesondere für die Kartographie war es daher wesentlich, nach anderen geeigneten Abbildungen Ausschau zu halten. Besonders wichtig sind dabei konforme (winkelerhaltende) und volumenerhaltende Abbildungen. Wenden wir uns zunächst ersteren zu. Eine Abbildung $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^2$ nennt man *konforme Abbildung* (winkelerhaltende Abbildung), falls der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven γ_1, γ_2 in M^2 nach Übergang zu den Bildkurven $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ in \overline{M}^2 unverändert bleibt. Diese Abbildungen können mittels der ersten Grundform charakterisiert werden.

Satz 41. *Eine Abbildung $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^2$ ist genau dann konform, falls eine positive Funktion $h : M^2 \rightarrow (0, \infty)$ mit $f^*(I_{\overline{M}^2}) = h \cdot I_{M^2}$ existiert.*

Beweis. Es handelt sich hierbei um einen einfach zu beweisenden Sachverhalt der linearen Algebra. Sind $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ zwei positiv-definite Skalarprodukte eines zweidimensionalen Vektorraumes und gilt für alle Vektoren \mathcal{V}, \mathcal{W} die Gleichung

$$\frac{\langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle_1}{\|\mathcal{V}\|_1 \|\mathcal{W}\|_1} = \frac{\langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle_2}{\|\mathcal{V}\|_2 \|\mathcal{W}\|_2},$$

so existiert eine positive Zahl $h > 0$ mit

$$\langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle_2 = h \cdot \langle \mathcal{V}, \mathcal{W} \rangle_1. \quad \square$$

Konforme Abbildungen hatten wir bereits kennengelernt. Die Normalenabbildung $e_3 : M^2 \rightarrow S^2$ einer Minimalfläche in \mathbb{R}^3 ist konform (Satz 30). Komplex analytische Funktionen sind konforme Abbildungen der Ebene \mathbb{R}^2 in sich. In der Tat, ist $f = (u, v) = u + i \cdot v$ eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, so gilt für die erste Grundform $I_{\mathbb{R}^2} = dx^2 + dy^2$ die Formel

$$\begin{aligned} f^*(I_{\mathbb{R}^2}) &= (u_x dx + u_y dy)^2 + (v_x dx + v_y dy)^2 \\ &= (u_x^2 + v_x^2)dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)dx \odot dy + (v_x^2 + v_y^2)dy^2. \end{aligned}$$

Aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ergibt sich die induzierte Form :

$$f^*(I_{\mathbb{R}^2}) = |f'(z)|^2 \cdot I_{\mathbb{R}^2}.$$

Damit ist die komplex-differenzierbare Funktion $f = u + iv$ eine konforme Abbildung und der Betrag $|f'(z)|^2$ der Ableitung erscheint als der konforme Faktor im Sinne der zweidimensionalen Geometrie. Die bekannteste konforme Abbildung ist die *stereographische Projektion* der zweidimensionalen Sphäre in die Ebene. Diese zeigt, dass konforme Abbildungen von \mathbb{R}^2 nach S^2 existieren, also winkelerhaltende Landkarten erstellt werden können.

Beispiel 25. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)$$

ist konform. Die partiellen Ableitungsvektoren von f sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} (1-x^2+y^2, -2xy, -2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} (-2xy, 1+x^2-y^2, -2y)\end{aligned}$$

und wir erhalten

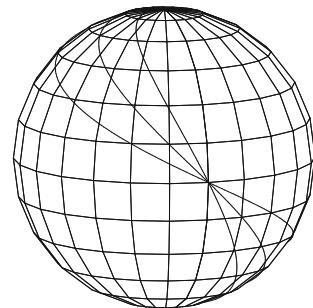
$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \text{sowie} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = 0.$$

Diese Formeln zeigen, dass die stereographische Projektion konform ist.

Beispiel 26 (Mercator-Projektion, 1569). Seien (φ, ψ) die sphärischen Koordinaten auf der Sphäre $S^2 \setminus \{N, S\}$ außerhalb des Nord- und Südpols (siehe Kapitel 3.2, Beispiel 14). Wir definieren eine Abbildung aus der Sphäre S^2 nach \mathbb{R}^2 durch die Formel

$$f(\varphi, \psi) = \left(\varphi, \log \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \right) \right).$$

Hierbei handelt es sich um eine konforme Abbildung mit einer zusätzlichen interessanten Eigenschaft: Kurven konstanter Himmelsrichtung (mit konstantem Winkel zu den Meridianen von S^2), sogenannte *Loxodromen*, werden unter f auf Geraden abgebildet. Aus diesem Grund wird die Mercator-Projektion seit Jahrhunderten für die Erstellung von Seekarten verwendet. Eine ausführliche Diskussion weiterer wichtiger Kartenprojektionen findet der Leser in dem im Literaturverzeichnis angeführten Buch von K. Strubecker (Band 2).



Loxodromen auf der Sphäre

Eine weitere interessante Klasse von Abbildungen zwischen Flächen sind diejenigen, welche das zweidimensionale Volumen (Oberfläche) messbarer Teilmengen der Flächen erhalten. Eine solche Abbildung $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^2$ ist dadurch charakterisiert, dass die Volumenform erhalten bleibt,

$$f^*(d\overline{M}^2) = dM^2,$$

und wir nennen f dann *flächentreue Abbildung*. Die Isometrien sind die konformen und zugleich flächentreuen Abbildungen.

Satz 42. Eine Abbildung $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^2$ ist genau dann eine Isometrie, falls sie konform und flächentreu ist.

Beweis. Aus $f^*(I_{\overline{M}^2}) = h \cdot I_{M^2}$ folgt $f^*(d\overline{M}^2) = h^2 dM^2$ und damit die Behauptung. \square

Die Sphäre S^2 (oder Teile von ihr) kann also nicht zugleich winkel- und flächenerhaltend in die Ebene abgebildet werden. Eine allein winkelerhaltende Abbildung existiert, die stereographische Projektion ist ein Beispiel dafür. Flächentreue Abbildungen aus S^2 nach \mathbb{R}^2 gibt es gleichfalls, wir beschreiben hier eine besonders einfache.

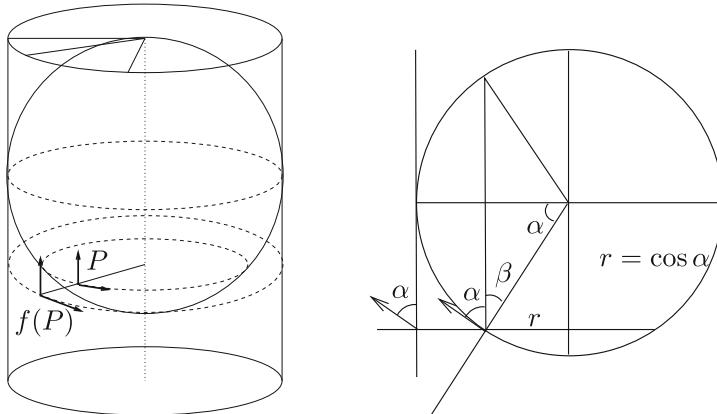
Beispiel 27. Wir nehmen aus der Sphäre S^2 den Nord- und Südpol heraus, legen durch diese beiden Punkte eine Gerade und betrachten den Zylinder, dessen Achse diese Gerade ist:

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Zu jedem vom Nord- bzw. Südpol verschiedenen Punkt $P \neq N, S$ gehört genau eine, zur fixierten Achse orthogonale und den Punkt P enthaltende Gerade. Diese schneidet den Zylinder in zwei Punkten und wir bezeichnen mit $f(P)$ den näher an P gelegenen Schnittpunkt. Damit erhalten wir die sog. *Lambert-Projektion*

$$f : S^2 \setminus \{N, S\} \longrightarrow Z.$$

Danachwickeln wir den Zylinder isometrisch in die Ebene ab. Insgesamt entsteht auf diese Weise eine flächenerhaltende Abbildung aus S^2 nach \mathbb{R}^2 .



In der Tat, sind e_1, e_2 bzw. e_1^*, e_2^* die in diesem Bild eingezeichneten Orthonormalrepere von S^2 und Z , so zeigt eine elementargeometrische Überlegung in der Ebene sofort die Relation:

$$df(e_1) = re_1^* \quad , \quad df(e_2) = \frac{1}{r}e_2^*.$$

Hierbei ist r der Radius des an e_2 tangentialen Meridian von S^2 . Diese Formeln beweisen, dass f eine flächenerhaltende Abbildung ist.

5.7. Riemannsche Mannigfaltigkeiten höherer Dimension

In Anlehnung an Kapitel 3.11 beenden wir dieses Kapitel mit einem Ausblick auf höher dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir besprechen nur die grundlegenden Fakten, streben keine umfassende Einführung in die Riemannsche Geometrie an. Jeder pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m, g) kann – wie im Fall der Flächen – eine kovariante Ableitung ∇ von Vektorfeldern nach Vektorfeldern zur Seite gestellt werden, die durch zwei Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Diese formalisiert den Begriff der Parallelverschiebung von Vektoren auf einer Mannigfaltigkeit, und es war eine für die Entwicklung der Geometrie grundlegende Idee von Levi-Civita (1916), dass in jedem Riemannschen Raum eindeutig eine die Metrik erhaltende Parallelverschiebung vorliegt.

Satz 43. *Jede pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt genau eine kovariante Ableitung $\nabla_V W$ von Vektorfeldern mit folgenden Eigenschaften:*

$$(1) \quad \nabla_V(W_1 + W_2) = \nabla_V(W_1) + \nabla_V(W_2);$$

$$(2) \quad \nabla_{V_1+V_2}W = \nabla_{V_1}W + \nabla_{V_2}W;$$

(3) Ist f eine glatte Funktion, so gilt

$$\nabla_V(f \cdot W) = df(V) \cdot W + f \cdot \nabla_V W \quad \text{und} \quad \nabla_{f \cdot V}W = f \cdot \nabla_V W;$$

$$(4) \quad Vg(W_1, W_2) = g(\nabla_V W_1, W_2) + g(W_1, \nabla_V W_2);$$

$$(5) \quad \nabla_V W - \nabla_W V = [V, W].$$

Das Vektorfeld $\nabla_V W$ ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V, W) &= U(g(V, W)) + V(g(U, W)) - W(g(U, V)) + g([U, V], W) \\ &\quad + g(V, [W, U]) - g(U, [V, W]). \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen die Eindeutigkeit der kovarianten Ableitung und leiten insbesondere die angegebene Formel für $\nabla_V W$ her. Nach Voraussetzung gilt

$$U(g(V, W)) = g(\nabla_U V, W) + g(V, \nabla_U W)$$

$$V(g(U, W)) = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W)$$

$$W(g(U, V)) = g(\nabla_W U, V) + g(U, \nabla_W V).$$

Aufgrund der Eigenschaften von ∇ können wir die Kommutatoren der Vektorfelder ins Spiel bringen:

$$W(g(U, V)) = g(\nabla_U W, V) + g(U, \nabla_V W) + g([W, U], V) - g(U, [V, W]),$$

$$V(g(U, W)) = g(\nabla_U V, W) + g(U, \nabla_V W) - g(W, [U, V]).$$

Aus der ersten, vierten und fünften Gleichung erhalten wir die angegebene Formel für $g(\nabla_U V, W)$. Damit existiert höchstens eine kovariante Ableitung mit den geforderten Eigenschaften. Umgekehrt, die Formel bestimmt den Vektor $\nabla_V W$ und eine analoge Rechnung zeigt, dass es sich dabei um eine kovariante Ableitung mit den gewünschten Eigenschaften handelt. \square

Definition 20. Die kovariante Ableitung $\nabla_V W$ nennt man den *Levi-Civita-Zusammenhang* der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Ist $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$ ein beliebiges Reper von Vektorfeldern definiert auf einer offenen Teilmenge der Mannigfaltigkeit M^m , so stellen wir die kovarianten Ableitungen der Basisvektorfelder dar

$$\nabla_{\mathcal{V}_i} \mathcal{V}_j := \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \cdot \mathcal{V}_k$$

und bekommen die *Christoffel-Symbole zweiter Art* des Levi-Civita-Zusammenhangs. Die Symmetrieeigenschaften der Γ_{ij}^k -Funktionen hängen stark davon ab, welches Reper wir gewählt haben. Kommutieren die Vektorfelder \mathcal{V}_i untereinander, $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] = 0$, und sind $g_{ij} = g(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j)$ die Koeffizienten der Riemannschen Metrik, so vereinfacht sich die Formel (5) aus Satz 43 und wir erhalten den Ausdruck

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m g^{k\alpha} (\mathcal{V}_i(g_{j\alpha}) + \mathcal{V}_j(g_{i\alpha}) - \mathcal{V}_\alpha(g_{ij})) .$$

In diesem Fall sind die Christoffel-Symbole symmetrisch in den unteren Indizes,

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (\text{für kommutierende Repere}).$$

Handelt es sich dagegen bei dem Reper $\mathcal{V}_1 := e_1, \dots, \mathcal{V}_m := e_m$ um ein System paarweise orthogonaler Vektorfelder konstanter Länge ± 1 , so gilt wegen

$$0 = \mathcal{V}_i(g(\mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k)) = g(\nabla_{\mathcal{V}_i} \mathcal{V}_j, \mathcal{V}_k) + g(\mathcal{V}_j, \nabla_{\mathcal{V}_i} \mathcal{V}_k)$$

die Symmetrierelation

$$\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j \quad (\text{für Orthonormalrepere}).$$

Beispiel 28. Die erste Fundamentalform einer Drehfläche lautet (siehe Beispiel 3)

$$I = ds^2 + r(s)^2 d\varphi^2 .$$

In dem kommutierenden Reper $\mathcal{V}_1 = \partial/\partial s$, $\mathcal{V}_2 = \partial/\partial \varphi$ ergibt sich für das „klassische“ Christoffel-Symbol Γ_{22}^1

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=s,\varphi} g^{s\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} g_{\varphi\alpha} + \frac{\partial}{\partial \varphi} g_{s\alpha} - \frac{\partial}{\partial s} g_{\varphi\varphi} \right] = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left[-\frac{\partial r(s)^2}{\partial s} \right] = -r \cdot r'$$

und ganz analog $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r'/r$. Die anderen Christoffel-Symbole verschwinden. Aus Beispiel 3 übernehmen wir die Formel $\omega_{12} = (r'/r) \sigma_2$ in dem dort betrachteten Orthonormalreper $e_1 = \partial/\partial s$, $e_2 = (1/r) \cdot \partial/\partial \varphi$ mit dualem Reper σ_1, σ_2 . Zusammen mit der Definition der „Cartanschen“ Christoffel-Symbole

$$\omega_{12} = \Gamma_{11}^2 \sigma_1 + \Gamma_{21}^2 \sigma_2 = 0 \cdot \sigma_1 + \frac{r'}{r} \sigma_2$$

liest man daraus $\Gamma_{11}^2 = 0$ und $\Gamma_{21}^2 = r'/r$ ab. Ebenso ist

$$\omega_{21} = \Gamma_{12}^1 \sigma_1 + \Gamma_{22}^1 \sigma_2 = 0 \cdot \sigma_1 - \frac{r'}{r} \sigma_2 ,$$

was $\Gamma_{12}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{21}^2$ ergibt.

Bezeichnet $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ wiederum das zu e_1, \dots, e_m duale Reper bestehend aus 1-Formen und führen wir die *lokalen Zusammenhangsformen*

$$\omega_{ij} := \varepsilon_j \cdot g(\nabla e_i, e_j) = \sigma_j(\nabla e_i) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_j := g(e_j, e_j)$$

ein, so erhalten wir

$$\omega_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m \Gamma_{\alpha i}^j \cdot \sigma_\alpha \quad \text{und} \quad \varepsilon_i \cdot \omega_{ij} + \varepsilon_j \cdot \omega_{ji} = 0.$$

Die Berechnung der äußeren Differentiale $d\sigma_i$ erfolgt unter Verwendung der Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} d\sigma_i(\mathcal{V}, \mathcal{W}) &= \mathcal{V}(\sigma_i(\mathcal{W})) - \mathcal{W}(\sigma_i(\mathcal{V})) - \sigma_i([\mathcal{V}, \mathcal{W}]) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_i \cdot \{g(\nabla_{\mathcal{V}} e_i, e_\alpha) \cdot \sigma_\alpha(\mathcal{W}) - g(\nabla_{\mathcal{W}} e_i, e_\alpha) \cdot \sigma_\alpha(\mathcal{V})\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \sigma_\alpha \wedge \omega_{\alpha i}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \end{aligned}$$

und wir erhalten die erste Strukturgleichung des pseudo-Riemannschen Raums. Zur Formulierung der zweiten Strukturgleichung bezeichnen wir mit $\Omega := (\omega_{ij})$ die aus den 1-Formen ω_{ij} zusammengesetzte antisymmetrische $(m \times m)$ -Matrix. Diese weitere Strukturgleichung berechnet die Matrix $d\Omega - \Omega \wedge \Omega$ der 2-Formen und zu ihrer Formulierung benötigen wir die Krümmung des Raumes. Der *Krümmungstensor* $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} := \nabla_{\mathcal{U}}\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W} - \nabla_{\mathcal{V}}\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{W} - \nabla_{[\mathcal{U}, \mathcal{V}]}\mathcal{W}$ einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit wird wie im Fall von Flächen eingeführt und alle Identitäten von Satz 15, Kapitel 5.3 gelten weiterhin. Insbesondere gilt die *erste Bianchi-Identität*:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} + \mathcal{R}(\mathcal{V}, \mathcal{W})\mathcal{U} + \mathcal{R}(\mathcal{W}, \mathcal{U})\mathcal{V} = 0.$$

Allerdings reduziert sich im höherdimensionalen Fall dieser Krümmungstensor nicht mehr auf eine einzige Funktion, sondern ist ein $(3, 1)$ -Tensor. Wir führen den *Riemannschen Krümmungstensor* als einen $(4, 0)$ -Tensor ein:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1) := g(\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}, \mathcal{W}_1).$$

Beziehen wir uns auf ein orthonormales Reper e_1, \dots, e_m von Basisvektorfeldern der Länge ± 1 , so erhalten wir aus

$$\mathcal{R}(e_i, e_j)e_k := \sum_{l=1}^m R_{ijk}^l e_l$$

die Komponenten R_{ijk}^l des Krümmungstensors. Diese können mittels der Formel

$$R_{ijk}^l = \varepsilon_l \cdot \mathcal{R}(e_i, e_j, e_k, e_l)$$

durch den Riemannschen Krümmungstensor berechnet werden.

Satz 44 (Strukturgleichungen einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit). *Ist e_1, \dots, e_m ein lokales Orthonormalreper einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ das duale Reper, so gelten die Ableitungsgleichungen*

$$(1) \quad d\sigma_i = \sum_{\alpha=1}^m \sigma_\alpha \wedge \omega_{\alpha i}$$

$$(2) \quad d\omega_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^m R_{\alpha\beta i}^j \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta.$$

Beweis. Die erste Gleichung hatten wir bereits hergeleitet, zum Beweis der zweiten nutzen wir die Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs aus und erhalten nach einigen elementaren Schritten:

$$\begin{aligned} d\omega_{ij}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) &= \varepsilon_j \cdot (g(\nabla_{\mathcal{W}} e_i, \nabla_{\mathcal{V}} e_j) - g(\nabla_{\mathcal{V}} e_i, \nabla_{\mathcal{W}} e_j)) + \sigma_j(\mathcal{R}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) e_i) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \varepsilon_j \varepsilon_\alpha (\sigma_\alpha(\nabla_{\mathcal{W}} e_i) \sigma_\alpha(\nabla_{\mathcal{V}} e_j) - \sigma_\alpha(\nabla_{\mathcal{V}} e_i) \sigma_\alpha(\nabla_{\mathcal{W}} e_j)) \\ &\quad + \sigma_j(\mathcal{R}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) e_i). \end{aligned}$$

Benutzen wir die Umformung

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_\alpha \cdot \sigma_\alpha(\nabla_{\mathcal{V}} e_j) = \varepsilon_j \cdot g(\nabla_{\mathcal{V}} e_j, e_\alpha) = -\varepsilon_j \cdot g(e_j, \nabla_{\mathcal{V}} e_\alpha) = -\omega_{\alpha j}(\mathcal{V}),$$

und analog $\varepsilon_j \cdot \varepsilon_\alpha \cdot \sigma_\alpha(\nabla_{\mathcal{W}} e_j) = -\omega_{\alpha j}(\mathcal{W})$, so folgt insgesamt

$$d\omega_{ij}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \sum_{\alpha=1}^m \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) + \sigma_j(\mathcal{R}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) e_i) = \sum_{\alpha=1}^m \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) + R_{\mathcal{V}\mathcal{W}i}^j,$$

d. h. die zweite Strukturgleichung ist bewiesen. \square

Korollar 5. Verschwindet der Krümmungstensor einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit M^m , so existiert in der Umgebung jedes Punktes eine Karte in der die Koeffizienten der Riemannschen Metrik konstant sind,

$$g = \begin{bmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir wählen zunächst ein lokales Orthonormalreper e_1, \dots, e_m und betrachten die Matrix $\Omega = (\omega_{ij})$ der Zusammenhangsformen. Dann gilt

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega,$$

weil der Krümmungstensor verschwindet. Nach Satz 7, Kapitel 4 existiert eine (pseudo-) orthogonale Matrix A von Funktionen derart, dass

$$\Omega = dA \cdot A^{-1} \quad \text{und} \quad A(0) = \begin{bmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{bmatrix}$$

gilt. Ist $\tau := (\sigma_1 \dots \sigma_m) \cdot A$ das aus den dualen Formen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ und der Matrix A kombinierte 1-Formen-System, so ergibt sich aus den Strukturgleichungen

$$d\tau = d\sigma \cdot A - \sigma \wedge dA = \sigma \wedge \Omega \cdot A - \sigma \wedge \Omega \cdot A = 0.$$

Jede der 1-Formen τ_i kann gemäß dem Poincaré-Lemma als Differential einer Funktion dargestellt werden, $\tau_i = df_i$. Damit erhalten wir Koordinaten auf der Mannigfaltigkeit und für die pseudo-Riemannsche Metrik g gilt

$$g = \pm \sigma_1^2 + \dots + \pm \sigma_m^2 = \pm \tau_1^2 + \dots + \pm \tau_m^2 = \pm (df_1)^2 + \dots + \pm (df_m)^2. \quad \square$$

Definition 21. Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit verschwindendem Krümmungstensor heißt *flach*.

Die vorhergehende Folgerung besagt demnach, dass jeder flache pseudo-Riemannsche Raum lokal isometrisch zum Standardraum

$$(\mathbb{R}^{m,k}; dx^1 \odot dx^1 + \dots + dx^{m-k} \odot dx^{m-k} - dx^{m-k+1} \odot dx^{m-k+1} - \dots - dx^m \odot dx^m)$$

vom Index k ist.

Wir betrachten eine Kurve $\gamma(t)$ in der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m, g) und entlang dieser Kurve ein Vektorfeld $\mathcal{W}(t)$. Dieses können wir lokal als die Einschränkung eines auf M^m definierten Vektorfeldes \mathcal{W} annehmen. In der Umgebung eines Kurvenpunktes wählen wir die Koordinaten y^1, \dots, y^m und stellen das Vektorfeld \mathcal{W} sowie den Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ in diesen Koordinaten dar

$$\mathcal{W} = \sum_{i=1}^m W^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} W^k(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial W^k}{\partial y^i}(\gamma(t)).$$

Dann gilt

$$(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \mathcal{W})(\gamma(t)) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{dW^k(\gamma(t))}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \dot{\gamma}^i(t) \cdot W^j(\gamma(t)) \cdot \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Entlang der Kurve $\gamma(t)$ ist dieses Vektorfeld unabhängig von der Art und Weise, wie das zunächst nur auf $\gamma(t)$ erklärte Vektorfeld $\mathcal{W}(t)$ (lokal) zu einem Vektorfeld \mathcal{W} ausgedehnt wurde. Die angeführte Formel definiert demnach eindeutig ein Vektorfeld $\nabla \mathcal{W}/dt$, die *kovariante Ableitung* von $\mathcal{W}(t)$.

Definition 22. Ein Vektorfeld $\mathcal{W}(t)$ heißt *parallel* entlang $\gamma(t)$, falls

$$\frac{\nabla \mathcal{W}}{dt} = 0$$

gilt. In Koordinaten ist diese Bedingung äquivalent zu dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dW^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \dot{\gamma}^i \cdot W^j \cdot \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen sichert zu jedem Anfangsvektor $W_a \in TM_{\gamma(a)}^m$ im Anfangspunkt $\gamma(a)$ der Kurve die Existenz eines einzigen parallelen Vektorfeldes $W(t)$,

$$\frac{\nabla W}{dt} = 0, \quad W(a) = W_a.$$

Dessen Wert $W(b)$ im Endpunkt $\gamma(b)$ der Kurve nennt man die *Parallelverschiebung* P_γ des Vektors W_a entlang der Kurve $\gamma(t)$,

$$P_\gamma(W_a) := W(b).$$

Aufgrund der Linearität der Differentialgleichung und der Eigenschaft

$$\mathcal{U}(g(\mathcal{V}, \mathcal{W})) = g(\nabla_{\mathcal{U}} \mathcal{V}, \mathcal{W}) + g(\mathcal{V}, \nabla_{\mathcal{U}} \mathcal{W})$$

des Levi-Civita-Zusammenhangs wird die Parallelverschiebung

$$P_\gamma : T_{\gamma(a)} M^m \longrightarrow T_{\gamma(b)} M^m$$

eine lineare, isometrische Abbildung zwischen den Tangentialräumen. Die Parallelverschiebung $P_{\gamma_1 * \gamma_2}$ entlang einer aus zwei Kurven γ_1 und γ_2 mit übereinstimmenden End- bzw. Anfangspunkten zusammengesetzten Kurve $\gamma_1 * \gamma_2$ stimmt mit der Superposition der einzelnen Parallelverschiebungen überein,

$$P_{\gamma_2} \circ P_{\gamma_1} = P_{\gamma_1 * \gamma_2}.$$

Wir betrachten eine Fläche (M^2, g) mit einer positiv-definiten Riemannschen Metrik sowie eine geschlossene Kurve γ in M^2 , welche Rand eines Gebietes $N^2 \subset M^2$ ist. Die Parallelverschiebung entlang γ ist eine Drehung im Tangentialraum $T_{\gamma(0)} M^2$. Dieser Drehwinkel kann durch die Gaußsche Krümmung berechnet werden.

Satz 45. *Berandet die geschlossene Kurve γ ein Gebiet N^2 in einer Fläche M^2 mit Gaußscher Krümmung G , so ist die Parallelverschiebung entlang der Kurve die Drehung um den Winkel*

$$\phi = \int_{N^2} G \cdot dM^2 = 2\pi \cdot \chi(N^2) - \int_{\gamma} k_g \cdot ds.$$

Beweis. Entlang γ wählen wir ein orthonormales Reper e_1, e_2 derart, dass e_1 tangential an die Kurve ist. In einer Parametrisierung $\gamma : [0, L] \rightarrow M^2$ der Kurve ist ein Vektorfeld $\mathcal{V} = V^1(s) \cdot e_1(s) + V^2(s) \cdot e_2(s)$ genau dann parallel, falls

$$\frac{dV^1}{ds} = \omega_{12}(e_1) \cdot V^2 \quad \text{und} \quad \frac{dV^2}{ds} = -\omega_{12}(e_1) \cdot V^1$$

gilt. Betrachten wir die komplexwertige Funktion $z : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $z(s) := V^1(s) + i \cdot V^2(s)$, so können wir dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Form

$$\frac{dz}{ds} = -i \cdot \omega_{12}(e_1) \cdot z$$

schreiben. Dessen Lösung ist

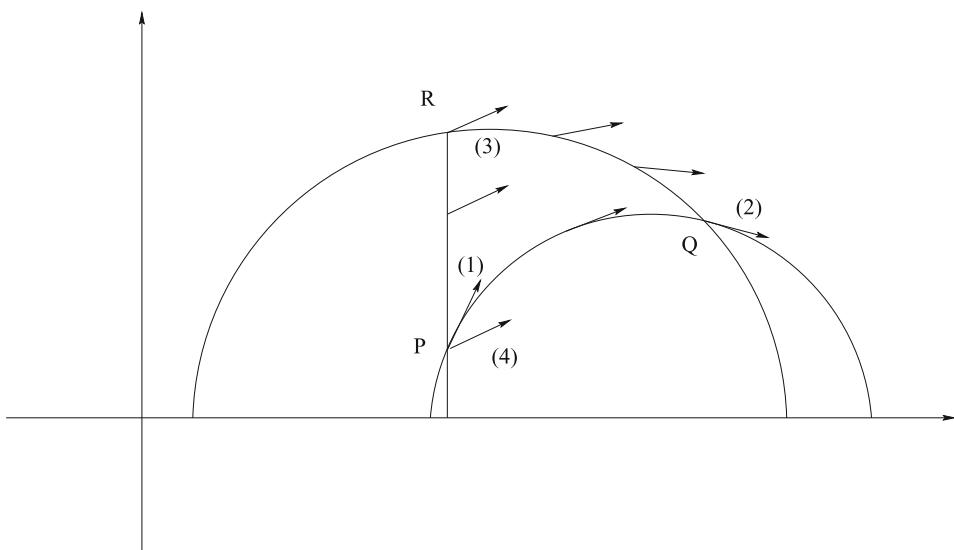
$$z(s) = z(0) \cdot \exp \left[-i \cdot \int_0^s \omega_{12}(e_1) \cdot ds \right]$$

und insbesondere erhalten wir den Drehwinkel der Parallelverschiebung

$$\phi = - \int_{\gamma} \omega_{12} = - \int_{N^2} d\omega_{12} = \int_{N^2} G \cdot dM^2.$$

□

Beispiel 29. Es ist eine spezielle Eigenschaft des hyperbolischen Raums \mathcal{H}^2 , dass der hyperbolische Winkel mit dem gewöhnlichen euklidischen Winkel übereinstimmt. Ganz allgemein ändert sich der Winkel bei Parallelverschiebung nicht. Daher ist die Parallelverschiebung eines Vektors entlang einer *geodätischen Linie* einer Fläche derjenige Vektor am Ende der Linie, dessen Winkel zum Tangentialvektor der gleiche wie zuvor ist. Die Punkte PQR in der nachfolgenden Abbildung bilden die Ecken eines geodätischen Dreiecks in der hyperbolischen Ebene (siehe Beispiel 24). Beginnt man nun in P mit einem tangentialen Vektor (1), verschiebt ihn bis zum Punkt Q (2) und entlang des oberen geodätischen Bogens bis R (3) und entlang des Geradenstücks RP zurück nach P (4), so stimmt der verschobene Vektor offensichtlich nicht mit dem ursprünglichen Vektor überein.



Die Parallelverschiebung gestattet es, *kovariante Ableitungen* $\nabla_{\mathcal{V}}T$ beliebiger Tensoren T nach Vektorfeldern einzuführen. Wir erläutern dies für Tensoren vom Typ $(k, 0)$. Sind in einem Punkt $x \in M^m$ Vektoren $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k \in T_x M^m$ gegeben und ist $\gamma(t)$ die zur Zeit $t = 0$ durch den Punkt $x \in M^m$ verlaufende Integralkurve des Vektorfeldes \mathcal{V} , so definieren wir

$$(\nabla_{\mathcal{V}}T)(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k)(x) := \frac{d}{dt}(T_{\gamma(t)}(P_{\gamma}(W_1), \dots, P_{\gamma}(W_k)))|_{t=0}.$$

Dabei bezeichnet P_{γ} die Parallelverschiebung entlang der Kurve γ vom Punkt $x = \gamma(0)$ nach dem Kurvenpunkt $\gamma(t)$. Ist beispielsweise T ein $(1, 0)$ -Tensor und \mathcal{W} ein Vektorfeld, so erhalten wir die Formel

$$(\nabla_{\mathcal{V}}T)(\mathcal{W})(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{\gamma(t)}(P_{\gamma}(\mathcal{W}(x))) - T_{\gamma(0)}(\mathcal{W}(x))}{t} = \mathcal{V}(T(\mathcal{W}))(x) - T(\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{W})(x).$$

Satz 46. Die kovariante Ableitung $\nabla_{\mathcal{V}} T$ eines $(k, 0)$ -Tensors ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{V}} T)(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k) &= \mathcal{V}(T(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k)) - T(\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_k) \\ &\quad - \dots - T(\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_{k-1}, \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}_k). \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Metrik g , aufgefasst als $(2, 0)$ -Tensor, ist parallel:

$$(\nabla_{\mathcal{V}} g)(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = \mathcal{V}(g(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)) - g(\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) - g(\mathcal{W}_1, \nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{W}_2) = 0.$$

Eine vollständig elementare, jedoch etwas längliche Rechnung, die Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs und die Definition des Krümmungstensors ausnutzend, führt auf eine Identität für die kovariante Ableitung $\nabla \mathcal{R}$ des Krümmungstensors, die sog. zweite Bianchi-Identität. Wir verzichten auf diesen einfachen Beweis und formulieren nur das Resultat.

Satz 47 (zweite Bianchi-Identität). *Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ fünf Vektorfelder der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m, g) , so gilt*

$$(\nabla_{\mathcal{U}} \mathcal{R})(\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) + (\nabla_{\mathcal{V}} \mathcal{R})(\mathcal{W}, \mathcal{U}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) + (\nabla_{\mathcal{W}} \mathcal{R})(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = 0.$$

Die Länge einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M^m$ in einem pseudo-Riemannschen Raum definieren wir durch das Integral

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{|g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))|} dt.$$

Für eine Variation $\gamma_{\varepsilon} : [a, b] \rightarrow M^m$ der Anfangskurve $\gamma(t)$ mit festen Anfangs- und Endpunkten $\gamma_{\varepsilon}(a) = \gamma(a), \gamma_{\varepsilon}(b) = \gamma(b)$ ist das Variationsvektorfeld

$$\mathcal{W}(t) := \frac{d}{d\varepsilon} \gamma_{\varepsilon}(t) \Big|_{\varepsilon=0}$$

ein entlang der Kurve $\gamma(t)$ definiertes Feld und es verschwindet in deren Enden. Dessen kovariante Ableitung $\nabla \mathcal{W}/dt$ entlang der Kurve $\gamma(t)$ stimmt mit der kovarianten Ableitung $\nabla \dot{\gamma}_{\varepsilon}(t)/d\varepsilon$ des entlang der Kurve $\eta(\varepsilon) := \gamma_{\varepsilon}(t)$ definierten Vektorfeldes $\dot{\gamma}_{\varepsilon}(t)$ überein,

$$\frac{\nabla \mathcal{W}}{dt}(t) = \left. \frac{\nabla \dot{\gamma}_{\varepsilon}(t)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Diese Formel ergibt sich aus den lokalen Ausdrücken für beide kovarianten Ableitungen unmittelbar. Indem wir die Kurve $\gamma(t)$ nach Länge parametrisieren, erhalten wir für die Variation der Kurvenlänge die Formel

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} L(\gamma_{\varepsilon}) \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_a^b g\left(\frac{\nabla \dot{\gamma}_{\varepsilon}(t)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \dot{\gamma}(t)\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{\nabla \mathcal{W}}{dt}(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt = - \int_a^b g\left(\mathcal{W}(t), \frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt}(t)\right) dt. \end{aligned}$$

Satz 48. Ist eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M^m$ ein kritischer Punkt des Längenfunktional, betrachtet auf der Menge aller Kurven mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt, so ist der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ parallel entlang der Kurve $\gamma(t)$,

$$\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt} = 0.$$

Definition 23. Eine Kurve $\gamma(t)$ im pseudo-Riemannschen Raum (M^m, g) , deren Tangentialvektorfeld parallel ist, heißt *geodätische Linie*.

Bemerkung. Ist die Kurve $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$ in lokalen Koordinaten gegeben, so lautet die Gleichung der geodätischen Linie

$$\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung und Korollar 3 aus Kapitel 5.5 gilt entsprechend:

Korollar 6. Zu jedem Punkt $x \in M^m$ und jedem Vektor $\mathcal{V} \in T_x M^m$ einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit ohne Rand existiert genau eine geodätische Linie $\gamma_\mathcal{V} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^m$ mit $\gamma_\mathcal{V}(0) = x$ und $\dot{\gamma}_\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}$.

Die dadurch bestimmte geodätische Linie $\gamma_\mathcal{V}(t)$ ist nicht unbedingt für alle Parameter $t \in \mathbb{R}$ definiert. Die Teilmenge $\Sigma_x \subset T_x M^m$ aller derjenigen Vektoren $\mathcal{V} \in T_x M^m$, für welche $\gamma_\mathcal{V}(t)$ für $t = 1$ existiert, ist eine offene Umgebung des Nullvektors in $T_x M^m$. Die *Exponentialabbildung* im Punkte x der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit bildet Σ_x in den Raum ab,

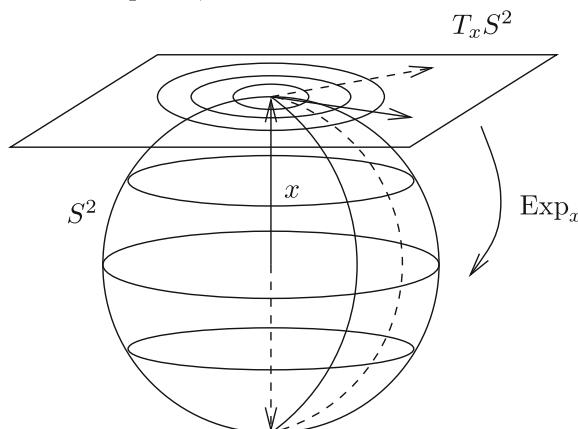
$$\text{Exp}_x : \Sigma_x \longrightarrow M^m, \quad \text{Exp}_x(\mathcal{V}) = \gamma_\mathcal{V}(1).$$

Die Exponentialabbildung ist glatt und ihr Differential $d \text{Exp}_x : T_0(T_x M^m) = T_x M^m \rightarrow T_x M^m$ ist die Identität,

$$d \text{Exp}_x(\mathcal{W}) = \frac{d}{dt}(\text{Exp}(t\mathcal{W}))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_{t\mathcal{W}}(1))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_\mathcal{W}(t))|_{t=0} = \mathcal{W}.$$

Somit wird die Exponentialabbildung Exp_x auf einer offenen Umgebung $0 \in U_x \subset T_x M^m$ des Nullvektors im Tangentialraum ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung $x \in V_x \subset M^m$ des Punktes.

Beispiel 30. Betrachte S^2 ; ihre Geodäten sind die Großkreise mit Länge 2π . Aufgrund ihrer Periodizität sind diese trivialerweise für alle Zeiten definiert, damit ist immer $\Sigma_x = T_x S^2$. Fixiere $x \in S^2$. Das Bild eines Kreises $\|V\| = \text{const} =: c$ in $T_x S^2$ ist ein Kreis auf der Sphäre, der in einer zu x normalen Ebene liegt.



Für $c = k\pi$ degenerieren diese Kreise zu einem Punkt, dem Punkt x für k gerade bzw. $-x$ für k ungerade. Damit ist die Einschränkung von Exp_x auf $B(0; \pi) \subset T_x S^2$ ein Diffeomorphismus nach $S^2 - \{-x\}$.

Aus dem Krümmungstensor gewinnt man durch Kontraktion (Spurbildung) einfache Krümmungsvarianten der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, den Ricci-Tensor sowie die Skalarkrümmung. Weiterhin spielt die Schnittkrümmung eine wichtige Rolle. Wir besprechen jetzt diese Krümmungsgrößen.

Definition 24. Der *Ricci-Tensor* Ric ist die erste Kontraktion des Krümmungstensors,

$$\text{Ric}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \sum_{i,j=1}^m g^{ij} \mathcal{R}(e_i, \mathcal{U}, \mathcal{V}, e_j).$$

Die algebraischen Identitäten des Krümmungstensors implizieren unmittelbar, dass Ric ein symmetrischer $(2, 0)$ -Tensor ist,

$$\text{Ric}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \text{Ric}(\mathcal{V}, \mathcal{U}).$$

Bilden wir die Spur des Ricci-Tensors bzgl. der pseudo-Riemannschen Metrik g (Kapitel 5.4), so entsteht die *Skalarkrümmung* τ des Raumes.

Definition 25. Die *Skalarkrümmung* der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist die Funktion

$$\tau := \sum_{i,j,k,l=1}^m g^{ij} g^{kl} \mathcal{R}(e_i, e_k, e_l, e_j).$$

Im Gegensatz zum Fall der Flächen ($m = 2$) ist in Dimensionen, beginnend ab drei, der Krümmungstensor nicht mehr durch die Skalarkrümmung bestimmt. Daher enthalten sowohl der Ricci-Tensor wie auch die Skalarkrümmung nicht alle Krümmungsinformationen über die Mannigfaltigkeit. Die letzte der Krümmungsgrößen ist die Schnittkrümmung. Sie hängt außer von einem Punkt der Mannigfaltigkeit zusätzlich von einer nichtausgearteten 2-Ebene des Tangentialraumes ab. Darunter verstehen wir einen zweidimensionalen Unterraum $E^2 \subset T_x M^m$, dessen orthogonales Komplement

$$(E^2)^\perp = \{\mathcal{W} \in T_x M^m : g(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0 \text{ für alle } \mathcal{V} \in E^2\}$$

komplementär zu E^2 ist, $E^2 \oplus (E^2)^\perp = T_x M^m$. Schneiden wir E^2 mit einer offenen Menge $0 \in U_x \subset T_x M^m$, auf welcher die Exponentialabbildung definiert und ein Diffeomorphismus ist, so wird

$$M^2(E^2) := \text{Exp}_x(E^2 \cap U_x)$$

eine Fläche in M^m . Deren Tangentialebene im Punkt x ist E^2 und die pseudo-Riemannsche Metrik g von M^m induziert durch Einschränkung eine solche auf $M^2(E^2)$. Deren Gaußsche Krümmung $G(x)$ im Punkt $x \in M^2(E^2)$ nennt man die *Schnittkrümmung* $K(x, E^2)$ der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit im Punkt x und in Richtung der 2-Ebene E^2 . Sie kann mittels des Krümmungstensors von M^m berechnet werden.

Satz 49. Ist $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ eine Basis der nichtausgearteten Ebene E^2 , so gilt

$$K(x, E^2) = \frac{\mathcal{R}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1)}{g(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1) g(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_2) - g^2(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)}.$$

Beweis. Im Beweis wollen wir voraussetzen, dass die Metrik von M^m positiv-definit ist. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, in einigen Formeln müssen wir das Vorzeichen der Länge des entsprechend auftretenden Vektors nicht berücksichtigen und damit werden diese etwas einfacher. Zunächst bemerken wir, dass die rechte Seite der Formel für $K(x, E^2)$ nicht von der Wahl der Basis $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ abhängt, und daher genügt es, diese Formel für eine orthonormale Basis in E^2 zu beweisen. Wir fixieren im Punkt $x \in M^2(E^2) \subset M^m$ eine orthonormale Basis $e_1(x), e_2(x), \dots, e_m(x)$ so, dass die ersten beiden Vektoren in E^2 liegen. Durch Parallelverschiebung entlang der geodätischen Strecken $\{\text{Exp}_x(t \cdot \mathcal{W}) : \mathcal{W} \in T_x M^m\}$ setzen wir diese Basis zu einem lokalen Orthonormalreper fort. Im Punkt x ist dieses Reper parallel,

$$\nabla e_i(x) = 0.$$

Weiterhin sind e_1, e_2 auf der Fläche $M^2(E^2)$ tangential an diese, weil $M^2(E^2)$ aus geodätischen Strecken mit Ausgangsvektor in E^2 besteht. Seien $\sigma_\alpha, \omega_{ij}$ die dualen Formen zu dem Reper e_1, \dots, e_m bzw. die Zusammenhangsformen der Riemannschen Mannigfaltigkeit M^m . Die Einbettung $f : M^2(E^2) \rightarrow M^m$ gestattet uns, diese Formen auf die Fläche einzuschränken,

$$\mu_\alpha := f^*(\sigma_\alpha) , \quad \xi_{ij} := f^*(\omega_{ij}).$$

Dann gilt $\mu_3 = \mu_4 = \dots = \mu_m = 0$ und aus den Strukturgleichungen von M^m folgt nach Einschränkung auf $M^2(E^2)$

$$d\mu_1 = \mu_2 \wedge \xi_{21}, \quad d\mu_2 = \mu_1 \wedge \xi_{12}, \quad d\xi_{12} = \sum_\alpha \xi_{1\alpha} \wedge \xi_{\alpha 2} + R_{121}^2 \mu_1 \wedge \mu_2.$$

Das Paar μ_1, μ_2 ist innerhalb der Fläche $M^2(E^2)$ das duale Reper zu e_1, e_2 und die letzten Gleichungen zeigen, dass die Zusammenhangsform ω_{12}^* von $M^2(E^2)$ mit ξ_{12} übereinstimmt, $\omega_{12}^* = \xi_{12}$. Die Gaußsche Krümmung G von $M^2(E^2)$ wird durch

$$-G \cdot \mu_1 \wedge \mu_2 = d\omega_{12}^* = d\xi_{12} = \sum_\alpha \xi_{1\alpha} \wedge \xi_{\alpha 2} + R_{121}^2 \mu_1 \wedge \mu_2$$

bestimmt. Im Punkt $x \in M^2(E^2)$ gilt jedoch $\xi_\alpha(e_1) = g(\nabla_{e_1} e_1, e_\alpha) = 0$ und daher erhalten wir

$$-G(x) = R_{121}^2 = g(\mathcal{R}(e_1, e_2) e_1, e_2) = -g(\mathcal{R}(e_1, e_2) e_2, e_1). \quad \square$$

Spezielle Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind etwa sogenannte Einstein-Räume und Räume konstanter Schnittkrümmung. Diese wollen wir jetzt behandeln.

Definition 26. Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *Einstein-Raum*, falls der Ricci-Tensor proportional zur Metrik ist, $\text{Ric} = h \cdot g$.

Bemerkung. Kontrahieren wir die Gleichung $\text{Ric} = h \cdot g$, so entsteht $\tau = m \cdot h$, d. h. der Proportionalitätsfaktor ist eindeutig durch die Skalarkrümmung der Mannigfaltigkeit festgelegt,

$$\text{Ric} = \frac{\tau}{m} \cdot g.$$

Wir beweisen, dass der Proportionalitätsfaktor konstant ist.

Satz 50. Ist (M^m, g) ein zusammenhängender Einstein-Raum der Dimension $m \geq 3$, so ist die Skalarkrümmung τ konstant.

Beweis. Wir wählen ein Orthonormalreper e_1, \dots, e_m sowie ein beliebiges Vektorfeld \mathcal{U} . In die zweite Bianchi-Identität setzen wir sodann die Vektorfelder $\mathcal{V} = \mathcal{W}_2 := e_i$, $\mathcal{W} := e_j$ und $\mathcal{W}_1 := e_j$ ein und wir summieren über alle Indizes $1 \leq i, j \leq m$. Nach elementarer Umformung erhalten wir die Gleichung

$$\sum_j \varepsilon_j \left((\nabla_{\mathcal{U}}) \text{Ric}(e_j, e_j) - 2(\nabla_{e_j} \text{Ric})(\mathcal{U}, e_j) \right) = 0.$$

Ist der Ricci-Tensor proportional zur Metrik, $\text{Ric} = h \cdot g$, so folgt aus $\nabla g = 0$ sofort $\nabla_{\mathcal{U}} \text{Ric} = \mathcal{U}(h) \cdot g$ und die letzte Gleichung geht über in

$$m \cdot \mathcal{U}(h) - 2 \sum_j \varepsilon_j e_j(h) g(\mathcal{U}, e_j) = 0.$$

Betrachten wir die Vektorfelder $\mathcal{U} := e_k$, dann entsteht $(m-2) dh(e_k) = 0$ und im Fall $m > 2$ verschwindet das Differential dh der Funktion h . \square

Beispiel 31. In sphärischen Koordinaten ist die Standardmetrik der zweidimensionalen Sphäre die quadratische Form

$$g|_{S^2} = \cos^2(\psi) \cdot d\varphi^2 + d\psi^2.$$

Wählen wir im Produkt $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ eine pseudo-Riemannsche Metrik h und eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so können wir in der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}^3 - 0) \times \mathbb{R} = S^2 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ die rotationssymmetrische Metrik

$$g := h \oplus e^{2f(r,t)} \cdot g|_{S^2}$$

betrachten. Eine längere Berechnung des Ricci-Tensors der Metrik g führt auf das Ergebnis, dass g eine vierdimensionale Einstein-Metrik mit verschwindender Skalarkrümmung genau dann ist, falls die Differentialgleichungen

$$e^{-2f} = \Delta(f) + 2|\text{grad}(f)|^2 \quad \text{und} \quad G \cdot h = 2 \cdot \text{Hess}^h(f) + 2 \cdot df \odot df$$

gelten. Dabei sind Δ und grad der Laplace-Operator bzw. der Gradient der zweidimensionalen pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, h)$, G deren Gaußsche Krümmung und

$$\text{Hess}^h(f)(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := h(\nabla_{\mathcal{V}}(\text{grad}(f)), \mathcal{W})$$

die symmetrische *Hessesche Form* der Funktion f bezüglich der Metrik h . Wählen wir beispielsweise die Metrik

$$h = \left[1 + \frac{2M}{r} \right] dr^2 + c \frac{4M}{r} dr \odot dt - c^2 \left[1 - \frac{2M}{r} \right] dt^2$$

und die Funktion $f(r, t) = \log(r)$, so entsteht die *Schwarzschild-Eddington-Metrik* in $(\mathbb{R}^3 - 0) \times \mathbb{R}$, die im Sinne der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie das von einer im Punkt $x = 0$ konzentrierten Masse erzeugte Gravitationsfeld modelliert. Weitere Lösungen des Differentialgleichungssystems beschreiben etwa das Gravitationsfeld einer rotierenden Masse (*Kerr-Metrik*).

Definition 27. Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^m, g) heißt ein Raum konstanter Schnittkrümmung (oder Raumform), falls eine Funktion $K^* : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ derart existiert, dass für jede 2-Ebene $E^2 \subset T_x M^m$

$$K(x, E^2) = K^*(x)$$

gilt.

Satz 51. Die Schnittkrümmung $K = K^*$ jeder Raumform M^m der Dimension $m \geq 3$ ist konstant und der Krümmungstensor ist algebraisch durch die Metrik bestimmt:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = K^*(g(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cdot \mathcal{U} - g(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \cdot \mathcal{V}).$$

Beweis. Wir betrachten den Tensor

$$S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) := \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) - K^*(g(\mathcal{V}, \mathcal{W}_1)g(\mathcal{U}, \mathcal{W}_2) - g(\mathcal{U}, \mathcal{W}_1)g(\mathcal{V}, \mathcal{W}_2))$$

und bemerken, dass S die gleichen Symmetrieeigenschaften wie der Krümmungstensor hat:

- (1) $S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = -S(\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$
- (2) $S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = -S(\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1)$
- (3) $S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) + S(\mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{U}, \mathcal{W}_2) + S(\mathcal{W}_1, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_2) = 0$
- (4) $S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = S(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Eine weitere Eigenschaft des Tensors S ergibt sich aus der Formel für die Schnittkrümmung unmittelbar:

$$(5) \quad S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0.$$

Eine Rechnung, die nur die Gleichungen (1)-(5) ausnutzt, zeigt, dass $S \equiv 0$ verschwinden muss. In der Tat, aus

$$\begin{aligned} 0 &= S(\mathcal{U}, \mathcal{V} + \mathcal{W}_2, \mathcal{V} + \mathcal{W}_2, \mathcal{U}) \\ &= S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{U}) + S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_2, \mathcal{U}) + S(\mathcal{U}, \mathcal{W}_2, \mathcal{V}, \mathcal{U}) + S(\mathcal{U}, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_2, \mathcal{U}) \\ &= 2 \cdot S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_2, \mathcal{U}) \end{aligned}$$

schließen wir zunächst $S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_2, \mathcal{U}) = 0$. Damit ist in der Gleichung (5) an dritter Stelle der Vektor \mathcal{V} durch den beliebigen Vektor \mathcal{W}_2 ersetzt worden. Wir wiederholen diesen Schritt nochmals, von $S(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_2, \mathcal{U}) = 0$ ausgehend. Dann kann an vierter Stelle in dieser Gleichung der Vektor \mathcal{U} durch einen weiteren unabhängigen Vektor \mathcal{W}_1 ersetzt werden, d. h. S verschwindet und der Krümmungstensor einer Raumform ist bestimmt:

$$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W} = K^*(g(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cdot \mathcal{U} - g(\mathcal{U}, \mathcal{W}) \cdot \mathcal{V}).$$

Kontrahieren wir den Krümmungstensor, so wird der entstehende Ricci-Tensor proportional zur Metrik:

$$\text{Ric} = (m-1) K^* \cdot g.$$

Damit ist M^m insbesondere ein Einstein-Raum und K^* eine konstante Funktion. \square

Die Komponenten $R_{\alpha\beta i}^j$ des Krümmungstensors einer Raumform mit positiv-definiter Metrik (der Einfachheit halber) sind

$$R_{\alpha\beta i}^j = K^* (\delta_{\beta i} \delta_{\alpha j} - \delta_{\beta j} \delta_{\alpha i})$$

und die Strukturgleichungen vereinfachen sich:

$$d\sigma_i = \sum_{\alpha=1}^m \sigma_\alpha \wedge \omega_{\alpha i}, \quad d\omega_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} - K^* \sigma_i \wedge \sigma_j.$$

Die lokale Beschreibung dieser Räume gab Riemann Mitte des 19. Jahrhunderts.

Satz 52 (Riemann 1854). *Jede Raumform ist lokal isometrisch zu dem sphärischen Raum \mathbb{S}^m , dem euklidischen Raum \mathbb{R}^m oder dem hyperbolischen Raum \mathbb{H}^m .*

Aufgaben

1. Sei $\gamma(s)$ eine Kurve in natürlicher Parametrisierung und $\mu(t)$ dieselbe Kurve in einer beliebigen Parametrisierung, die folglich mit γ über $\mu(t) = \gamma(s(t))$ in Beziehung steht:

a) Man beweise für die zweite Ableitung von μ die Formel

$$\ddot{\mu}(t) = \frac{d^2\mu(t)}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\gamma}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \kappa(t) (\dot{s})^2 \cdot \vec{h} + \ddot{s} \cdot \vec{t}.$$

b) Man folgere hieraus die Formel für die Krümmung in allgemeiner Parametrisierung

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mu}(t) \times \ddot{\mu}(t)\|}{\|\dot{\mu}(t)\|^3}.$$

c) Man beweise, dass die Torsion im Frenet-Reper sich schreiben lässt als

$$\tau(t) = -\langle \vec{t} \times \vec{h}', \vec{h} \rangle = \det(\vec{t}, \vec{h}, \vec{h}') = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\kappa(t)^2}.$$

d) Man leite analog wie in a) eine Formel für $\ddot{\mu}(t)$ her und folgere, dass die Torsion in beliebiger Parametrisierung durch

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\mu}(t), \ddot{\mu}(t), \ddot{\mu}(t))}{\|\dot{\mu}(t) \times \ddot{\mu}(t)\|^2}$$

gegeben ist.

2. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve, deren sämtliche Tangenten durch ein und denselben Punkt verlaufen. Man beweise, dass \mathcal{C} dann ein Teil einer Geraden ist.

3. Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ eine Kurve, deren sämtliche Tangenten zu ein und derselben Geraden parallel sind. Man beweise, dass \mathcal{C} dann ein Teil einer Geraden ist.

4. Man berechne Krümmung und Windung folgender Kurven:

- a) $\gamma(t) = (t, a(e^{t/a} + e^{-t/a})/2, 0)$ (Kettenlinie);
- b) $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ (Schraubenlinie);
- c) $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$;
- d) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$.

5. Man beweise, dass $\gamma(t) = (at, bt^2, t^3)$ mit $a, b > 0$ genau dann eine Böschungs- linie ist, falls $2b^2 = 3a$ gilt.

6. Man beweise, dass eine C^3 -Kurve \mathcal{C} genau dann eine Schraubenlinie ist, wenn ihre Krümmung $\kappa > 0$ und ihre Windung τ konstant sind.

7. Man bestimme die ebenen Kurven $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ mit

- a) $\kappa(s) = \text{const.}$
- b) $\kappa(s) = 1/\sqrt{s};$
- c) $\kappa(s) = 1/\sqrt{1-s^2}.$

8. Der *Darboux-Vektor* einer Kurve mit nicht verschwindender Krümmung ist der Vektor $\vec{d} := \tau \cdot \vec{t} + \kappa \cdot \vec{b}$. Man beweise, dass die Frenet-Formeln in folgender Gestalt geschrieben werden können:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{d} \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{h}}{ds} = \vec{d} \times \vec{h}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{d} \times \vec{b}.$$

9. Wir betrachten die sphärische Kurve $\gamma^*(s) := \vec{t}(s) : [0, L] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und setzen voraus, dass die Krümmung $\kappa(s)$ der Ausgangskurve $\gamma(s)$ nicht verschwindet. Man beweise, dass $\gamma^*(s)$ eine reguläre Kurve ist und berechne deren Krümmung κ^* sowie deren Windung τ^* . Welche Kurve $\gamma^*(s)$ entsteht für die Schraubenlinie $\gamma(s)$?

10. Eine Böschungslinie vom Böschungswinkel α liegt genau dann auf einer Sphäre vom Radius R , wenn ihre Krümmung $\kappa(s)$ und ihre Bogenlänge s die Relation

$$\frac{s^2}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\kappa^2(s)} = R^2$$

erfüllen.

11. Sei $\gamma(s) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eine geschlossene, ebene Kurve und p ein Punkt der Ebene, der nicht auf dieser Kurve liegt. Man beweise, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^L \frac{\vec{t}(s)}{\gamma(s) - p} ds$$

eine ganze Zahl ist. Diese nennt man den *Umlaufindex* der Kurve $\gamma(s)$ um den Punkt p .

12 (Jacobi 1842). Sei $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Kurve nirgends verschwindender Krümmung und möge die Kurve des Hauptnormalenvektors \vec{h} eine einfache, geschlossene Kurve auf der Sphäre S^2 sein. Man beweise, dass \vec{h} die Sphäre in zwei Teile gleicher Fläche zerlegt.

13. Man klassifiziere alle Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung unter Verwendung der Ergebnisse aus den Beispielen 3 und 11. Es ergeben sich insgesamt 9 geometrische Typen. Welche davon können kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand sein?

14. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche dergestalt, dass die Tangentialvektoren $\partial/\partial u$ und $\partial/\partial v$ in jedem Punkt $(u, v) \in U$ orthogonal sind. Man setze

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle$$

und wähle als Orthonormalreper

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}.$$

a) In dem dualen Reper $\sigma_1 = \sqrt{E} du$, $\sigma_2 = \sqrt{G} dv$ ist die Zusammenhangsform ω_{12} gegeben durch

$$\omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[-\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \sigma_1 + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \sigma_2 \right];$$

b) die Gaußsche Krümmung ist gleich

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \sqrt{E}/\partial v}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \sqrt{G}/\partial u}{\sqrt{E}} \right) \right];$$

c) als Anwendung bestimme man die Gaußsche Krümmung einer Drehfläche, deren Leitkurve nicht notwendigerweise auf Bogenlänge parametrisiert ist.

15. Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche verschwindender Gaußscher Krümmung. Man beweise:

a) Es existieren zwei zueinander orthogonale Vektorfelder \mathcal{V} und \mathcal{W} der Länge $\|\mathcal{V}\| = 1$ und $\|\mathcal{W}\| = |H|$, deren Flüsse volumenerhaltend sind, $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(dM^2) = \mathcal{L}_{\mathcal{W}}(dM^2) = 0$.

- b) Die Integralkurven des Vektorfeldes $\mathcal{W}/|H|$ sind geodätische Linien.
- c) Sei $B : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige Funktion, welche in einem Punkt die geodätische Krümmung der Integralkurve des Vektorfeldes \mathcal{V} misst. Dann gilt $\mathcal{W}(H) = H^2 \cdot B$.
- d) Es gilt die Kommutatorformel $[\mathcal{W}/|H|, \mathcal{V}] = B \cdot \mathcal{V}$.

16. Man diskutiere die geometrischen Eigenschaften des Helikoiden und des Katenoiden und untersuche die Abbildung, welche die eine Fläche in die andere transformiert.

17. Die *Ennepersche Minimalfläche* wird parametrisiert über $(z = a + ib)$

$$F(a, b) = (\operatorname{Re}(3z - z^3), \operatorname{Re}i(3z + z^3), \operatorname{Re}(-3z^2)).$$

Man bestimme ihre Gaußsche Krümmung. Ferner zeige man, dass ihre Krümmungslien (das sind die Kurven auf der Fläche, die durch Festhalten von einem der beiden Parameter a bzw. b entstehen) sämtlich in einer Ebene durch die y - und z -Achse liegen und polynomiale Bogenlänge haben. Man bestimme die Gleichung für die Tangentialebene an einen Punkt $x \in F$ und bringe sie in die Gestalt

$$\langle p - q, x \rangle = \langle p, p \rangle - \langle q, q \rangle.$$

Dies ist die Gleichung für eine Ebene, an der die Punkte p und q Spiegelbilder zueinander sind. Die Linien $p(a), q(b)$ sind zwei Parabeln in den rechtwinkligen Ebenen $x = 0, y = 0$, die so liegen, dass der Scheitel jeder von beiden gleichzeitig Brennpunkt der anderen ist (sog. *Fokalparabeln*). Man veranschauliche sich die genannten Eigenschaften mit Hilfe von Maple oder Mathematica.

18. Die von Bour (1862) untersuchten Minimalflächen entstehen aus der Weierstraß-Darstellung, indem man in diese $f(z) = cz^m, g(z) = z$ einsetzt. Man zeige, dass sie sich längentreu auf eine Drehfläche abbilden lassen.

19. Man beweise folgende Eigenschaften der Betragsfläche einer holomorphen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$:

- a) Die Betragsfläche ist in einer hinreichend kleinen Umgebung einer im Endlichen gelegenen Polstelle von f hyperbolisch gekrümmmt.
- b) Sei z_0 eine im Endlichen gelegene Nullstelle von f . Ist die Nullstelle mehrfach, so ist die Betragsfläche in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0 elliptisch gekrümmmt. Ist die Nullstelle einfach, so zerfällt jede hinreichend kleine Umgebung von z_0 in $2k - 2$ sektorähnliche Teile, in denen die Betragsfläche abwechselnd elliptisch und hyperbolisch gekrümmmt ist. Dabei ist k der Exponent desjenigen nicht verschwindenden Terms, der in der Reihenentwicklung von f auf den Summanden $a_1(z - z_0)$ folgt.

In den beiden folgenden Aufgaben ist es hilfreich, die im Beweis des Satzes von Minkowski-Steiner vorkommenden Positionsfunktionen p_i zu verwenden:

- 20.** Sei M^2 eine Fläche mit Normalenvektor e_3 . Man beweise, dass die auf der Fläche definierte 1-Form $\eta^1 = \langle x, de_3 \rangle$ geschlossen ist, und folgere, dass für eine Kurve $\gamma \subset M^2$

$$\int_{\gamma} \langle x, de_3 \rangle = 0$$

gilt, falls eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

- a) Die Kurve γ ist Rand einer zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $G^2 \subset M^2$.
- b) M ist einfach zusammenhängend.

- 21.** Sei M^2 eine kompakte Fläche ohne Rand. Man zeige, dass ein Punkt $x_0 \in M^2$ mit den Eigenschaften existiert:

- a) der Normalenvektor e_3 ist in x_0 parallel zum Positionsvektor x_0 ,
- b) die Gaußsche Krümmung ist in x_0 positiv, $G(x_0) > 0$,

Hinweis: Die Funktion $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$ muss auf M^2 einen kritischen Punkt haben.

- 22.** Die Gruppe $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ wirke auf der hyperbolischen Ebene \mathcal{H}^2 durch

$$g \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Man verifiziere, dass der Bildpunkt $g \cdot z$ in der Tat wieder in \mathcal{H}^2 liegt, und dass das Hintereinanderausführen zweier solcher Transformationen der Matrizenmultiplikation in G entspricht. Weiterhin zeige man, dass jedes $g \in G$ die Metrik invariant lässt, also eine Isometrie von \mathcal{H}^2 auf sich selbst ist.

- 23.** Sei $M^3 = \mathbb{R}^3$ und bezeichne mit $D_Y X$ die Richtungsableitung der vektorwertigen Funktion $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in Richtung des Vektors X . Man beweise, dass durch

$$\nabla_X Y := D_X Y + \frac{1}{2} X \times Y$$

eine kovariante Ableitung definiert wird, die alle Eigenschaften (1)–(4) aus Satz 43, nicht aber Eigenschaft (5) hat.

- 24.** Auf der Menge $M^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi/2 < y < \pi/2\}$ betrachte man die pseudo-Riemannsche Metrik

$$I = \frac{dx^2 - dy^2}{\cos^2(y)}.$$

- a) Man zeige, dass $E = \frac{x'^2 - y'^2}{\cos^2(y)}$ und $P = \frac{x'}{\cos^2(y)}$ erste Integrale des geodätischen Flusses sind, die zudem die Abschätzung $P^2 - E \geq 0$ erfüllen.

- b) Man diskutiere den Verlauf der geodätischen Linien auf M^2 . Hierzu setze man y als Funktion von x an und integriere die entstehende gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.
- c) Es existieren Punkte auf M^2 , die sich nicht durch eine geodätische Linie verbinden lassen.

25. Jeder dreidimensionale Einstein-Raum ist ein Raum konstanter Krümmung.

26. Sei M^m ein nicht flacher Einstein-Raum (zum Beispiel S^m). Man zeige: $M^m \times M^m$ mit der Produktmetrik ist ein Einstein-Raum, aber kein Raum konstanter Krümmung.

27. Bekanntlich ist eine symmetrische Bilinearform $h(x, y)$ eines Vektorraums durch ihre quadratische Form $q(x) := h(x, x)$ vollständig bestimmt (Polarisationsformel: $2h(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$). Man beweise in Analogie, dass der Riemannsche Krümmungstensor $\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ vollständig durch die Schnittkrümmung entsprechende biquadratische Form $K(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathcal{U})$ determiniert ist.

28. Man beweise, dass eine vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann ein Einstein-Raum ist, falls für jede 2-Ebene $E^2 \subset TM^4$ und deren orthogonales Komplement $(E^2)^\perp$ die Schnittkrümmungen übereinstimmen, $K(E^2) = K((E^2)^\perp)$.

29. Aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften kann der Krümmungstensor einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit als eine Transformation $\mathcal{R} : \Lambda^2(M^m) \rightarrow \Lambda^2(M^m)$ der 2-Formen interpretiert werden,

$$\mathcal{R}(\sigma_i \wedge \sigma_j) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n R_{\alpha \beta i}^j \cdot \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta.$$

Speziell in der Dimension $m = 4$ entsteht ein Endomorphismus $\mathcal{R} : \Lambda^2(M^4) \rightarrow \Lambda^2(M^4)$. Andererseits wirkt in $\Lambda^2(M^4)$ der Hodge-Operator $* : \Lambda^2(M^4) \rightarrow \Lambda^2(M^4)$, dessen Quadrat vom Index k der Metrik abhängt (vgl. Kapitel 1, Satz 5): $** = (-1)^k$. In den Fällen $k = 0$ (positiv definite Metrik) und $k = 2$ (neutrale Metrik) zerlegt der Hodge-Operator das reelle Bündel $\Lambda^2(M^4)$ in die entsprechenden Eigenräume $\Lambda_\pm^2(M^4)$ (vgl. Kapitel 1, Aufgabe 8). Beweise, dass die Blockdarstellung des Krümmungstensors

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{++} & \mathcal{R}_{-+} \\ \mathcal{R}_{+-} & \mathcal{R}_{--} \end{bmatrix}$$

bzgl. der Zerlegung von $\Lambda^2(M^4)$ folgende Eigenschaften hat:

- a) \mathcal{R} ist symmetrisch, d. h. $\mathcal{R}_{++}^* = \mathcal{R}_{++}$, $\mathcal{R}_{--}^* = \mathcal{R}_{--}$ und $\mathcal{R}_{+-}^* = \mathcal{R}_{-+}$;

- b) Die Spuren von \mathcal{R}_{++} und \mathcal{R}_{--} stimmen überein, $\text{tr}(\mathcal{R}_{++}) = \text{tr}(\mathcal{R}_{--}) = -\tau/12$;
c) M^4 ist genau dann ein Einstein-Raum, wenn \mathcal{R}_{+-} verschwindet.

Literatur: Th. Friedrich, Self-duality of Riemannian manifolds and connections, in: *Riemannian geometry and instantons*, Teubner-Verlag, Leipzig, 1981, 56-104.

Die *Einstein-Gleichung* der allgemeinen Relativitätstheorie verbindet die geometrischen Krümmungsgrößen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit mit ihren im Energie-Impuls-Tensor T enthaltenen physikalischen Eigenschaften:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}g \cdot \tau = \kappa T.$$

Dabei sind Ric , g , τ der Ricci-Tensor, die Metrik sowie die Skalarkrümmung und κ eine vom gewählten Einheitensystem abhängige Konstante. Bereits für das Vakuum $T = 0$ gibt es nicht triviale, physikalisch sehr interessante Lösungen dieser Gleichung, u.a. die Schwarzschild-Metrik, die nun besprochen werden soll. Offenbar muss eine Vakuumlösung der Einstein-Gleichung ein Einstein-Raum im Sinne unserer Definition mit verschwindendem Ricci-Tensor sein.

30 (Schwarzschild-Metrik). Auf einer sphärisch-symmetrischen und statischen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M^4 (dies ist eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur $(1,3)$ mit Isometrie-Gruppe $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ und einer ausgezeichneten Zeitrichtung) kann man immer Koordinaten aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times S^2$ einführen, in denen die Metrik die Gestalt

$$g = e^{2a(r)} dt^2 - \left[e^{2b(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

hat. Dabei gehen die Funktionen $a(r)$ und $b(r)$ für $r \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen null (die Metrik ist „asymptotisch flach“). Wir führen die folgende Basis von 1-Formen ein:

$$\sigma_0 = e^a dt, \quad \sigma_1 = e^b dr, \quad \sigma_2 = r d\theta, \quad \sigma_3 = r \sin \theta d\varphi.$$

- a) Man prüfe nach, dass für die Metrik $g = \sigma_0^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2$ gilt.
b) Man berechne die Formen $d\sigma_i$ und zeige anhand der ersten Strukturgleichung, dass die Zusammenhangsformen durch

$$\omega_{01} = -a'e^{-b}\sigma_0, \quad \omega_{02} = \omega_{03} = 0, \quad \omega_{12} = \frac{e^{-b}}{r}\sigma_2, \quad \omega_{13} = \frac{e^{-b}}{r}\sigma_3, \quad \omega_{23} = \frac{\cot \theta}{r}\sigma_3$$

gegeben sind.

- c) Wir führen die Bezeichnung $\Omega_{ij} := \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta i}^j \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta$ ein (Ω ist die sog. *Krümmungsform*). Man zeige anhand der zweiten Strukturgleichung

$$\Omega_{10} = e^{-2b}(a'b' - a'' - a'^2)\sigma_0 \wedge \sigma_1, \quad \Omega_{20} = -a'\frac{e^{-2b}}{r}\sigma_0 \wedge \sigma_2,$$

$$\Omega_{30} = -a'\frac{e^{-b}}{r}\sigma_0 \wedge \sigma_3, \quad \Omega_{21} = b'\frac{e^{-b}}{r}\sigma_1 \wedge \sigma_2,$$

$$\Omega_{31} = b'\frac{e^{-b}}{r}\sigma_1 \wedge \sigma_3, \quad \Omega_{32} = \frac{1 - e^{-b}}{r^2}\sigma_2 \wedge \sigma_3,$$

und folgere hieraus die Komponenten R_{jkl}^i des Krümmungstensors in dieser Basis.

- d) Man leite die Komponenten des Einstein-Tensors $G := \text{Ric} - \frac{1}{2}g \cdot \tau$ her:

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{1}{r^2} - e^{-2b} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2b'}{r} \right), \quad G_{11} = \frac{1}{r^2} - e^{-2b} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2a'}{r} \right), \\ G_{22} = G_{33} &= -e^{-2b} \left(a'^2 - a'b' + a'' + \frac{a' - b'}{r} \right). \end{aligned}$$

- e) Man löse mit diesem Ansatz die Vakuumgleichung. Ergebnis (M eine Integrationskonstante):

$$g = \left[1 - \frac{2M}{r} \right] dt^2 - \left[1 - \frac{2M}{r} \right]^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

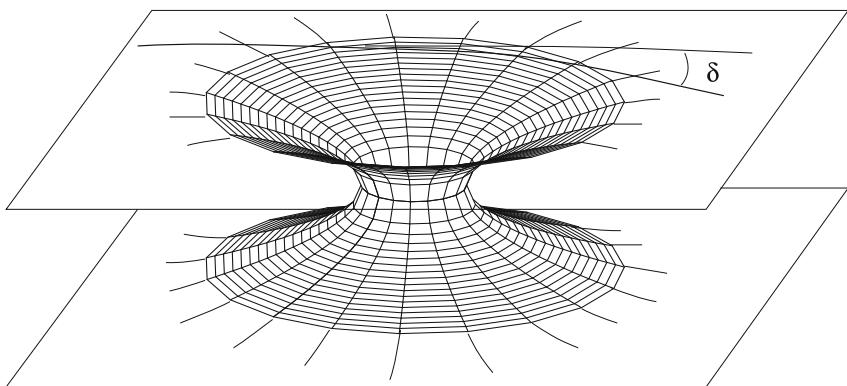
31. Wir schränken die Schwarzschild-Metrik g ein auf die durch $\theta = \pi/2$ und $t = \text{const}$ definierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit. Man zeige, dass auf diese Weise die Metrik eines Rotationsparaboloiden (einer „liegenden“ Parabel!) der Gleichung $z^2 = 8M(r - 2M)$ entsteht (siehe Abbildung).

32. Das Licht läuft entlang geodätischer Linien, deren Tangentialvektor die Länge null hat. Man verwende, dass die Geodätengleichungen genau die Euler-Lagrange-Gleichungen der Längenfunktion $\mathcal{L} = \sum_{i,j} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ sind und zeige:

- a) Ein Teilchen, das sich zu $t = 0$ in der Äquatorebene $\theta = \pi/2$ bewegt, tut dies für alle Zeiten.
- b) Die Größen $L := r^2 \dot{\varphi}$ und $E := \dot{t}(1 - 2M/r)$ sind erste Integrale. Es gilt weiterhin das zweite Keplersche Gesetz: Der Bahnstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- c) Man setze $r = r(\varphi)$ an und leite die Bahngleichung für Lichtstrahlen her.
Ergebnis: Sinnvollerweise setzt man $u := 1/r$: $u'' + u = 3Mu^2$.
- d) Man löse diese Differentialgleichung näherungsweise bis zur zweiten Ordnung in φ . Ergebnis:

$$u = \frac{1}{r_0} \sin \varphi + \frac{3M}{2r_0^2} \left[1 + \frac{1}{3} \cos 2\varphi \right].$$

Man interpretiere die Integrationskonstante r_0 als Streulänge. Welchen asymptotischen Wert erhält man für φ , wenn r gegen ∞ geht und man annimmt, dass φ dabei klein bleibt? Das Doppelte dieses Wertes, in der Abbildung auf der nächsten Seite mit δ bezeichnet, ist die relativistische Ablenkung des Lichts durch das Gravitationsfeld einer sehr großen Masse, die sich durch die Schwarzschild-Metrik beschreiben lässt.



Kapitel 6

Lie-Gruppen und homogene Räume

6.1. Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Der Satz von Noether hatte im vorangegangenen Kapitel gezeigt, dass Symmetriebetrachtungen das Studium geometrischer Probleme erleichtern, ja oft überhaupt erst ermöglichen. In der Tat bildete sich ab den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts die Überzeugung heraus, dass das ordnende Prinzip der Geometrie das Studium ihrer Symmetriegruppe sein sollte. In seiner Antrittsrede an der Universität Erlangen, die später als Erlanger Programm bekannt wurde, schreibt Felix Klein 1872:

„Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden¹.“

Naturgemäß ist nun zu unterscheiden, ob die betrachteten Gruppen diskret (etwa Permutationsgruppen) oder kontinuierlich (zum Beispiel Einparametergruppen von Isometrien) sind. Letztere führte der norwegische Mathematiker Sophus Lie (1842-1899) systematisch ein, weswegen sie heute seinen Namen tragen.

Die Grundidee einer Lieschen Gruppe ist eine sehr einfache. Es soll sich hierbei um eine Gruppe handeln, die gleichzeitig eine Mannigfaltigkeit ist und deswegen eine Differentialrechnung zulässt. Zudem soll die Mannigfaltigkeitsstruktur mit der Gruppenstruktur verträglich, das Produkt also eine differenzierbare Abbildung sein.

Definition 1. Eine *Lie-Gruppe* ist eine Gruppe G , die gleichzeitig eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, derart, dass die Abbildung

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \longmapsto g \cdot h^{-1}$$

(unendlich oft) differenzierbar ist.

Bemerkung. Offenbar ist die letzte Bedingung äquivalent dazu, dass die Produktabbildung und die Inversion

$$(g, h) \longmapsto g \cdot h, \quad g \longmapsto g^{-1}$$

¹Zitiert nach F. Klein, *Das Erlanger Programm – Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 253, Verlag H. Deutsch, Thun/Frankfurt a. M., 1995, S. 34.

differenzierbare Abbildungen sein müssen.

Beispiel 1. Jeder endlichdimensionale Vektorraum V ist eine abelsche Lie-Gruppe, deren Gruppenprodukt genau die Addition von Vektoren $(v, w) \mapsto v + w$ ist.

Beispiel 2. Die Einheitskreislinie $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist ebenfalls eine abelsche Lie-Gruppe mit der üblichen Multiplikation komplexer Zahlen als Produkt.

Beispiel 3. Die meisten Lie-Gruppen lassen sich als Matrixgruppen realisieren. So ist die Menge aller invertierbaren Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} als offene Teilmenge von \mathbb{K}^{n^2} eine Mannigfaltigkeit und mit der Matrizenmultiplikation eine Lie-Gruppe, die *allgemeine lineare Gruppe* („General Linear group“)

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}.$$

Allgemeiner ist mit $\mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der invertierbaren Endomorphismen des Vektorraums V gemeint.

Beispiel 4. Der Vektorraum \mathbb{K}^n und die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ lassen sich verbinden zu einer neuen Lie-Gruppe, der *affinen Gruppe* $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) := \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$ mit der Multiplikation

$$(A, v) \cdot (B, w) := (AB, Aw + v).$$

Diese Produktvorschrift ergibt sich auf natürliche Weise, wenn man durch

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad (A, v)x := Ax + v$$

eine Wirkung der affinen Gruppe auf dem zugrunde liegenden Vektorraum \mathbb{K}^n definiert und auf einen Vektor x hintereinander die durch (B, w) und (A, v) gegebenen Transformationen anwendet.

Jede Lie-Gruppe G wirkt auf sich selbst mittels der Links- und der Rechtstranslation mit einem fixierten Element $g \in G$,

$$L_g, R_g : G \longrightarrow G, \quad L_g(h) = gh \text{ und } R_g(h) = hg.$$

Entsprechend sind deren Differentiale Abbildungen im Tangentialbündel von G ,

$$(dL_g)_h : T_h G \longrightarrow T_{L_g h} G = T_{gh} G, \quad (dR_g)_h : T_h G \longrightarrow T_{hg} G.$$

Um doppelte Indizes zu vermeiden, verwenden wir hier und in diesem ganzen Kapitel für das Differential einer Abbildung f die Schreibweise $(df)_h$ statt $f_{*,h}$.

Definition 2. Ein Vektorfeld \mathcal{X} auf G heißt *linksinvariant* (bzw. *rechtsinvariant*), falls es unter der Abbildung dL_g (bzw. dR_g) invariant ist, $dL_g \mathcal{X} = \mathcal{X}$. In einem Punkt $h \in G$ ausgeschrieben, bedeutet dies

$$(dL_g)_h \mathcal{X}(h) = \mathcal{X}(g \cdot h).$$

Da die Linkstranslation offenbar ein Diffeomorphismus auf G ist, gilt für den Kommutator zweier linksinvarianter Vektorfelder nach Satz 35, Kapitel 3

$$dL_g [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = [dL_g \mathcal{X}, dL_g \mathcal{Y}] = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}].$$

Diese Eigenschaft zusammen mit der Tatsache, dass Vektorfelder die Jacobi-Identität erfüllen (Satz 34, Kapitel 3), macht den Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder zu einer *Lie-Algebra*, der Lie-Algebra \mathfrak{g} der Lie-Gruppe G .

Satz 1. Der Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder einer r -dimensionalen Lie-Gruppe G ist kanonisch isomorph zum r -dimensionalen Tangentialraum im neutralen Element,

$$\mathfrak{g} \cong T_e G.$$

Beweis. Jedem linksinvarianten Vektorfeld \mathcal{X} ordnen wir seine Auswertung im neutralen Element e zu, $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}(e) =: X \in T_e G$. Ist andererseits ein Element $X \in T_e G$ gegeben, so wird durch

$$\mathcal{X}_X(g) := (dL_g)_e(X)$$

ein Vektorfeld \mathcal{X}_X auf ganz G definiert. Für dieses gilt

$$\mathcal{X}_X(gh) = (dL_{gh})_e(X) = (dL_g)_h(dL_h)_e(X) = (dL_g)_h\mathcal{X}_X(h),$$

\mathcal{X}_X ist also linksinvariant. \square

Bemerkung. Aufgrund dieses Satzes werden wir zwischen der Algebra der linksinvarianten Vektorfelder und dem Tangentialraum im neutralen Element nicht mehr unterscheiden. Seine Elemente bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben $X, Y, \dots \in \mathfrak{g}$.

Wählt man eine Basis X_1, \dots, X_r von \mathfrak{g} , so lassen sich deren Kommutatoren wieder als Linearkombinationen der Basiselemente schreiben,

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r C_{ij}^k X_k.$$

Die Antisymmetrie des Kommutators und die Jacobi-Identität bedeuten, dass die Konstanten C_{ij}^k die Beziehungen

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad C_{ij}^k C_{km}^l + C_{jm}^k C_{ki}^l + C_{mi}^k C_{kj}^l = 0$$

erfüllen müssen. Die Zahlen C_{ij}^k werden nach E. Cartan als die *Strukturkonstanten* der Lie-Gruppe G bezeichnet, weil sich mit ihrer Hilfe die Cartanschen Strukturgleichungen leicht formulieren lassen. Um dies einzusehen, wollen wir vereinbaren, eine Differentialform ω auf G *linksinvariant* zu nennen, wenn sie die Bedingung

$$L_g^* \omega = \omega$$

erfüllt. Wie für Vektorfelder geschehen, überlegt man sich leicht, dass der r -dimensionale Vektorraum \mathfrak{g}^* der linksinvarianten 1-Formen kanonisch isomorph zu $T_e^* G$ ist. Sei nun $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ die zu X_1, \dots, X_r duale Basis von \mathfrak{g}^* .

Satz 2 (Maurer-Cartansche Strukturgleichung). *Auf einer Lie-Gruppe mit Strukturkonstanten C_{ij}^k bzgl. einer Basis X_1, \dots, X_r von \mathfrak{g} gilt für die duale Basis $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ von \mathfrak{g}^* :*

$$d\sigma_i = - \sum_{j < k} C_{jk}^i \sigma_j \wedge \sigma_k.$$

Beweis. Aus Satz 33, Kapitel 3 kennen wir die allgemeine Formel für das Differential einer 1-Form σ_i

$$d\sigma_i(X_j, X_k) = X_j(\sigma_i(X_k)) - X_k(\sigma_i(X_j)) - \sigma_i([X_j, X_k]).$$

Weil die Formen σ_i dual zu den Basisvektoren X_j sind, verschwinden die beiden ersten Terme der rechten Seite. Nun ist

$$d\sigma_i(X_j, X_k) = -\sigma_i([X_j, X_k]) = -\sigma_i(\sum_m C_{jk}^m X_m) = -C_{jk}^i,$$

was genau die Behauptung ist. \square

Wir führen eine 1-Form $\Theta : T(G) \rightarrow \mathfrak{g}$ ein, welche durch die Formel

$$\Theta(t) := dL_{g^{-1}}(t)$$

für jeden Tangentialvektor $t \in T_g(G)$ im Element $g \in G$ definiert ist. Diese Form verschiebt den Tangentialvektor an die Lie-Gruppe mittels der Linkstranslation in den Raum $T_e(G) = \mathfrak{g}$. Es ist die sogenannte *Maurer-Cartan-Form* der Lie-Gruppe. Allgemein, sind Θ_1, Θ_2 zwei 1-Formen mit Werten in der Lie-Algebra \mathfrak{g} , so definieren wir deren *äußeres Produkt* durch die Formel

$$[\Theta_1, \Theta_2](t_1, t_2) := [\Theta_1(t_1), \Theta_2(t_2)] - [\Theta_1(t_2), \Theta_2(t_1)].$$

Insbesondere gilt dann

$$[\Theta, \Theta](t_1, t_2) := 2[\Theta(t_1), \Theta(t_2)],$$

und die Maurer-Cartansche Strukturgleichung ist äquivalent zu

$$d\Theta + \frac{1}{2} [\Theta, \Theta] = 0.$$

Beispiel 5. Die spezielle lineare Gruppe in zwei Dimensionen

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

ist eine dreidimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra (vgl. Aufgabe 5, Kap. 3)

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \mathrm{tr} A = 0\}.$$

Die Matrizen

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

bilden eine Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ und erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Bezeichnen wir die duale Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$ mit σ_H, σ_E und σ_F , dann lauten die Maurer-Cartanschen Strukturgleichungen

$$d\sigma_H = -\sigma_E \wedge \sigma_F, \quad d\sigma_E = -2\sigma_H \wedge \sigma_E, \quad d\sigma_F = 2\sigma_H \wedge \sigma_F.$$

Beispiel 6. Die Lie-Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Deswegen gilt für ihre Lie-Algebra

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \cong T_e \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Satz 3. Sei X ein linksinvariantes Vektorfeld auf G und $\Phi_X(t)$ die maximale Integralkurve von X mit $\Phi_X(0) = e$. Dann gilt:

- (1) $\Phi_X(t)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, $\Phi_X(t_1 + t_2) = \Phi_X(t_1) \circ \Phi_X(t_2)$;
- (2) das Vektorfeld X ist vollständig, d. h. $\Phi_X(t)$ ist auf ganz \mathbb{R} definiert.

Beweis. Sei $\Phi_X(t)$ definiert im Intervall $t_a < t < t_b$. Wir zeigen zunächst die erste Behauptung für zwei Werte t_1, t_2 derart, dass mit ihnen auch wieder ihre Summe $t_1 + t_2$ im Definitionsbereich von $\Phi_X(t)$ liegt. Hierzu halten wir t_1 fest und betrachten mit $g := \Phi_X(t_1)$ die Kurve

$$\eta(s) = g \cdot \Phi_X(s) \text{ auf dem Intervall } (t_a, t_b)$$

sowie die nur um t_1 im Argument verschobene Integralkurve

$$\eta_1(s) = \Phi_X(t_1 + s) \text{ auf dem Intervall } (t_a - t_1, t_b - t_1).$$

Aus ihren Ableitungen

$$\frac{d\eta}{ds} = dL_g \left(\frac{d\Phi_X}{ds} \right) = dL_g(X(\Phi_X(s))) = X(g \cdot \Phi_X(s)) = X(\eta(s))$$

und

$$\frac{d\eta_1}{ds} = \frac{d\Phi_X(t_1 + s)}{ds} = X(\Phi_X(t_1 + s)) = X(\eta_1(s))$$

ersieht man sofort, dass η und η_1 beide Integralkurven von X mit den gleichen Anfangsbedingungen

$$\eta_1(0) = \Phi_X(t_1) = g = \eta(0)$$

sind. Also stimmen η und η_1 auf $(t_a, t_b) \cap (t_a - t_1, t_b - t_1)$ überein. Man überlegt sich leicht, dass t_2 in diesem Durchschnitt liegen muss, d. h. es gilt

$$\Phi_X(t_1 + t_2) = \Phi_X(t_1) \circ \Phi_X(t_2).$$

Wir zeigen nun $t_b = \infty$. Den Beweis $t_a = -\infty$ führt man analog. Angenommen, es wäre t_b endlich. Dann ist

$$\eta(s) = \Phi_X\left(\frac{t_b}{2}\right) \Phi_X\left(s - \frac{t_b}{2}\right)$$

eine auf $[t_a + t_b/2, 3t_b/2]$ definierte Kurve mit dem Tangentialvektor

$$\frac{d\eta}{ds} = dL_{\Phi_X(t_b/2)} \frac{d\Phi_X}{ds} \left(s - \frac{t_b}{2} \right) = X \left(\Phi_X\left(\frac{t_b}{2}\right) \Phi_X\left(s - \frac{t_b}{2}\right) \right) = X(\eta(s)).$$

Also ist $\eta(s)$ eine Integralkurve von X , definiert auf $[t_a + t_b/2, 3t_b/2]$ mit $\eta(s) = \Phi_X(s)$ für $s \in (t_a, t_b) \cap [t_a + t_b/2, 3t_b/2]$. Die maximale Integralkurve muss dann zumindest bis $3t_b/2$ definiert sein, ein Widerspruch zur Maximalität von t_b . \square

Dieser Satz erlaubt es uns, die Exponentialabbildung für Lie-Gruppen zu definieren.

Definition 3. Die *Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist die Auswertung bei $t = 1$ einer Integralkurve Φ_X von $X \in \mathfrak{g}$, die $\Phi_X(0) = e$ erfüllt:

$$\exp(X) := \Phi_X(1).$$

Satz 4. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ist eine glatte Abbildung mit den Eigenschaften

- (1) $\exp(0) = e$;
- (2) $\exp(-X) = [\exp(X)]^{-1}$;
- (3) $\exp((s+t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$.

Zudem ist sie ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung V der Null in \mathfrak{g} auf eine offene Umgebung des neutralen Elements in G .

Beweis. Für die Glattheit müssen wir auf den Sachverhalt verweisen, dass die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen glatt von den Anfangsbedingungen abhängt. Der Fluss transformiert sich bei Skalarmultiplikation wie

$$\Phi_{\lambda X}(t) = \Phi_X(\lambda \cdot t),$$

weil aus

$$\frac{d\Phi_X(\lambda t)}{dt} = \lambda \cdot X(\Phi_X(\lambda t))$$

und $\Phi_X(\lambda \cdot 0) = e$ folgt, dass $\Phi_X(\lambda \cdot t)$ eine Integralkurve von $\lambda \cdot X$ ist. Die Einschränkung der Exponentialabbildung auf eine Gerade durch den Ursprung ist somit eine einparametrische Untergruppe von G . Daraus folgt nun die Eigenschaft (3):

$$\begin{aligned} \exp((s+t)X) &= \Phi_{(s+t)X}(1) = \Phi_X(s+t) = \Phi_X(s) \circ \Phi_X(t) \\ &= \Phi_{sX}(1) \circ \Phi_{tX}(1) = \exp(sX) \circ \exp(tX). \end{aligned}$$

Eigenschaft (2) ist eine sofortige Konsequenz aus (3) und Eigenschaft (1) ist trivial. Die letzte Behauptung folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion, wenn wir zeigen können, dass das Differential der Exponentialabbildung im Nullpunkt

$$d(\exp)_0 : T_0 \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_e G \cong \mathfrak{g}$$

invertierbar ist. Wir überlegen uns, dass es die identische Abbildung ist und betrachten die Kurve $\gamma(s) = s \cdot X$ in \mathfrak{g} mit Tangentialvektor $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist

$$d(\exp)_0(s \cdot X) = \frac{d \exp(sX)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d \Phi_{sX}(1)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{d \Phi_X(s)}{ds} \Big|_{s=0} = X(e).$$

Da wir bereits wissen, dass die Auswertung eines linksinvarianten Vektorfeldes im neutralen Element e ein Isomorphismus ist, ist der Beweis hier beendet. \square

Es stellt sich nun heraus, dass alle Einparameteruntergruppen einer Lie-Gruppe G der Gestalt $\exp(tX)$ für ein $X \in \mathfrak{g}$ sind.

Satz 5. Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow G$ ist der Gestalt

$$\Psi(t) = \exp(tX)$$

für ein gewisses $X \in \mathfrak{g}$. Insbesondere ist jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow G$ glatt.

Beweis. Sei $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow G$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus und $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ eine so kleine Umgebung um den Nullpunkt, dass $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ auf $2V$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $W = \exp(V)$ das Bild von V in G . Weil Ψ stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\Psi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subset W$. Insbesondere muss $\Psi(\varepsilon)$ ein Urbild $X \in V$ unter der Exponentialabbildung haben, $\Psi(\varepsilon) = \exp(X)$. Der offenbar glatte Gruppenhomomorphismus

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow G, \quad f(t) = \exp\left(\frac{t}{\varepsilon}X\right)$$

stimmt im Punkt ε mit $\Psi(\varepsilon)$ überein. Wir betrachten die Menge

$$K = \{t \in \mathbb{R} : \Psi(t) = f(t)\}.$$

Sie ist eine abgeschlossene Untergruppe von \mathbb{R} , weil Ψ und f stetige Gruppenhomomorphismen sind. Deswegen ist K gleich \mathbb{R} oder eine diskrete Untergruppe von \mathbb{R} . Wir schließen letzteren Fall aus, was die Gleichheit von f und Ψ impliziert. Eine diskrete Untergruppe K würde von einer Zahl $a > 0$ erzeugt werden,

$$K = \{n \cdot a : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Da bereits ε in K liegt, müsste a kleiner als ε sein und $\Psi(a)$ wäre in der Menge W . Den gewünschten Widerspruch erhalten wir, falls wir $a/2 \in K$ zeigen können. Dafür beginnen wir zuerst mit dem Ansatz

$$f(a/2)^2 = f(a) = \Psi(a) = \Psi(a/2)^2.$$

Wendet man darauf die Inverse der Exponentialabbildung an

$$2 \exp^{-1}(f(a/2)) = 2 \exp^{-1}(\Psi(a/2))$$

und bemerkt, dass $\Psi(a/2)$ in W liegt, so kann man $2 \exp^{-1}(\Psi(a/2)) \in 2V$ schließen. Auf $2V$ ist die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus und somit folgt

$$f(a/2) = \Psi(a/2).$$

Dies bedeutet $a/2 \in K$. □

Definition 4. Seien G_1, G_2 Lie-Gruppen und $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir definieren das Differential von ψ als Abbildung zwischen den Lie-Algebren der linksinvarianten Vektorfelder auf G_1 und G_2 wie folgt: Zu jedem $X \in \mathfrak{g}_1$ bilden wir die einparametrische Untergruppe $\exp(tX) \in G_1$. Nach Voraussetzung ist deren Bildkurve $\psi(\exp(tX))$ eine einparametrische Untergruppe von G_2 , die sich nach Satz 5 wieder als $\exp(tY)$ für ein $Y \in \mathfrak{g}_2$ schreiben lassen muss. Nun setzen wir

$$\psi_* : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2, \quad \psi_*(X) := Y.$$

Diese Definition impliziert sofort, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\psi_*} & \mathfrak{g}_2 \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G_1 & \xrightarrow{\psi} & G_2 \end{array}$$

Identifiziert man $\mathfrak{g}_1 \cong T_e G_1$ und $\mathfrak{g}_2 \cong T_e G_2$, so ist diese Definition mit der des üblichen Differentials im neutralen Element $d\psi_e : T_e G_1 \rightarrow T_e G_2$ verträglich, genauer, das um $d\psi_e$ erweiterte Diagramm ist weiterhin kommutativ:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_* & & \\
 \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{g}_2 \\
 \downarrow \exp & \searrow \not\cong & & \swarrow \not\cong & \downarrow \exp \\
 T_e G_1 & \xrightarrow{d\psi_e} & T_e G_2 & & \\
 \downarrow \psi & & & & \\
 G_1 & \xrightarrow{\quad} & G_2 & &
 \end{array}$$

Um dies einzusehen, wählen wir ein linksinvariantes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}_1$ mit $X(e) \in T_e G_1$ und berechnen

$$\psi_*(X)(e) = \left. \frac{d \exp(t\psi_*(X))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\psi(\exp(tX))}{dt} \right|_{t=0} = d\psi_e(X(e)).$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft des so definierten Differentials ψ_* ist die Verträglichkeit mit dem Kommutator.

Satz 6. *Das Differential eines Lie-Gruppenhomomorphismus $\psi : G_1 \rightarrow G_2$ ist ein Lie-Algebrenhomomorphismus, d. h. es gilt*

$$\psi_*[X, Y] = [\psi_*X, \psi_*Y].$$

Beweis. Die Kommutativität des soeben diskutierten Diagramms war gleichbedeutend mit der für jedes linksinvariante Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}_1$ geltenden Identität

$$\psi_*(X)(e) = d\psi_e(X(e)).$$

Daraus leiten wir die Gültigkeit der analogen Identität in jedem Punkt $g \in G_1$ her:

$$\begin{aligned}
 d\psi_g(X(g)) &= d\psi_g(dL_g)_e(X(e)) = d(\psi \circ L_g)_e(X(e)) = (dL_{\psi(g)})_e d\psi_e(X(e)) \\
 &= (dL_{\psi(g)})_e \psi_*(X)(e) = \psi_*(X)(\psi(g)).
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Vektorfelder X und ψ_*X ψ -verbunden im Sinne der Bemerkung im unmittelbaren Anschluss an Satz 35, Kapitel 3 sind. Insbesondere folgt aus dieser Bemerkung die Behauptung. \square

6.2. Abgeschlossene Untergruppen und homogene Räume

Die Exponentialabbildung von Lie-Gruppen erfüllt nicht die Funktionalgleichung, die man aus der Analysis kennt, es ist eine Korrektur zweiter Ordnung nötig.

Lemma 1. *Sei G eine Lie-Gruppe und $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ die Exponentialabbildung. Für zwei beliebige linksinvariante Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{g}$ und für $t \rightarrow 0$ gilt*

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp(t(X + Y) + O(t^2)).$$

Dabei bedeutet $O(t^2)$, dass $O(t^2)/t^2$ für $t \rightarrow 0$ beschränkt bleibt.

Beweis. Wir wählen eine Umgebung $0 \in V \subset \mathfrak{g}$ so, dass $\exp : V \rightarrow W \subset G$ eine Karte um das neutrale Element $e \in G$ ist, sowie eine Basis X_1, \dots, X_r von \mathfrak{g} . Wir führen mittels

$$(x^1, \dots, x^r) \longmapsto \exp(x^1 X_1 + \dots + x^r X_r) \in G$$

Koordinaten in W ein. Sei $U \subset W$ derart klein gewählt, dass $U \cdot U \subset W$ gilt (mit „ \cdot “ ist hier das Gruppenprodukt in G gemeint). Auf $U \times U \subset G \times G$ haben wir dann die Koordinaten

$$y^i = x^i \circ \text{pr}_1, \quad z^i = x^i \circ \text{pr}_2$$

und wegen $U \cdot U \subset W$ können wir die Gruppenmultiplikation $\mu : G \times G \rightarrow G$ einschränken zu einer Abbildung $\mu : U \times U \rightarrow W$. Sei

$$x^i = f^i(y^1, \dots, y^r, z^1, \dots, z^r)$$

die Koordinatendarstellung von μ . Dann gilt

$$f^i(0, \dots, 0, z^1, \dots, z^r) = z^i, \quad f^i(y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0) = y^i$$

und somit hat f^i die Taylorentwicklung

$$f^i(y, z) = f^i(0, 0) + \sum \frac{\partial f^i}{\partial y^k}(0, 0)y^k + \sum \frac{\partial f^i}{\partial z^l}(0, 0)z^l + R,$$

wobei der Rest R aus Gliedern zweiter Ordnung besteht. Setzen wir in die Taylorentwicklung $tY = \sum y^i X_i$, $tZ = \sum z^i X_i$ ein, so folgt

$$\exp(tY + tZ + R) = \exp(tY) \exp(tZ)$$

und der Restterm R geht wie $O(t^2)$ gegen null. \square

Das folgende Beispiel zeigt, dass nicht jede kontinuierliche Untergruppe einer Lie-Gruppe wieder eine Lie-Gruppe sein muss.

Beispiel 7. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der zweidimensionale Torus, parametrisiert durch Paare $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Für jede reelle Zahl q wird durch $\gamma_q : \mathbb{R} \rightarrow T^2$, $\gamma_q(t) = (t, q \cdot t)$ eine Kurve in T^2 definiert, die isomorph ist zur additiven Gruppe \mathbb{R} der reellen Zahlen. Wir wollen zeigen, dass diese Kurve für irrationales q dicht in T^2 liegt und damit ein Beispiel einer zusammenhängenden, nicht abgeschlossenen Einparameteruntergruppe einer Lie-Gruppe liefert. Sei $(t_0, s_0) \in [0, 1]^2$ ein willkürlich vorgegebener Punkt auf T^2 , den wir durch eine Punktfolge in γ_q approximieren wollen. Es ist für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$

$$\gamma(t_0 + n) = (t_0 + n, qt_0 + qn)$$

und $t_0 + n$ ist als Winkelkoordinate in S^1 äquivalent zu t_0 . Ebenso ist $qt_0 + qn + m$ äquivalent zu $qt_0 + qn$ für jede ganze Zahl m , entspricht also demselben Punkt auf γ_q und in T^2 . Kann man nun zeigen, dass $q\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ in \mathbb{R} dicht liegt, so können wir auf die Existenz einer Folge von Paaren $(n_i, m_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ schließen derart, dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} qn_i + m_i = s_0 - qt_0$$

gilt. Aber dann konvergiert $q(t_0 + n_i) + m_i$ gegen s_0 für $i \rightarrow \infty$ und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_q(t_0 + n_i) = \gamma(t_0, s_0)$$

wie gewünscht. Es bleibt demnach, folgendes Lemma zu beweisen.

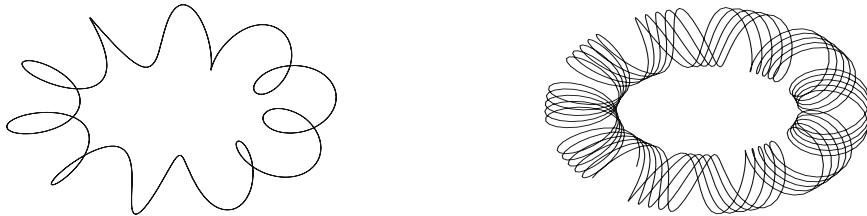
Lemma 2. *Für jede irrationale Zahl q liegt $\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ dicht in \mathbb{R} .*

Beweis. Die Menge $\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ ist ebenso wie ihr Abschluss eine Untergruppe von \mathbb{R} . Die Gruppe $\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ kann nicht zyklisch sein, denn würde sie von einem Element $a > 0$ erzeugt werden, so gäbe es ganze Zahlen k und l mit

$$1 + q \cdot 0 = 1 = k \cdot a, \quad 0 + q \cdot 1 = q = l \cdot a.$$

Doch daraus folgt $q = l/k \in \mathbb{Q}$, ein Widerspruch. Da die abgeschlossenen Untergruppen von \mathbb{R} genau die zyklischen Gruppen und \mathbb{R} selbst sind, bleibt nur diese letzte Möglichkeit für $\overline{\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}}$. \square

In Beispiel 4, Kapitel 3 hatten wir eine Parametrisierung mittels $S^1 \times S^1$ des Rotationstorus kennen gelernt. Die beiden folgenden Bilder zeigen die Spur einer Kurve γ_q in dieser Parametrisierung für dicht beieinander liegende rationale und irrationale Werte von q .



Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, dass eine *abgeschlossene* Untergruppe H einer Lie-Gruppe G eine Untermannigfaltigkeit derselben ist. Damit ist sie wieder eine Lie-Gruppe und der Faktorraum G/H trägt die Struktur einer Mannigfaltigkeit mit einer glatten G -Wirkung. Hierfür benötigen wir als Vorbereitung einige technische Lemmata. Sei $\| - \|$ irgendeine Norm auf dem Vektorraum \mathfrak{g} .

Lemma 3. *Ist H eine abgeschlossene Untergruppe von G und $X_n \neq 0$ eine gegen null konvergierende Folge in \mathfrak{g} derart, dass $\exp(X_n)$ in H liegt und $X_n/\|X_n\|$ gegen ein $X \in \mathfrak{g}$ konvergiert, dann gilt*

$$\exp(tX) \in H \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Definiere für ein fixiertes $t > 0$ eine Folge natürlicher Zahlen m_n durch

$$m_n := \max\{k \in \mathbb{N} : k \cdot \|X_n\| < t\}.$$

Es gilt dann die Abschätzung

$$m_n \|X_n\| < t \leq (m_n + 1) \|X_n\| = m_n \|X_n\| + \|X_n\|.$$

Doch in der rechten Seite geht $\|X_n\|$ gegen null, also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n \|X_n\| = t.$$

Dies impliziert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n \|X_n\| \cdot \frac{X_n}{\|X_n\|} = t \cdot X$$

und, weil die Exponentialabbildung stetig ist,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(m_n X_n) = \exp(t \cdot X).$$

Jedes Folgenglied $\exp(m_n X_n) = [\exp(X_n)]^{m_n}$ ist ein Element von H . Da H nach Voraussetzung abgeschlossen ist, muss auch der Limes $\exp(t \cdot X)$ dieser Folge in H liegen. Den Beweis für $t < 0$ führt man analog. \square

Lemma 4. Für jede abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ ist die Menge

$$\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} : \exp(tX) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

ein linearer Unterraum von \mathfrak{g} .

Beweis. Trivialerweise ist mit X auch jedes skalare Vielfache $s \cdot X$ ein Element von \mathfrak{h} . Es verbleibt deswegen zu zeigen, dass \mathfrak{h} abgeschlossen unter der Addition ist. Seien dazu Elemente X, Y von \mathfrak{h} gegeben und gelte $X + Y \neq 0$. In jedem Fall liegt das Produkt $\exp(tX) \exp(tY)$ in der Untergruppe H und für hinreichend kleines t gilt nach Lemma 1

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y) + O(t^2)).$$

Setzt man $Z(t) := O(t^2)/t$, so konvergiert offenbar $Z(t)$ gegen null für $t \rightarrow 0$ und wir können die vorherige Gleichung umschreiben als

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y + Z(t))) \in H.$$

Wähle eine gegen null konvergierende Folge positiver Zahlen $t_n \rightarrow 0$ und definiere $X_n := t_n(X + Y + Z(t_n))$. Dann liegt jedes Folgenglied $\exp(X_n)$ in H und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\|X_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X + Y + Z(t_n)}{\|X + Y + Z(t_n)\|} = \frac{X + Y}{\|X + Y\|}.$$

Offenbar ist jedes $X_n \neq 0$ und $X_n \rightarrow 0$. Damit ist Lemma 3 anwendbar und wir können schließen, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\exp\left(t \cdot \frac{X + Y}{\|X + Y\|}\right)$$

ein Element von H ist, also liegt $X + Y$ in \mathfrak{h} . \square

Es möge H weiterhin eine abgeschlossene Untergruppe von G und \mathfrak{h} wie im vorangegangenen Lemma definiert sein. Wir wählen nun irgendein lineares Komplement \mathfrak{h}' von \mathfrak{h} in \mathfrak{g} ,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'.$$

Lemma 5. Es existiert eine Umgebung $0 \in V' \subset \mathfrak{h}'$ derart, dass für jedes $X' \neq 0$ in V' das Element $\exp(X')$ nicht in H liegt.

Beweis. Wenn die Behauptung falsch wäre, so müsste eine Folge $X'_n \in \mathfrak{h}'$ existieren, die gegen Null konvergiert und $\exp(X'_n) \in H$ erfüllt. Betrachte nun das Kompaktum

$$K := \{X' \in \mathfrak{h}' : 1 \leq \|X'\| \leq 2\}$$

und wähle natürliche Zahlen p_n derart, dass $p_n X'_n \in K$. Weil K kompakt ist, können wir voraussetzen, dass die Folge $p_n X'_n$ gegen ein $0 \neq X' \in K$ konvergiert. Wieder ist $\exp(p_n X'_n) = [\exp(X'_n)]^{p_n}$ ein Element von H und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n X'_n}{\|p_n X'_n\|} = \frac{X'}{\|X'\|}.$$

Nach Lemma 3 folgt $X'/\|X'\| \in \mathfrak{h}$, ein Widerspruch zu $0 \neq X' \in \mathfrak{h}'$. \square

Wir können nun den Hauptsatz dieses Abschnitts beweisen.

Satz 7. Sei G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann gilt:

- (1) H ist eine Untermannigfaltigkeit von G und damit selbst eine Lie-Gruppe;
- (2) es existiert genau eine Differentialstruktur auf G/H derart, dass
 - (a) die Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ glatt ist,
 - (b) zu jedem $p \in G/H$ eine Umgebung $p \in W_p \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $\varphi : W_p \rightarrow G$ mit $\pi \circ \varphi = \text{Id}_{W_p}$ existieren,
 - (c) die durch $(g, kH) \mapsto gkH$ definierte Wirkung von G auf G/H glatt ist.

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, dass eine Umgebung $e \in W \subset G$ von e existiert, derart, dass $H \cap W$ eine Untermannigfaltigkeit ist (die Linkstranslation ist ein Diffeomorphismus von G). Wir zerlegen die Lie-Algebra wie zuvor in $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$ und betrachten die dieser Zerlegung entsprechende Abbildung

$$\Phi : \mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}' \longrightarrow G, \quad \Phi(X + X') = \exp(X) \cdot \exp(X').$$

In \mathfrak{h}' wählen wir eine Umgebung $V' \subset \mathfrak{h}'$ wie in Lemma 5 sowie eine Teilmenge $V \subset \mathfrak{h}$, die hinreichend klein ist, damit die Exponentialfunktion auf $V + V'$ noch ein Diffeomorphismus ist. Das Bild W von $V + V'$ unter Φ ist eine offene Umgebung von $e \in G$ und

$$H \cap W = \Phi(V + \{0\})$$

nach Definition von \mathfrak{h} und Lemma 5. Die Menge $H \cap W$ wird also durch die Karte $(V, \Phi|_{V + \{0\}})$ parametrisiert und ist damit eine Untermannigfaltigkeit von G .

Wir kommen nun zum Beweis der zweiten Behauptung. Sei $\pi : G \rightarrow G/H$ die Projektion. Durch die Bedingung

$$A \subset G/H \text{ ist offen} \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \subset G \text{ ist offen}$$

definieren wir eine Topologie in G/H . Sie wird die *Quotiententopologie* auf G/H genannt und ist gerade so beschaffen, dass π eine stetige Abbildung wird. Es ist leicht einzusehen, dass G/H mit dieser Topologie ein Hausdorff-Raum ist (vgl. Duistermaat/Kolk, Lemma 1.11.3). Zum Nachweis der Mannigfaltigkeitsstruktur

betrachten wir den ausgezeichneten Punkt $x_0 := e \cdot H \in G/H$ sowie die im ersten Teil des Beweises eingeführten Mengen V, V' . Die Abbildung

$$\psi : V' \longrightarrow G/H, \quad X' \longmapsto \pi(\exp X')$$

ist stetig und bildet V' auf eine offene Umgebung U von x_0 ab. Zudem ist ψ injektiv, denn aus $\psi(X') = \psi(Y')$ folgt die Existenz eines Elementes $h \in H$ mit $\exp(X') = \exp(Y') \cdot h$, also ist

$$h = \exp(X') \exp(-Y') = \Phi(0 + (X' - Y')).$$

Deswegen liegt h gleichzeitig in der Menge W , die als das Bild von $V + V'$ unter Φ definiert war. Da bereits $H \cap W = \Phi(V + \{0\})$ gezeigt wurde, folgt nun $X' = Y'$. Die Abbildung $\psi : V' \rightarrow U$ ist insgesamt stetig und bijektiv. Ist nun $gH \in G/H$ ein beliebiger Punkt, so betrachten wir die Linkstranslation um $g \in G$ auf G/H ,

$$\tilde{L}_g : G/H \longrightarrow G/H, \quad kH \longmapsto gkH,$$

und führen eine Karte um $gH \in G/H$ durch

$$U_{gH} := \tilde{L}_g(U), \quad \psi_{gH} : V' \longrightarrow U_{gH}, \quad \psi_{gH} := \tilde{L}_g \circ \psi$$

ein. Für zwei Punkte gH und kH kann man den Kartenübergang umformen zu

$$\begin{aligned} \psi_{kH}^{-1} \circ \psi_{gH} &= \psi^{-1} \circ \tilde{L}_{k^{-1}} \circ \tilde{L}_g \circ \psi = \exp^{-1} \circ (\pi^{-1} \circ \tilde{L}_{k^{-1}} \circ \tilde{L}_g \circ \pi) \circ \exp \\ &= \exp^{-1} \circ L_{k^{-1}h} \circ \exp, \end{aligned}$$

woraus man sofort abliest, dass er als Verknüpfung glatter Abbildungen ebenfalls glatt ist. Insgesamt ist G/H eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ ist glatt und G wirkt glatt von links auf G/H . Es verbleibt, (b) zu beweisen. Wenn man als Punkt p die ausgezeichnete Nebenklasse $p = x_0 = e \cdot H$ wählt, so definieren wir φ für jedes x in $U =: W_p$ durch

$$\varphi(x) = \exp(\psi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(x).$$

Für einen beliebigen Punkt $p = gH$ verwendet man nun wieder die Linkstranslation \tilde{L}_g . \square

Definition 5. Die Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *transitiv*, wenn von je zwei vorgegebenen Punkten x und y aus M der eine sich immer als Bildpunkt des anderen unter der Wirkung von G schreiben lässt, d. h. es existiert ein $g \in G$ mit $y = g \cdot x$. Äquivalent hierzu ist die Forderung, dass M nur aus einem einzigen G -Orbit bestehen soll, $G \cdot x = M$. Eine Mannigfaltigkeit, die eine transitive Gruppenwirkung trägt, nennt man auch *homogenen Raum*.

Offenbar ist die Linkstranslation auf dem Quotienten $M = G/H$ eine transitive Gruppenwirkung und damit G/H ein homogener Raum. Satz 7 erlaubt nun den Nachweis, dass einige wohlbekannte Matrizengruppen Lie-Gruppen sind: Die folgenden Gruppen sind offenbar abgeschlossene Untergruppen der $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.

Beispiel 8. Die Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ aller Matrizen der Determinante 1 ist eine Lie-Gruppe, die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \det A = 1\}.$$

Beispiel 9. Es sei $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} =: h : u, v \in \mathbb{C} \right\}$ der Vektorraum der Hamiltonschen Quaternionen mit der Standardbasis

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

und der Norm $N(h) := u\bar{u} + v\bar{v}$. Die Gruppe aller Quaternionen der Norm 1 ist isomorph zur Lie-Gruppe

$$\mathrm{SU}(2) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = 1_2 \text{ und } \det(A) = 1\}.$$

Beispiel 10. Das vorherige Beispiel lässt sich wie folgt verallgemeinern. Die *unitäre Gruppe* ist eingebettet in die komplexwertigen Matrizen als

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A\bar{A}^t = 1_n\}.$$

Aus der Bedingung $A\bar{A}^t = 1_n$ folgt sofort $|\det A| = 1$, also $\det A \in S^1$; die *spezielle unitäre Gruppe* erhält man nun als diejenigen Matrizen, für die $\det A = 1$ gilt:

$$\mathrm{SU}(n) := \{A \in \mathrm{U}(n) : \det A = 1\}.$$

Beispiel 11. Die *orthogonale Gruppe* $\mathrm{O}(n, \mathbb{K})$ besteht aus denjenigen Matrizen $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, die das euklidische Standard-Skalarprodukt des \mathbb{K}^n invariant lassen,

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Realisiert man das Skalarprodukt als $\langle x, y \rangle = x^t y$, so ist diese Bedingung äquivalent zu $AA^t = 1_n$, wir erhalten also

$$\mathrm{O}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AA^t = 1_n\}.$$

Offenbar hat eine orthogonale Matrix die Determinante +1 oder -1. Die Untergruppe der orthogonalen Matrizen der Determinante +1 nennt man die *spezielle orthogonale Gruppe* $\mathrm{SO}(n, \mathbb{K})$,

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AA^t = 1_n \text{ und } \det A = 1\}.$$

6.3. Die adjugierte Darstellung

Definition 6. Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} und V ein endlichdimensionaler Vektorraum.

- (1) Eine *Darstellung der Lie-Gruppe G auf V* ist ein glatter Gruppenhomomorphismus $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, d. h. eine mit der Gruppenstruktur verträgliche glatte Abbildung,

$$\varrho(g \cdot h) = \varrho(g) \cdot \varrho(h).$$

- (2) Eine *Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} auf V* ist ein Lie-Algebrenhomomorphismus $\varrho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, d. h. eine lineare Abbildung, die mit dem Kommutator verträglich ist,

$$\varrho([X, Y]) = [\varrho(X), \varrho(Y)] = \varrho(X) \cdot \varrho(Y) - \varrho(Y) \cdot \varrho(X).$$

Mitunter nennt man V dann auch einen *G -Modul* bzw. *\mathfrak{g} -Modul*.

Beispiel 12. Die *triviale* Darstellung einer Lie-Gruppe G ist derjenige Gruppenhomomorphismus, der jedes Element $g \in G$ auf das neutrale Element in $\mathrm{GL}(V)$ schickt: $\varrho(g) = 1_V$; die *triviale* Darstellung von \mathfrak{g} ordnet jedem Element \mathcal{X} die Nullabbildung zu, $\varrho(\mathcal{X}) = 0_V$.

Beispiel 13. Matrixgruppen werden auf natürliche Weise über eine ihrer Darstellungen definiert, welche man oft die *definierende Darstellung* nennt. So hatten wir die Gruppen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{R})$ so eingeführt, dass sie eine Darstellung auf \mathbb{R}^n haben. Ein leichtes Beispiel zeigt, dass diese Matrixgruppen und ihre Lie-Algebren viele weitere Darstellungen haben. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ hat etwa Darstellungen in *allen* Dimensionen: Für jede natürliche Zahl n definieren wir $\varrho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ durch

$$\varrho(H) = \mathrm{diag}(n, n-2, \dots, -(n-2), -n),$$

$$\varrho(E) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & n \end{bmatrix}, \quad \varrho(F) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ n & 0 & & \\ & n-1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diese Matrizen erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[\varrho(H), \varrho(E)] = 2\varrho(E), \quad [\varrho(H), \varrho(F)] = -2\varrho(F), \quad [\varrho(E), \varrho(F)] = \varrho(H)$$

der $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ und sind somit eine $(n+1)$ -dimensionale Darstellung der $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Eigenschaften der Lie-Algebra, die sich nicht durch die Lie-Klammer ausdrücken lassen, brauchen unter Darstellungen nicht erhalten zu bleiben: So gilt etwa $E^2 = 0$, aber $\varrho(E)^2 \neq 0$. Es bleibt aber die Eigenschaft erhalten, dass $\varrho(E)$ eine nilpotente Matrix ist. Zu dieser Darstellung der Lie-Algebra gehört auch eine Darstellung der Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, die Gegenstand von Aufgabe 4 ist.

Außer der Links- und der Rechtstranslation gibt es noch eine dritte bemerkenswerte Wirkung einer gegebenen Lie-Gruppe G auf sich selbst, die sog. *Konjugationswirkung*

$$\alpha_g : G \longrightarrow G, \quad \alpha_g(h) := ghg^{-1} = L_g R_{g^{-1}} h.$$

Sie ist glatt und erfüllt $\alpha_g(e) = e$, ist also im Gegensatz zur Links- und zur Rechtstranslation weit davon entfernt, transitiv zu sein. Im Fall $G = \mathrm{GL}(V)$ zerlegt sie die invertierbaren Matrizen gerade in ihre Ähnlichkeitsklassen. Zudem impliziert $\alpha_g(e) = e$, dass ihr Differential in e eine Abbildung von \mathfrak{g} nach \mathfrak{g} ist,

$$d(\alpha_g)_e : T_e G \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_e G \cong \mathfrak{g},$$

die offenbar invertierbar ist, weil $d(L_g)_e$ und $d(R_{g^{-1}})_e$ invertierbar sind. Wir definieren die *adjungierte Darstellung* von G auf \mathfrak{g} durch

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad \mathrm{Ad}(g) = d(\alpha_g)_e \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}).$$

Bevor wir überprüfen, dass es sich hierbei wirklich um eine Darstellung handelt, erinnern wir an die Definition des *Zentrums* einer Gruppe. Es besteht aus denjenigen Elementen, die mit allen anderen kommutieren:

$$\mathcal{Z}_G = \{g \in G : gh = hg \ \forall h \in G\}.$$

Satz 8. *Die Abbildung $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ ist eine Darstellung von G auf dem Vektorraum \mathfrak{g} . Für das Zentrum \mathcal{Z}_G von G gilt die Inklusion*

$$\mathcal{Z}_G \subset \ker \text{Ad}$$

und es tritt Gleichheit auf, falls G zusammenhängend ist.

Beweis. Wir rechnen die Gruppenhomomorphismus-Eigenschaft nach:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(gh) &= d(L_{gh}R_{gh}^{-1})_e = d(L_gL_hR_{h^{-1}}R_{g^{-1}})_e = d(\alpha_g\alpha_h)_e = d(\alpha_g)_e d(\alpha_h)_e \\ &= \text{Ad}(g)\text{Ad}(h). \end{aligned}$$

Ist z ein Element des Zentrums \mathcal{Z}_G , so gilt $\alpha_z = \text{Id}_G$ und somit $\text{Ad}(z) = \text{Id}_{\text{GL}(\mathfrak{g})}$, d. h. z liegt im Kern von Ad . Sei G nun zusammenhängend und gelte $\text{Ad}(g) = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$. Da $\alpha_g : G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist für jedes $X \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $t \mapsto \alpha_g(\exp tX)$ eine einparametrische Untergruppe und es existiert nach Satz 5 ein Element $Y \in \mathfrak{g}$ mit

$$\exp(tY) = \alpha_g(\exp tX).$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach t und erhalten

$$Y(e) = \frac{d}{dt} (\alpha_g(\exp tX))|_{t=0} = \text{Ad}(g)(X(e)) = X(e),$$

was $X = Y$ beweist. Für die zuvor definierte Einparametergruppe bedeutet dies

$$\exp(tX) = \alpha_g(\exp tX)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $X \in \mathfrak{g}$. Die Exponentialabbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus $\mathfrak{g} \rightarrow G$, es folgt also $\alpha_g = \text{Id}_G$ auf einer offenen Umgebung W von e . Dies impliziert $\alpha_g = \text{Id}_G$ für eine zusammenhängende Lie-Gruppe G , denn dann kann man G schreiben als Vereinigung aller Potenzen von W (bzgl. des Gruppenprodukts)

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} W^i.$$

Da $\alpha_g = \text{Id}_G$ äquivalent zu $g \in \mathcal{Z}_G$ ist, ist damit alles bewiesen. \square

Das Differential der adjungierten Darstellung von G (im Sinne von Definition 4) ist eine Darstellung der Lie-Algebra \mathfrak{g} , welche sich einfach durch den Kommutator ausdrücken lässt.

Satz 9. *Das Differential $\text{ad} := \text{Ad}_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ der adjungierten Darstellung ist ein Lie-Algebrenhomomorphismus, der durch die Formel*

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$$

berechnet wird.

Beweis. Nach Definition des Differentials gilt

$$\text{Ad}(\exp tX) = \exp(t\text{Ad}_*(X)) = 1 + t\text{Ad}_*(X) + \dots,$$

also folgt

$$\text{Ad}_*(X)(Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Ad}(\exp tX)(Y) - Y}{t}.$$

Der zum Vektorfeld $-X$ gehörende Fluss ist $\Phi_t = R_{\exp(-tX)}$, denn für diesen gilt

$$\left. \frac{d\Phi_t(e)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d \exp(-tX)}{dt} \right|_{t=0} = -X.$$

Angewandt auf ein linksinvariantes Vektorfeld Y stimmt jedoch dessen Differential mit $\text{Ad}(\exp tX)(Y)$ überein,

$$\text{Ad}(\exp tX)(Y) = dL_{\exp(tX)}dR_{\exp(-tX)}(Y) = dR_{\exp(-tX)}(Y) = d\Phi_t(Y),$$

so dass sich die ursprüngliche Identität umschreiben lässt als

$$\text{Ad}_*(X)(Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t(Y) - Y}{t}.$$

Die rechte Seite ist genau die Definition des Kommutators $[Y, -X] = [X, Y]$. \square

Auch diese Darstellung werden wir die *adjungierte(r) Darstellung* (diesmal der Lie-Algebra \mathfrak{g}) nennen. Im Zweifelsfall muss der Kontext ergeben, ob die Darstellung der Lie-Gruppe oder ihrer Lie-Algebra gemeint ist.

Bemerkung. Die Definition des Differentials impliziert sofort die Identität

$$\text{Ad}(\exp X) = \exp(\text{ad}X).$$

Diese ist als Identität von Operatoren zu verstehen und bedeutet bei Anwendung auf ein Element Y

$$\begin{aligned} \exp(X) \cdot Y \cdot \exp(-X) &= 1 + \text{ad}(X)(Y) + \frac{\text{ad}(X)^2(Y)}{2!} + \frac{\text{ad}(X)^3(Y)}{3!} + \dots \\ &= 1 + [X, Y] + \frac{[X, [X, Y]]}{2!} + \frac{[X, [X, [X, Y]]]}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Beispiel 14. Sei \mathfrak{g} diejenige dreidimensionale Lie-Algebra, die abstrakt durch folgende Kommutatorrelationen einer Basis e_1, e_2, e_3

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2$$

definiert ist. Aus ihnen kann man die darstellenden Matrizen der adjungierten Darstellung bzgl. dieser Basis berechnen. Für den Operator $\text{ad}(e_1)$ ergibt sich

$$\text{ad}(e_1) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_3 \\ -e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} =: L_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

und ganz analog für die beiden anderen Operatoren

$$L_2 := \text{ad}(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_3 := \text{ad}(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Schauen wir uns andererseits die spezielle orthogonale Gruppe $O(n, \mathbb{R})$ genauer an. Sie war definiert als die Menge derjenigen Matrizen, die die Gleichung $f(A) = AA^t - 1_n = 0$ erfüllen. Deren Differential im Punkte X ist

$$df(A)_X = AX^t + XA^t$$

und somit ist die Lie-Algebra der $O(n, \mathbb{R})$ nach Satz 5, Kapitel 3

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = T_e O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A + A^t = 0\}.$$

Die Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe besteht genau aus den schiefsymmetrischen Matrizen, die im Fall $n = 3$ offensichtlich von L_1, L_2 und L_3 aufgespannt werden. Dies beweist, dass die dreidimensionale definierende Darstellung der $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$ isomorph ist zu ihrer adjungierten Darstellung. In höheren Dimensionen gilt dieser Sachverhalt nicht mehr, wie ein einfaches Dimensionsargument zeigt: Eine schiefsymmetrische Matrix hat genau so viele Freiheitsgrade, wie sie Einträge oberhalb der Diagonalen hat, deswegen gilt

$$\dim \mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \frac{n^2}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$$

und dies ist nur für $n = 3$ gleich n .

Aufgaben

1. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist nicht surjektiv. Hinweis: Welche Werte kann $\mathrm{tr} \exp(A)$ haben für $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$?

2. Die Hamiltonschen Quaternionen \mathbb{H} (Beispiel 9) sind nicht nur ein Vektorraum, sondern ein Beispiel einer (nicht abelschen) Divisionsalgebra, d. h. einer assoziativen Algebra, in der jedes Element $\neq 0$ invertierbar ist. Man beweise, dass die Standardbasis E, I, J, K der Hamiltonschen Quaternionen folgende Algebra-Relationen erfüllt

$$I \cdot J = K, \quad I \cdot K = -J, \quad J \cdot K = I,$$

und berechne das Inverse der Quaternion $h = x_0 \cdot E + x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K \neq 0$.

3. Wir identifizieren die Quaternionen der Spur 0

$$\mathbb{H}_0 = \{x_1 \cdot I + x_2 \cdot J + x_3 \cdot K \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

mit dem euklidischen \mathbb{R}^3 . Man beweise, dass für jedes $U \in \mathrm{SU}(2)$ durch

$$\mathbb{H}_0 \longrightarrow \mathbb{H}_0, \quad x \longmapsto UxU^{-1}$$

eine spezielle orthogonale Transformation des \mathbb{R}^3 definiert wird. Die so entstehende Abbildung $\varrho : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ ist eine Darstellung, die nicht injektiv („treu“) ist.

- 4.** Die definierende Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^2 ist die übliche Matrizenmultiplikation

$$g \cdot v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}.$$

Sei V_n der $(n+1)$ -dimensionale Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n in den Variablen x und y . Wir definieren ein Wirkung von $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ auf den Polynomen $p \in V_n$ durch

$$\varrho(g) \cdot p \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p \left(g^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right).$$

Man beweise, dass ϱ eine Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist.

- 5.** Sei G eine Lie-Gruppe und H ein diskreter Normalteiler von G . Man beweise, dass H notwendigerweise im Zentrum von G liegt.

- 6.** Ist (ϱ, V) eine Darstellung einer Gruppe G , so heißt ein Teilraum W des Darstellungsraums V *invariant*, wenn für jedes $g \in G$ gilt: $\varrho(g)W \subset W$. Die Teilräume $W = V$ und $W = \{0\}$ sind trivialerweise invariant; wenn die Darstellung keine weiteren invarianten Teilräume besitzt, so heißt sie *irreduzibel*. Wir betrachten folgende zweidimensionale Darstellung der additiven Gruppe \mathbb{R} :

$$\varrho(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Man beweise, dass diese Darstellung nicht irreduzibel ist. Hat der gefundene invasive Teilraum ein invariantes Komplement?

- 7.** Nach Satz 6 ist das Differential einer Darstellung (ϱ, V) der Lie-Gruppe G eine Darstellung (ϱ_*, V) ihrer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Für zwei Darstellungen (ϱ, V) und (μ, W) von G definiert man ihr Tensorprodukt durch

$$(\varrho \otimes \mu)(g)(v \otimes w) := \varrho(g)v \otimes \mu(g)w, \quad g \in G, v \in V, w \in W.$$

Man beweise, dass dadurch eine Darstellung mit dem Differential

$$(\varrho \otimes \mu)_*(X)(v \otimes w) := \varrho_*(X)v \otimes w + v \otimes \mu_*(X)w, \quad X \in \mathfrak{g}$$

definiert wird.

- 8.** Um die hyperbolische Ebene als homogenen Raum zu beschreiben, ist es sinnvoll, statt dem bisher verwendeten Modell als obere Halbebene ein anderes einzuführen, nämlich die offene Einheitskreisscheibe.

- a) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe mit der Metrik

$$g = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man zeige, dass die *Cayley-Transformation*

$$c : D \longrightarrow \mathcal{H}, \quad c(z) = -i \frac{z+i}{z-i} =: x + iy$$

eine Isometrie zwischen D mit der genannten Metrik und der oberen Halbebene mit dem vierfachen der hyperbolischen Metrik ist;

b) Die Lie-Gruppe

$$\mathrm{SU}(1,1) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

wirke auf D vermöge der Formel

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{\bar{a}z + \bar{b}}.$$

Man zeige, dass diese Wirkung transitiv ist und dass die Isotropiegruppe des Nullpunkts

$$G_0 := \{g \in \mathrm{SU}(1,1) : g \cdot 0 = 0\}$$

isomorph zu $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ ist. Folglich ist $D \cong \mathrm{SU}(1,1)/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

Kapitel 7

Symplektische Geometrie und Mechanik

7.1. Symplektische Mannigfaltigkeiten

Riemannsche Geometrie ist die Geometrie einer *symmetrischen*, vom Punkt einer Mannigfaltigkeit abhängenden Bilinearform. Die Krümmung ist ein Maß dafür, inwieweit zwei symmetrische Bilinearformen lokal verschieden sind. Im Gegensatz dazu ist symplektische Geometrie die einer *antisymmetrischen*, vom Punkt einer Mannigfaltigkeit abhängenden Bilinearform – also die Geometrie einer 2-Form ω . Dabei zeigt sich, dass lokal alle symplektischen Mannigfaltigkeiten äquivalent sind, ein Krümmungsbegriff im Sinne der Riemannschen Geometrie tritt nicht in Erscheinung. Symplektische Strukturen unterscheiden sich gegebenenfalls nur global. Historisch führt die Formulierung der Mechanik im Sinne von *Hamilton* auf symplektische Geometrie, daraus resultiert ihre wesentliche Rolle.

Definition 1. Eine *symplektische Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (M^{2m}, ω) , bestehend aus einer Mannigfaltigkeit M^{2m} gerader Dimension und einer geschlossenen, nichtausgearteten 2-Form ω ,

$$d\omega = 0 \quad \text{und} \quad \omega^m := \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0,$$

die wir *symplektische Form* oder *Struktur* nennen.

Nach Satz 16, Kapitel 3.4, ist jede symplektische Mannigfaltigkeit orientierbar. Unter der *Volumenform* verstehen wir die $2m$ -Form

$$dM^{2m} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!} \cdot \omega^m.$$

Beispiel 1. In \mathbb{R}^{2m} mit den Koordinaten $\{q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m\}$ ist

$$\omega := \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$$

eine symplektische Form mit höchster Potenz

$$\omega^m = m! \cdot (-1)^{m(m-1)/2} \cdot dp_1 \wedge \dots \wedge dp_m \wedge dq_1 \wedge \dots \wedge dq_m.$$

Die Volumenform im Sinne der symplektischen Geometrie ist die gewöhnliche Volumenform von \mathbb{R}^{2m} . Diese symplektische Struktur nennen wir die *kanonische symplektische Struktur*.

Beispiel 2. Im Kotangentialbündel T^*X^m einer beliebigen m -dimensionalen Mannigfaltigkeit führen wir eine 1-Form θ – die sog. *Liouville-Form* – auf folgende

Weise ein: Ist $\mathcal{V} \in T_\eta(T^*X^m)$ ein Tangentialvektor an der Stelle $\eta \in T^*X^m$ und wird dieser durch eine Kurve $\mathcal{V} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T^*X^m$ mit

$$\mathcal{V}(0) = \eta, \quad \dot{\mathcal{V}}(0) = \nu$$

realisiert, so projizieren wir diese Kurve zunächst mittels der Projektion $\pi : T^*X^m \rightarrow X^m$ in die Mannigfaltigkeit und wenden sodann die 1-Form η auf den Tangentialvektor der projizierten Kurve an:

$$\theta(\mathcal{V}) := \eta\left(\frac{d}{dt}(\pi \circ \mathcal{V}(t))\Big|_{t=0}\right).$$

Die 2-Form $\omega := d\theta$ ist eine symplektische Struktur in T^*X^m . Wählen wir Koordinaten $\{q_1, \dots, q_m\}$ in X^m , so erhalten wir – indem wir eine 1-Form η in der Gestalt $\eta = \sum p_i \cdot dq_i$ darstellen – Koordinaten $\{q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m\}$ in T^*X^m . Nach Definition der Liouville-Form θ gilt

$$\theta = \sum_{i=1}^m p_i \cdot dq_i$$

und die 2-Form

$$\omega = d\theta = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$$

artet nicht aus. Insbesondere ist das (Ko-)Tangentialbündel jeder Mannigfaltigkeit eine orientierbare Mannigfaltigkeit (siehe Aufgabe 9, Kapitel 3).

Weitere Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten erhält man aus den Orbits der koadjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe G . Gehen wir von der adjungierten Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ der Gruppe G aus und dualisieren wir den linearen Operator $\text{Ad}^*(g) := (\text{Ad}(g^{-1}))^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, so erhalten wir eine Darstellung

$$\text{Ad}^* : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g}^*)$$

der Gruppe G im Dualraum \mathfrak{g}^* des Vektorraums \mathfrak{g} . Durch jedes Funktional $F \in \mathfrak{g}^*$ verläuft der Orbit

$$\mathcal{O}^*(F) := \{\text{Ad}^*(g)F : g \in G\},$$

auf dem die Gruppe G transitiv wirkt. Die *Isotropiegruppe*

$$G_F := \{g \in G : \text{Ad}^*(g)F = F\}$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von G und $\mathcal{O}^*(F)$ ist diffeomorph zum homogenen Raum G/G_F . Ihre Lie-Algebra lässt sich durch eine ähnliche Bedingung charakterisieren:

Satz 1. *Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_F \subset \mathfrak{g}$ der Isotropiegruppe $G_F \subset G$ ist gleich*

$$\mathfrak{g}_F = \{X \in \mathfrak{g} : F([X, Y]) = 0 \text{ für alle } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Beweis. Gelte $F([X, Y]) = 0$ für alle Elemente $Y \in \mathfrak{g}$. Dann erhalten wir aus

$$\begin{aligned} (\text{Ad}^*(\exp(t \cdot X))F)(Y) &= F(\text{Ad}(\exp(-t \cdot X))Y) = F(\exp(-t \cdot \text{ad}(X))Y) \\ &= F(Y - \frac{t}{1!}[X, Y] + \frac{t^2}{2!}[X, [X, Y]] - \dots) = F(Y) \end{aligned}$$

sofort $\text{Ad}^*(\exp(t \cdot X))F = F$. Die einparametrische Gruppe $\exp(t \cdot X)$ ist eine Untergruppe von G_F und somit liegt ihre Tangente X in der Lie-Algebra \mathfrak{g}_F . Dies beweist die eine Inklusion, die Umkehrung zeigt man analog. \square

Wirkt eine Lie-Gruppe G glatt auf einer Mannigfaltigkeit M^m , so gehört zu jedem Element $X \in \mathfrak{g}$ der Lie-Algebra ein Vektorfeld \tilde{X} von M^m , dessen Integralkurven mit den Trajektorien der einparametrischen Transformationsgruppe $\exp(t \cdot X)$ übereinstimmen:

$$\tilde{X}(x) := \frac{d}{dt}(\exp(-tX) \cdot x)|_{t=0}.$$

Das Vektorfeld \tilde{X} nennt man das *fundamentale Vektorfeld* des Elements $X \in \mathfrak{g}$ der Lie-Algebra. Wirkt G transitiv auf M^m , dann kann in einem fixierten Punkt $x \in M^m$ jeder Tangentialvektor $\mathcal{V} \in T_x M^m$ durch ein fundamentales Vektorfeld realisiert werden.

Diese allgemeine Konstruktion wenden wir nunmehr auf einen Orbit \mathcal{O}^* der koadjungierten Darstellung an. Jeden Vektor $\mathcal{V} \in T_F \mathcal{O}^*$ realisieren wir als Wert eines fundamentalen Vektorfeldes, $\tilde{X}(F) = \mathcal{V}$. Ist $Y \in \mathfrak{g}$ ein weiteres Element der Lie-Algebra mit $\tilde{Y}(F) = \mathcal{W}$, so folgt aus $(\tilde{X} - \tilde{Y})(F) = 0$ sofort

$$\frac{d}{dt}(\text{Ad}^*(\exp(t \cdot (Y - X)))F)\Big|_{t=0} = 0.$$

Satz 1 impliziert $X - Y \in \mathfrak{g}_F$ und es entsteht eine injektive Abbildung

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F \ni X \longmapsto \tilde{X}(F) \in T_F \mathcal{O}^*.$$

Aus Dimensionsgründen ist sie bijektiv, der Tangentialraum $T_F \mathcal{O}^*$ an einem Orbit \mathcal{O}^* an der Stelle $F \in \mathcal{O}^*$ kann mit dem Vektorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F$ identifiziert werden. Wir definieren jetzt eine symplektische Struktur $\omega_{\mathcal{O}^*}$ auf jedem Orbit $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*$.

Definition 2. Sind $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in T_F \mathcal{O}^*$ zwei Tangentialvektoren des Orbits an der Stelle $F \in \mathcal{O}^*$ und die Elemente $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $\tilde{X}(F) = \mathcal{V}, \tilde{Y}(F) = \mathcal{W}$ gewählt, so ist der Wert der *Kirillov-Form* $\omega_{\mathcal{O}^*}$ auf den Vektoren \mathcal{V}, \mathcal{W} gegeben durch die Formel

$$\omega_{\mathcal{O}^*}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) := F([X, Y]).$$

Satz 2. Das Paar $(\mathcal{O}^*, \omega_{\mathcal{O}^*})$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit. Die 2-Form $\omega_{\mathcal{O}^*}$ ist G -invariant.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die 2-Form $\omega_{\mathcal{O}^*}$ eindeutig definiert ist. Realisieren die Elemente $X, X_1 \in \mathfrak{g}$ an der Stelle F den Vektor \mathcal{V} , so liegt die Differenz $X - X_1$ in der Lie-Algebra \mathfrak{g}_F und aus Satz 1 folgt

$$F([X, Y]) = F([X_1, Y]) + F([X - X_1, Y]) = F([X_1, Y]).$$

Weiterhin ist $\omega_{\mathcal{O}^*}$ eine nichtausgeartete 2-Form. Gilt nämlich $\omega_{\mathcal{O}^*}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = 0$ für jeden Tangentialvektor $\mathcal{W} \in T_F \mathcal{O}^*$, dann erhalten wir $F([X, Y]) = 0$ für alle Elemente $Y \in \mathfrak{g}$. Nach Satz 1 liegt X in der Lie-Algebra \mathfrak{g}_F und somit gilt $\mathcal{V} =$

$\tilde{X}(F) = 0$. Es bleibt zu beweisen, dass $\omega_{\mathcal{O}^*}$ eine geschlossene Form ist. Für zwei Elemente $X, Y \in \mathfrak{g}$ ist die Funktion $\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{X}, \tilde{Y}) : \mathcal{O}^* \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Formel

$$\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{X}, \tilde{Y})(F) = F([X, Y])$$

gegeben. Wir differenzieren in Richtung eines dritten fundamentalen Vektorfeldes,

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{X}, \tilde{Y}))(F) &= \frac{d}{dt} [\text{Ad}^*(\exp(-t \cdot Z)F)[X, Y]]|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} F(\text{Ad}(\exp(tZ))([X, Y]))|_{t=0} = F([Z, [X, Y]]).\end{aligned}$$

Damit verschwindet der Ausdruck für das äußere Differential $d\omega_{\mathcal{O}^*}$ der 2-Form

$$\begin{aligned}d\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) &= \tilde{X}(\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{Y}, \tilde{Z})) - \tilde{Y}(\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{X}, \tilde{Z})) + \tilde{Z}(\omega_{\mathcal{O}^*}(\tilde{X}, \tilde{Y})) \\ &\quad - \omega_{\mathcal{O}^*}([\tilde{X}, \tilde{Y}], \tilde{Z}) + \omega_{\mathcal{O}^*}([\tilde{X}, \tilde{Z}], \tilde{Y}) - \omega_{\mathcal{O}^*}([\tilde{Y}, \tilde{Z}], \tilde{X})\end{aligned}$$

identisch, weil er sich auf die Jacobi-Identität der Lie-Algebra \mathfrak{g} reduziert. \square

Korollar 1. *Jeder Orbit $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*$ der koadjungierten Darstellung einer Lie-Gruppe ist eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension.*

Beispiel 3. Die affine Gruppe von \mathbb{R} hat die Matrixdarstellung

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Lie-Algebra

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir berechnen

$$\text{Ad} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & ay - bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und sehen daraus, dass \mathfrak{g} eindimensionale Orbits besitzt. Zur Bestimmung der Orbits der koadjungierten Darstellung schreiben wir ein Element von \mathfrak{g}^* als Paar (α, β) reeller Zahlen, welches auf dem Element $(x, y) \in \mathfrak{g}$ durch

$$\langle (\alpha, \beta), (x, y) \rangle = \alpha x + \beta y$$

ausgewertet wird. Nach Definition wirkt das Gruppenelement $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nun wie folgt:

$$\begin{aligned}\langle \text{Ad}^*(g^{-1})(\alpha, \beta), (x, y) \rangle &= \langle (\alpha, \beta), \text{Ad}(g)(x, y) \rangle = \langle (\alpha, \beta), (x, ay - bx) \rangle \\ &= \alpha x + \beta(ay - bx) = \langle (\alpha - \beta b, \beta a), (x, y) \rangle.\end{aligned}$$

Insgesamt ist demnach $\text{Ad}^*(g^{-1})(\alpha, \beta) = (\alpha - \beta b, \beta a)$ und wir sehen, dass für $\beta \neq 0$ der koadjungierte Orbit durch (α, β) zweidimensional ist. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass die adjungierte und koadjungierte Darstellung einer Gruppe G im Allgemeinen nicht äquivalent sind.

Nachdem wir Beispiele symplektischer Mannigfaltigkeiten besprochen haben, wollen wir in Analogie zum Gradienten einer Funktion einer Riemannschen Mannigfaltigkeit den entsprechenden symplektischen Gradienten einführen. Dabei nutzen wir gleichfalls aus, dass die nichtausgeartete 2-Form ω eine lineare Bijektion zwischen dem Tangentialbündel TM^{2m} und dem Kotangentialbündel T^*M^{2m} herstellt.

Definition 3. Sei $H : M^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion einer symplektischen Mannigfaltigkeit. Der *symplektische Gradient* $s\text{-grad}(H)$ ist das durch

$$\omega(\mathcal{V}, s\text{-grad}(H)) := dH(\mathcal{V})$$

definierte Vektorfeld auf M^{2m} .

Beispiel 4. Sind Koordinaten $\{q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m\}$ in M^{2m} derart gegeben, dass die symplektische Form ω die Gestalt $\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ hat, so gilt

$$s\text{-grad}(H) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Diese Formel folgt unmittelbar aus der den symplektischen Gradienten definierenden Gleichung. Eine Kurve $\gamma(t)$ in der symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2m} , dargestellt in den fixierten Koordinaten $\gamma(t) = \{q_1(t), \dots, q_m(t), p_1(t), \dots, p_m(t)\}$ ist somit genau dann eine Integralkurve des Vektorfeldes $s\text{-grad}(H)$, falls die sog. *Hamilton-Gleichungen* erfüllt sind:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Satz 3 (Satz von Liouville). *Sei H eine Funktion einer symplektischen Mannigfaltigkeit und sei $s\text{-grad}(H)$ ein vollständiges Vektorfeld mit Fluss $\Phi_t : M^{2m} \rightarrow M^{2m}$. Dann*

- (1) *verschwindet die Lie-Ableitung,*

$$\mathcal{L}_{s\text{-grad}(H)}(\omega) = 0;$$

- (2) *erhält der Fluss Φ_t das symplektische Volumen,*

$$\int_A dM^{2m} = \int_{\Phi_t(A)} dM^{2m}.$$

Beweis. Wegen $d\omega = 0$ erhalten wir aus Satz 32, Kapitel 3.9

$$\mathcal{L}_{s\text{-grad}(H)}(\omega) = d(s\text{-grad}(H) \lrcorner \omega) = -d d H = 0.$$

Damit ändern die Diffeomorphismen $\Phi_t : M^{2m} \rightarrow M^{2m}$ die symplektische Struktur nicht, $\Phi_t^*(\omega) = \omega$, und beide Behauptungen sind bewiesen. \square

Die Existenz dieses invarianten Maßes hat Konsequenzen für die Dynamik symplektischer Gradientenfelder.

Satz 4 (Poincaréscher Rückkehrsatz). *Sei (M^{2m}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit endlichen Volumens und $\Phi_t : M^{2m} \rightarrow M^{2m}$ der Fluss des symplektischen*

Gradienten einer glatten Funktion H . Ist $A \subset M^{2m}$ eine Menge positiven Maßes, so hat die Menge

$$B = \{x \in A : \Phi_n(x) \notin A \text{ für alle } n = 1, 2, \dots\}$$

das Maß null.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass die Durchschnitte $\Phi_{-n}(B) \cap B$ leer sind. Ein Punkt $x \in \Phi_{-n}(B) \cap B$ wäre nämlich ein Punkt $x \in B$ mit $\Phi_n(x) \in B \subset A$, ein Widerspruch zur Definition der Menge B . Daraus folgt sofort, dass auch die Durchschnitte $\Phi_{-n}(B) \cap \Phi_{-m}(B)$ für $n \neq m$ leer sind und wir erhalten aus der Invarianz des Maßes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(\Phi_n(B)) < \text{vol}(M^{2m}) < \infty,$$

d. h. das Maß der Menge B verschwindet. \square

Diese Aussage kann weitgehend verallgemeinert werden, zum Beispiel führt dies auf den sog. Ergodizitätssatz von Birkhoff (ohne Beweis).

Satz 5 (Ergodizitätssatz von Birkhoff). *Ist f eine integrierbare Funktion auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M^{2m}, ω) und Φ_t der Fluss eines symplektischen Gradienten, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f \circ \Phi_t(x) =: f^*(x)$$

fast überall. Die Funktion f^* ist gleichfalls integrierbar und ihr Integral stimmt mit dem von f überein. f^* ist invariant unter dem Fluss Φ_t .

Definition 4. Die Poisson-Klammer zweier Funktionen f und g einer symplektischen Mannigfaltigkeit ist die Funktion

$$\{f, g\} = \omega(\text{s-grad}(f), \text{s-grad}(g)) = dg(\text{s-grad}(f)) = -df(\text{s-grad}(g)).$$

Beispiel 5. In den $\{q, p\}$ -Koordinaten gilt

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Im folgenden Satz stellen wir die Eigenschaften der Poisson-Klammer zusammen.

Satz 6. Der Ring $C^\infty(M^{2m})$ mit der Poisson-Klammer ist eine Lie-Poisson-Algebra:

- (1) $\{f, c_1 \cdot g_1 + c_2 \cdot g_2\} = c_1 \cdot \{f, g_1\} + c_2 \cdot \{f, g_2\}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
- (2) $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
- (3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ (Jacobi-Identität);
- (4) $\{f, g \cdot h\} = g \cdot \{f, h\} + h \cdot \{f, g\}$;
- (5) $\text{s-grad}(\{f, g\}) = [\text{s-grad}(f), \text{s-grad}(g)]$.

Beweis. Die ersten beiden Identitäten ergeben sich direkt aus der Definition der Poisson-Klammer, die vierte folgt aus $d(g \cdot h) = g \cdot dh + h \cdot dg$. Wir beweisen (5). In die die 3-Form $d\omega$ definierende Gleichung setzen wir die Vektorfelder $\mathcal{V} := \text{s-grad}(f)$, $\mathcal{W} := \text{s-grad}(g)$ und ein weiteres Vektorfeld Y ein:

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(\mathcal{V}, \mathcal{W}, Y) = \mathcal{V}(\omega(\mathcal{W}, Y)) - \mathcal{W}(\omega(\mathcal{V}, Y)) + Y(\omega(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \\ &\quad - \omega([\mathcal{V}, \mathcal{W}], Y) + \omega([\mathcal{V}, Y], \mathcal{W}) - \omega([\mathcal{W}, Y], \mathcal{V}). \end{aligned}$$

Verwenden wir die Definition des symplektischen Gradienten und die der Poisson-Klammer, so können wir diese Gleichung umformen:

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathcal{V}(Y(g)) + \mathcal{W}(Y(f)) + Y(\{f, g\}) - \omega([\mathcal{V}, \mathcal{W}], Y) + [\mathcal{V}, Y](g) - [\mathcal{W}, Y](f) \\ &= -Y(\{f, g\}) + \omega(Y, [\mathcal{V}, \mathcal{W}]). \end{aligned}$$

Damit gilt $\text{s-grad}(\{f, g\}) = [\mathcal{V}, \mathcal{W}] = [\text{s-grad}(f), \text{s-grad}(g)]$. Die Jacobi-Identität ist eine Konsequenz der Formel (5). Wir erhalten nämlich

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ &= \text{s-grad}(f)(\text{s-grad}(g)(h)) - \text{s-grad}(g)(\text{s-grad}(f)(h)) - \text{s-grad}(\{f, g\})(h) \\ &= [\text{s-grad}(f), \text{s-grad}(g)](h) - [\text{s-grad}(f), \text{s-grad}(g)](h) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Ein *Hamilton-System* besteht aus einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M^{2m}, ω, H) mit einer Funktion H . Die Integration der entsprechenden Hamilton-Gleichung beruht auf der Bestimmung der Integralkurven des Vektorfeldes $\text{s-grad}(H)$. Eine wichtige Rolle dabei spielen sog. erste Integrale.

Definition 5. Eine Funktion $f : M^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *erstes Integral* der Hamilton-Funktion, falls f konstant auf allen Integralkurven des Vektorfeldes $\text{s-grad}(H)$ ist.

Satz 7.

- (1) Eine Funktion f ist genau dann erstes Integral der Hamilton-Funktion H , falls die Poisson-Klammer mit H verschwindet,

$$\{f, H\} = 0;$$

- (2) die Menge aller ersten Integrale einer Hamilton-Funktion ist eine Lie-Poisson-Algebra.

Beweis. Wir berechnen die Ableitung einer Funktion f entlang einer Integralkurve $\gamma(t)$ von $\text{s-grad}(H)$,

$$\frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) = df(\dot{\gamma}(t)) = df(\text{s-grad}(H)) = \{H, f\}.$$

Daraus ergibt sich die erste Behauptung. Die zweite Aussage folgt aus der Jacobi-Identität für die Poisson-Klammer. \square

7.2. Der Satz von Darboux

Das Darboux-Theorem besagt, dass alle symplektischen Mannigfaltigkeiten lokal äquivalent sind.

Satz 8 (Satz von Darboux). *In der Nähe jedes Punktes $x \in M^{2m}$ einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M^{2m}, ω) existiert eine Karte $h : U \subset M^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, in der die symplektische Form ω die Normalgestalt*

$$\omega = h^* \left(\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i \right)$$

hat. Derartige Koordinaten heißen symplektische (kanonische) Koordinaten.

Beweis. Im Kotangentialraum $T_x^* M^{2m}$ an die Mannigfaltigkeit an der Stelle $x \in M^{2m}$ wählen wir eine Basis $\sigma_1, \dots, \sigma_m, \mu_1, \dots, \mu_m$, welche die symplektische Form in diesem Punkt in ihrer Normalgestalt darstellt,

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \wedge \mu_i.$$

Weiterhin betrachten wir eine Karte $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ um den Punkt x mit

$$\Phi(x) = 0 \quad \text{und} \quad \omega(x) = \Phi^* \left(\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i(0) \right).$$

Bezeichnen wir mit

$$\omega_1 := \Phi^* \left(\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i \right)$$

die entsprechende symplektische Form auf V , so existiert eine Umgebung $x \in U \subset V$ derart, dass für alle Parameter $t \in [0, 1]$ die Form

$$\omega_t := (1-t)\omega + t\omega_1$$

eine symplektische Struktur auf U ist. In der Tat, $d\omega_t = 0$ gilt uneingeschränkt und wegen $\omega_t(x) = \omega(x)$ für alle t zeigt ein Kompaktheitsargument, dass alle Formen ω_t ($t \in [0, 1]$) in einer Umgebung von x gleichzeitig nichtausarten. Wegen $d(\omega_1 - \omega_0) = 0$ existiert nach Poincaré-Lemma eine 1-Form α derart, dass die Differenz

$$\omega_1 - \omega_0 = d\alpha$$

die äußere Ableitung dieser 1-Form ist. Indem wir gegebenenfalls lokal eine 1-Form mit konstanten Koeffizienten von α subtrahieren, können wir voraussetzen, dass α an der Stelle x verschwindet, $\alpha(x) = 0$. Wir dualisieren α mittels der symplektischen Formen ω_t und erhalten eine t -parametrische Schar \mathcal{W}_t von Vektorfeldern auf U :

$$\omega_t(\mathcal{V}, \mathcal{W}_t) = \alpha(\mathcal{V}).$$

Sei $\varphi(y, t) \in M^{2m}$ die Lösung der (nichtautonomen) Differentialgleichung

$$\dot{\varphi}(t) = \mathcal{W}_t(\varphi(t)), \quad \varphi(0) = y.$$

Alle Vektorfelder $\mathcal{W}_t(x) \equiv 0$ verschwinden im Punkt x , die zur Anfangsbedingung $x \in U_1 \subset U$ gehörende Lösung ist konstant, $\varphi(x, t) \equiv x$. Daher existiert eine Umgebung $x \in U_1 \subset U$ derart, dass für alle Anfangsbedingungen $y \in U_1$ die Lösung $\varphi(y, t)$ mindestens im Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Sei $\varphi_t : U_1 \rightarrow M^{2m}$ die entsprechende Abbildung. Aus der Formel für die Lie-Ableitung einer Form (siehe Satz 32, Kapitel 3.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega_t) &= \varphi_t^* \left(\frac{d\omega_t}{dt} \right) + \varphi_t^* (\mathcal{L}_{\partial \varphi_t / \partial t}(\omega_t)) = \varphi_t^*(\omega_1 - \omega) + \varphi_t^*(\mathcal{L}_{\mathcal{W}_t}(\omega_t)) \\ &= \varphi_t^*(\omega_1 - \omega + d(\mathcal{W}_t \lrcorner \omega_t) + \mathcal{W}_t \lrcorner d\omega_t) = \varphi_t^*(\omega_1 - \omega - d\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Es folgt $\varphi_t^*(\omega_1) = \varphi_0^*(\omega) = \omega$ und damit ist $\Phi \circ \varphi_1$ die gesuchte Karte,

$$(\Phi \circ \varphi_1)^* \left(\sum_{i=1}^m dp_i \wedge dy_i \right) = \omega. \quad \square$$

7.3. Erste Integrale und die Momentenabbildung

Die zur Integration der Hamilton-Gleichungen hilfreichen ersten Integrale entstehen nicht immer, jedoch häufig aus Symmetrien der Hamilton-Funktion. Wir beschreiben diese Konstruktion im Fall einer exakten symplektischen Mannigfaltigkeit. Dies bedeutet, die symplektische Form $\omega = d\theta$ sei das äußere Differential einer 1-Form. Wirke weiterhin eine Lie-Gruppe G von links auf M^{2m} derart, dass jeder Diffeomorphismus $l_g : M^{2m} \rightarrow M^{2m}$ die Form θ invariant lässt,

$$l_g^*(\theta) = \theta.$$

Insbesondere sind die Diffeomorphismen l_g also *symplektisch*, d. h. sie erhalten die symplektische Struktur ω . Ist nun $X \in \mathfrak{g}$ ein Element der Lie-Algebra der Gruppe G und \tilde{X} das der G -Wirkung auf M^{2m} entsprechende fundamentale Vektorfeld, so wird die Auswertung der 1-Form θ auf \tilde{X} eine Funktion,

$$\Phi(X) := \theta(\tilde{X}).$$

Damit entsteht eine lineare Abbildung $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M^{2m})$ der Lie-Algebra \mathfrak{g} in den Funktionenraum $C^\infty(M^{2m})$ der symplektischen Mannigfaltigkeit.

Satz 9 (Satz von Noether).

- (1) $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M^{2m})$ ist ein Lie-Algebren-Homomorphismus,

$$\Phi([X, Y]) = \{\Phi(X), \Phi(Y)\};$$

- (2) $\text{s-grad} \circ \Phi$ entspricht dem Übergang zum fundamentalen Vektorfeld,

$$\text{s-grad}(\Phi(X)) = \tilde{X};$$

- (3) die Funktion $\Phi(X)$ ist ein erstes Integral der Hamilton-Funktion H ,

$$\{H, \Phi(X)\} = 0,$$

falls H eine G -invariante Funktion ist.

Beweis. Wir fixieren $X \in \mathfrak{g}$ in der Lie-Algebra und betrachten die den Gruppenelementen $\exp(-t \cdot X)$ entsprechende einparametrische Diffeomorphismengruppe. Deren Vektorfeld ist das fundamentale Vektorfeld \tilde{X} . Aus $l_g^*(\theta) = \theta$ folgt das Verschwinden der Lie-Ableitung,

$$0 = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\theta) = \tilde{X} \lrcorner d\theta + d(\tilde{X} \lrcorner \theta) = \tilde{X} \lrcorner \omega + d(\Phi(X)).$$

Damit erhalten wir für jedes Vektorfeld \mathcal{V} die Gleichung

$$-\omega(\tilde{X}, \mathcal{V}) = \mathcal{V}(\Phi(X)) = \omega(\mathcal{V}, \text{s-grad}(\Phi(X)))$$

sowie $\tilde{X} = \text{s-grad}(\Phi(X))$. Unter Verwendung dieser Formel berechnen wir die Differenz

$$\begin{aligned} \{\Phi(X), \Phi(Y)\} - \Phi([X, Y]) &= \omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \Phi([X, Y]) = d\theta(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \Phi([X, Y]) \\ &= \tilde{X}(\Phi(Y)) - \tilde{Y}(\Phi(X)) - 2\Phi([X, Y]) \\ &= 2(\{\Phi(X), \Phi(Y)\} - \Phi([X, Y])) \end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\{\Phi(X), \Phi(Y)\} = \Phi([X, Y]).$$

Ist letztlich die Hamilton-Funktion G -invariant, so erhalten wir

$$\{H, \Phi(X)\} = -\text{s-grad}(\Phi(X))H = -\tilde{X}(H) = 0,$$

d. h. $\Phi(X)$ ist erstes Integral. □

Die Elemente der Lie-Algebra \mathfrak{g} ergeben erste Integrale für jede G -invariante Hamilton-Funktion. Diese ersten Integrale können wir zu einem einzigen vektorwertigen ersten Integral zusammenfassen, indem wir zum Dualraum \mathfrak{g}^* übergehen.

Definition 6. Die *Momentenabbildung* (oder *Impulsabbildung*) eines Hamilton-Systems mit Symmetriegruppe G ist die durch

$$\Psi(m)(X) := \Phi(X)(m)$$

definierte Abbildung $\Psi : M^{2m} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ der symplektischen Mannigfaltigkeit in die duale Lie-Algebra.

Satz 10.

(1) *Die Abbildung Ψ ist Ad^* -äquivariant, d. h. es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M^{2m} & \xrightarrow{l_g} & M^{2m} \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}^*(g)} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

(2) *Ψ ist ein erstes Integral von H .*

Beweis. Das fundamentale Vektorfeld \tilde{X} einer G -Wirkung besitzt folgende Invarianzeigenschaft:

$$\begin{aligned}\tilde{X}(l_g(x)) &= \frac{d}{dt} [\exp(-tX) \cdot g \cdot x] \Big|_{t=0} = dl_g \left(\frac{d}{dt} [\exp(-t \cdot \text{Ad}(g^{-1})X) \cdot x] \Big|_{t=0} \right) \\ &= dl_g(\widetilde{\text{Ad}(g^{-1})X}(x)).\end{aligned}$$

Die 1-Form θ ist nach Voraussetzung G -invariant und daraus erhalten wir

$$\Psi(l_g x) X = \theta(\tilde{X}(l_g x)) = \theta(\widetilde{\text{Ad}(g^{-1})X}(x)) = \Psi(x)(\widetilde{\text{Ad}(g^{-1})X}). \quad \square$$

Beispiel 6. Wir betrachten die 2-dimensionale Darstellung der Gruppe $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ im Vektorraum $M^2 = V = \mathbb{R}^2$. Das Kotangentialbündel ist $T^*M^2 = V \times V^* = V \times V$, weil die Darstellung eine Volumenform erhält. Ein Gruppenelement $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ wirkt auf einem Paar $(p, q) \in V \times V$ durch

$$g \cdot (p, q) = (g \cdot p, g \cdot q).$$

Bezeichnen wir mit $p = (p_1, p_2)$ und $q = (q_1, q_2)$ die Komponenten der Vektoren, so zeigt eine leichte Rechnung, dass die Momentenabbildung durch folgende Formel gegeben ist:

$$\Psi : V \times V \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad (p, q) \mapsto \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(q_1 p_2 + q_2 p_1) & -q_1 p_1 \\ q_2 p_2 & -\frac{1}{2}(q_1 p_2 + q_2 p_1) \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der letzten Matrix sind $\lambda = \pm \frac{1}{2}(q_1 p_2 - q_2 p_1)$. Dieser Ausdruck ist eine $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariante Funktion auf dem Raum $V \times V$. Sie beschreibt im Fall $\lambda \neq 0$ die generischen $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -Orbits in $V \times V$.

7.4. Vollständig integrierbare Hamilton-Systeme

In diesem Abschnitt benötigen wir eine Aussage über die Struktur diskreter Untergruppen Γ der additiven Gruppe \mathbb{R}^n .

Satz 11. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Untergruppe. Dann existieren linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_k mit

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \cdot v_i : m_i \text{ ganzzahlig} \right\},$$

d. h. Γ ist das von den Vektoren v_1, \dots, v_k erzeugte Gitter.

Beweis. Ist $\Gamma \neq \{0\}$ nicht trivial, so wählen wir einen Vektor $\gamma_1 \in \Gamma$ mit $\|\gamma_1\| \neq 0$ und betrachten die Kugel $D^n(0; \|\gamma_1\|)$. Der Durchschnitt $D^n(0; \|\gamma_1\|) \cap \Gamma$ ist eine kompakte und diskrete Teilmenge von \mathbb{R}^n , also endlich. Auf der durch γ_1 verlaufenden Geraden existiert somit ein Vektor $\gamma_1^* \in D^n(0; \|\gamma_1\|) \cap \Gamma$ mit minimalem Abstand zu $0 \in \mathbb{R}^n$. Für diesen gilt

$$\mathbb{R} \cdot \gamma_1 \cap \Gamma = \{m \cdot \gamma_1^* : m \text{ ganzzahlig}\},$$

denn gäbe es einen Vektor $x \neq m\gamma_1^*$ im Durchschnitt $(\mathbb{R} \cdot \gamma_1) \cap \Gamma$, so läge x in einer der Strecken $(m \cdot \gamma_1^*, (m+1) \cdot \gamma_1^*)$ und dann wäre $(m+1)\gamma_1^* - x$ ein Vektor in der durch γ_1 verlaufenden Geraden mit einem kleineren Abstand zu 0 als γ_1^* . Fällt die

Gruppe Γ bereits mit dem ganzzahligen Vielfachen von γ_1^* zusammen, so ist der Beweis beendet. Andernfalls existiert ein Vektor $\gamma_2 \in \Gamma \setminus \{m \cdot \gamma_1^* : m \text{ ganzzahlig}\}$. Wir projizieren γ_2 orthogonal auf die durch γ_1 verlaufende Gerade und bezeichnen mit $\bar{\gamma}_2$ den dadurch entstehenden Vektor. Dieser liegt in einer halbabgeschlossenen Strecke $\bar{\gamma}_2 \in [m \cdot \gamma_1^*, (m+1) \cdot \gamma_1^*]$. Sei Σ der Zylinder mit der Achse $[m\gamma_1^*, (m+1)\cdot\gamma_1^*]$ und demjenigen Radius, der gleich dem Abstand von γ_2 zur durch γ_1 verlaufenden Geraden ist. In diesem Zylinder liegen wiederum nur endlich viele Elemente der Gruppe Γ . Sei γ_2^* derjenige Vektor in $\Gamma \cap \Sigma$, dessen Abstand zur Achse des Zylinders minimal und der kein Vielfaches von γ_1^* ist. Dann gilt abermals

$$\Gamma \cap \{\mathbb{R} \cdot \gamma_1^* \oplus \mathbb{R} \gamma_2^*\} = \left\{ \sum_{i=1}^2 m_i \gamma_i^* : m_i \text{ ganzzahlig} \right\}.$$

Hätten wir nämlich einen Punkt $x \neq m_1 e_1 + m_2 e_2$ in $\Gamma \cap \{\mathbb{R} \gamma_1^* \oplus \mathbb{R} \gamma_2^*\}$, so läge x im Inneren eines der Parallelogramme der $\{\gamma_1^*, \gamma_2^*\}$ -Ebene. Bilden wir die Differenz mit einem Eckpunkt dieses Parallelogramms, so erhielten wir einen Vektor in Γ , welcher näher als γ_2^* an der Achse des Zylinders läge. Dieses Konstruktionsverfahren setzen wir nunmehr endlich viele Male fort. \square

Korollar 2. Ist $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Untergruppe, so ist \mathbb{R}^n / Γ diffeomorph zum Produkt eines k -dimensionalen Torus T^k mit \mathbb{R}^{n-k} ,

$$\mathbb{R}^n / \Gamma \approx T^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Satz 12 (Satz von Arnold-Liouville). Gegeben sei ein Hamilton-System (M^{2m}, ω, H) und m Funktionen $f_1 = H, f_2, \dots, f_m$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) f_i sind erste Integrale von H ;
- (2) f_i kommutieren, $\{f_i, f_j\} = 0$;
- (3) die Differentiale df_1, \dots, df_m sind in jedem Punkte linear unabhängig;
- (4) die symplektischen Gradienten $s\text{-grad}(f_i)$ sind vollständige Vektorfelder.

Zu gegebenem Punkt $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir die Niveaumannigfaltigkeit

$$M_c = \{x \in M^{2m} : f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m\}.$$

Dann gilt:

- a) Die Zusammenhangskomponenten von M_c sind diffeomorph zu $T^k \times \mathbb{R}^{m-k}$;
- b) das Vektorfeld $s\text{-grad}(H)$ ist tangential an M_c . Insbesondere liegen alle Integralkurven dieses Vektorfeldes vollständig in einer der Niveaumannigfaltigkeiten;
- c) ist M_c kompakt und zusammenhängend, so können in $M_c \approx T^m$ Winkelkoordinaten $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ derart eingeführt werden, dass die Integralkurven von $s\text{-grad}(H)$ durch das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\varphi}_i = \nu_i, \quad \nu_i \text{ konstant},$$

beschrieben werden.

Beweis. Wir betrachten die Flüsse $\Phi_t^1, \dots, \Phi_t^m : M^{2m} \rightarrow M^{2m}$ der symplektischen Gradienten $s\text{-grad}(f_i)$. Wegen

$$0 = s\text{-grad}\{f_i, f_j\} = [s\text{-grad}(f_i), s\text{-grad}(f_j)]$$

kommutieren diese Flüsse untereinander (Satz 36, Kapitel 3.9). Damit entsteht eine Wirkung der additiven Gruppe \mathbb{R}^m auf der Mannigfaltigkeit M^{2m} ,

$$(t_1, \dots, t_m) \cdot x = \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_m}^m(x).$$

Die Orbits dieser \mathbb{R}^m -Wirkung fallen mit den Zusammenhangskomponenten der Niveaumannigfaltigkeiten zusammen. Wegen

$$0 = \{f_i, f_j\} = s\text{-grad}(f_i)(f_j)$$

ist nämlich jede Funktion f_j konstant auf jedem Orbit. Damit sind die Orbits der \mathbb{R}^m -Wirkung in den Niveaumannigfaltigkeiten enthalten. Andererseits sind beide m -dimensionale Untermannigfaltigkeiten von M^{2m} , weil die Differentiale df_1, \dots, df_m linear unabhängig sind. Die Isotropiegruppe $\Gamma(x_0) = \{t \in \mathbb{R}^m : t \cdot x_0 = x_0\}$ der \mathbb{R}^m -Wirkung eines Punktes $x_0 \in M^{2m}$ ist diskret. Daher wird jede Komponente einer Niveaumannigfaltigkeit diffeomorph zu einem Produkt aus Torus und euklidischem Raum,

$$\mathbb{R}^m / \Gamma(x_0) = T^k \times \mathbb{R}^{m-k}.$$

Die Behauptungen a) und b) sind bewiesen, wir wenden uns jetzt der letzten Behauptung zu. Angenommen, eine Niveaumannigfaltigkeit M_c ist kompakt und zusammenhängend. Wir wählen einen Punkt $x_0 \in M_c$ und bezeichnen mit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^m$ eine Basis der Isotropiegruppe $\Gamma(x_0)$. Die Basis $\{v_i\}$ des Vektorraums \mathbb{R}^m stellen wir als Linearkombination der Standardbasis e_1, \dots, e_m von \mathbb{R}^m dar,

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha} e_\alpha,$$

und erhalten eine quadratische Matrix $\mathcal{A} := (a_{ij})$. Ist

$$\Gamma(m) = \left\{ \sum_{i=1}^m n_i \cdot e_i : n_i \text{ ganzzahlig} \right\}$$

das Standardgitter in \mathbb{R}^m , so wird durch

$$\Phi : \mathbb{R}^m / \Gamma(m) \longrightarrow \mathbb{R}^m / \Gamma(x_0) \xrightarrow{\sim} M_c, \quad \Phi \left(\sum_{i=1}^m x^i \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^m x^i \cdot v_i$$

ein Diffeomorphismus definiert. Dessen Inversabbildung

$$\Phi^{-1} : M_c \longrightarrow \mathbb{R}^m / \Gamma(m) = S^1 \times \dots \times S^1$$

sowie seine Komponenten $\Phi^{-1} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ führen uns auf die Winkelkoordinaten der Niveaumenge M_c . Sind nämlich y^1, \dots, y^m die durch

$$(y^1, \dots, y^m) \longrightarrow y^1 \cdot v_1 + \dots + y^m \cdot v_m$$

erklären Koordinaten in $\mathbb{R}^m/\Gamma(x_0) \cong M_c$, dann gilt nach Konstruktion der \mathbb{R}^m -Wirkung auf M_c

$$\text{s-grad}(f_i) = \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Gehen wir nunmehr zu den $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ -Koordinaten über, so ergibt sich

$$\text{s-grad}(f_i) = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha}.$$

Insbesondere ist der symplektische Gradient $\text{s-grad}(H)$ ein Vektorfeld mit konstantem Koeffizienten auf dem Torus $M_c = T^m$ und die dritte Behauptung ergibt sich mit der Wahl $\nu_j := a_{1j}$. \square

Wir gehen jetzt genauer auf die Frage ein, auf welche Weise die Winkelkoordinaten $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ einer kompakten und zusammenhängenden Niveaumenge direkt aus den kommutierenden ersten Integralen bestimmt werden können. Das führt uns auf einen expliziten Algorithmus zur Integration von Hamilton-Systemen (M^{2m}, ω, H) mit hinreichend vielen kommutierenden ersten Integralen, weswegen man diese *vollständig integrierbar* (oder in *Quadratur integrierbar*) nennt. Zu diesem Zweck bezeichnen wir mit $\omega_1(c), \dots, \omega_m(c)$ das zu den Vektorfeldern $\text{s-grad}(f_1), \dots, \text{s-grad}(f_m)$ duale Reper von 1-Formen auf M_c . Aus der Darstellung der Vektorfelder $\text{s-grad}(f_i)$ durch die Vektorfelder $\partial/\partial \varphi_j$ folgt sofort für die Differentiale die Formel

$$d\varphi_i = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha} \cdot \omega_\alpha(c).$$

Ist nun γ_k diejenige geschlossene Kurve in M_c , welche der Parametrisierung $\varphi_1 = \dots = \varphi_{k-1} = \varphi_{k+1} = \dots = \varphi_m = 0$ entspricht, so gilt

$$\delta_{ik} = \int_{\gamma_k} d\varphi_i = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha} \int_{\gamma_k} \omega_\alpha(c).$$

Damit sind zunächst die Koeffizienten a_{ij} und danach die Winkelkoordinaten direkt aus den ersten Integralen bestimmbar. Wir fassen dies insgesamt in einem Algorithmus, bestehend aus 5 Schritten, zusammen.

1. Schritt: Sei $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ fixiert und sei M_c kompakt und zusammenhängend. In der ersten Homologiegruppe $H_1(M_c; \mathbb{Z})$ wählen wir eine Homologiebasis $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.

2. Schritt: Aus den ersten Integralen $f_1 = H, f_2, \dots, f_m$ bestimmen wir deren symplektische Gradienten $\text{s-grad}(f_i)$.

3. Schritt: Wir dualisieren das Reper der Vektorfelder $\text{s-grad}(f_1), \dots, \text{s-grad}(f_m)$ in M^c und erhalten ein Reper von 1-Formen $\omega_1(c), \dots, \omega_m(c)$.

4. Schritt: Wir berechnen die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma_k} \omega_\alpha(c)$$

und invertieren die dadurch entstehende $(m \times m)$ -Matrix. Auf diese Weise entsteht die Matrix $\mathcal{A} = (a_{ij}(c))$.

5. Schritt: Aus den Gleichungen

$$d\varphi_i = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha}(c) \cdot \omega_\alpha(c) \quad 1 \leq i \leq m$$

bestimmen wir die Winkelkoordinaten $\varphi_i(c)$ auf der Niveaufläche M_c .

Dieses Verfahren bestimmt die Winkelkoordinaten $\varphi_i(c)$ auf einer Niveaufläche M_c . Anzumerken ist, dass diese nach Schritt 5 bis auf Konstanten festgelegt sind. Variieren wir nun den Parameter $c = (c_1, \dots, c_m)$, so werden $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ Funktionen in einer offenen Umgebung einer Niveaumannigfaltigkeit $M_c \subset M^{2m}$. Die Poisson-Klammer mit den vorliegenden Funktionen f_1, \dots, f_m wird – weil die symplektischen Gradienten tangential an M_c sind – berechnet durch

$$\{\varphi_i, f_j\} = d\varphi_i(\text{s-grad } f_j) = a_{ij}(f_1, \dots, f_m)$$

und ist eine ausschließlich von f_1, \dots, f_m abhängige Funktion. Wir beweisen analog, dass auch die Funktionen $\{\varphi_i, \varphi_j\}$ konstant auf den Niveauflächen sind.

Lemma 1. *Die Poisson-Klammern $\{\varphi_i, \varphi_j\} = b_{ij}(f_1, \dots, f_m)$ sind Funktionen, die nur von f_1, \dots, f_m abhängen. Insbesondere sind sie konstant auf jeder Niveaufläche M_c .*

Beweis. Wir berechnen die Ableitung von $\{\varphi_i, \varphi_j\}$ nach dem Vektorfeld $\text{s-grad}(f_k)$:

$$\begin{aligned} \text{s-grad}(f_k)\{\varphi_i, \varphi_j\} &= \{\{\varphi_i, \varphi_j\}, f_k\} = -\{\{\varphi_j, f_k\}, \varphi_i\} - \{\{f_k, \varphi_i\}, \varphi_j\} \\ &= -\{a_{jk}(f_1, \dots, f_m), \varphi_i\} + \{a_{ik}(f_1, \dots, f_m), \varphi_j\} \\ &= -\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial a_{jk}}{\partial y^\alpha} \{f_\alpha, \varphi_i\} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial a_{ik}}{\partial y^\alpha} \{f_\alpha, \varphi_j\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^m \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial y^\alpha} a_{i\alpha} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial y^\alpha} a_{j\alpha} \right). \end{aligned}$$

Also sind alle Ableitungen $\text{s-grad}(f_k)\{\varphi_i, \varphi_j\}$ ($1 \leq k \leq m$) konstant auf jedem Torus $T^m = M_c$. Dann aber ist die Poisson-Klammer $\{\varphi_i, \varphi_j\}$ selbst konstant auf jeder Niveaumannigfaltigkeit M_c . \square

Wir ändern jetzt die bisher auf nur einer Niveaufläche betrachteten Winkelkoordinaten dadurch ab, dass wir sie in den Niveauflächen durch geeignete Konstanten verändern. Das Ziel dieser Wahl der Integrationskonstanten für die Winkelkoordinaten besteht darin, auf M^{2m} kommutierende Funktionen φ_i zu erhalten.

Lemma 2. Es existieren Funktionen $B_1(y^1, \dots, y^m), \dots, B_m(y^1, \dots, y^m)$ derart, dass die Winkelkoordinaten

$$\varphi_i^* := \varphi_i + B_i(f_1, \dots, f_m)$$

auf der symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2m} kommutieren, $\{\varphi_i^*, \varphi_j^*\} = 0$.

Beweis. Mit den Bezeichnungen $\{\varphi_i, f_j\} = a_{ij}$ und $\{\varphi_i, \varphi_j\} = b_{ij}$ wenden wir die Jacobi-Identität auf die Tripel $(\varphi_i, \varphi_j, f_k)$ und $(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k)$ an und berücksichtigen zugleich, dass die Poisson-Klammern $\{f_i, f_j\} = 0$ verschwinden. Dann erhalten wir unmittelbar die Relationen

$$\sum_{\alpha=1}^m \left[\frac{\partial a_{ik}}{\partial y^\alpha} a_{j\alpha} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial y^\alpha} a_{i\alpha} \right] = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^m \left[\frac{\partial b_{ij}}{\partial y^\alpha} a_{k\alpha} + \frac{\partial b_{jk}}{\partial y^\alpha} a_{i\alpha} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial y^\alpha} a_{j\alpha} \right] = 0.$$

Unter Hinzuziehung der Koeffizienten a^{ij} der zu $\mathcal{A} = (a_{ij})$ inversen Matrix betrachten wir die 2-Form

$$\Omega := \sum_{i,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^m b_{ij} a^{i\alpha} a^{j\beta} dy^\alpha \wedge dy^\beta.$$

Die angegebenen Relationen bedeuten, dass Ω eine geschlossene 2-Form ist. Führen wir nämlich die 1-Formen

$$\sigma_i := \sum_{\alpha=1}^m a^{i\alpha} dy^\alpha$$

ein, so sind diese aufgrund der ersten Relation geschlossene Formen, $d\sigma_i = 0$. Daher können wir Koordinaten z^1, \dots, z^m mit $\sigma_i = dz^i$ wählen und Ω hat die Gestalt

$$\Omega = \sum_{i,j=1}^m b_{ij} dz^i \wedge dz^j.$$

Wegen

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial z^k} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial b_{ij}}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial z^k} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial b_{ij}}{\partial y^\alpha} a_{k\alpha}$$

bedeutet dann die zweite Relation genau das Verschwinden des äußeren Differentials $d\Omega = 0$. Die zu findenden Winkelkoordinaten setzen wir in der Gestalt

$$\varphi_i^* := \varphi_i + \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha} B_\alpha^*$$

an mit Funktionen B_1^*, \dots, B_m^* , die nur von f_1, \dots, f_m abhängen. Dann gilt

$$\{\varphi_i^*, \varphi_j^*\} = b_{ij} + \sum_{\alpha,\beta=1}^m \left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial y^\beta} a_{j\beta} - \frac{\partial a_{j\alpha}}{\partial y^\beta} a_{i\beta} \right) B_\alpha^* + \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial B_\alpha^*}{\partial y^\beta} (a_{i\alpha} a_{j\beta} - a_{j\alpha} a_{i\beta}).$$

Berücksichtigen wir die obige erste Relation, so wird die Bedingung $\{\varphi_i^*, \varphi_j^*\} = 0$ äquivalent zu

$$b_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^m \frac{\partial B_\alpha^*}{\partial y^\beta} (a_{i\beta} a_{j\alpha} - a_{i\alpha} a_{j\beta}).$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann als

$$\frac{\partial B_\alpha^*}{\partial y^\beta} - \frac{\partial B_\beta^*}{\partial y^\alpha} = \sum_{i,j=1}^m b_{ij} a^{i\alpha} a^{j\beta}$$

umformuliert werden und hat nach dem Poincaré-Lemma eine Lösung, weil die zuvor betrachtete 2-Form Ω geschlossen ist. \square

Wir können demnach die Integrationskonstanten beim Übergang von den Differentialen

$$d\varphi_i(c) = \sum_{\alpha=1}^m a_{i\alpha}(c) \omega_\alpha(c)$$

zu den Winkelkoordinaten auf den einzelnen Niveauflächen so bestimmen, dass die in einer Umgebung einer Niveaumannigfaltigkeit definierten Funktionen φ_i in M^{2m} kommutieren. Diese ergänzen wir jetzt durch sog. Wirkungskoordinaten J_1, \dots, J_m und verleihen damit der symplektischen Struktur nahe einer Niveaumannigfaltigkeit die Normalform. Die Hamilton-Funktion $H = f_1$ selbst ist konstant auf den Niveauflächen und hängt nur von den Wirkungsvariablen ab, $H = H(J_1, \dots, J_m)$.

Satz 13 (Winkel- und Wirkungskoordinaten). *In der Umgebung jeder kompakten, zusammenhängenden Niveaumannigfaltigkeit $M_c \subset M^{2m}$ eines durch m kommutierende Integrale f_1, \dots, f_m bestimmten Hamilton-Systems können Winkelkoordinaten $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ und erste Integrale J_1, \dots, J_m so bestimmt werden, dass*

$$\omega = \sum_{i=1}^m d\varphi_i \wedge dJ_i$$

gilt. Insbesondere folgt dann $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0 = \{J_i, J_j\}$ und $\{\varphi_i, J_j\} = \delta_{ij}$.

Beweis. Zunächst bestimmen wir die Winkelkoordinaten nahe der kompakten, zusammenhängenden Niveaufläche M_c mit

$$\{\varphi_j, \varphi_i\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\varphi_i, f_j\} = a_{ij}(f_1, \dots, f_m).$$

Wir suchen die Funktionen J_1, \dots, J_m durch den Ansatz $J_i = A_i(f_1, \dots, f_m)$ und berechnen die Poisson-Klammer

$$\{\varphi_i, J_j\} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial A_j}{\partial y^\alpha} a_{i\alpha}.$$

Die Bedingung $\{\varphi_i, J_j\} = \delta_{ij}$ führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{\partial A_i}{\partial y^j} = a^{ij},$$

wobei a^{ij} die Inversmatrix zur Matrix a_{ij} ist. Die Integrabilitätsbedingung ist nach dem Poincaré-Lemma

$$\frac{\partial a^{ij}}{\partial y^k} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial y^j}.$$

Andererseits erhalten wir aus der Jacobi-Identität

$$0 = \{\varphi_k, \{\varphi_i, f_j\}\} + \{\varphi_i, \{f_j, \varphi_k\}\} + \{f_j, \{\varphi_k, \varphi_i\}\}$$

und unter Berücksichtigung von $\{\varphi_i, \varphi_k\} = 0$ sofort

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial a_{ij}}{\partial y^\alpha} a_{k\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial a_{kj}}{\partial y^\alpha} a_{i\alpha}.$$

Eine leichte Umrechnung zeigt, dass diese Relation äquivalent zur gewünschten Integrabilitätsbedingung für die Koeffizienten a^{ij} der Umkehrmatrix ist. \square

Beispiel 7 (zweidimensionales Hamilton-System). In \mathbb{R}^2 mit der symplektischen Struktur $\omega = dp \wedge dq$ und einer Hamilton-Funktion $H(q, p)$ seien die Niveaulinien

$$M_c = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : H(q, p) = c\}$$

geschlossene Kurven. Die Wirkungsvariable $J = J(H)$ ist eine Funktion von H und zusammen mit der Winkelkoordinate φ gilt

$$dp \wedge dq = d\varphi \wedge dJ = J'(H) d\varphi \wedge dH.$$

Verwenden wir den Hodge-Operator $*$ von \mathbb{R}^2 , so wird $d\varphi$ proportional zur 1-Form $*dH$,

$$d\varphi = -\frac{1}{J'(H)} \frac{1}{\|dH\|^2} * dH.$$

Das Integral von $d\varphi$ über jeder Niveaulinie ist ganzzahlig, wir setzen es gleich -1 . Diese Bedingung nennt man die klassische *Bohr-Sommerfeld-Bedingung*. Aus der Gleichung

$$J'(c) = \int_{M_c} \frac{1}{\|dH\|^2} * dH$$

wird die Wirkungsvariable $J = J(H)$ mittels der Hamilton-Funktion H eindeutig bestimmt. Betrachten wir das von der Niveaulinie M_c beschränkte Gebiet

$$\Omega_c = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : H(q, p) \leq c\}.$$

Der Fluss Φ_t des Vektorfeldes $\mathcal{W} := \text{grad}(H)/\|\text{grad}(H)\|^2$ bildet wegen $\mathcal{W}(H) \equiv 1$ die Menge Ω_c auf Ω_{c+t} ab. Wir berechnen die Veränderung des Flächeninhaltes des Gebietes:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc}(\text{vol}(\Omega_c)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\Omega_c} \Phi_t^*(d\mathbb{R}^2) - \int_{\Omega_c} d\mathbb{R}^2 \right) = \int_{\Omega_c} \mathcal{L}_{\mathcal{W}}(d\mathbb{R}^2) \\ &= \int_{\Omega_c} d(\mathcal{W} \lrcorner d\mathbb{R}^2) = \int_{M_c} \mathcal{W} \lrcorner d\mathbb{R}^2 = \int_{M_c} \frac{1}{\|dH\|^2} * dH = J'(c). \end{aligned}$$

Die Interpretation der Wirkungsvariablen $J = J(H)$ lautet daher: $J(c)$ ist das Volumen $\text{vol}(\Omega_c)$ des von der Niveaulinie $M_c = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : H(q, p) = c\}$ begrenzten Gebietes.

Beispiel 8 (sphärisches Pendel). Auf der Sphäre $S^2 \setminus \{N, S\}$ ohne Nord- und Südpol betrachten wir die sphärischen Koordinaten

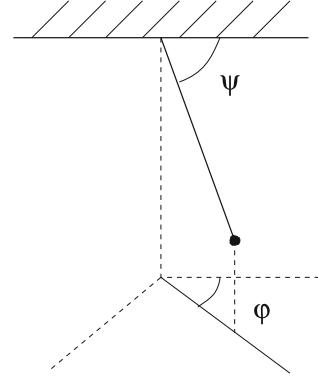
$$h(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi),$$

in denen die Riemannsche Metrik der Sphäre durch die Matrix

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \psi \end{bmatrix}$$

dargestellt wird (siehe Beispiel 14, Kapitel 3.2). Die Koordinaten im Kotangentialbündel bezeichnen wir mit $(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi)$ und betrachten die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p_\psi^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2 \cos^2 \psi} + (1 + \sin \psi).$$



H beschreibt die Bewegung eines Fadenpendels der Länge eins, welches im Mittelpunkt der Sphäre aufgehängt ist. Die Bedeutung der Winkel φ und ψ ergeben sich dann aus dem nachstehenden Bild. Die Gravitationskonstante wurde der Einfachheit halber gleich eins gesetzt. Die Variable φ tritt nicht explizit in der Hamilton-Funktion auf und daher wird $P := p_\varphi = \dot{\varphi} \cos^2 \psi$ ein erstes Integral, $\{H, P\} = 0$.

Das Hamiltonsche System (T^*S^2, H) ist demnach vollständig integrierbar. Die Niveaumannigfaltigkeit

$$M^2(c_1, c_2) := \{(\varphi, \psi, p_\varphi, p_\psi) \in T^*S^2 : P = c_1, H = c_2\}$$

ist leer für negative Parameter $c_2 < 0$ und besteht aus dem ruhenden Südpol im Fall $c_2 = 0$. Daher setzen wir voraus, dass $c_2 > 0$ positiv ist. Die Gleichungen der Mannigfaltigkeit $M^2(c_1, c_2)$ lauten

$$c_1 = p_\varphi, \quad c_2 = \frac{p_\psi^2}{2} + \frac{c_1^2}{2 \cos^2 \psi} + 1 + \sin \psi.$$

Aus $c_1 = 0$ folgt, dass φ konstant sein muss. In diesem Fall reduziert sich die zweite Bewegungsgleichung auf die eines ebenen Pendels, so dass wir ihn fortan ausschliessen wollen. Ansonsten ist die Funktion φ je nach Vorzeichen von c_1 monoton wachsend oder fallend, d. h. das Pendel ändert seine „Laufrichtung“ nicht. Indem man die zweite Gleichung umstellt und $z = \sin \psi$ setzt

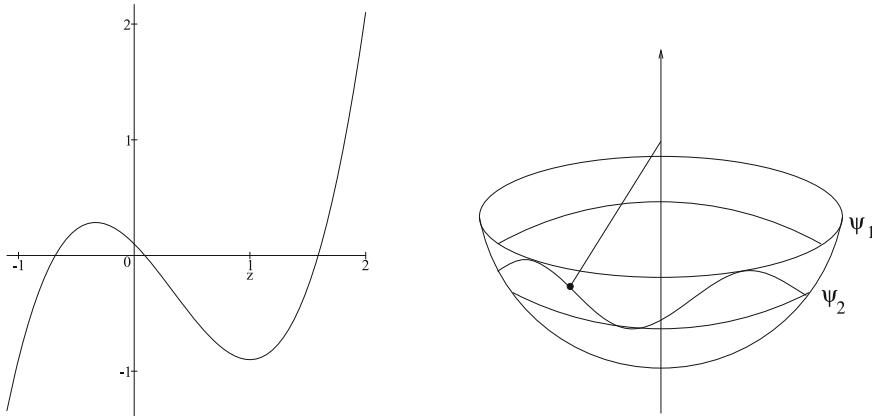
$$\frac{p_\psi^2}{2} = c_2 - 1 - z - \frac{c_1^2}{2(1-z^2)} =: U(z)$$

erkennet man, dass die so definierte Funktion $U(z)$ nicht negativ sein darf. Der Grenzfall $p_\psi = 0$ entspricht der Bewegung des Pendels in einer festen Ebene, also auf einem Breitenkreis. Um einzusehen, wo die Funktion $U(z)$ echt positiv sein kann, multiplizieren wir sie mit dem Nenner $1 - z^2$ und untersuchen das entstehende Polynom dritten Grades

$$V(z) = (1 - z^2)U(z) = (\tilde{c}_2 - z)(1 - z^2) - \frac{c_1^2}{2}$$

auf seine Nullstellen. In den Intervallgrenzen ist $V(\pm 1) = -c_1^2/2 < 0$ negativ, bei $+\infty$ dagegen divergiert V gegen $+\infty$. Eine der drei Nullstellen muss also oberhalb

von 1 liegen und hat, da sie keinem Winkel ψ entsprechen kann, keine physikalische Bedeutung. Die beiden anderen Nullstellen liegen im generischen Fall im Intervall $]-1, 1[$, zwischen ihnen ist V und damit auch U positiv. Insgesamt erhält man für $V(z)$ folgendes qualitatives Verhalten.



Der Massenpunkt kann sich nur zwischen den beiden Breitenkreisen bewegen, die den beiden Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$ entsprechen. Die so definierten Grenzen ψ_1, ψ_2 werden am Ende jeder Steigung bzw. jeder Senkung auch tatsächlich angenommen.

Insgesamt lässt sich die Niveaumannigfaltigkeit durch die beiden Parameter $\varphi^* = \varphi$ und $\psi^* = \psi$ parametrisieren

$$\left(\varphi^*, c_1, \psi^*, \pm \sqrt{2c_2 - \frac{c_1^2}{\cos^2 \psi^*} - 2 - 2 \sin \psi^*} \right)$$

und besteht aus 2 zweidimensionalen Tori, wobei ψ^* nur Werte in $[\psi_1, \psi_2]$ annimmt. Die entsprechenden Koordinatenvektorfelder sind

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^*} = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi^*} = \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial p_\psi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial p_\psi}.$$

Wir stellen die symplektischen Gradienten der ersten Integrale in den Koordinaten der Niveaumannigfaltigkeit dar:

$$\begin{aligned} \text{s-grad}(H) &= \frac{p_\varphi}{\cos^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + p_\psi \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{d}{d\psi} \left(\frac{p_\varphi^2}{2 \cos^2 \psi} + 1 + \sin \psi \right) \frac{\partial}{\partial p_\psi} \\ &= \frac{p_\varphi}{\cos^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + p_\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + p_\psi \frac{\partial p_\psi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial p_\psi} \\ &= \frac{p_\varphi}{\cos^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} + p_\psi \frac{\partial}{\partial \psi^*}, \end{aligned}$$

sowie

$$\text{s-grad}(P) = \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi^*}.$$

Die dualen Formen $\omega_1(c_1, c_2)$ und $\omega_2(c_1, c_2)$ sind demnach die Formen

$$\omega_1(c_1, c_2) = \frac{1}{p_\psi} d\psi^*, \quad \omega_2(c_1, c_2) = d\varphi^* - \frac{c_1}{p_\psi \cos^2 \psi} d\psi^*.$$

Wir berechnen die Perioden über dem Homologiezyklus γ_1 , welcher in $M^2(c_1, c_2)$ durch ψ^* parametrisiert wird. Der Faktor 2 entsteht dadurch, dass die Intervallgrenzen ψ_1, ψ_2 dem Minimum und dem Maximum der Bewegung entsprechen, mit einem Zyklus aber die Bewegung zwischen zwei gleichartigen Extrema gemeint ist:

$$b_{11} = \int_{\gamma_1} \omega_1 = 2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{p_\psi}, \quad b_{12} = \int_{\gamma_1} \omega_2 = -2c_1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{p_\psi \cos^2 \psi}.$$

Ist analog γ_2 der durch $0 \leq \varphi^* \leq 2\pi$ gegebene Homologiezyklus, so gilt

$$b_{21} = \int_{\gamma_2} \omega_1 = 0, \quad b_{22} = \int_{\gamma_2} \omega_2 = 2\pi.$$

Die im Algorithmus der Bestimmung der Winkelkoordinaten auftretende Matrix berechnet man nunmehr leicht

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\int_{\gamma_1} \omega_1} & \frac{-\int_{\gamma_1} \omega_2}{2\pi \int_{\gamma_1} \omega_1} \\ 0 & 1/2\pi \end{bmatrix}$$

und wir erhalten das Verhältnis der Grundfrequenzen

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \omega_2 = \frac{c_1}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi p_\psi}.$$

Dies ist genau die Periheldrehung, d. h. die Änderung des Winkels φ über einen vollständigen Zyklus:

$$\Delta\varphi = \int_{\gamma_1} d\varphi = 2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\varphi}{d\psi} d\psi = 2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} d\psi = 2c_1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi p_\psi} = 2\pi \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

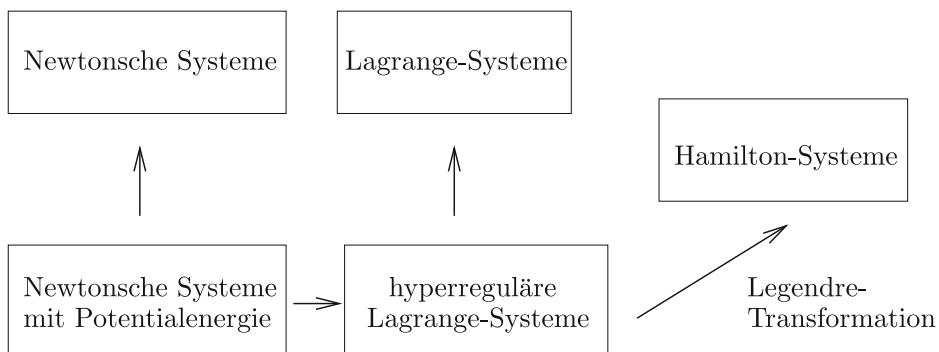
Im Allgemeinen ist die Bewegung quasiperiodisch. Die Bahn schließt sich nur, wenn das Verhältnis ν_1/ν_2 rational ist, anderenfalls liegt sie dicht auf dem Torus. Der Übergang zu Winkel- und Wirkungsvariablen erlaubt es, die physikalisch relevanten Grundfrequenzen zu bestimmen, ohne das System explizit zu integrieren. Dies macht ihre Bedeutung für die astronomische Störungstheorie aus.

7.5. Formulierungen der Mechanik

Die Newtonschen Gleichungen beschreiben die Bewegung eines mechanischen Systems unter dem Einfluss einer Kraft. Diese wird als ein Vektorfeld, abhängig von der Lage und der Geschwindigkeit, verstanden und steht im Zentrum der Newtonschen Auffassung von Mechanik. Im 18. Jahrhundert wandelte sich diese Vorstellung dahingehend, dass durch Lagrange das Wirkungsintegral als die tragende

Größe zur Beschreibung der Dynamik erkannt wurde. Sowohl Newton als auch Lagrange formulieren die Mechanik im Tangentialbündel des Konfigurationsraumes. Im 19. Jahrhundert gelang Hamilton durch den Übergang zum Kotangentialbündel eine Formulierung der Dynamik mechanischer Systeme im Rahmen der symplektischen Geometrie. Ziel des Abschnittes ist es, diese grundlegenden Ideen der Mechanik und die damit in Verbindung stehenden mathematischen Strukturen zu erläutern.

Newton (1643-1727) Lagrange (1736-1813) Hamilton (1805-1865)



Mathematische Inhalte:

Riemannsche Geometrie Finsler-Geometrie symplektische Geometrie

Formulierung der Mechanik nach Newton

Der Zustand eines mechanischen Systems in der Newtonschen Mechanik wird durch endlich viele reelle Parameter beschrieben. Dies führt auf den Begriff des *Konfigurationsraumes*, der eine glatte und endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit M^m ist. Eine Bewegung des mechanischen Systems ist eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$ im Konfigurationsraum. Deren Tangente – die *Geschwindigkeit* – wird eine Kurve $\dot{\gamma} : (a, b) \rightarrow TM^m$ im Tangentialbündel und diesen Raum nennt man den *Phasenraum*. Nach Newton wirken auf das mechanische System Kräfte, welche Vektorfelder und nur von der Lage und der Geschwindigkeit abhängig sind. Damit ist eine Kraft im Sinne der Newtonschen Mechanik ein Vektorfeld X auf TM^m . Allerdings kommen nicht alle Vektorfelder in Frage, weil die Kraft nur räumlich wirkt. Das Kraftvektorfeld X muss die Bedingung

$$d\pi \circ X = \text{Id}$$

erfüllen. Dabei ist $\pi : TM^m \rightarrow M^m$ die Projektion im Tangentialbündel und $d\pi : TTM^m \rightarrow TM^m$ deren Differential. Insgesamt führt dies auf den Begriff eines Newtonschen Systems.

Definition 7. Ein autonomes *Newton-System* ist ein Tripel (M^m, g, X) , bestehend aus einer Mannigfaltigkeit M^m , einer Riemannschen Metrik g und einem Vektorfeld im Raum TM^m , derart, dass

$$d\pi \circ X = \text{Id}_{TM^m}$$

gilt. Die durch

$$T(v) := \frac{1}{2} g(v, v)$$

definierte Funktion $T : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die *kinetische Energie*.

Definition 8. Unter einer *Bewegung* des Newtonschen Systems (M^m, g, X) versteht man eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$ im Konfigurationsraum, deren Tangentenkurve $\dot{\gamma} : (a, b) \rightarrow TM^m$ eine Integralkurve von X ist,

$$\ddot{\gamma}(t) = X(\dot{\gamma}(t)).$$

Dies ist die invariante Formulierung der Newtonschen Gleichung.

Beispiel 9. Wir betrachten \mathbb{R} mit der Koordinate x und identifizieren $T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit \mathbb{R}^2 . Hier benennen wir die Koordinaten mit $\{x, \dot{x}\}$. Durch

$$X = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{m}(-k^2 x - \rho \dot{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}}$$

wird ein Vektorfeld auf $T\mathbb{R}$ mit der genannten Eigenschaft erklärt und eine Kurve $x(t)$ in \mathbb{R} ist genau dann eine Bewegung in diesem Newtonschen System, falls $x(t)$ eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = -k^2 x(t) - \rho \dot{x}(t)$$

ist.

Beispiel 10. Sei (M^m, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Im Tangentialbündel TM^m definieren wir ein Vektorfeld $S : TM^m \rightarrow TTM^m$ – den sog. *geodätischen Spray* – auf folgende Weise: Ist $v \in T_x M^m$ ein tangentialer Vektor, so existiert genau eine geodätische Linie $\gamma_{x,v} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^m$ mit

$$\gamma_{x,v}(0) = x, \quad \dot{\gamma}_{x,v}(0) = v.$$

Wir betrachten deren Tangentenkurve $\dot{\gamma}_{x,v} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow TM^m$ und legen

$$S(v) := \frac{d}{dt} (\dot{\gamma}_{x,v}(t))|_{t=0}.$$

Aus $\pi \circ \dot{\gamma}_{x,v}(t) = \gamma_{x,v}(t)$ folgt sofort $d\pi \circ S = \text{Id}_{TM^m}$. Damit wird (M^m, g, S) ein Newtonsches System und die Bewegungen dieses Systems sind die geodätischen Linien der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m, g) . In den Koordinaten $\{x^1, \dots, x^m, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m\}$ des Tangentialbündels ist der geodätische Spray durch die Formel

$$S = \sum_{i=1}^m \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,j,k=1}^m \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$$

gegeben, eine direkte Konsequenz des die geodätschen Linien beschreibenden Differentialgleichungssystems – siehe Kapitel 5.7.

Eine Vielzahl Newtonscher Systeme haben eine *Potentialenergie*. Darunter verstehen wir eine glatte Funktion $V : M^m \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf dem Konfigurationsraum. Der Gradient $\text{grad}(V)$ ist ein Vektorfeld auf M^m und lokal durch

$$\text{grad}(V) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(x) \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

gegeben. Im weiteren benötigen wir jedoch ein anderes Vektorfeld, welches wir mit $\overline{\text{grad}}(V)$ bezeichnen werden. Dabei handelt es sich um ein Vektorfeld auf dem Phasenraum. An der Stelle $v \in TM^m$ ist es durch die Gleichung:

$$\overline{\text{grad}}(V)(v) = \frac{d}{dt}(v + t \text{grad}(V)(\pi(v)))|_{t=0}$$

definiert. Die Kurve $v + t \text{grad}(V)(\pi(v))$ projiziert sich in der Mannigfaltigkeit M^m auf den Fußpunkt $\pi(v) \in M^m$ des Vektors $v \in TM^m$. Daher projiziert sich das Vektorfeld $\overline{\text{grad}}(V)$ unter dem Differential $d\pi$ auf null,

$$d\pi \circ \overline{\text{grad}}(V) = 0,$$

und für jede Potentialenergie V ist das Vektorfeld $X := S - \overline{\text{grad}}(V)$ ein im Sinne der Newtonschen Mechanik zulässiges Vektorfeld in TM^m . In lokalen Koordinaten erhalten wir die Formel

$$\overline{\text{grad}}(V) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(x) \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}.$$

Definition 9. Ein *Newton'sches System mit Potentialenergie* ist ein Tripel (M^m, g, V) , bestehend aus einer Riemannschen Metrik g und einer Potentialenergie $V : M^m \rightarrow \mathbb{R}$. Das zugehörige Kraftvektorfeld ist

$$X = S - \overline{\text{grad}}(V).$$

Unter einer Bewegung in einem Newtonschen System mit Potentialenergie versteht man eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$, deren Tangentenkurve $\dot{\gamma} : (a, b) \rightarrow TM^m$ eine Integralkurve von X ist.

Definition 10. Die *Energie* eines Newtonschen Systems (M^m, g, V) mit Potentialenergie ist die Summe aus kinetischer und Potentialenergie,

$$E : TM^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad E = T + V \circ \pi.$$

Satz 14 (Energieerhaltungssatz für Newton-Systeme). *Sei (M^m, g, V) ein Newtonsches System mit Potentialenergie und $X = S - \overline{\text{grad}}(V)$ das Kraftvektorfeld. Dann gilt*

$$dE(X) = 0.$$

Insbesondere ist $E(\dot{\gamma}(t))$ für jede Bewegung $\gamma(t)$ dieses Systems konstant.

Beweis. In lokalen Koordinaten sind die Energie E und das Kraftvektorfeld durch die Formeln

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j + V(x) \\ X &= \sum_{i=1}^m \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k(x) \dot{x}^i \dot{x}^j + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial x^i} g^{ik}(x) \right) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \end{aligned}$$

bestimmt. Benutzen wir weiterhin den Ausdruck für die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k aus Kapitel 5.7

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m g^{k\alpha}(x) \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j}(x) + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}(x) \right),$$

so folgt $dE(X) = X(E) = 0$ aus einer elementaren Rechnung. \square

Bewegungen großer Energie eines Newtonschen Systems (M^m, g, V) mit Potentialenergie sind – bis auf eine Änderung der Parametrisierung – geodätische Linien bezüglich einer neuen Riemannschen Metrik. Diese Konstruktion wird uns auf das Maupertuis-Jacobi-Prinzip führen. Sei die Potentialenergie $V : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ von oben beschränkt und E_0 eine obere Schranke,

$$\sup\{V(x) : x \in M^m\} < E_0.$$

Dann ist $g^* = (E_0 - V)g$ eine Riemannsche Metrik der Mannigfaltigkeit M^m . Wir betrachten eine Bewegung $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$ des Newtonschen Systems (M^m, g, V) mit Energie E_0 ,

$$E_0 = \frac{1}{2} g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) + V(\gamma(t)).$$

Wegen $E_0 > V(\gamma(t))$ verschwindet der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ nirgends und die Funktion

$$s(t) := \sqrt{2} \int_a^t (E_0 - V(\gamma(\mu))) d\mu$$

wird eine streng monotone Funktion $s : (a, b) \rightarrow (0, b^*)$. Wir invertieren diese Funktion und stellen damit den Parameter $t \in (a, b)$ in Abhängigkeit des Parameters $s \in (0, b^*)$ dar, $t = t(s)$. Die Kurve $\gamma^*(s)$ sei die Ausgangskurve γ in der neuen Parametrisierung.

Satz 15 (Maupertuis-Jacobi-Prinzip). *Ist $\gamma(t)$ eine Bewegung des Newtonschen Systems (M^m, g, V) der Energie E_0 , so wird $\gamma^*(s)$ eine geodätische Linie in M^m in der Riemannschen Metrik $g^* = (E_0 - v)g$.*

Beweis. Die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k und ${}^*\Gamma_{ij}^k$ der Metriken g und g^* sind in lokalen Koordinaten über die Formel

$${}^*\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} \frac{1}{(E_0 - V)} \left(-\frac{\partial V}{\partial x^i} \delta_{jk} - \frac{\partial V}{\partial x^j} \delta_{ik} + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} g^{\alpha k} g_{ij} \right)$$

miteinander verbunden. Wir stellen die Bewegung $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ in lokalen Koordinaten dar. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{dx^k}{ds} &= \frac{dx^k}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(E_0 - V)} \frac{dx^k}{dt} \\ \frac{d^2x^k}{ds^2} &= \frac{1}{2(E_0 - V)^2} \frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2(E_0 - V)^3} \frac{dx^k}{dt} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt}\end{aligned}$$

und wir erhalten unter Verwendung der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = - \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} g^{k\alpha}$$

sowie der Energiebedingung

$$\sum_{i,j=1}^m g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 2(E_0 - V)$$

das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^m {}^*\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} &= \\ = -\frac{1}{2(E_0 - V)^2} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} g^{k\alpha} + \frac{1}{4(E_0 - V)^3} \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial V}{\partial x^\alpha} g^{k\alpha} \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

□

Formulierung der Mechanik nach Lagrange

Der Übergang zur Lagrange-Mechanik erfolgt dadurch, dass man die Lagrange-Funktion eines Newton-Systems mit Potentialenergie betrachtet.

Definition 11. Sei (M^m, g, V) ein Newton-System mit Potentialenergie. Die *Lagrange-Funktion* $L : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Differenz aus kinetischer und Potentialenergie,

$$L = T - V \circ \pi.$$

Satz 16 (D'Alembert-Lagrange). Eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$ ist genau dann eine Bewegung des Newtonschen Systems (M^m, g, V) mit Potentialenergie, falls die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (\dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} (\dot{\gamma}(t))$$

gelten.

Beweis. Wir beweisen diesen Satz wiederum in lokalen Koordinaten. Die Kurve $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ ist genau dann eine Bewegung des Newton-Systems mit

Potentialenergie, falls sie Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\ddot{x}^k = - \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j - \sum_{\alpha=1}^m V_\alpha g^{\alpha k}$$

ist. Dabei haben wir der Kürze halber mit V_α die partielle Ableitung $V_\alpha := \partial V / \partial x^\alpha$ der Potentialfunktion bezeichnet. Die Lagrange-Funktion ist

$$L(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V(\gamma)$$

und damit ergibt sich die Differenz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (\dot{\gamma}) \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} (\dot{\gamma}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^m \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \sum_{\alpha=1}^m g_{i\alpha} \ddot{x}^\alpha + V_i.$$

Multiplizieren wir die Lagrange-Gleichungen mit g^{ik} und summieren wir über den Index i , so wird dieses Gleichungssystem äquivalent zu

$$0 = \ddot{x}^k + \sum_{i=1}^m V_i g^{ik} + \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^m \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i} \right) g^{ik} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der Formel für die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k . \square

Damit sind die Bewegungsgleichungen der Newtonschen Mechanik im Fall einer Potentialkraft durch die Lagrange-Gleichungen ersetzt worden. Für letztere spielt es zunächst keine Rolle, dass die Lagrange-Funktion als Summe einer kinetischen und einer Potentialenergie entsteht. Dies führt zu der folgenden

Definition 12. Ein autonomes *Lagrange-System* ist ein Paar (M^m, L) , bestehend aus einer Mannigfaltigkeit M^m und einer glatten Funktion $L : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$. Eine *Lagrange-Bewegung* ist eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$, welche Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} (\dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} (\dot{\gamma}(t))$$

ist (*Lagrange-Gleichung*).

Beispiel 11. Sei (M^m, g) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und A eine 1-Form. Die Lagrange-Funktion

$$L(v) = \frac{m}{2} g(v, v) - A(v)$$

beschreibt die Bewegung eines Ladungsteilchens der Masse m unter der Einwirkung der Lorentzkraft eines elektromagnetischen Feldes mit Potenzial A (siehe Kapitel 9).

Bewegungen in einem Lagrange-System können unter dem Gesichtspunkt verstanden werden, dass sie kritische Punkte des *Wirkungsintegrals* \mathcal{L} sind. Dieses misst für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M^m$ den mittleren Wert der Lagrange-Funktion auf dieser Kurve,

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b L(\dot{\gamma}(t)) dt.$$

Satz 17 (Prinzip der kleinsten Wirkung). *Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M^m$ ist genau dann eine Bewegung des Lagrange-Systems (M^m, L) , falls für jede ihrer Variationen γ_μ mit festen Anfangs- und Endpunkten $\gamma_\mu(a) = \gamma(a), \gamma_\mu(b) = \gamma(b)$ die Variation des Wirkungsintegrals verschwindet:*

$$\frac{d}{d\mu} \int_a^b L(\dot{\gamma}_\mu(t)) dt \Big|_{\mu=0} = 0.$$

Beweis. In Koordinaten $\gamma_\mu(t) = (x^1(\mu, t), \dots, x^m(\mu, t))$ berechnen wir die Ableitung des Wirkungsintegrals nach dem Parameter μ , indem wir einmal partiell integrieren:

$$\frac{d}{d\mu} (\mathcal{L}(\gamma_\mu)) \Big|_{\mu=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial L}{\partial x^i}(\dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\dot{\gamma}(t)) \right) \right] \frac{\partial x^i}{\partial \mu}(0, t) dt.$$

Die Funktionen $\partial x^i(0, t)/\partial \mu$ sind beliebige, in den Enden des Intervalls $[a, b]$ verschwindende Funktionen und daher sind die Lagrange-Gleichungen äquivalent zu der Bedingung

$$\frac{d}{d\mu} (\mathcal{L}(\gamma_\mu)) \Big|_{\mu=0} = 0. \quad \square$$

Für allgemeine Lagrange-Systeme kann ein Energiebegriff eingeführt werden, der einerseits die Energie eines Newton-Systems mit Potentialenergie verallgemeinert und andererseits eine Erhaltungsgröße ist. Zu dieser Lagrange-Energie kommt man, indem man zunächst die Legendre-Transformation einführt. Ist $L : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lagrange-Funktion und $v \in T_x M^m$ ein Vektor an der Stelle $x \in M^m$, so schränken wir L auf den Tangentialraum $T_x M^m$ ein und betrachten das Differential $D(L|_{T_x M^m})(v)$ im Punkt $v \in T_x M^m$. Dies ist eine lineare Abbildung $T_x M^m \rightarrow \mathbb{R}$, also ein Kovektor in $T_x^* M^m$.

Definition 13. Die Legendre-Transformation $\mathcal{L} : TM^m \rightarrow T^* M^m$ eines beliebigen Lagrange-Systems ist die Abbildung

$$\mathcal{L}(v) := D(L|_{T_x M^m})(v).$$

Beispiel 12. Ist die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}g - V$ die Differenz einer kinetischen und einer Potentialenergie, so gilt für $v, w \in TM^m$

$$\mathcal{L}(v)(w) = \frac{1}{2} D(g)(v)(w) = g(v, w)$$

und damit wird die Legendre-Transformation $\mathcal{L} : TM^m \rightarrow T^* M^m$ einfach die Identifikation des Tangentialbündels mit dem Kotangentialbündel unter Verwendung der Metrik.

Definition 14. Die *Energie* eines Lagrange-Systems (M^m, L) ist die durch

$$E(v) = \mathcal{L}(v)(v) - L(v)$$

definierte Funktion $E : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialbündel.

Im Falle eines Newton-Systems mit Potentialenergie gilt

$$E(v) = \mathcal{L}(v)(v) - L(v) = g(v, v) - \frac{1}{2}g(v, v) + V(\pi(v)) = \frac{1}{2}g(v, v) + V(\pi(v)).$$

Daraus ersehen wir, dass die Energie im Sinne der Lagrange-Mechanik mit der Newtonschen Energie übereinstimmt.

Beispiel 13. Die Legendre-Transformation und die Energie des Lagrange-Systems aus Beispiel 11 sind gegeben durch

$$\mathcal{L}(y)(v) = m g(y, v) - A(v), \quad E(v) = \frac{m}{2} g(v, v).$$

Bemerkung. Bezeichnen wir die Koordinaten in TM^m mit $\{x^1, \dots, x^m, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^m\}$ und die Koordinaten in T^*M^m mit $\{q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m\}$, so ist die Legendre-Transformation \mathcal{L} durch die Formel

$$q_i = x^i \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$$

gegeben und der Ausdruck für die Energie E nimmt folgende Form an:

$$E(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - L(x, \dot{x}).$$

Satz 18 (Energieerhaltungssatz für Lagrange-Systeme). *Die Energie $E(\dot{\gamma}(t))$ jeder Bewegung $\gamma(t)$ eines Lagrange-Systems (M^m, L) ist konstant.*

Beweis. Die Energie einer Kurve ist

$$E(\dot{\gamma}(t)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{dx^i}{dt} - L(\dot{\gamma}(t))$$

und nach Differenzieren erhalten wir

$$\frac{d}{dt} E(\dot{\gamma}(t)) = \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \frac{dx^i}{dt} \frac{d^2 x^j}{dt^2} \right) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}.$$

Verwenden wir die Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} \frac{dx^j}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \frac{d^2 x^j}{dt^2},$$

so erhalten wir die Behauptung sofort. □

Die Energie ist demnach ein erstes Integral einer Bewegung in einem Lagrange-System. Ähnlich wie im Kapitel 7.3 können weitere erste Integrale aus Symmetrien der Lagrange-Funktion erhalten werden. Dazu betrachten wir eine einparametrische

Diffeomorphismengruppe $\Phi_s : M^m \rightarrow M^m$ des Konfigurationsraums sowie deren Vektorfeld

$$\mathcal{V}(x) := \frac{d}{ds}(\Phi_s(x))|_{s=0}$$

auf M^m . Die Differentiale $d(\Phi_s) : TM^m \rightarrow TM^m$ sind Diffeomorphismen des Phasenraums TM^m in sich.

Satz 19 (Satz von Noether). *Die Lagrange-Funktion L sei invariant unter der Wirkung einer einparametrischen Diffeomorphismengruppe, $L(d(\Phi_s)(v)) = L(v)$. Dann ist die Funktion $f_{\mathcal{V}} : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch*

$$f_{\mathcal{V}}(w) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{L(w + \mu \mathcal{V}(\pi(w))) - L(w)}{\mu},$$

eine Konstante der Bewegung des Lagrange-Systems (M^m, L) .

Beweis. Die einparametrische Diffeomorphismengruppe Φ_t sei in Koordinaten gegeben durch

$$\Phi_t(x^1, \dots, x^m) = (\Phi_t^1(x^1, \dots, x^m), \dots, \Phi_t^m(x^1, \dots, x^m)).$$

Aus der Invarianz der Lagrange-Funktion folgt

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi_s^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial^2 \Phi_t^j}{\partial x^i \partial s} \Big|_{s=0} \frac{dx^i}{dt} = 0$$

und das Vektorfeld \mathcal{V} hat die Komponenten

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi_s^i}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Damit erhalten wir

$$f_{\mathcal{V}}(\dot{\gamma}(t)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial \Phi_s^i}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

und aus den Lagrange-Gleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} (f_{\mathcal{V}}(\dot{\gamma}(t))) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial \Phi_s^i}{\partial s} \Big|_{s=0} + \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial^2 \Phi_s^i}{\partial x^i \partial s} \Big|_{s=0} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad \square$$

Beispiel 14. Zu jeder die Metrik g und die Potentialfunktion V erhaltenden Transformationsgruppe $\Phi_t : M^m \rightarrow M^m$ gehört ein erstes Integral

$$f_{\mathcal{V}}(w) = g(w, \mathcal{V}),$$

welches *linear* in allen Fasern des Tangentialbündels TM^m ist. Dieses erste Integral benutzten wir bereits im Satz 37, Kapitel 5, zur Integration des geodätischen Flusses auf Drehflächen (Satz von Clairaut). Aus Isometrien der Metrik gewinnt man demnach in den Fasern lineare erste Integrale des geodätischen Flusses.

Beispiel 15. Wir betrachten erneut das Lagrange-System aus Beispiel 11. Erhält Φ_t sowohl die pseudo-Riemannsche Metrik als auch die 1-Form, so ist die entsprechende Lagrange-Funktion invariant. Der Satz von Noether liefert das erste Integral

$$f_{\mathcal{V}}(w) = m g(w, \mathcal{V}) - A(\mathcal{V}).$$

Formulierung der Mechanik nach Hamilton

Zur Formulierung der Mechanik nach Hamilton gelangen wir dadurch, dass wir von einem Lagrange-System (M^m, L) mit bijektiver Legendre-Transformation $\mathcal{L} : TM^m \rightarrow T^*M^m$ ausgehen. Derartige Lagrange-Systeme heißen *hyperregulär*. Ein reguläres Lagrange-System ist ein solches, dessen Legendre-Transformation lokal invertierbar ist. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall einer global invertierbaren Legendre-Transformation. Newtonsche Systeme mit Potentialenergie sind zum Beispiel stets hyperregulär.

Definition 15. Sei (M^m, L) ein hyperreguläres Lagrange-System mit Legendre-Transformation $\mathcal{L} : TM^m \rightarrow T^*M^m$ und Energie $E : TM^m \rightarrow \mathbb{R}$. Die auf dem Kotangentialbündel definierte Funktion

$$H := E \circ \mathcal{L}^{-1}$$

nennt man die *Hamilton-Funktion* des Systems.

Beispiel 16. Im Fall eines Newton-Systems (M^m, g, V) mit Potentialenergie ist die Legendre-Transformation durch die Formeln

$$q_i = x^i \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \sum_{\alpha=1}^m g_{i\alpha} \dot{x}_\alpha$$

gegeben. Invertieren wir diese Transformation, so entsteht

$$x^i = q_i \quad \text{und} \quad \dot{x}^i = \sum_{\alpha=1}^m g^{i\alpha} p_\alpha$$

und die Formeln für die Energie E , die Lagrange-Funktion L sowie für die Hamilton-Funktion H lauten:

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + V(x^1, \dots, x^m)$$

$$(2) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x^1, \dots, x^m)$$

$$(3) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g^{ij} p_i p_j + V(q_1, \dots, q_m).$$

Durch diese Änderung des Phasenraumes – also das Ersetzen des Tangentialbündels TM^m durch das Kotangentialbündel T^*M^m – gelangen wir in die symplektische Geometrie, weil T^*M^m stets die symplektische Form $\omega = d\theta$ hat.

Satz 20 (Satz von Hamilton). *Sei (M^m, L) ein hyperreguläres Lagrange-System. Eine Kurve $\gamma : (a, b) \rightarrow M^m$ ist genau dann eine Lagrange-Bewegung, falls die Kurve $\mathcal{L}(\dot{\gamma}) : (a, b) \rightarrow T^*M^m$ eine Integralkurve des symplektischen Gradienten $s\text{-grad}(H)$ der Hamilton-Funktion ist.*

Beweis. Die Legendre-Transformation \mathcal{L} ist durch

$$q_i = x^i \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}$$

definiert, für ihre Inversabbildung führen wir die Bezeichnung

$$x^i = q_i \quad \text{und} \quad \dot{x}^i = \Phi^i(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$$

ein. Die Hamilton-Funktion nimmt dann die Gestalt

$$H = \sum_{\alpha=1}^m p_\alpha \Phi^\alpha - L(q_1, \dots, q_m, \Phi^1, \dots, \Phi^m)$$

an, und wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \Phi^i + \sum_{\alpha=1}^m \left(p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial p_i} = \Phi^i \\ \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \sum_{\alpha=1}^m \left(p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial L}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Formel für den symplektischen Gradienten gewonnen:

$$s\text{-grad}(H) = \sum_{i=1}^m \left(\Phi^i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Eine Kurve

$$\mathcal{L}(\dot{\gamma}(t)) = \left(x^1(t), \dots, x^m(t), \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1}(\dot{\gamma}(t)), \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m}(\dot{\gamma}(t)) \right)$$

ist genau dann Integralkurve des Vektorfeldes $s\text{-grad}(h)$, falls

$$\dot{x}^i = \Phi^i \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(\dot{\gamma}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}(\dot{\gamma}(t))$$

gilt. Die erste Gleichung ist trivialerweise aus dem Ansatz $\dot{x}^i = \Phi^i$ erfüllt und dies beweist die Behauptung. \square

Aufgaben

1. In \mathbb{R}^4 mit der symplektischen Struktur $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4$ wählen wir die vier Diffeomorphismen a, b, c, d

$$\begin{aligned} a(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^1, x^2 + 1, x^3, x^4) \\ b(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^1, x^2, x^3, x^4 + 1) \\ c(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^1 + 1, x^2, x^3, x^4) \\ d(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^1, x^2 + x^4, x^3 + 1, x^4) \end{aligned}$$

und bezeichnen mit Γ die von ihnen erzeugte Bewegungsgruppe des \mathbb{R}^4 . Man beweise, dass ω eine Γ -invariante 2-Form ist. Damit induziert ω eine symplektische Form auf der Mannigfaltigkeit $M^4 = \mathbb{R}^4/\Gamma$. Man beweise, dass M^4 kompakt ist. Bezeichne letztlich $[\Gamma, \Gamma]$ die Kommutatorgruppe von Γ . Dann ist $\Gamma/[\Gamma, \Gamma]$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang drei (Thurston 1971).

2. Man beweise, dass die symplektische Form ω einer kompakten symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2m} niemals eine exakte Differentialform sein kann. Damit wird die zweite de-Rham-Kohomologie $H_{DR}^2(M^{2m})$ nichttrivial. Insbesondere haben geradimensionale Sphären S^{2m} für $m \neq 1$ keine symplektische Struktur.

3. Man betrachte $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit der symplektischen Form $\omega = dx \wedge dy$ und das Vektorfeld

$$\mathcal{V} = \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

- a) Sei $\varphi = \arctan(y/x)$ der Polarwinkel, der in jeder hinreichend kleinen Umgebung von $(x, y) \neq (0, 0)$ definiert ist. Man berechne $\text{grad}(\varphi)$ und $s\text{-grad}(\varphi)$.
- b) Man folgere daraus, dass \mathcal{V} kein Hamiltonsches Vektorfeld auf ganz M ist.

4 (Fortsetzung von Beispiel 3). Man beweise, dass die Liouville-Form auf der zweidimensionalen koadjungierten Bahn durch das Element $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{g}^*$ ($\beta \neq 0$) durch den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{\beta} d\alpha \wedge d\beta$$

gegeben ist. Hinweis: Man zeige zuerst, dass den Lie-Algebra-Elementen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ genau die fundamentalen Vektorfelder

$$\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \quad \text{und} \quad -\beta \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

entsprechen.

5. Sei \mathcal{V} ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M^m mit der dazugehörigen Differentialgleichung $\dot{x} = \mathcal{V}(x)$. Ein erstes Integral (von \mathcal{V} bzw. der Differentialgleichung) ist eine glatte Funktion $h : M^m \rightarrow \mathbb{R}$, die konstant entlang jeder Lösung der Differentialgleichung ist. Man beweise:

- a) $h : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ein erstes Integral von \mathcal{V} , falls $dh(\mathcal{V}) = 0$ gilt;
- b) die Menge $C_{\mathcal{V}}^\infty(M^m; \mathbb{R})$ aller ersten Integrale von \mathcal{V} ist ein Unterring von $C^\infty(M^m; \mathbb{R})$;
- c) zeigen Sie, dass $h(x, y) = y^2 - 2x^2 + x^4$ ein erstes Integral des Vektorfeldes $\mathcal{V} = 2y \partial/\partial x + (4x - 4x^3) \partial/\partial y$ in \mathbb{R}^2 ist. Beschreiben Sie mittels h die geometrische Gestalt der Integralkurven in der (x, y) -Ebene;
- d) man gebe ein Vektorfeld in der Ebene an, welches kein nichttriviales erstes Integral besitzt.

6. Sei $f = a + b i : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Wir betrachten das Vektorfeld $\mathcal{V} = \text{grad}(a)$.

- Beweise, dass $b : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral für \mathcal{V} ist;
- Beschreibe die geometrische Gestalt der Integralkurven dieses Vektorfeldes für die Funktionen $f(z) = z^k$ und $f(z) = z + 1/z$.

7. Wir betrachten auf \mathbb{R}^3 ein Vektorfeld B (ein Magnetfeld) und seine 2-Form

$$B = B_x dy \wedge dz - B_y dx \wedge dz + B_z dx \wedge dy,$$

sowie auf dem zugehörigen Phasenraum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten $(\vec{q}, \vec{v}) = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ die symplektische Form

$$\omega_B = m(dx \wedge dv_x + dy \wedge dv_y + dz \wedge dv_z) - \frac{e}{c} B.$$

Als Hamilton-Funktion wählen wir die kinetische Energie

$$H_0 = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

- Zeigen Sie, dass die definierende Gleichung für das zu H_0 gehörende Hamiltonsche Vektorfeld äquivalent zur *Lorentz-Gleichung* ist

$$(*) \quad m \frac{dv}{dt} = \frac{e}{c} v \times B.$$

- Falls $B = dA$ exakt ist und \vec{A} das assoziierte Vektorfeld bezeichnet, so ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (\vec{q}, \vec{v}) \longmapsto (\vec{q}, m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}) =: (\vec{q}, \vec{p})$$

eine kanonische Transformation, d. h. es gelten für die kanonische symplektische Form ω_0 und die Hamilton-Funktion H_B

$$\omega_0 = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + dz \wedge dp_z, \quad H_B = \frac{1}{2m} \left\| \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right\|^2$$

die Gleichungen

$$f^* \omega_0 = \omega_B, \quad f^* H_B = H_0$$

und die Gleichung $*$ ändert sich nicht.

- Ist B konstant, dann bewegt sich ein Teilchen auf einer Schraubenlinie. Hinweis: Man deute Windung und Krümmung als erste Integrale. Sind diese beiden Größen einer Kurve konstant, so handelt es sich um eine Schraubenlinie (Aufgabe 6, Kapitel 5).

8 (Ebenes Toda-Gitter). In \mathbb{R}^2 betrachten wir die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = -e^{x-y}, \quad \ddot{y} = e^{x-y},$$

welche im Phasenraum $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4$ äquivalent sind zu $\dot{\xi} = X(\xi)$ mit

$$X(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} - e^{x-y} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + e^{x-y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Die Energie $E = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + e^{x-y}$ ist ein erstes Integral.

- a) Man zeige, dass dieses System weitere erste Integrale hat, zum Beispiel $P = \dot{x} + \dot{y}$ oder $K = (\dot{x} - 2\dot{y})(\dot{y} - 2\dot{x})/9 - e^{x-y}$. Es gilt $E + K = 5P^2/18$.
- b) Die Menge

$$M^2(E, P) = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \in \mathbb{R}^4 : (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + e^{x-y} = E, \dot{x} + \dot{y} = P\}$$

ist genau dann nicht leer, falls $4E - P^2 > 0$ gilt. In diesem Fall ist $M^2(E, P)$ eine glatte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand des \mathbb{R}^4 . Damit ergibt sich eine Zerlegung von \mathbb{R}^4 in eine Familie von Untermannigfaltigkeiten und jede Integralkurve von X liegt vollständig in einer von ihnen.

- c) Man zeige, dass jede der Untermannigfaltigkeiten $M^2(E, P)$ in einem affinen Unterraum der Dimension drei liegt und diffeomorph zu \mathbb{R}^2 ist.
- d) Ist $\xi(t) = (x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))$ eine Integralkurve von X in $M^2(E, P)$, so gilt

$$\dot{x} + \dot{y} = P \quad \text{und} \quad \int \frac{\dot{x} - \dot{y}}{\sqrt{4E - P^2 - 4e^{x-y}}} = t.$$

Man zeige ($A > 0$)

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A - Be^z}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left(\frac{\sqrt{A} - \sqrt{A - Be^z}}{\sqrt{A} + \sqrt{A - Be^z}} \right)$$

und integriere damit die Gleichungen für die Integralkurven in $M^2(E, P)$ vollständig.

9 (Eulersche Gleichung). Sei $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein symmetrischer, positiv-definiter Operator. Wir betrachten die Differentialgleichung $I(\dot{\omega}) = I(\omega) \times \omega$, wobei \times das Vektorprodukt ist. Man beweise:

- a) Diese Differentialgleichung hat zwei erste Integrale, nämlich die Energie $2E = \langle I(\omega), \omega \rangle$ und den Impuls $M^2 = \langle I(\omega), I(\omega) \rangle$.
- b) Man leite daraus ab, dass die Integralkurven der Differentialgleichung Schnitte zweier Ellipsoide mit dem Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ sind ($I \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$). Insbesondere sind alle Integralkurven geschlossen. Sind I_1 der kleinste und I_3 der größte Eigenwert von I , so existiert nur für $2EI_1 < M^2 < 2EI_3$ eine Integralkurve.

10 (Bewegung in einem zentralen Kraftfeld). Wirke auf den Punkt in \mathbb{R}^3 der Masse eins eine Potentialekraft F

$$F = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{x}{r} = -\text{grad}(U(r))$$

mit einer nur vom Radius $r = \|x\|$ abhängigen Funktion $U(r)$. Die Energie $E = \|\dot{x}\|^2/2 + U(r)$ ist ein erstes Integral.

- a) Man zeige, dass $M = x \times \dot{x}$ ein weiteres erstes Integral ist (M ist der Drehimpuls) und folgere daraus, dass jede Bahnkurve des Punktes sich in einer Ebene von \mathbb{R}^3 befindet.

- b) Für welche Parameter $M \in \mathbb{R}^3$ ist die Niveaufläche

$$A^3(M) = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^6 : x \times \dot{x} = M\}$$

eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit des Phasenraumes \mathbb{R}^6 ?

- c) Sei $r(t)$ der Abstand einer Bewegung, deren Drehimpuls M ist. Dann gilt

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr} + \frac{\|M\|^2}{r^3},$$

d.h. $r(t)$ beschreibt die Bewegung eines Punktes in \mathbb{R}^1 unter der effektiven Kraft $F_2^* = -\text{grad}(V)$ mit dem effektiven Potential $V(r) = U(r) + \|M\|^2/2r^2$. Die Energie dieser Bewegung ist

$$E^* = \frac{\dot{r}^2}{2} + U(r) + \frac{\|M\|^2}{2r^2}.$$

Man beweise, dass diese Energie E^* mit der Energie E übereinstimmt (für Bewegungen mit dem Drehimpuls M).

Ist somit $x(t) \in \mathbb{R}^3$ die Bahnkurve eines sich unter der Kraft F bewegenden Punktes und $r(t)$ sein Abstand zu $0 \in \mathbb{R}^3$, so gilt

$$\sqrt{2E - \frac{\|M\|^2}{r^2} - 2U(r)} = \dot{r}, \quad \text{d.h.} \quad \int \frac{\dot{r}}{\sqrt{2E - \|M\|^2/r^2 - 2U(r)}} dt = t.$$

11 (klassische Impulsabbildung). Wir betrachten den \mathbb{R}^3 mit der definierenden $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ -Wirkung.

- a) Man beweise, dass diese Darstellung zur adjungierten Darstellung von $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ auf ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ äquivalent ist, wenn man \mathbb{R}^3 und $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ über die Abbildung

$$\hat{\gamma}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}), \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \longmapsto \hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

miteinander identifiziert. Zudem sind die adjungierte und die koadjungierte Darstellung von $\text{SO}(3, \mathbb{R})$ ebenfalls äquivalent;

- b) man beweise, dass diese Identifizierung die Gleichungen

$$\hat{v}(w) = v \times w, \quad [\hat{v}, \hat{w}] = \widehat{[v, w]}, \quad \langle v, w \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(\hat{v}\hat{w})$$

erfüllt;

- c) nach a) kann die Momentenabbildung $\Psi: T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$ als Abbildung von $T^*\mathbb{R}^3$ nach \mathbb{R}^3 geschrieben werden. Man zeige, dass sie sich dann in der Form

$$\Psi(q, p) = q \times p$$

schreiben lässt, also den klassischen Drehimpuls liefert.

Kapitel 8

Elemente der statistischen Mechanik und Thermodynamik

8.1. Statistische Zustände Hamiltonscher Systeme

Die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik geht von einem Konfigurationsraum X^m aus und benutzt den Phasenraum T^*X^m mit seiner kanonischen symplektischen Struktur. Ein Zustand des betrachteten mechanischen Systems ist ein Punkt im Phasenraum T^*X^m und die Bewegung der Zustände sind die Integralkurven des symplektischen Gradienten $s\text{-grad}(H)$ einer Hamilton-Funktion $H : T^*X^m \rightarrow \mathbb{R}$. In dieser Formulierung der Mechanik ist es zunächst nur wesentlich, dass eine symplektische Mannigfaltigkeit M^{2m} und eine Funktion H gegeben sind. Die Betrachtungsweise der statistischen Mechanik beruht auf der Vorstellung, dass etwa aufgrund der Größe des mechanischen Systems oder in Folge von Messungenauigkeiten der Zustand des mechanischen Systems nicht genau durch die Angabe von $2m$ reellen Parametern bestimmt werden kann. Vielmehr können wir für jede offene Menge $U \subset M^{2m}$ nur die Wahrscheinlichkeit $\mu(U)$ angeben, dass sich der Zustand in der Menge U befindet. Dies führt auf das Konzept, die mechanischen Zustände nicht mehr als Punkte im Phasenraum M^{2m} , sondern als Wahrscheinlichkeitsmaße in M^{2m} zu verstehen.

Definition 1. Gegeben sei ein Hamiltonsches System (M^{2m}, ω, H) , bestehend aus einer symplektischen Mannigfaltigkeit und einer Hamilton-Funktion. Ein *statistischer Zustand* ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ , definiert auf der σ -Algebra aller Borel-Mengen von M^{2m} .

Beispiel 1. Zu jedem Punkt $x \in M^{2m}$ betrachten wir das in diesem Punkt konzentrierte Maß δ_x ,

$$\delta_x(U) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin U \\ 1 & \text{falls } x \in U \end{cases}.$$

Damit sind die klassischen mechanischen Zustände insbesondere auch statistische Zustände.

Sei $\Phi_t : M^{2m} \rightarrow M^{2m}$ der Fluss des symplektischen Gradienten $s\text{-grad}(H)$. Die Bewegung eines klassischen Zustandes $x \in M^{2m}$ ist die Trajektorie $\Phi_t(x)$. Für das dem Punkt $\Phi_t(x)$ entsprechende Wahrscheinlichkeitsmaß $\delta_{\Phi_t(x)}$ gilt

$$\delta_{\Phi_t(x)}(U) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \notin \Phi_t^{-1}(U) \\ 1 & x \in \Phi_t^{-1}(U) \end{array} \right\} = \delta_x(\Phi_t^{-1}(U)),$$

und diese Formel führt uns auf folgende

Definition 2. Gegeben sei ein Hamilton-System (M^{2m}, ω, H) und ein statistischer Zustand μ . Die Bewegung von μ unter Einwirkung des Hamiltonschen Systems ist die Kurve μ_t der Maße

$$\mu_t(U) := \mu(\Phi_t^{-1}(U)).$$

Definition 3. Ein *Gleichgewichtszustand* eines Hamilton-Systems (M^{2m}, ω, H) ist ein Zustand μ , der sich unter der Bewegung von $s\text{-grad}(H)$ nicht verändert, $\mu_t = \mu$.

Definition 4. Ein statistischer Zustand μ eines Hamilton-Systems (M^{2m}, ω, H) besitzt eine *stationäre Endverteilung*, falls durch

$$\mu_\infty(U) := \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(U)$$

ein Borel-Maß in M^{2m} definiert wird.

Satz 1. Eine stationäre Endverteilung μ_∞ ist stets ein Gleichgewichtszustand.

Wir betrachten die Volumenform

$$dM^{2m} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!} \omega^m$$

der symplektischen Mannigfaltigkeit und das von ihr induzierte Borel-Maß (siehe die Bemerkung in Kapitel 3.5). Ist das Maß μ absolut-stetig gegenüber dem Volumenmaß,

$$\mu(U) := \int_U \varrho(x) dM^{2m}(x),$$

so nennt man ϱ die *Dichtefunktion* des Zustands μ .

Satz 2 (Liouville-Gleichung). Ist $\mu = \varrho dM^{2m}$ ein Zustand mit Dichtefunktion und μ_t die Bewegung dieses Zustandes in einem Hamilton-System, so sind $\mu_t = \varrho_t dM^{2m}$ gleichfalls Zustände mit Dichtefunktionen und es gilt

$$\frac{d}{dt} \varrho_t = -\{H, \varrho\} \circ \Phi_{-t}.$$

Beweis. Der Fluss Φ_t besteht aus symplektischen Transformationen und erhält insbesondere die symplektische Volumenform dM^{2m} , $\Phi_t^*(dM^{2m}) = dM^{2m}$. Durch eine Transformation des Integrals sehen wir, dass $\varrho_t = \varrho \circ \Phi_{-t}$ die Dichtefunktion des Zustandes μ_t ist. Daraus folgt

$$\frac{d}{dt} \varrho_t = \frac{d}{dt} \varrho \circ \Phi_{-t} = d\varrho \left(\frac{d}{dt} \Phi_{-t} \right) = -s\text{-grad}(H)(\varrho) \circ \Phi_{-t} = -\{H, \varrho\} \circ \Phi_{-t}.$$

□

Korollar 1. Ein statistischer Zustand μ mit Dichtefunktion ϱ ist genau dann ein Gleichgewichtszustand, falls ϱ ein erstes Integral der Hamilton-Funktion H ist, $\{H, \varrho\} = 0$.

Ist $x \in M^{2m}$ ein klassischer Zustand der Hamilton-Mechanik, so ist der Wert $H(x)$ der Hamilton-Funktion H die Energie E des Zustandes,

$$E(x) = H(x) = \int_{M^{2m}} H(x) d(\delta_x).$$

Die Energie eines statistischen Zustandes definieren wir in Anlehnung daran:

Definition 5. Die *Energie* eines statistischen Zustandes μ ist das Integral

$$E(\mu) = \int_{M^{2m}} H(x) d\mu(x),$$

sofern dieses Integral existiert.

Satz 3 (Energieerhaltungssatz der statistischen Mechanik). *Ist μ_t die Bewegung eines statistischen Zustandes mit Energie in einem Hamilton-System, so ist die Energie $E(\mu_t)$ konstant.*

Beweis. Nach Integralumformung erhalten wir sofort

$$E(\mu_t) = \int_{M^{2m}} H \circ \Phi_t^{-1}(x) d\mu(x)$$

und die Ableitung nach dem Parameter t ergibt die Formel

$$\frac{d}{dt} E(\mu_t) = \int_{M^{2m}} \{H, H\}(x) d\mu(x) = 0. \quad \square$$

Wir untersuchen jetzt die Änderung der Wahrscheinlichkeit $\mu_t(N^{2m})$ dafür, dass der Zustand $\mu = \varrho dM^{2m}$ zur Zeit t sich in einer kompakten Teilmenge $N^{2m} \subset M^{2m}$ befindet. Dafür benötigen wir einige Vorbereitungen.

Lemma 1. *Sei (M^{2m}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann gilt für je zwei glatte Funktionen $f, g : M^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel*

$$df \wedge dg \wedge \omega^{m-1} = \frac{1}{m} \{f, g\} \omega^m.$$

Beweis. Wir beweisen diese Formel lokal und wählen symplektische Koordinaten $(q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$,

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^m dp_\alpha \wedge dq_\alpha.$$

Setzen wir $A_i := dp_i \wedge dq_i$, so gelten für das äußere Produkt die Relationen

$$A_i \wedge A_j = A_j \wedge A_i \quad \text{und} \quad A_i \wedge A_i = 0.$$

Zur Berechnung der Potenz ω^k können wir die binomische Formel verwenden, weil die Formen A_i untereinander kommutieren,

$$\omega^m = \left(\sum_{i=1}^m A_i \right)^m = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} A_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge A_m^{\alpha_m}.$$

Wegen $A_i \wedge A_i = 0$ treten in dieser Summe nur Summanden mit $\alpha_i \leq 1$ auf, sie reduziert sich auf einen Term:

$$\omega^m = m! A_1 \wedge \dots \wedge A_m = m! (dp_1 \wedge dq_1) \wedge \dots \wedge (dp_m \wedge dq_m).$$

Auf die gleiche Weise berechnen wir ω^{m-1} :

$$\begin{aligned}\omega^{m-1} &= \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_m \\ = m-1}} \frac{(m-1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} A_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge A_m^{\alpha_m} \\ &= (m-1)! \sum_{\beta=1}^m A_1 \wedge \dots \widehat{A}_\beta \dots \wedge A_m \\ &= (m-1)! \sum_{\beta=1}^m (dp_1 \wedge dq_1) \wedge \dots \wedge (dp_\beta \wedge dq_\beta) \wedge \dots \wedge (dp_m \wedge dq_m).\end{aligned}$$

Damit verschwinden folgende äußere Produkte:

$$(1) \quad dp_i \wedge dp_j \wedge \omega^{m-1} = 0 = dq_i \wedge dq_j \wedge \omega^{m-1},$$

$$(2) \quad dp_i \wedge dq_j \wedge \omega^{m-1} = 0 \quad \text{falls } i \neq j$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}df \wedge dg \wedge \omega^{m-1} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} dp_i \wedge dq_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} dq_i \wedge dp_i \right) \wedge \omega^{m-1} \\ &= (m-1)! \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) A_1 \wedge \dots \wedge A_m \\ &= \frac{(m-1)!}{m!} \{f, g\} \omega^m.\end{aligned} \quad \square$$

Aus $m d(f dg \wedge \omega^{m-1}) = m df \wedge dg \wedge \omega^{m-1} = \{f, g\} \omega^m$ und dem Satz von Stokes ergibt sich nach Integration der

Satz 4. Sei (M^{2m}, ω) eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt

$$\int_{M^{2m}} \{f, g\} \omega^m = m \int_{\partial M^{2m}} f dg \wedge \omega^{m-1}.$$

Insbesondere verschwindet das Integral

$$\int_{M^{2m}} \{f, g\} \omega^m = 0$$

im Fall einer kompakten symplektischen Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Korollar 2. Wechselt die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ zweier Funktionen, definiert auf einer kompakten symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2m} ohne Rand, das Vorzeichen nicht, so verschwindet sie identisch, $\{f, g\} \equiv 0$.

Diese Formeln wenden wir auf einen statistischen Zustand mit Dichtefunktion ϱ an.

Definition 6. Die $(2m-1)$ -Form

$$j(\mu) := \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(m-1)!} \varrho dH \wedge \omega^{m-1}$$

heißt der *Wahrscheinlichkeitsstrom* des statistischen Zustandes $\mu = \varrho dM^{2m}$ der symplektischen Mannigfaltigkeit (M^{2m}, ω, H) mit Hamilton-Funktion.

Satz 5. Ist μ_t die Bewegung des statistischen Zustandes $\mu = \varrho dM^{2m}$ im Hamilton-System (M^{2m}, ω, H) und ist $N^{2m} \subset M^{2m}$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit, so gilt

$$\frac{d}{dt} \mu_t(N^{2m}) \Big|_{t=0} = \int_{\partial N^{2m}} j(\mu).$$

Beweis. Wir berechnen die Ableitung nach der Zeit bei $t = 0$ und verwenden sowohl die Liouville-Gleichung als auch die vorhergehenden Integralformeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mu_t(N^{2m}))|_{t=0} &= \int_{N^{2m}} \frac{d\varrho_t}{dt}|_{t=0} dM^{2m} = - \int_{N^{2m}} \{H, \varrho\} dM^{2m} \\ &= \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(m-1)!} \int_{\partial N^{2m}} \varrho dH \wedge \omega^{m-1} = \int_{\partial N^{2m}} j(\mu). \end{aligned}$$

□

Der Wahrscheinlichkeitsstrom $j(\mu)$ ist ein Oberflächenmaß auf den Hyperflächen der symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2m} , welches infinitesimal die Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Zustandes μ in der Menge $N^{2m} \subset M^{2m}$ als Integral über den Rand von N^{2m} angibt.

Beispiel 2. Wird die Untermannigfaltigkeit $N^{2m} \subset M^{2m}$ durch Ungleichungen der Hamilton-Funktion beschrieben,

$$N^{2m} = \{x \in M^{2m} : C_1 \leq H(x) \leq C_2\},$$

so verschwindet das Differential dH auf dem Tangentialbündel $T(\partial N^{2m})$ des Randes und damit die Form $j(\mu)$. Wir erhalten für die Bewegung μ_t jedes statistischen Zustandes $\mu = \varrho dM^{2m}$

$$\frac{d}{dt} \mu_t(\{x \in M^{2m} : C_1 \leq H(x) \leq C_2\}) = 0.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand μ zur Zeit t sich in N^{2m} befindet, ist konstant.

Beispiel 3. Im Fall $m = 1$ vereinfachen sich die Formeln für den Wahrscheinlichkeitsstrom eines zweidimensionalen Hamilton-Systems (M^2, ω, H) :

$$j(\mu) = \varrho dH \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \mu_t(N^2) = \int_{\partial N^2} \varrho dH.$$

Wir kommen jetzt zum Begriff der Informationsentropie eines statistischen Zustandes. Im Sinne einer Motivation erinnern wir zunächst an den von C. E. Shannon (1948) eingeführten Begriff der *Information* eines Ereignisses. Die Heuristik ist folgende: Tritt in einer Versuchsserie ein Ereignis A mit einer Wahrscheinlichkeit nahe eins ein, so enthält dieses Ereignis wenig „Information“. Umgekehrt, ist die zu erwartende Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nahe null, so liefert das Auftreten des Ereignisses viele „Informationen“. Modellieren wir die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, bestehend aus einer Menge Ω ,

einer σ -Algebra \mathfrak{A} von Teilmengen in Ω und einem auf \mathfrak{A} definierten Maß μ mit $\mu(\Omega) = 1$, so gelangen wir zu folgender Definition der Shannon-Information.

Definition 7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die in einem Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ enthaltene *Information* ist

$$I(A) := -\log(\mu(A)).$$

Im Fall einer endlichen Menge Ω mittelt man die Information und führt auf diese Weise die sog. Informationsentropie ein.

Definition 8. Sei (Ω, μ) ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Die *Informationsentropie* dieses Raums ist

$$S(\Omega, \mu) := \int_{\Omega} I(\omega) d\mu(\omega) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i),$$

wobei die Menge Ω aus den Elementen $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ besteht und $p_i := \mu(\{\omega_i\})$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ω_i ist.

Die Informationsentropie ist ein Maß für die Unbestimmtheit des Wahrscheinlichkeitsraums. In der Tat, besteht $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ aus n Punkten und bezeichnen wir mit μ^* das der Gleichverteilung entsprechende Maß, $\mu^*(\omega_i) := 1/n$, so gilt der

Satz 6. Die Informationsentropie eines endlichen Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, μ) übersteigt nicht die Informationsentropie der Gleichverteilung,

$$S(\Omega, \mu) \leq S(\Omega, \mu^*).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, falls $\mu = \mu^*$ die Gleichverteilung ist.

Beweis. Der Beweis beruht darauf, dass die Funktion $f(x) := x \log(x)$ wegen

$$f'(x) = 1 + \log(x) \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

eine konvexe Funktion auf der Halbgeraden $(0, \infty)$ ist. Wir erhalten aufgrund der Konvexität von f die Ungleichung

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(p_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \log(p_i).$$

Nach Umformung dieser Ungleichung ergibt sich aus $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ sofort

$$S(\Omega, \mu) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i) \leq -\log\left(\frac{1}{n}\right) = S(\Omega, \mu^*). \quad \square$$

Die Formel $S(\Omega, \mu) = -\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$ ist es nun, welche zu dem Begriff der Informationsentropie eines statistischen Zustandes mit Dichtefunktion führt.

Definition 9. Sei (M^{2m}, ω, H) ein Hamilton-System und $\mu = \varrho dM^{2m}$ ein statistischer Zustand mit Dichtefunktion. Wir definieren dessen *Informationsentropie* als das Integral

$$S(\mu) := - \int_{M^{2m}} \varrho \log(\varrho) dM^{2m},$$

sofern dieses Integral existiert.

Bemerkung. Dieser Entropiebegriff ist in der statistischen Physik nicht unproblematisch. Der folgende Entropieerhaltungssatz besagt, dass sich die Informationsentropie während der Bewegung des Zustandes nicht verändert. Dagegen sollte sie in der Thermodynamik *irreversibler* Prozesse wachsen. Aus diesem Grund wird der Begriff der Informationsentropie $S(\mu)$ in der Regel nur auf Gleichgewichtszustände $\mu_t = \mu$ angewandt.

Satz 7 (Erhaltung der Informationsentropie). *Die Informationsentropie $S(\mu_t)$ eines statistischen Zustandes mit Dichtefunktion ist unter der Bewegung in einem Hamilton-System konstant.*

Beweis. Wir differenzieren die Funktion $S(\mu_t)$ nach dem Parameter t und verwenden die Liouville-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} S(\mu_t) = - \int_{M^{2m}} \left[\frac{d\varrho}{dt} \log(\varrho) + \frac{d\varrho}{dt} \right] dM^{2m} = \int_{M^{2m}} \left[\{H, \varrho\} \log(\varrho) + \{H, \varrho\} \right] dM^{2m}.$$

Wegen $\{H, \log(\varrho)\} = \{H, \varrho\}/\varrho$ gilt jedoch

$$\{H, \varrho \log(\varrho)\} = \{H, \varrho\} \log(\varrho) + \{H, \log(\varrho)\} \varrho = \{H, \varrho\} + \{H, \varrho\} \log(\varrho)$$

und damit entsteht

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(\mu_t) \Big|_{t=0} &= \int_{M^{2m}} \{H, \varrho \log(\varrho)\} dM^{2m} = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!} \int_{M^{2m}} \{H, \varrho \log(\varrho)\} \omega^m \\ &= \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(m-1)!} \int_{M^{2m}} dH \wedge d(\varrho \log(\varrho)) \wedge \omega^{m-1}. \end{aligned}$$

Der Satz von Stokes impliziert die Behauptung unmittelbar, weil M^{2m} keinen Rand hat. \square

Bemerkung. Im Fall einer Mannigfaltigkeit M^{2m} mit Rand erhalten wir

$$\frac{d}{dt} S(\mu_t) \Big|_{t=0} = - \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{(m-1)!} \int_{\partial M^{2m}} \varrho \log(\varrho) dH \wedge \omega^{m-1}.$$

Ein Hamilton-System (M^{2m}, ω, H) hat eine Reihe spezieller Gleichgewichtszustände. Diese werden dadurch bestimmt, dass sie ein Maximum an Informationsentropie in der Klasse der jeweils betrachteten statistischen Zustände realisieren. Wir besprechen zwei dieser Zustände, die sog. Gibbschen Zustände (oder die kanonische Verteilung) und die mikrokanonische Verteilung. Dabei werden wir generell folgende Voraussetzungen über das Hamilton-System (M^{2m}, ω, H) machen:

Voraussetzung 1: Die Hamilton-Funktion H ist nicht negativ,

$$H(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in M^{2m}.$$

Voraussetzung 2: Für jede positive Zahl $B > 0$ existiert das Integral

$$Z(B) := \int_{M^{2m}} e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x).$$

Die Funktion $Z(B)$ nennt man die *Zustandssumme* des Hamilton-Systems.

Voraussetzung 3: Für jede positive Zahl $B > 0$ existiert das Integral

$$\int_{M^{2m}} H(x) e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x).$$

Bemerkung. Der Parameter B wird später mit der absoluten Temperatur (multipliziert mit der Boltzmannkonstanten k) identifiziert werden. Ihr Auftreten an dieser Stelle deutet auf die Ausnahmerolle hin, die die Temperatur unter allen thermodynamischen Parametern spielt.

Die Funktion

$$E(B) := \frac{1}{Z(B)} \int_{M^{2m}} H(x) e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x)$$

nennt man die *innere Energie* des Hamilton-Systems (M^{2m}, ω, H) , seine *innere Entropie* ist

$$S(B) := \log(Z(B)) + \frac{E(B)}{B}.$$

Letztlich wird die *freie Energie* $F(B)$ durch

$$F(B) := -B \log(Z(B)) = E(B) - B S(B)$$

definiert. Wir bemerken zunächst, dass die innere Energie $E(B)$ eine nicht fallende Funktion auf dem Intervall $(0, \infty)$ ist. Ihre Ableitung beträgt

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dB} &= \frac{1}{Z^2(B) B} \left\{ \left[\int_{M^{2m}} e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x) \right] \left[\int_{M^{2m}} H^2(x) e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_{M^{2m}} H(x) e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigt, dass diese Ableitung positiv ist ($H \neq \text{const}$). Wir bezeichnen mit E_{\min} und E_{\max} die Grenzen des Wertebereiches der inneren Energie $E : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Ableitung der Zustandssumme berechnen wir auf die gleiche Weise:

$$\frac{dZ}{dB} = \frac{1}{B^2} \int_{M^{2m}} H(x) e^{-H(x)/B} dM^{2m}(x) = \frac{1}{B^2} Z(B) E(B).$$

Daher kann sowohl die innere Energie als auch die innere Entropie durch die Zustandssumme ausgedrückt werden. Wir fassen diese Formeln zusammen.

Satz 8 (einfache Zustandsgleichung eines Hamilton-Systems).

- (1) $E(B) = B^2 \frac{d}{dB} (\log(Z(B)))$
- (2) $S(B) = \frac{d}{dB} (B \log(Z(B)))$
- (3) Im Sinne von 1-Formen auf $(0, \infty)$ gilt

$$dS = \frac{1}{B} dE.$$

Beweis. Die dritte Gleichung ist eine unmittelbare Konsequenz aus den ersten beiden Gleichungen. \square

Der Gibbssche Zustand (die kanonische Verteilung) ist durch die Eigenschaft ausgezeichnet, dass er das Maximum an Informationsentropie unter allen Zuständen festgelegter Energie realisiert.

Satz 9 (Gibbsscher Zustand, kanonische Verteilung). *Gegeben sei ein Energiewert E_0 zwischen dem Minimum und Maximum der Energiefunktion $E(B)$ des Hamilton-Systems (M^{2m}, ω, H) . Unter allen statistischen Zuständen $\mu = \varrho dM^{2m}$ mit Dichtefunktion der Energie $E(\mu) = E_0$ existiert genau ein Zustand $\mu_{\text{Gibbs}} = \varrho_{\text{Gibbs}} dM^{2m}$ maximaler Informationsentropie $S(\mu_{\text{Gibbs}})$. Die Dichtefunktion dieses Zustandes ist*

$$\varrho_{\text{Gibbs}}(x) = \frac{1}{Z(B_0)} e^{-H(x)/B_0},$$

wobei der Parameter B_0 als die Lösung der Gleichung $E(B_0) = E_0$ bestimmt wird. Der Wert der maximalen Entropie $S(\mu_{\text{Gibbs}})$ beträgt

$$S(\mu_{\text{Gibbs}}) = S(B_0) = \log(Z(B_0)) + \frac{E(B_0)}{B_0}.$$

Beweis. Sei B_0 als Lösung der Gleichung $E(B_0) = E_0$ gewählt und

$$\mu_{\text{Gibbs}} = \frac{1}{Z(B_0)} e^{-H(x)/B_0} dM^{2m}$$

der entsprechende Gibbssche Zustand. Dessen innere Energie beträgt

$$E(\mu_{\text{Gibbs}}) = \frac{1}{Z(B_0)} \int_{M^{2m}} H(x) e^{-H(x)/B_0} dM^{2m} = E(B_0) = E_0$$

und somit ist μ_{Gibbs} ein statistischer Zustand der Energie E_0 . Für jeden weiteren Zustand $\mu = \varrho dM^{2m}$ der Energie

$$E(\mu) = \int_{M^{2m}} H(x) \varrho(x) dM^{2m} = E_0$$

betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} f(t) &= S((1-t)\mu_{\text{Gibbs}} + t\mu) \\ &= - \int_{M^{2m}} ((1-t)\varrho_{\text{Gibbs}} + t\varrho) \log ((1-t)\varrho_{\text{Gibbs}} + t\varrho) dM^{2m}, \end{aligned}$$

welche die Informationsentropie des statistischen Zustandes $(1-t)\mu_{\text{Gibbs}} + t\mu$ angibt. Differenzieren wir $f(t)$ nach dem Parameter t , so erhalten wir

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = - \int_{M^{2m}} \frac{(\varrho - \varrho_{\text{Gibbs}})^2}{(1-t)\varrho_{\text{Gibbs}} + t\varrho} dM^{2m} \leq 0.$$

Weiterhin gilt

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = - \int_{M^{2m}} \varrho \log(\varrho_{\text{Gibbs}}) dM^{2m} - S(\mu_{\text{Gibbs}})$$

und eine Berechnung des hierbei auftretenden Integrals liefert unter Verwendung von $E(\mu) = E_0$

$$\begin{aligned} \int_{M^{2m}} \varrho \log(\varrho_{\text{Gibbs}}) dM^{2m} &= \int_{M^{2m}} \varrho \left(-\frac{H}{B_0} - \log(Z(B_0)) \right) dM \\ &= -\log(Z(B_0)) - \frac{1}{B_0} E_0 = -S(B_0). \end{aligned}$$

Daraus ersehen wir, dass die Ableitung von f bei $t = 0$ verschwindet. Die Ableitung wird somit nicht positiv und $f(t)$ ist fallend im Intervall $[0, 1]$. Wegen $f(0) \geq f(1)$ erhalten wir

$$S(\mu) \leq S(\mu_{\text{Gibbs}}).$$

Gilt $S(\mu) = S(\mu_{\text{Gibbs}})$, so verschwindet die erste Ableitung von $f(t)$ identisch. Dann ist auch die zweite Ableitung dieser Funktion null und aus der zuvor angeführten Formel schließen wir $\varrho = \varrho_{\text{Gibbs}}$. Die Behauptungen des Satzes sind bewiesen. \square

Beispiel 4 (Maxwell- und Boltzmann-Verteilung). In der klassischen Statistik hat die Hamilton-Funktion eines Teilchens mit einer potentiellen Energie, die nur von den Koordinaten q abhängt, die Gestalt

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + U(q).$$

Die Zustandssumme ist damit gleich

$$Z(B) = \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left[-\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2mB} \right] dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3 \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left[\frac{-U(q)}{B} \right] dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3,$$

was man unter Verwendung des Integrals $\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$ auch als

$$Z(B) = (2\pi mB)^{3/2} Z_q(B)$$

schreiben kann; $Z_q(B)$ soll dabei den Wert des Integrals bezeichnen, in dem die unbekannte potentielle Energie vorkommt. Ebenso faktorisiert sich der Gibbssche Zustand in das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_p der Impulswerte und das der Koordinatenwerte μ_q ,

$$\mu_{\text{Gibbs}} = \mu_p \mu_q = \frac{1}{(2\pi mB)^{3/2}} e^{-p^2/2mB} dp \frac{1}{Z_q} e^{-U/B} dq.$$

Gehen wir von den Impulsen zu den Geschwindigkeiten über, so bekommt man die sog. *Maxwell-Verteilung*

$$\mu_p = \left(\frac{m}{2\pi B} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2B} \right] dv_1 dv_2 dv_3,$$

die ebenfalls wieder das Produkt der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für jede einzelne Geschwindigkeitskomponente ist. Unter der *Boltzmann-Verteilung* versteht man das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_q , das zum Teilchenzahlmaß ν proportional ist. Zum Beispiel erhält man für das Potential $U(x, y, z) = mgz$ eines homogenen, zur z -Achse parallelen Schwerefeldes die *barometrische Höhenformel*

$$\nu = \nu_0 e^{-mgz/B} dx dy dz.$$

Die zweite natürliche Gleichgewichtsverteilung eines Hamilton-Systems (M^{2m}, ω, H) geht von einer Teilmenge $A \subset M^{2m}$ der symplektischen Mannigfaltigkeit aus, welche invariant unter dem Fluss Φ_t der Hamilton-Funktion ist und ein positives, endliches Volumen hat,

$$\Phi_t(A) \subset A, \quad 0 < \text{vol}(A) < \infty.$$

Dann betrachten wir die Dichtefunktion

$$\varrho_A(x) = \begin{cases} 1/\text{vol}(A) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

sowie den statistischen Zustand $\mu_A = \varrho_A dM^{2m}$. Es handelt sich um einen Gleichgewichtszustand, weil A invariant unter dem Fluss Φ_t ist. Seine Informationsentropie ist

$$S(\mu_A) = - \int_{M^{2m}} \varrho_A(x) \log(\varrho_A(x)) dM^{2m}(x) = \log(\text{vol}(A)).$$

Satz 10 (mikrokanonische Verteilung). *Sei $A \subset M^{2m}$ eine unter dem Fluss des Hamilton-Systems (M^{2m}, ω, H) invariante Teilmenge positiven, endlichen Maßes. Ist $\mu = \varrho dM^{2m}$ ein statistischer Zustand, dessen Dichtefunktion einen in A enthaltenen Träger $\text{supp}(\varrho) \subset A$ hat, so gilt für die Informationsentropie stets*

$$S(\mu) \leq S(\mu_A).$$

Gleichheit tritt nur im Fall $\mu = \mu_A$ ein.

Die mikrokanonische Verteilung μ_A realisiert daher das Maximum an Informationsentropie unter allen in der Menge A konzentrierten statistischen Zuständen.

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem des vorhergehenden Satzes. Wir betrachten abermals die Funktion $f(t) = S((1-t)\mu_A + t\mu)$ und berechnen deren zweite Ableitung:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = - \int_A \frac{(\varrho - \varrho_A)^2}{(1-t)\varrho_A + \varrho} dM^{2m} \leq 0.$$

Die Ableitung von f an der Stelle $t = 0$ verschwindet:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} = - \int_A (\varrho - \varrho_A) \log(\varrho_A) dM^{2m} = - \log(\varrho_A) \int_A (\varrho - \varrho_A) dM^{2m} = 0,$$

weil μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Träger in A ist. \square

8.2. Thermodynamische Systeme im Gleichgewicht

Zunächst verallgemeinern wir die einfachen Zustandsgleichungen eines Hamilton-Systems dahingehend, dass wir eine feste symplektische Mannigfaltigkeit (M^{2m}, ω) und eine Familie von Hamilton-Funktionen $H(x, y)$ betrachten, die von einem zusätzlichen Parameter $y \in N^r$ abhängen. Der Parameterraum sei ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit und wir nehmen an, dass für feste Parameter $y_0 \in N^r$ die Hamilton-Funktion $H(x, y_0)$ die drei Voraussetzungen des vorhergehenden Abschnittes erfüllt. Dann werden die *Zustandssumme* $Z(B, y)$, die *innere Energie* $E(B, y)$, die *innere Entropie* $S(B, y)$ und die *freie Energie* $F(B, y)$ Funktionen auf der Mannigfaltigkeit $(0, \infty) \times N^k$,

$$Z, E, S, F : (0, \infty) \times N^k \longrightarrow \mathbb{R},$$

und natürlich gilt bei festem Parameter $y_0 \in N^r$ die Zustandsgleichung $B d_B S = d_B E$. Die allgemeine Zustandsgleichung eines von Parametern abhängigen Hamilton-Systems stellt eine Relation zwischen den vollständigen Differentialen, verstanden als 1-Formen auf $(0, \infty) \times N^r$, her.

Satz 11 (allgemeine Zustandsgleichung parameterabhängiger Hamilton-Systeme).

Im

Sinne der Gleichheit von 1-Formen, definiert auf der Mannigfaltigkeit $(0, \infty) \times N^r$, gilt

$$dE = B dS + \frac{E}{B} dB - B d(\log(Z)).$$

Beweis. Nach Definition der inneren Energie gilt

$$B S = B \log(Z) + E.$$

Wir differenzieren diese Gleichung

$$B dS + S dB = \log(Z) dB + B d(\log(Z)) + dE$$

und setzen danach nochmals S ein. Dann ergibt sich unmittelbar

$$B dS + \frac{E}{B} dB - B d(\log(Z)) = dE. \quad \square$$

Bemerkung. Betrachten wir die Situation, dass die bislang unabhängige Variable B eine Funktion $B : N^r \rightarrow (0, \infty)$ auf dem Parameterraum N^r ist, so können wir durch die Abbildung

$$N^r \longrightarrow (0, \infty) \times N^r, \quad y \longrightarrow (B(y), y)$$

alle Funktionen Z, E, S und F als Funktionen auf N^r auffassen. Das äußere Differential kommutiert mit dem Zurückziehen von Formen, daher entsteht die Gleichung

$$dE = B dS + \frac{E}{B} dB - B d(\log(Z))$$

auf der Mannigfaltigkeit N^r .

Die makroskopische Beschreibung thermodynamischer Systeme geht von einigen Annahmen aus. Zunächst sollen die betrachteten thermodynamischen Systeme sich im mechanischen Gleichgewicht befinden. Weiterhin wird angenommen, dass während der Zustandsänderung des thermodynamischen Systems kein Teilchenaustausch stattfindet. Letztlich wird der makroskopische Zustand des thermodynamischen Systems durch einen Parameter $y \in N^k$ vollständig beschrieben, der Element einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit ist. Im Sinne phänomenologischer Gesetze lassen sich die sog. Hauptsätze der Thermodynamik (ihre Axiome) wie folgt formulieren:

Nullter Hauptsatz der Thermodynamik. *Es existiert eine positive Funktion $T : N^r \rightarrow \mathbb{R}$, genannt die Temperatur.*

Erster Hauptsatz der Thermodynamik. *Es existieren zwei (nicht-notwendig exakte) 1-Formen dA und dQ auf der Mannigfaltigkeit N^r derart, dass die Summe*

$$dA + dQ = dE$$

eine exakte Form ist. Die Funktion E nennt man die Energie des thermodynamischen Systems, dA heißt die Arbeitsform und dQ die Wärmeform.

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik. *Die 1-Form*

$$\frac{dQ}{T} = dS$$

ist eine exakte Form und die hieraus resultierende Funktion S heißt die innere Entropie des thermodynamischen Systems.

In dieser Abstraktion ist also ein thermodynamisches System in makroskopischer Beschreibung ein 4-Tupel (N^r, T, dA, dQ) , bestehend aus einer Parametermannigfaltigkeit N^r , einer Funktion $T : N^r \rightarrow \mathbb{R}$ sowie zwei 1-Formen dA und dQ derart, dass die 1-Formen

$$dA + dQ \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{T}$$

exakte 1-Formen sind. Natürlich gilt dann

$$dE = dA + T dS$$

und hierbei handelt es sich um die sog. *Gibbssche Fundamentalgleichung* der Thermodynamik.

Jedem parameterabhängigen Hamilton-System kann nun auf kanonische Weise ein thermodynamisches System in diesem Sinne zugeordnet werden. In der Tat, gegeben seien eine symplektische Mannigfaltigkeit (M^{2m}, ω) sowie eine weitere Mannigfaltigkeit N^r . Wir fixieren zwei nicht negative Funktionen

$$B : N^r \rightarrow (0, \infty) \quad \text{und} \quad H : M^{2m} \times N^r \rightarrow [0, \infty)$$

und verstehen H als eine Schar von Hamilton-Funktionen auf der symplektischen Mannigfaltigkeit. Unter Verwendung des Gibbsschen Zustandes

$$\mu_{\text{Gibbs}}^{B(y)} = e^{-H(x,y)/B(y)} dM^{2m}(x)$$

definieren wir die Funktion $T : N^r \rightarrow \mathbb{R}^1$ sowie die 1-Formen dA und dQ auf N^r wie folgt:

- (1) Die Temperatur des thermodynamischen Systems ist die Funktion B , geteilt durch die Boltzmannkonstante $k (= 1,380 \cdot 10^{-23} W/K)$:

$$T(y) := \frac{B(y)}{k}.$$

- (2) Die Energie des thermodynamischen Systems ist die innere Energie des Gibbsschen Zustandes $\mu_{\text{Gibbs}}^{B(y)}$:

$$E(y) = E(B(y)) = \frac{1}{Z(B(y))} \int_{M^{2m}} H(x, y) e^{-H(x,y)/B(y)} dM^{2m}(x).$$

- (3) Die Entropie des thermodynamischen Systems ist die innere Entropie des Gibbsschen Zustandes $\mu_{\text{Gibbs}}^{B(y)}$:

$$S(y) = k S(\mu_{\text{Gibbs}}^{B(y)}) = k S(B(y)) = k \log(Z(B(y))) + k \frac{E(B(y))}{B(y)}.$$

- (4) Die Wärmeform dQ ist das Produkt der Temperatur mit dem Differential der Entropie,

$$dQ := T dS.$$

- (5) Die Arbeitsform dA ist

$$dA = \frac{E}{B} dB - B d(\log(Z)).$$

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$dA + dQ = dE$$

ist in dem beschriebenen Modell eine automatische Konsequenz der allgemeinen Zustandsgleichung parameterabhängiger Hamilton-Systeme. Damit ist jedem derartigen Hamilton-System mittels der Gibbsschen Zustände ein entsprechendes thermodynamisches System zur Seite gestellt worden. Sei \mathcal{V} ein Vektorfeld, definiert auf der Mannigfaltigkeit N^r . Dann gilt

$$dA(\mathcal{V}) = \frac{E}{B} \mathcal{V}(B) - B \frac{\mathcal{V}(Z)}{Z}$$

und wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Z) &= \int_{M^{2m}} \mathcal{V}(-H/B) e^{-H/B} dM^{2m} \\ &= -\frac{1}{B} \int_{M^{2m}} \mathcal{V}(H) e^{-H/B} dM^{2m} + \frac{\mathcal{V}(B)}{B^2} E Z \end{aligned}$$

ergibt sich die explizite Formel für die Arbeitsform

$$dA(\mathcal{V}) = \frac{1}{Z} \int_{M^{2m}} \mathcal{V}(H) e^{-H/B} dM^{2m}.$$

Der *Druck* $p_{\mathcal{V}}$ des thermodynamischen Systems, erzeugt vom Vektorfeld \mathcal{V} des Parameterraums N^r , ist die Funktion

$$p_{\mathcal{V}}(y) := - \frac{1}{Z(B(y))} \int_{M^{2m}} \mathcal{V}(H(x, y)) e^{-H(x, y)/B(y)} dM^{2m}(x).$$

Dann gilt nach Definition $dA(\mathcal{V}) = - p_{\mathcal{V}}$ und in einem Reper $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$ von Vektorfeldern der Mannigfaltigkeit N^r kann die Arbeitsform in der Gestalt

$$dA = - \sum_{i=1}^r p_{\mathcal{V}_i} \sigma_i$$

dargestellt werden, wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ das duale Reper der 1-Formen von N^r ist.

Beispiel 5. Den in der Thermodynamik verwendeten Druck p erhält man, wenn die Parametermannigfaltigkeit N^r das Volumen V beschreibt und man als Vektorfeld $\mathcal{V} = \partial/\partial V$ wählt. Bekanntlich gilt dann für die mechanische Arbeit der Volumenänderung

$$dA = -p dV.$$

Betrachtet man im Kontinuumslimes bei sehr hohen Teilchenzahlen diese nicht mehr als diskrete, sondern als kontinuierliche Variable, so kann man die Stoffmengen n_1, \dots, n_r eines Systems aus r verschiedenen chemischen Komponenten als Parameter der Mannigfaltigkeit N^r wählen. In diesem Fall drückt sich die chemische Arbeit traditionell durch die sog. *chemischen Potentiale* μ_1, \dots, μ_r (die der Leser nicht mit statistischen Zuständen verwechseln möge) aus:

$$dA = \sum_{i=1}^r \mu_i dn_i.$$

Das chemische Potential μ_i der i -ten Stoffkomponente ist das Negative des dem Vektorfeld $\partial/\partial n_i$ zugeordneten Drucks. Analoge Formeln drücken die elektromagnetische Arbeit bei Vorhandensein von magnetischen oder elektrischen Dipolmomentdichten aus.

Wir betrachten speziell den Fall, dass im Parameterraum N^r ein Vektorfeld \mathcal{V} mit

$$\mathcal{V}(T) \equiv 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{V}(H) \equiv 0$$

existiert. Alle thermodynamischen Größen sind dann durch die Zustandssumme

$$Z = \int_{M^{2m}} e^{-H/kT} dM^{2m}$$

bzw. die daraus gebildete freie Energie

$$F = -kT \log(Z)$$

berechenbar.

Satz 12. Existiert im Parameterraum N^r ein Vektorfeld \mathcal{V} mit $\mathcal{V}(T) \equiv 1$ und $\mathcal{V}(H) \equiv 0$, so gilt

$$(1) \quad S = -\mathcal{V}(F) = -dF(\mathcal{V}) = -\mathcal{V} \lrcorner dF$$

$$(2) \quad E = F - T\mathcal{V}(F) = F + ST$$

$$(3) \quad dQ = -T\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(dF)$$

$$(4) \quad dA = dF - (\mathcal{V} \lrcorner dF) dT = dF + SdT$$

(5) Der von einem beliebigen Vektorfeld \mathcal{W} erzeugte Druck beträgt

$$p_{\mathcal{W}} = -dF(\mathcal{W}) + dF(\mathcal{V})dT(\mathcal{W}).$$

Insbesondere erzeugt das Vektorfeld \mathcal{V} keinen Druck, $p_{\mathcal{V}} \equiv 0$.

Beweis. Differenzieren wir die Zustandssumme Z nach dem Vektorfeld \mathcal{V} , so erhalten wir

$$\mathcal{V}(Z) = \frac{1}{kT^2} \int_{M^{2m}} He^{-H/kT} dM^{2m} = \frac{EZ}{kT^2}.$$

Damit ergibt sich für die Ableitung der freien Energie die Formel

$$\mathcal{V}(F) = -k \log(Z) - kT \frac{E}{kT^2} = -k \left(\log(Z) + \frac{E}{kT} \right) = -S$$

und die erste der Behauptungen ist bewiesen. Aus $S = -\mathcal{V}(F) = -(\mathcal{V} \lrcorner dF)$ folgt $dS = -d(\mathcal{V} \lrcorner dF) = -\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(dF)$. Den Ausdruck für die Wärmeform erhalten wir aus deren Definition,

$$dQ = -T\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(dF).$$

Die Energie E wird durch die freie Energie F sowie die Entropie bestimmt,

$$E = F + TS = F - T(\mathcal{V} \lrcorner dF).$$

Letztlich berechnen wir die Arbeitsform:

$$dA = dE - TdS = d(F - T(\mathcal{V} \lrcorner dF)) + T\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(dF) = dF - (\mathcal{V} \lrcorner dF)dT.$$

□

Beispiel 6 (Ideales Gas). Wir stellen uns unter einem *idealen Gas* n Punkte gleicher Masse M in einem Volumenbereich $V \subset \mathbb{R}^3$ vor, die untereinander nicht wechselwirken. Der Konfigurationsraum des mechanischen Systems besteht aus dem Produkt von n Exemplaren der Menge V , faktorisiert nach der Wirkung der aus $n!$ Elementen bestehenden Permutationsgruppe. Wollen wir diese Gruppenidentifikation vermeiden, so betrachten wir einfach den Phasenraum $M := T^*V \times \dots \times T^*V$ mit demjenigen Maß, welches diese genannte Identifikation bereits berücksichtigt:

$$dM := \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{3n} dq_i \wedge dp_i.$$

Die Hamilton-Funktion des mechanischen Systems ist

$$H(q_1, \dots, q_{3n}, p_1, \dots, p_{3n}) := \frac{1}{2M} \chi(q_1, q_2, q_3) \dots \chi(q_{3n-2}, q_{3n-1}, q_{3n})(p_1^2 + \dots + p_{3n}^2).$$

Dabei bezeichnet χ die charakteristische Funktion der Menge $V \subset \mathbb{R}^3$. Eine Berechnung der Zustandssumme des thermodynamischen Systems, welches nur von den beiden Parametern T und V abhängt, ergibt die Formel:

$$Z(T, V) = \frac{1}{n!} \int_M e^{-H/kT} dq \wedge dp = \frac{V^n}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2MkT} dp \right)^{3n} = \frac{V^n}{n!} (2\pi kTM)^{\frac{3n}{2}}.$$

Wir benutzen die *Stirlingsche Formel* $\log(n!) \simeq n(\log(n) - 1)$ und berechnen mit dieser Approximation alle thermodynamischen Größen des idealen Gases. Die freie Energie beträgt:

$$F = -kT \log(Z) = -nkT (\log(V/n) + 1 + \frac{3}{2} \log(2\pi kTM)).$$

Die Entropie und die Energie erhalten wir aus der freien Energie nach Satz 12, weil die Hamilton-Funktion nicht von der Temperatur abhängt:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = nk (\log(V/n) + \frac{3}{2} \log(T) + \text{const}), \\ E &= F - T \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{3n}{2} kT. \end{aligned}$$

Der Druck p des idealen Gases entspricht dem des durch das Volumen beschriebenen Vektorfelds und ist durch

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V} = kT \frac{n}{V}$$

gegeben. Dabei ist n/V die Teilchendichte des idealen Gases.

Beispiel 7 (Festkörper). Ein *Festkörper* besteht aus n Punkten, die um einen Punkt schwingen. Diesen legen wir in den Koordinatenursprung und dann ist die Hamilton-Funktion gegeben durch:

$$\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \kappa_1^2 q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}{2M_1} + \dots + \frac{p_{3n-2}^2 + p_{3n-1}^2 + p_{3n}^2 + \kappa_n^2 q_{3n-2}^2 + q_{3n-1}^2 + q_{3n}^2}{2M_n}.$$

Führen wir die *Frequenzen*

$$\nu_i := \frac{\kappa_i}{2\pi\sqrt{M_i}}$$

ein, so erhalten wir nach Berechnung der Zustandssumme den Wert

$$Z = \frac{1}{n!} (kT)^{3n} \frac{1}{\nu_1^3 \dots \nu_n^3}.$$

Die freie Energie ist

$$F = -kT \log(Z) = -kT (n \log(n/e) + 3n \log(kT) + \text{const}).$$

Daraus berechnen wir die weiteren thermodynamischen Größen, zum Beispiel die Energie:

$$E = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) = 3n kT.$$

Jedem Freiheitsgrad eines Atoms kommt demnach die mittlere innere Energie kT zu (*Dulong-Petitsche Regel*). Bei Temperaturen, die nahe am absoluten Nullpunkt

liegen, gilt sie allerdings nicht mehr, das hier dargelegte Modell eines Festkörpers ist dort nicht mehr adäquat.

Die innere und die freie Energie sind Beispiele sogenannter *thermodynamischer Potentiale*. Die klassische Thermodynamik nimmt für gewöhnlich den Standpunkt ein, dass mit dem Potential bereits die zur Beschreibung des Systems verwendeten Größen fixiert sind. In diesem Sinne versteht man die innere Energie E als Funktion von Entropie und Volumen, die freie Energie F als Funktion von Temperatur und Volumen usw. Betrachten wir eine Hamilton-Funktion, die nicht von der Temperatur abhängt. Wie in den beiden vorangegangenen Beispielen sind freie und innere Energie nach Satz 12 über die Relation

$$E = F + TS = F - T \frac{\partial F}{\partial V}$$

mit dem zur Temperatur T dualen Vektorfeld \mathcal{V} miteinander verbunden. Damit erscheint die innere Energie E als die Legendre-Transformation nach dem Temperaturparameter einer Lagrange-Funktion $L = -F$, welche durch die freie Energie gegeben ist (siehe Kapitel 7.5). Über Legendre-Transformationen nach anderen Parametern erhält man die anderen thermodynamischen Potentiale Enthalpie und freie Enthalpie, auf die wir aber nicht weiter eingehen möchten. In dem Fall, dass nur die mechanische Arbeit der Volumenänderung einen Beitrag zur Arbeitsform liefert, lautet der erste Hauptsatz

$$dE = T dS - p dV.$$

Folglich gilt

$$T = \frac{\partial E}{\partial S} \quad \text{und} \quad p = -\frac{\partial E}{\partial V}.$$

Ist die Energie sogar zweimal stetig differenzierbar, so ist der Satz von Cauchy über die Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen äquivalent zu einer sog. *thermodynamischen* oder *Maxwellschen Relation*

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial S}.$$

Beginnt man mit der freien Energie

$$dF = dA - S dT = -p dV - s dT,$$

so erhält man analog die Beziehungen

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad p = -\frac{\partial F}{\partial V}$$

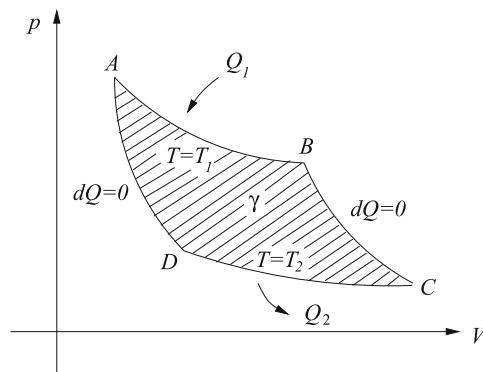
sowie die thermodynamische Relation

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Zum Schluss wollen wir noch kurz den *Carnotschen Kreisprozess* diskutieren, der uns auf den Begriff des universellen Wirkungsgrades führen wird. Historisch war er wesentlich für das Verständnis des ersten und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.

Wir benutzen einen beliebigen homogenen Arbeitsstoff und setzen voraus, dass sein Zustand allein durch die zwei mechanischen Variablen Druck p und Volumen V gegeben ist, aus denen mittels einer allgemeinen Zustandsgleichung die Temperatur T berechnet werden kann. Unter einem Carnotschen Kreisprozess versteht man einen geschlossenen Weg γ in der (V, p) -Ebene, der aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten besteht, genauer:

- (1) Der Stoff wird von A nach B durch Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T_1 bei gleichbleibender Temperatur („isotherm“) auf das Volumen V_B expandiert. Er nimmt dabei die Wärmemenge Q_1 auf.
- (2) Der Stoff wird in B aus dem Bad T_1 genommen und ohne Zufuhr oder Abfuhr von Wärme („adiabatisch“) in den Punkt C expandiert. Dabei sinkt die Temperatur auf den Wert T_2 .
- (3) Der Stoff wird in ein Wärmebad der Temperatur T_2 gesetzt und isotherm von C nach D unter Abgabe der Wärmemenge Q_2 komprimiert.
- (4) Der Stoff wird aus dem zweiten Wärmebad entfernt und so adiabatisch von D nach A komprimiert, dass er wieder die Temperatur T_1 erreicht.



Es sei betont, dass wir hier wie in diesem ganzen Kapitel überhaupt von einer reversiblen, also idealisierten Prozessführung ausgehen. In der hier beschriebenen Weise beschreibt der Carnot-Prozess eine Kraftmaschine (die Temperaturdifferenz der Wärmebäder wird genutzt, um Arbeit zu leisten), bei Prozessumkehr eine Kältemaschine (es wird Arbeit aufgewandt, um das kältere Wärmebad weiter abzukühlen). Nach Voraussetzung wird Arbeit nur in mechanischer Form geleistet, die Gesamtarbeit A berechnet sich zu

$$A := \oint_{\gamma} dA = - \oint_{\gamma} p dV$$

und ist wegen $-d(p dV) = dV \wedge dp$ nach dem Satz von Stokes genau die von der Kurve γ eingeschlossene Fläche im (V, p) -Diagramm. Wir integrieren den ersten Hauptsatz

$$dE = dA + dQ$$

über den geschlossenen Weg γ . Das Kurvenintegral der exakten Form dE über γ verschwindet, weil die innere Energie in A wieder ihren Ausgangswert annimmt:

$$0 = \oint_{\gamma} dE = \oint_{\gamma} dA + \oint_{\gamma} dQ.$$

Den Wirkungsgrad η definiert man als das Verhältnis der geleisteten Arbeit zur zugeführten Wärme, $\eta := A/Q_1$. Das Kurvenintegral über dQ ist aber genau $Q_2 - Q_1$, deswegen kann man den Wirkungsgrad auch

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

schreiben. Da der Kreisprozess als reversibel angenommen wurde, ändert sich die Entropie nicht, und der zweite Hauptsatz impliziert die Identität

$$0 = \oint_{\gamma} \frac{dQ}{T} = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}.$$

Der Wirkungsgrad hängt nur von den Temperaturen der beiden Wärmebäder ab,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_2},$$

nicht aber von der Stoffart oder der Konstruktion der Kraftmaschine.

Aufgaben

1 (Überströmungsversuch). Wir betrachten eine feste Stoffmenge eines idealen Gases, welches zum Zeitpunkt 1 den Druck p_1 und das Volumen V_1 haben möge. Das Gas wird bei konstantem Volumen erhitzt, bis es zum Zeitpunkt 2 den Druck p_2 erreicht hat. Danach lassen wir das Gas sich adiabatisch auf das Volumen V_3 ausdehnen („überströmen“). Dabei möge das Gas im Punkt 3 wieder genau den Ausgangsdruck p_1 haben. Man beweise: Die Entropieänderung zwischen den Zeitpunkten 2 und 3 beträgt

$$\Delta S = S_3 - S_2 = n k \log \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

unabhängig davon, in welcher Weise der physikalische Prozess des Überströmens in der Praxis abläuft.

2. Indem man zu Kugelkoordinaten übergehe, leite man aus der Maxwell-Verteilung die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Betrag $\|v\| = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$ der Geschwindigkeit her.

3. Man betrachte zwei Gefäße mit dem gleichen idealen Gas, gleicher Temperatur T_0 und Teilchenzahl N , aber den verschiedenen Volumina V_1 und V_2 . Die beiden Gefäße werden nun vereinigt.

- a) Man berechne die Ausgleichstemperatur der Vereinigung aus der Bedingung, dass die Entropie bei der Vereinigung konstant bleibt;

- b) man begründe, warum die so erzielte Arbeit gleich der Differenz der Energien vor und nach der Vereinigung ist und bestimme diese.

4. Man bestimme die von einem idealen Gas aufgenommene Wärmemenge Q , wenn dieses den Carnotschen Kreisprozess durchläuft. Hinweis: ein Zwischenergebnis lautet:

$$Q = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1).$$

5 (van der Waals-Gleichung). Die freie Energie eines realen Gases setzt man heuristisch als Summe der freien Energie des idealen Gases F_{id} und eines Zusatzterms, der von zwei experimentell zu bestimmenden Konstanten a und b abhängt, an:

$$F = F_{\text{id}} - nkT \log \left(\frac{V - nb}{V} \right) - \frac{n^2 a}{V^2}.$$

- a) Man überlege sich, dass dieser Ansatz bei großem Volumen in die freie Energie eines idealen Gases übergeht, andererseits es aber unmöglich macht, das Gas unbegrenzt zu komprimieren;
 b) man leite die Zustandsgleichung (die sog. *van der Waals-Gleichung*)

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V} \right) (V - nb) = nkT$$

sowie die Formeln für Entropie und Energie her. Wie lässt sich das Ergebnis für die Energie physikalisch interpretieren ?

6. Die Hamilton-Funktion eines idealen Gases im ultrarelativistischen Limes ist durch

$$H(q_1, \dots, q_{3n}, p_1, \dots, p_{3n}) := c \chi(q_1, q_2, q_3) \dots \chi(q_{3n-2}, q_{3n-1}, q_{3n}) \sqrt{p_1^2 + \dots + p_{3n}^2}$$

gegeben (c ist die Lichtgeschwindigkeit). Man berechne die freie Energie F , die Entropie S und die Energie E .

7 (Plancksches Strahlungsgesetz). Wir setzen als bekannt voraus, dass die Energieniveaus eines quantenmechanischen Oszillators der Grundfrequenz ω durch

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n \in \mathbb{N}$$

gegeben sind. Für Photonen kann man annehmen, dass diese innerhalb jedes Energieniveaus (bis auf unerhebliche Proportionalitätsfaktoren) gemäß der Gibbschen Verteilung $\varrho_n = e^{-E_n/kT}$ verteilt sind.

- a) Man berechne die mittlere Energie

$$\bar{E} := \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n E_n / \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n$$

und folgere, dass die Zahl $\bar{n} = [e^{\hbar\omega/kT} - 1]^{-1}$ als mittlere Besetzungszahl interpretiert werden kann;

- b) Die Frequenz ω steht mit dem Impuls des Photons in der Beziehung $E = c\|p\| = \hbar\omega$. Die Quantenstatistik postuliert, dass in der Maxwell-Verteilung μ_p der Gibbs-Faktor $e^{-c\|p\|/kT}$ durch die mittlere Besetzungszahl \bar{n} zu ersetzen ist. Man folgere, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_p^{QM} von $\|p\|$ bis auf Vorfaktoren durch

$$\mu_p^{QM} = \frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} d\omega$$

gegeben ist; die spektrale Energiedichte ε ist als Energie pro Volumeneinheit definiert, deswegen erhält man sie durch nochmalige Multiplikation mit $\hbar\omega$:

$$\varepsilon = \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Dies ist das sog. *Plancksche Strahlungsgesetz* (Planck 1900).

- c) Man diskutiere den Kurvenverlauf von ε in Abhängigkeit von der Variablen ω und dem Parameter T ; insbesondere beschreibe man, wie sich die Lage des Maximums mit T ändert.
d) Man diskutiere die beiden Grenzfälle $\hbar\omega \ll kT$ (*Rayleigh-Jeans-Gesetz*) und $\hbar\omega \gg kT$ (*Wiensches Gesetz*).

Kapitel 9

Elemente der Elektrodynamik

9.1. Die Maxwellschen Gleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen beschreiben einerseits die Einwirkung eines elektromagnetischen Feldes auf eine im Raum vorliegende Verteilung elektrischer Ladung sowie die Wechselwirkung zwischen dem *elektrischen Feld* E und dem *magnetischen Feld* B . Diese Vektorfelder sind zeitabhängige Vektorfelder definiert auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$E : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad B : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

in dem die elektrische Ladung durch eine zeitabhängige *Dichtefunktion der elektrischen Ladung*

$$\varrho : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschrieben wird. Unter dem Einfluss des elektromagnetischen Feldes entsteht ein Strom der elektrischen Ladung und daher ein ebenfalls zeitabhängiger *Stromdichtevektor*

$$J : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Wenden wir die Operationen der Divergenz und Rotation auf die räumlichen Koordinaten der zeitabhängigen Vektorfelder an, so beschreiben die nachstehenden Maxwellschen Gleichungen diese Wechselwirkungen.

Erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen:

$$\text{rot}(E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div}(B) = 0.$$

Zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen:

$$\text{rot}(B) = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J, \quad \text{div}(E) = 4\pi\varrho.$$

Dabei bezeichnet c die *Konstante der Lichtgeschwindigkeit*. Wegen $\text{div}(\text{rot}(B)) = 0$ (siehe Kapitel 2.3, Satz 5) ist die *Kontinuitätsgleichung*

$$\text{div}(J) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

eine unmittelbare Konsequenz der zweiten Gruppe der Maxwellschen Gleichungen.

Wir nutzen jetzt den in den Kapiteln 2 und 3 beschriebenen Übergang von einem Vektorfeld \mathcal{V} zu der entsprechenden 1-Form $\omega_{\mathcal{V}}$ aus. Dieser wird auf der Mannigfaltigkeit durch die Gleichung

$$*\omega_{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \lrcorner dM^m$$

hergestellt (siehe Kapitel 2.3 und 3.4) und es gelten die Beziehungen

$$\omega_{\text{grad}(f)} = df, \quad d(*\omega_{\mathcal{V}}) = \text{div}(\mathcal{V}) dM^m.$$

Speziell in \mathbb{R}^3 können wir die Rotation eines Vektorfeldes \mathcal{V} durch die Formel

$$\omega_{\text{rot}(\mathcal{V})} = *d\omega_{\mathcal{V}}$$

ausdrücken (siehe Kapitel 3.11). Gehen wir nunmehr von den zeitabhängigen Vektorfeldern E und B zu den entsprechenden zeitabhängigen 1-Formen ω_E und ω_B über, so erhalten die Maxwellschen Gleichungen folgende Gestalt:

Erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen:

$$*d\omega_E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\omega_B), \quad d(*\omega_B) = 0.$$

Zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen:

$$*d\omega_B = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\omega_E) + \frac{4\pi}{c} \omega_J, \quad d(*\omega_E) = 4\pi\varrho d\mathbb{R}^3.$$

In diesen Gleichungen bezieht sich das äußere Differential ausschließlich auf die räumlichen Koordinaten, nicht auf die Zeitkoordinaten. Unter Verwendung des Poincaré-Lemmas können wir die geschlossene 2-Form $*\omega_B$ zumindest lokal als Differential einer zeitabhängigen 1-Form A darstellen,

$$*\omega_B = dA.$$

Definition 1. Die (lokal) definierte, zeitabhängige 1-Form A heißt das *magnetische Potential*.

Die erste Maxwellsche Gleichung kann äquivalent in der Form

$$d\left(\omega_E + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A)\right) = 0$$

geschrieben werden. Abermals ergibt sich aus dem Poincaré-Lemma die lokale Existenz einer zeitabhängigen, reellwertigen Funktion ϕ mit

$$\omega_E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (A) - d\phi.$$

Definition 2. Die (lokal) definierte, zeitabhängige Funktion ϕ heißt das *elektrische Potential*.

Im Wesen des elektromagnetischen Feldes unterscheiden sich die klassische Elektrodynamik und die Quantenmechanik. In der klassischen Feldtheorie sind nur die messbaren Feldstärken E und B physikalisch relevant, die Potentiale A und

ϕ sind lediglich mathematische Hilfsfunktionen, die sich als nützlich erwiesen haben. In der Quantenmechanik haben dagegen das elektrische und das magnetische Potential eine eigenständige physikalische Bedeutung; dies wollen wir kurz am Aharonov-Bohm-Effekt illustrieren.

Bemerkung (Aharonov-Bohm-Effekt). Eine unendlich lange stromdurchflossene Spule S erzeugt ein Magnetfeld, welches in ihrem Inneren nahezu homogen ist und außerhalb der Spule verschwindet. Wir legen eine geschlossene Kurve γ um die Spule und nennen die von γ begrenzte Fläche Ω . Stellen wir uns vor, dass ein Elektron durch einen unendlich hohen Potentialwall daran gehindert wird, in die Spule zu gelangen, so ist das verbleibende Gebiet $\Omega - S$ der Ebene aus Sicht des Elektrons nicht mehr einfach zusammenhängend. Das Verschwinden des Magnetfeldes B in diesem Gebiet impliziert zwar, dass die 1-Form A des magnetischen Potentials auf $\Omega - S$ geschlossen ist,

$$0 = * \omega_B = dA,$$

doch ist die Wegunabhängigkeit des Wegintegrals nicht gegeben, weil sich z. B. die Kurvenstücke γ_1 und γ_2 von γ nicht über eine Homotopie ineinander deformieren lassen (vgl. Satz 9, Kapitel 2.5). Vielmehr ist nach dem Satz von Stokes das Integral

$$\int_{\gamma} A = \int_{\partial\Omega} A = \int_{\Omega} dA = \int_{\Omega} * \omega_B = \Phi_{\Omega}^B$$

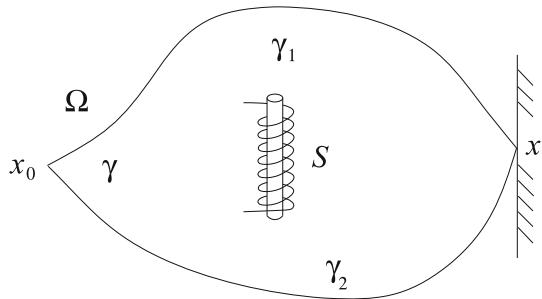
gleich dem Fluss durch das Gesamtgebiet Ω . Die Quantenmechanik beschreibt nun die Zustände des Elektrons durch Lösungen der Schrödingergleichung, die man *Wellenfunktionen* nennt. Seien ψ_1 und ψ_2 die Wellenfunktion des Elektrons entlang γ_1 und γ_2 bei abgeschaltetem Strom (d. h. $B = 0$ in S). Das Kovarianzprinzip für die Schrödingergleichung unter Eichtransformationen impliziert, dass die Wellenfunktion bei eingeschaltetem Strom durch

$$\psi_1^* = \psi_1 \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_1} A \right], \quad \psi_2^* = \psi_2 \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} A \right]$$

gegeben sein muss. Wir stellen in x_1 einen Schirm auf und bilden die lineare Superposition der beiden Wellenfunktionen,

$$\psi_1^* + \psi_2^* = \left(\psi_1 \exp \left[\frac{ie\Phi_{\Omega}^B}{\hbar c} \right] + \psi_2 \right) \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} A \right].$$

Indem man nun den eingeschlossenen magnetischen Fluss Φ_{Ω}^B variiert, verändert sich der Betrag $|\psi_1^* + \psi_2^*|$. Dies entspricht einer Verschiebung des Interferenzbildes auf dem Schirm und liefert den experimentellen Nachweis des Potentials A .



Eine theoretisch einwandfreie Begründung dieses Effekts (A existiert nicht global auf dem Gebiet Ω !) kann erst die Theorie der Zusammenhänge auf S^1 -Hauptfaserbündeln liefern, das Integral von A über eine geschlossene Kurve ist dann konzeptionell korrekt definiert und misst die Holonomie des Zusammenhangs¹.

Stellen wir die Potentiale A und ϕ an den Anfang der Betrachtung, so werden die elektrischen und magnetischen Felder durch die Gleichungen

$$\omega_E = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(A) - d\phi, \quad \omega_B = *dA$$

bestimmt und die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen ist automatisch erfüllt. In diesen Formeln fassen wir die auftretenden Größen als zeitabhängige Funktionen bzw. Formen im 3-dimensionalen Raum auf und darauf bezieht sich sowohl der Hodge-Operator $*$ als auch das äußere Differential d . Verwenden wir den zum äußeren Differential d adjungierten Operator δ und bemerken wir, dass in \mathbb{R}^3 die Formeln

$$\delta = -*d* \quad \text{für 1-Formen} \quad \text{und} \quad \delta = *d* \quad \text{für 2-Formen}$$

gelten, so können wir die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen in folgender Gestalt schreiben:

$$\delta dA = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(A) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(d\phi) + \frac{4\pi}{c} \omega_J, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\delta A) - \Delta\phi = 4\pi\varrho.$$

Der Laplace-Operator Δ auf den Funktionen wird in diesem Kapitel analog zu Kapitel 2 verwendet, es gilt also $\Delta\phi = *d* d\phi = -\delta d\phi$.

9.2. Das statische elektromagnetische Feld

Sind das elektrische und magnetische Feld zeitunabhängig, so vereinfachen sich die Maxwellschen Gleichungen:

$$*d\omega_E = 0, \quad d(*\omega_B) = 0,$$

$$*d\omega_B = \frac{4\pi}{c} \omega_J, \quad d(*\omega_E) = 4\pi\varrho d\mathbb{R}^3.$$

¹ Als physikalische Literatur seien empfohlen: Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959) sowie die genauere Beschreibung dieses Effekts in dem Lehrbuch F. Schwabl, *Quantenmechanik*, Springer-Lehrbuch, 4. Auflage 1993.

Damit hängen die Ladungsdichte ϱ und der Stromdichtevektor J nicht von der Zeit ab und J ist ein divergenzfreies Vektorfeld. Dieses Gleichungssystem zerfällt in jeweils zwei partielle Differentialgleichungen für das elektrische Feld und in zwei ebensolche Gleichungen für das magnetische Feld. Wenden wir uns zunächst dem ersten Differentialgleichungssystem zu. Unter Verwendung des elektrischen Potentials $\omega_E = -d\phi$ reduziert sich dieses auf die inhomogene Laplace-Gleichung

$$-\Delta\phi = 4\pi\varrho.$$

Wir setzen fortan voraus, dass der Träger der Ladungsdichte kompakt ist. Dann ist zu erwarten, dass das von dieser Ladungsverteilung erzeugte elektrische Feld $E(x)$ im Unendlichen gegen null konvergiert. Unter dieser Bedingung an $E(x)$ ist das elektrische Feld eindeutig bestimmt.

Satz 1. *Sei der Träger der Ladungsdichte ϱ kompakt. Dann existiert genau ein elektrisches Feld E mit*

$$\operatorname{div}(E) = 4\pi\varrho, \quad \operatorname{rot}(E) = 0$$

und $\|E(x)\| \rightarrow 0$ für $\|x\| \rightarrow \infty$. Dieses elektrische Feld ist durch $E = -\operatorname{grad}(\phi)$ mit dem elektrischen Potential

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{\|x-y\|} dy$$

gegeben.

Beweis. Betrachten wir zwei elektrische Felder $E_1 = -\operatorname{grad}(\phi_1)$, $E_2 = -\operatorname{grad}(\phi_2)$, die von ein- und derselben Ladungsdichte ϱ erzeugt werden. Die Differenz $u := \phi_1 - \phi_2$ der elektrischen Potentiale ist eine harmonische Funktion mit einem im Unendlichen verschwindenden Gradienten,

$$\Delta u = 0, \quad \|\operatorname{grad}(u)(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{für } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Wegen $\Delta(\partial u / \partial x^i) = \partial(\Delta u) / \partial x^i = 0$ sind die partiellen Ableitungen $\partial u / \partial x^i$ ($1 \leq i \leq 3$) harmonische Funktionen auf \mathbb{R}^3 und verschwinden gleichfalls im Unendlichen. Aus dem Liouville-Satz für harmonische Funktionen (siehe Kapitel 3.10, Satz 42) folgt sofort, dass alle partiellen Ableitungen identisch verschwinden. Damit ist u eine konstante Funktion und die elektrischen Felder $E_1 \equiv E_2$ stimmen überein. Es existiert höchstens ein elektrisches Feld mit den gewünschten Eigenschaften und zu beweisen verbleibt, dass das angegebene elektrische Feld $E = -\operatorname{grad}(\phi)$ mit dem Potential

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(y)}{\|x-y\|} dy$$

eine Lösung des Problems darstellt. Dazu müssen wir zeigen, dass $\phi(x)$ eine glatte Funktion in \mathbb{R}^3 ist, die inhomogene Laplace-Gleichung $-\Delta\phi = 4\pi\varrho$ erfüllt und der Gradient $\|\operatorname{grad}(\phi)\| \rightarrow 0$ im Unendlichen von \mathbb{R}^3 gegen null konvergiert. Zu diesem Zweck führen wir um einen fixierten Punkt $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ sphärische Koordinaten ein:

$$y^1 = x^1 + r \cos \varphi \cos \psi, \quad y^2 = x^2 + r \sin \varphi \cos \psi, \quad y^3 = x^3 + r \sin \psi$$

$(0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\pi/2 < \psi < \pi/2)$. Die Volumenform des euklidischen Raums wird in diesen Koordinaten durch folgende Formel gegeben:

$$d\mathbb{R}^3 = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = r^2 \cos \psi dr \wedge d\varphi \wedge d\psi.$$

Für jede positive Zahl $\varepsilon > 0$ ist die Funktion

$$f(y) := \frac{1}{\|x - y\|^{3-\varepsilon}}$$

in einer Umgebung ihres singulären Punktes integrierbar. Eine Integration über eine Kugel $D^3(x, 1)$ mit dem Zentrum $x \in \mathbb{R}^3$ und dem Radius 1 ergibt

$$\int_{D^3(x,1)} f(y) dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^2}{r^{3-\varepsilon}} \cos \psi dr d\varphi d\psi = 4\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{1-\varepsilon}} dr = 4\pi/\varepsilon.$$

Mit Hinblick auf die Kompaktheit des Trägers der Ladungsdichte $\varrho(y)$ ist dann sowohl die angegebene Funktion $\phi(x)$ als auch deren erste und zweite partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(y) \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) dy = - \int_{\mathbb{R}^3} \varrho(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\frac{1}{\|x - y\|} \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varrho}{\partial y^i}(y) \frac{1}{\|x - y\|} dy \end{aligned}$$

glatt. Eine nochmalige Differentiation führt uns auf die Formel

$$\Delta \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta(\varrho)(y) \frac{1}{\|x - y\|} dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D^3(x, M) \setminus D^3(x, \varepsilon)} \Delta(\varrho)(y) \frac{1}{\|x - y\|} dy.$$

Wir wenden nun für hinreichend großen Radius M der Kugel $D^3(x, M)$ die zweite Greensche Formel an. Dadurch können wir das Integral über der Kugelschale $D^3(x, M) \setminus D^3(x, \varepsilon)$ umformen:

$$\begin{aligned} \int_{D^3(x, M) \setminus D^3(x, \varepsilon)} \Delta(\varrho)(y) \frac{1}{\|x - y\|} dy &= \int_{D^3(x, M) \setminus D^3(x, M)} \varrho(y) \Delta_y \frac{1}{\|x - y\|} - \\ &- \int_{\partial D^3(x, \varepsilon)} \left[\varrho(y) \left\langle \text{grad}_y \frac{1}{\|x - y\|}, \mathcal{N}(y) \right\rangle - \frac{1}{\|x - y\|} \left\langle \text{grad}_y(\varrho), \mathcal{N}(y) \right\rangle \right] dy. \end{aligned}$$

Die Funktion $1/\|x - y\|$ ist in der Kugelschale harmonisch, daher verschwindet das erste Integral. Weiterhin ist das Normalenvektorfeld der Sphäre $\partial D^3(x, \varepsilon)$ vom Radius ε durch die Formel $\mathcal{N}(y) = (y - x)/\varepsilon$ gegeben, woraus

$$\left\langle \text{grad}_y \frac{1}{\|x - y\|}, \mathcal{N}(y) \right\rangle \equiv -\frac{1}{\varepsilon^2}$$

unmittelbar folgt. Setzen wir diese Ausdrücke ein, so erhalten wir

$$\int_{D^3(x,M) \setminus D^3(x,\varepsilon)} \Delta \varrho(y) \frac{1}{\|x-y\|} dy = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial D^3(x,\varepsilon)} \varrho(y) dy - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial D^3(x,\varepsilon)} \langle \operatorname{grad} \varrho(y), y-x \rangle dy.$$

Das zweite Integral der rechten Seite wird beschränkt durch

$$(1/\varepsilon^2) \varepsilon \max\{\|\operatorname{grad} \varrho\|\} \operatorname{vol}(\partial D^3(x,\varepsilon)) = 4\pi \varepsilon \max\{\|\operatorname{grad} \varrho\|\}$$

und liefert daher im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ keinen Beitrag. Insgesamt ergibt sich

$$\Delta \phi(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial D^3(x,\varepsilon)} \varrho(y) dy = -4\pi \varrho(x),$$

wobei wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in der letzten Umformung verwendet haben. Die Länge des Gradienten des elektrischen Potentiales schätzen wir unter Verwendung der Formeln für die partiellen Ableitungen $\partial \phi / \partial x^i$ und für weit außen liegende Punkte ab. Dazu wählen wir einen Radius $R > 0$ derart, dass die Kugel mit dem Zentrum $0 \in \mathbb{R}^3$ den Träger der Ladungsdichte enthält. Ist nun $\|x\| > R$, so gilt

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} \phi(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^3 \left[\int_{D^3(0,R)} \varrho(y) \frac{x^i - y^i}{\|y-x\|^3} dy \right]^2 \\ &\leq 3 \max\{\varrho^2(y) : y \in \mathbb{R}^3\} \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{\operatorname{dist}^2(x, D^3(0;R))} \end{aligned}$$

Aus dieser Formel sehen wir, dass die Länge des Gradienten $\|\operatorname{grad} \phi(x)\|$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ wie $1/\|x\|$ abfällt. \square

Bemerkung 1. Offensichtlich bleibt der letzte Satz und sein Beweis nach leichten Modifikationen auch in dem Fall richtig, dass die Ladungsdichte ϱ keinen kompakten Träger hat, jedoch samt ihrer Ableitungen hinreichend schnell gegen null im Unendlichen von \mathbb{R}^3 konvergiert.

Beispiel 1. Zu fixiertem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir eine in einer kleinen Kugel um ihn konzentrierte Ladungsdichte e ,

$$\varrho_\varepsilon(y) = \begin{cases} e (\operatorname{vol}(D^3(x_0, \varepsilon)))^{-1} & \text{falls } y \in D^3(x_0, \varepsilon), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrische Potential berechnen wir

$$\phi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho_\varepsilon(y)}{\|x-y\|} dy = \frac{e}{\operatorname{vol}(D^3(x_0, \varepsilon))} \int_{D^3(x_0, \varepsilon)} \frac{1}{\|x-y\|} dy$$

und erhalten im Grenzwert die Formel

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x) = \frac{e}{\|x-x_0\|}.$$

Auf diese Weise entsteht das *Coulomb-Potential*, welches das von einer elektrischen Punktladung erzeugte Feld beschreibt. Liegen analog n Punkte x_1, \dots, x_n mit den

Ladungen e_1, \dots, e_n vor, so erhalten wir das erzeugte elektrische Potential durch die Formel

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\|x - x_i\|}.$$

Wir wenden uns nunmehr der Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen für das statische Magnetfeld $B(x)$ zu und betrachten auch dabei nur den Fall, dass der divergenzfreie Stromdichtevektor kompakten Träger hat (siehe letzte Bemerkung).

Satz 2. *Sei J ein divergenzfreies Vektorfeld mit kompaktem Träger in \mathbb{R}^3 . Dann existiert genau ein magnetisches Feld mit*

$$\operatorname{div}(B) = 0, \quad \operatorname{rot}(B) = \frac{4\pi}{c} J$$

und $\|B(x)\| \rightarrow 0$ für $\|x\| \rightarrow \infty$. Dieses magnetische Feld ist durch $B = \operatorname{rot}(A)$ mit dem magnetischen Potential

$$A(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{J(y)}{\|x - y\|} dy$$

gegeben.

Beweis. Sind B und B_1 zwei magnetische Felder mit den angegebenen Eigenschaften, so wird die Differenz $\mathcal{V} := B - B_1$ ein divergenz- und rotationsfreies Vektorfeld,

$$\operatorname{div}(\mathcal{V}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\mathcal{V}) = 0,$$

dessen Länge $\|\mathcal{V}(x)\| \rightarrow 0$ gegen null für $\|x\| \rightarrow \infty$ konvergiert. Ein solches Vektorfeld können wir nach dem Poincaré-Lemma als Gradienten einer harmonischen Funktion f darstellen,

$$\mathcal{V} = \operatorname{grad}(f) \quad \text{und} \quad \Delta f = 0.$$

Die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x^i (1 \leq i \leq 3)$ sind somit beschränkte, harmonische Funktionen auf dem gesamten Raum \mathbb{R}^3 , unter Anwendung des Liouville-Satzes also konstant. Daraus folgt $\mathcal{V} = B_1 - B_2 \equiv 0$ sofort und diese Überlegung zeigt, dass es höchstens ein magnetisches Feld mit den geforderten Eigenschaften geben kann. Das angegebene magnetische Potential

$$A(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{J(y)}{\|x - y\|} dy$$

ist nach den Überlegungen im Beweis des vorhergehenden Satzes glatt und divergenzfrei. In der Tat, stellen wir A in seinen Komponenten $A = (A^1, A^2, A^3)$ dar, so erhalten wir

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}(x) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{J^i(y)(x^i - y^i)}{\|x - y\|^3} dy$$

und somit

$$\operatorname{div}(A) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle J(y), \frac{x-y}{\|x-y\|^3} \right\rangle dy = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle J(y), \operatorname{grad}_y \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) \right\rangle dy.$$

Verwenden wir die Formel

$$\operatorname{div}_y \left(\frac{1}{\|x-y\|} J(y) \right) = \left\langle J(y), \operatorname{grad}_y \left(\frac{1}{\|x-y\|} \right) \right\rangle + \frac{1}{\|x-y\|} \operatorname{div}(J)$$

sowie die vorausgesetzte Divergenzfreiheit von J , dann erhalten wir

$$\operatorname{div}(A) = \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_y \left(\frac{1}{\|x-y\|} J(y) \right) dy = 0$$

nach der Greenschen Formel, weil das Vektorfeld $J(y)$ einen kompakten Träger hat. Die Rotation des Vektorfeldes $B = \operatorname{rot}(A)$ kann nunmehr leicht berechnet werden:

$$\operatorname{rot}(B) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(A)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(A)) - \Delta(A) = -\Delta(A)$$

(siehe Kapitel 2, Aufgabe 6.b). Dabei ist der Laplace-Operator komponentenweise auf das Vektorfeld A anzuwenden und der Beweis des vorhergehenden Satzes zeigt uns das Resultat

$$\operatorname{rot}(B) = -\Delta(A) = \frac{4\pi}{c} J. \quad \square$$

Beispiel 2. Sei der Stromdichtevektor J konstant in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und Null außerhalb dieses Gebietes. Das magnetische Potential und das magnetische Feld $B = \operatorname{rot}(A)$ sind in diesem Fall durch die Formeln

$$A(x) = \frac{1}{c} \left(\int_{\Omega} \frac{dy}{\|x-y\|} \right) J, \quad B(x) = \frac{1}{c} J \times \int_{\Omega} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^3} dy$$

bestimmt. Das von einer elektrischen Ladungsverteilung mit konstantem Stromdichtevektor induzierte Magnetfeld ist orthogonal zur Richtung des Stromflusses. Diesen Sachverhalt bezeichnet man als das *Biot-Savart-Gesetz*.

Wir interpretieren abschließend die beiden bewiesenen Sätze als die Hodge-Zerlegung einer 1-Form in \mathbb{R}^3 (siehe Kapitel 3.11, Folgerung 5). Sei ω^1 eine 1-Form in \mathbb{R}^3 mit kompaktem Träger oder, allgemeiner, mit schnell abfallenden Koeffizienten. Wenden wir Satz 1 auf die Funktion $\varrho = *d(*\omega^1)$ an, so erhalten wir eine geschlossene 1-Form ω_E^1 mit

$$d\omega_E^1 = 0 \quad \text{und} \quad *d(*\omega_E^1) = *d(*\omega^1).$$

Die Form ω_E^1 fällt ebenfalls im Unendlichen gegen null und somit kann die Differenz $J = \omega^1 - \omega_E^1$ nach Satz 2 in der Gestalt

$$*d\omega_B^1 = J = \omega^1 - \omega_E^1$$

mit einer im Unendlichen verschwindenden 1-Form ω_B^1 dargestellt werden. Diese Überlegung führt uns auf den

Satz 3 (Satz von Helmholtz, Satz von Hodge). *Jede glatte 1-Form ω^1 in \mathbb{R}^3 mit kompaktem Träger oder, allgemeiner, mit schnell abfallenden Koeffizienten, kann eindeutig als Summe einer geschlossenen und einer ko-geschlossenen Form*

$$\omega^1 = \omega_E^1 + *d\omega_B^1, \quad d\omega_E^1 = 0$$

dargestellt werden. Sowohl ω_E^1 als auch ω_B^1 fallen im Unendlichen gegen Null.

Bemerkung 2. Mit Hinblick auf Korollar 5 im Kapitel 3.11 heben wir hervor, dass in \mathbb{R}^3 der harmonische Anteil in dieser Zerlegung nicht auftritt. Der Grund dafür besteht darin, dass es keine harmonischen 1-Formen mit kompaktem Träger in \mathbb{R}^3 gibt (oder im Unendlichen gegen null konvergieren). Wäre ω^1 eine derartige 1-Form, so könnten wir nach Poincaré-Lemma ω^1 als Differential einer harmonischen Funktion darstellen, $\omega^1 = df, \Delta f = 0$. Die partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x^i$ sind dann beschränkte, harmonische Funktionen und daher konstant. Konvergiert die Länge von ω^1 gegen null im Unendlichen, so verschwinden diese partiellen Ableitungen und wir schließen $\omega^1 = 0$.

9.3. Elektromagnetische Wellen

Eine *elektromagnetische Welle* ist ein elektromagnetisches Feld im Vakuum ($\varrho = 0 = J$). Die Maxwellschen Gleichungen lauten in diesem Fall

$$\operatorname{div}(B) = 0, \quad \operatorname{div}(E) = 0$$

$$\operatorname{rot}(B) = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}(E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

woraus man sofort die sog. *Wellengleichung*

$$\Delta B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \quad \Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

erhält. Ist die Welle zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ bekannt und wollen wir die Ausbreitung der Welle in der Zeit verfolgen, so müssen wir das *Cauchy-Anfangsproblem für die Wellengleichung* lösen:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x).$$

Im Fall glatter Anfangsbedingungen u_0 und u_1 hat dieses Problem genau eine Lösung, welche wir jetzt beschreiben werden. Dazu benötigen wir den *sphärischen Mittelwert* einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Darunter versteht man diejenige Funktion $I\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, welche den mittleren Wert von φ auf einer beliebigen 2-dimensionalen Sphäre $S^2(x; r)$ mit Zentrum $x \in \mathbb{R}^3$ und Radius $r > 0$ angibt,

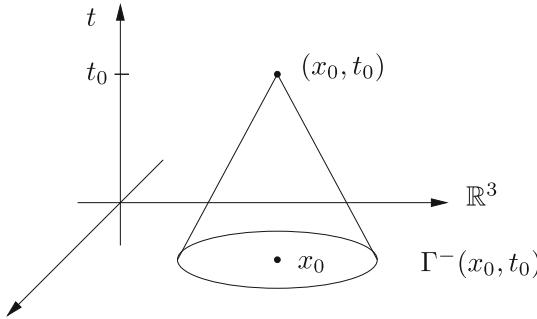
$$(I\varphi)(x, r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S^2(x, r)} \varphi(y) dy.$$

Satz 4 (Poisson-Formel für die Wellengleichung). *Für je zwei glatte Anfangsbedingungen $u_0, u_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ hat das Cauchy-Anfangswertproblem der Wellengleichung*

genau eine Lösung auf dem Raum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Diese eindeutig bestimmte Lösung ist durch die Formel

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(t (Iu_0)(x, ct) \right) + t (Iu_1)(x, ct)$$

gegeben.



Bemerkung 3. Der Wert $u(x, t)$ der Lösung der Wellengleichung hängt nur vom Verhalten der Anfangsbedingungen auf dem Rand der Basis des rückwärtigen Lichtkegels

$$\Gamma^-(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ : \|x - x_0\| \leq c|t - t_0|, 0 \leq t \leq t_0\}$$

ab, welcher eine zweidimensionale Sphäre ist. Damit hat jede von Anfangsbedingungen mit kompakten Trägern ausgelöste Welle in \mathbb{R}^3 sowohl eine vordere als auch eine hintere Wellenfront (*Huygenssches Prinzip*).

Beweis der Eindeutigkeit der Lösung. Als Bezeichnungen führen wir den Wellenoperator

$$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

sowie die Energie

$$Eu(x, t) := \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x^j} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

ein. Dann gilt die leicht nachzurechnende Identität

$$2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \square u = 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial t} E(u).$$

Sei u eine Lösung der Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = 0 = \partial u(x, 0)/\partial t$ und bezeichne $\Gamma_\tau^-(x_0, t_0)$ den durch die Bedingung $0 \leq t \leq \tau$ beschriebenen Kegelstumpf. Integrieren wir die angegebene Identität, so erhalten wir

$$\int_{\Gamma_\tau^-} \frac{\partial}{\partial t} E(u) = 2 \int_{\Gamma_\tau^-} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right).$$

Die Gauss-Ostrogradzki-Formel gestattet es, die Gebietsintegrale in Flächenintegrale zu verwandeln:

$$\int_{\partial\Gamma_\tau^-} E(u) \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2 \int_{\partial\Gamma_\tau^-} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x^j} \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle.$$

Der Rand $\partial\Gamma_\tau^-$ besteht aus drei Teilen. Auf dem ersten Teil ($t = 0$) verschwindet die Energie $E(u)$ und die Ableitung $\partial u / \partial t$, dieser Anteil liefert auf beiden Seiten der Gleichung daher keinen Beitrag. Auf dem zweiten Randstück ($t = \tau$) ist der Normalenvektor \mathcal{N} parallel zu $\partial / \partial t$. Damit verschwindet das Integral auf der rechten Seite der Gleichung, während das Integral auf der linken Seite nichtnegativ ist. Auf dem dritten Randstück berechnen wir die Skalarprodukte:

$$\left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{x^j - x_0^j}{\|x - x_0\|} \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}, \quad \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Damit können wir die Differenz zwischen dem linken und rechten Integranden

$$E(u) \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle - 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x^j} \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{x^j - x_0^j}{\|x - x_0\|} - \frac{\partial u}{\partial x^j} \right]^2$$

in einen gleichfalls nichtnegativen Ausdruck umformen. Insgesamt folgt aus der Integralformel, dass die Energie $E(u)$ auf dem oberen Rand ($t = \tau$) des Kegelstumpfes Γ_τ^- verschwindet. Die Höhe τ des Kegelstumpfes kann variiert werden und daher verschwindet $E(u)$ im Inneren des Kegels $\Gamma^-(x_0, t_0)$ identisch. Die Funktion $u(x, t)$ wird dort konstant und mit Hinblick auf die Anfangsbedingungen identisch Null. \square

Beweis der Existenz der Lösung. Wir berechnen die Ableitungen nach der Zeit des sphärischen Mittelwertes

$$(Iu_1)(x, ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S^2(x, ct)} u_1(y) dy = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u_1(x + ct z) dz,$$

wobei $S^2(x, ct)$ die Sphäre mit dem Zentrum $x \in \mathbb{R}^3$ und dem Radius ct ist. S^2 bezeichne die Einheitssphäre. Dann gilt nach Greenscher Formel

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Iu_1)}{\partial t}(x, ct) &= \frac{c}{4\pi} \int_{S^2} \sum_{j=1}^3 z^j \frac{\partial u_1}{\partial x^j}(x + ct z) dz \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{S^2(x, ct)} \left\langle \mathcal{N}(\alpha), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \frac{\partial u_1}{\partial x^j}(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{4\pi ct^2} \int_{D^3(x, ct)} \Delta u_1(y) dy. \end{aligned}$$

Führen wir in der 3-dimensionalen Kugel $D^3(x, ct)$ sphärische Koordinaten $(r, \alpha) \in (0, \infty) \times S^2$ ein und wenden die Formel $d\mathbb{R}^3 = r^2 dr \wedge d\alpha$ an, so erhalten wir

insgesamt

$$\frac{\partial(Iu_1)}{\partial t}(x, ct) = \frac{1}{4\pi ct^2} \int_0^{ct} r^2 \int_{S^2} \Delta u_1(x + r\alpha) d\alpha dr.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}(t(Iu_1)(x, ct)) = (Iu_1)(x, ct) + \frac{1}{4\pi ct} \int_0^{ct} r^2 \int_{S^2} \Delta u_1(x + r\alpha) d\alpha dr$$

und nach nochmaligem Differenzieren erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t(Iu_1)(x, ct)) = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{S^2} \Delta u_1(x + ct\alpha) d\alpha = c^2 \Delta(t(Iu_1)(x, ct)).$$

Damit wird $\omega(x, t) := t(Iu_1)(x, ct)$ eine Lösung der Wellengleichung zu den Anfangsbedingungen

$$\omega(x, 0) = 0 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}(x, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, 0) = (Iu_1)(x, 0) = u_1(x).$$

Diese Ableitung $\partial \omega / \partial t$ ist gleichfalls eine Lösung der Wellengleichung und dies ergibt den zweiten Summanden der behaupteten Formel. \square

Wir wenden uns jetzt der inhomogenen Wellengleichung $\square u = f$ mit einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ zu und werden diese unter der Anfangsbedingung $u_0 = 0 = u_1$ lösen. Kombinieren wir die dabei auftretende Lösung mit der im letzten Satz gefundenen Lösung der homogenen Wellengleichung zu beliebigen Anfangsbedingungen, so erhalten wir die Lösung der inhomogenen Wellengleichung $\square u = f$ zu beliebigen Anfangsbedingungen u_0, u_1 . Das *retardierte Potential* einer glatten Funktion $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch das Integral

$$Rf(x, t) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\|x-y\| \leq ct} \frac{f(y, t - r/c)}{r} dy$$

mit der Abstandsfunktion $r := \|x - y\|$ definiert.

Satz 5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann ist das retardierte Potential Rf eine Lösung des Cauchy-Anfangswertproblems für die inhomogene Wellengleichung

$$\square u = f, \quad u(x, 0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0).$$

Beweis. Nach Übergang zu sphärischen Koordinaten im Zentrum $x \in \mathbb{R}^3$ können wir das retardierte Potential in der Gestalt

$$Rf(x, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{ct} r \int_{S^2} f(x + r\alpha, t - \frac{r}{c}) d\alpha dr$$

darstellen. Führen wir den Parameter $\tau := t - \frac{r}{c}$ sowie die Funktion

$$p(x, t, \tau) := \frac{t - \tau}{4\pi} \int_{S^2} f(x + c(t - \tau)\alpha, \tau) d\alpha$$

ein, so erhalten wir wegen $p(x, t, t) = 0$ die folgenden Formeln für das retardierte Potential und dessen Ableitungen:

$$\begin{aligned} Rf(x, t) &= -c^2 \int_0^t p(x, t, \tau) d\tau, \quad \frac{\partial}{\partial t}(Rf)(x, t) = -c^2 \int_0^t \frac{\partial p}{\partial t}(x, t, \tau) d\tau \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(Rf)(x, t) &= -c^2 \int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau - c^2 \frac{\partial p}{\partial t}(x, t, t). \end{aligned}$$

Eine Berechnung der Ableitung von p nach t ergibt

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x, t) d\alpha = f(x, t)$$

und insgesamt entsteht

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(Rf)(x, t) = -c^2 \int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t, \tau) d\tau - c^2 f(x, t).$$

Damit führt eine Anwendung des Wellenoperators auf das retardierte Potential zu der Formel:

$$\square(Rf)(x, t) = f(x, t) - c^2 \int_0^t \square p(x, t, \tau) d\tau.$$

Ist der Parameter τ fest, so wird die Funktion

$$p(x, t, \tau_0) = \frac{t - \tau_0}{4\pi} \int_{S^2} f(x + c(t - \tau_0)\alpha, \tau_0) d\alpha$$

eine Lösung der homogenen Wellengleichung. In der Tat, dies folgt aus dem letzten Satzes sofort, weil $p(x, t, \tau_0)$ durch eine sphärische Mittelwertbildung entsteht. Damit ist bewiesen, dass das retardierte Potential eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung ist. \square

Die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung kann aus derjenigen für die dreidimensionale Wellengleichung gewonnen werden. Zu diesem Zweck verwandeln wir den sphärischen Mittelwert einer nur von den ersten beiden räumlichen Variablen x^1, x^2 abhängenden Funktion $\phi(x^1, x^2)$ in ein zweidimensionales Integral, indem wir die Sphäre $S^2(x, ct) \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$y^1 = x^1 + \alpha^1, \quad y^2 = x^2 + \alpha^2, \quad y^3 = x^3 + \sqrt{c^2 t^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2}$$

mit $(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 \leq c^2 t^2$ parametrisieren. Die Volumenform der Sphäre erhält man aus der Formel

$$dS^2 = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2}} d\alpha^1 \wedge d\alpha^2$$

und der sphärische Mittelwert ergibt das Integral

$$I\phi(x^1, x^2, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{D^2(0, ct)} \frac{\phi(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2)}{\sqrt{c^2 t^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2}} d\alpha^1 \wedge d\alpha^2.$$

Analog behandeln wir das retardierte Potential einer nur von den ersten beiden räumlichen Variablen und der Zeit abhängenden Funktion $f(x^1, x^2, t)$:

$$Rf(x^1, x^2, t) = -\frac{c}{2\pi} \int_{D^2(0, c(t-\tau))} \frac{f(x^1 - \alpha^1, x^2 - \alpha^2, \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2}} d\alpha^1 \wedge d\alpha^2 \wedge d\tau.$$

Setzen wir die erhaltenen Ausdrücke in die Formeln des vorhergehenden Satzes ein, so ergibt sich die Lösung der inhomogenen, zweidimensionalen Wellengleichung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $u_0(x^1, x^2), u_1(x^1, x^2)$ dargestellt als Integral über dem Inneren von Kreisscheiben in \mathbb{R}^2 . Wir ersehen daraus, dass eine Welle in \mathbb{R}^2 ausgelöst von Anfangsbedingungen mit kompaktem Träger zwar eine vordere Front, jedoch keine hintere Front hat. Dieser Effekt ist beispielsweise von Wasserwellen wohl bekannt.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wann durch Drehung aus einer elektromagnetischen Welle eine neue Welle entsteht. Gegeben sei eine elektromagnetische Welle $E(x, t), B(x, t)$ und wir nehmen an, dass diese beiden Vektoren linear unabhängig sind. In der aufgespannten 2-Ebene drehen wir diese Vektorfelder um den Winkel $\psi(x, t)$ und erhalten somit die Vektorfelder

$$\begin{aligned} E^*(x, t) &= \cos \psi(x, t) E(x, t) + \sin \psi(x, t) B(x, t), \\ B^*(x, t) &= -\sin \psi(x, t) E(x, t) + \cos \psi(x, t) B(x, t). \end{aligned}$$

Wir studieren die Bedingung dafür, dass das Paar (E^*, B^*) eine elektromagnetische Welle wird. Notwendigerweise muss ψ eine Lösung der *Eikonal-Gleichung* sein,

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - \|\operatorname{grad} \psi\|^2 = 0.$$

Beispiel 3. Hat $v \in \mathbb{R}^n$ die Länge eins, so ist

$$\psi(x, t) = e^{\langle x, v \rangle} e^{ct}$$

eine Lösung der Eikonal-Gleichung in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$.

Satz 6. (E^*, B^*) ist genau dann eine elektromagnetische Welle, falls die Phasenfunktion ψ folgende Bedingungen erfüllt:

$$(1) \quad \langle \operatorname{grad} \psi, B \rangle = 0 = \langle \operatorname{grad} \psi, E \rangle;$$

$$(2) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} B = -\operatorname{grad} \psi \times E;$$

$$(3) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} E = \operatorname{grad} \psi \times B.$$

Beweis. Die Vektorfelder E und B sind divergenzfrei und somit können wir die Divergenzen von E^*, B^* einfach bestimmen:

$$\operatorname{div}(E^*) = -\sin \psi \langle \operatorname{grad} \psi, E \rangle + \cos \psi \langle \operatorname{grad} \psi, B \rangle ,$$

$$\operatorname{div}(B^*) = -\cos \psi \langle \operatorname{grad} \psi, E \rangle - \sin \psi \langle \operatorname{grad} \psi, B \rangle .$$

Somit ist das Verschwinden der Divergenzen $\operatorname{div}(E^*) = \operatorname{div}(B^*) = 0$ äquivalent zur ersten Bedingung $\langle \operatorname{grad} \psi, E \rangle = 0 = \langle \operatorname{grad} \psi, B \rangle$. Unter Anwendung der allgemein in \mathbb{R}^3 gültigen Formel

$$\operatorname{rot}(f \mathcal{V}) = \operatorname{grad} f \times \mathcal{V} + f \operatorname{rot}(\mathcal{V})$$

werten wir analog die Maxwellschen Gleichungen für das Paar (E^*, B^*) aus. Es entstehen die folgenden beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin \psi \left(-\operatorname{grad} \psi \times E - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} B \right) &= \cos \psi \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} E - \operatorname{grad} \psi \times B \right), \\ \sin \psi \left(-\operatorname{grad} \psi \times B + \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} E \right) &= \cos \psi \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} B + \operatorname{grad} \psi \times E \right), \end{aligned}$$

welche äquivalent zur zweiten und dritten Bedingung des Satzes sind. \square

9.4. Die relativistische Formulierung der Maxwellschen Gleichungen

Wir betrachten den Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$ mit den Koordinaten (x^1, x^2, x^3, t) sowie der durch

$$g := (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2$$

gegebenen pseudo-Riemannschen Metrik vom Index 1, der sog. *Minkowski-Metrik* (vgl. Kapitel 3.11, Beispiel 35). Die 1-Formen dx^1, dx^2, dx^3 und $c dt$ bilden ein orthonormales Reper. Eine Berechnung des Hodge-Operators \star von $\mathbb{R}^{3,1}$ auf den 2-Formen führt zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \star(dx^1 \wedge dx^2) &= -dx^3 \wedge c dt & \star(dx^1 \wedge dx^3) &= dx^2 \wedge c dt \\ \star(dx^1 \wedge c dt) &= dx^2 \wedge dx^3 & \star(dx^2 \wedge dx^3) &= -dx^1 \wedge c dt \\ \star(dx^2 \wedge c dt) &= -dx^1 \wedge dx^3 & \star(dx^3 \wedge c dt) &= dx^1 \wedge dx^2 . \end{aligned}$$

Ist ω eine 1-Form in \mathbb{R}^3 , so sind die Hodge-Operatoren $*$ und \star des euklidischen Raums \mathbb{R}^3 bzw. des Minkowski-Raums $\mathbb{R}^{3,1}$ durch die Relation

$$\star(\omega \wedge c dt) = * \omega$$

verbunden. In $\mathbb{R}^{3,1}$ bilden wir die 2-Form

$$F := \omega_E \wedge (c dt) + \star(\omega_B \wedge c dt)$$

sowie die 1-Form

$$J := \frac{1}{c} \omega_J - \varrho dt .$$

Satz 7. Die 2-Form F hat folgende Eigenschaften:

- (1) $\|F\|^2 = \|B\|^2 - \|E\|^2$;
 (2) $\langle F, \star F \rangle = 2\langle E, B \rangle$;
 (3) Die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen ist äquivalent zu

$$dF = 0;$$

- (4) die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen ist äquivalent zu

$$\star d \star F = 4\pi J.$$

Beweis. Wir berechnen das äußere Differential dF von F im 4-dimensionalen Raum:

$$\begin{aligned} dF &= d\omega_E \wedge c dt + d(*\omega_B) \\ &= d^{\mathbb{R}^3}(\omega_E) \wedge c dt + d^{\mathbb{R}^3}(*\omega_B) + \frac{\partial(*\omega_B)}{\partial t} \wedge dt \\ &= \left(d^{\mathbb{R}^3}(\omega_E) + \frac{1}{c} \frac{\partial(*\omega_B)}{\partial t} \right) \wedge c dt + d^{\mathbb{R}^3}(*\omega_B) \end{aligned}$$

und sehen, dass $dF = 0$ äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$d^{\mathbb{R}^3}(*\omega_B) = 0 \quad \text{und} \quad d^{\mathbb{R}^3}(\omega_E) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(*\omega_B)$$

ist. Analog erhalten wir

$$d \star F = d(*\omega_E - \omega_B \wedge c dt) = d^{\mathbb{R}^3}(*\omega_E) + \frac{\partial}{\partial t}(*\omega_E) \wedge dt - d^{\mathbb{R}^3}(\omega_B) \wedge c dt$$

und daraus folgt nach leichter Umrechnung

$$\star d \star F = *d^{\mathbb{R}^3}(*\omega_E)(c dt) + *d^{\mathbb{R}^3}(\omega_B) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(*\omega_E).$$

Damit ist $\star d \star F = 4\pi J$ äquivalent zu

$$d(*\omega_E) = 4\pi \varrho \quad \text{und} \quad *d(\omega_B) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\omega_E) + \frac{4\pi}{c} \omega_J. \quad \square$$

Bemerkung 4. Die 2-Form F ist in $\mathbb{R}^{3,1}$ eine geschlossene Form, somit existiert nach Poincaré-Lemma eine 1-Form \mathcal{A} mit

$$d\mathcal{A} = -\frac{e}{c} F.$$

Die 1-Form \mathcal{A} umfasst sowohl das elektrische als auch das magnetische Potential: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} F &= \omega_E \wedge (c dt) + *\omega_B = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A - d\phi \right) \wedge (c dt) + d^{\mathbb{R}^3} A \\ &= d^{\mathbb{R}^{3,1}}(A) - d\phi \wedge (c dt) = d^{\mathbb{R}^{3,1}}(A - c\phi dt) \end{aligned}$$

und wir erhalten $\mathcal{A} = -\frac{e}{c} A + e\phi dt$.

Für elektromagnetische Wellen ($J = 0, \varrho = 0$) besagen die relativistisch formulierten Maxwellschen Gleichungen, dass die 2-Form F eine harmonische Form im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$ ist,

$$dF = 0, \quad d \star F = 0.$$

Bei konformen Änderungen der pseudo-Riemannschen Metrik ist der Hodge $*$ -Operator invariant auf Formen, deren Grad die Hälfte der Dimension der Mannigfaltigkeit beträgt (siehe Aufgabe 9 im Kapitel 1). Aus diesem Grunde sind die letzten Gleichungen invariant unter der Wirkung der konformen Gruppe des Minkowski-Raumes. Hierbei handelt es sich um eine 15-dimensionale Gruppe, welche isomorph zu $O(4, 2)$ ist. Dagegen sind die Größen $\|F\|^2$ sowie $\langle F, *F \rangle$ nur invariant unter der Isometriegruppe. Letztere ist die Gruppe derjenigen linearen Transformationen $L : \mathbb{R}^{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^{3,1}$, welche die Minkowski-Metrik g invariant lassen. Stellen wir L als eine (4×4) -Matrix dar und bezeichnen mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -c^2 \end{bmatrix}$$

die Matrix der quadratischen Form g , so besteht die Isometriegruppe $O(3, 1)$ – die sog. *Lorentz-Gruppe* – aus allen linearen Abbildungen L , welche die Bedingung

$$L A L^T = A$$

erfüllen. Differenzieren wir diese Gleichung, so erhalten wir eine Beschreibung der Lie-Algebra $\mathfrak{o}(3, 1)$ dieser Gruppe als die Menge aller (4×4) -Matrizen X mit

$$X A + A X^T = 0.$$

Die Gruppe $O(3, 1)$ enthält die 3-dimensionale Drehgruppe des euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 , deren Lie-Algebra von den schiefsymmetrischen Matrizen L_1, L_2, L_3 aus Abschnitt 6.3, Beispiel 14 erzeugt wird. Weitere Erzeugende von $\mathfrak{o}(3, 1)$ sind die drei Matrizen

$$B_1 := \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ & 0 & \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & 0 & \end{bmatrix}, \quad B_3 := \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Die Kommutatorrelationen in dieser Lie-Algebra sind

$$\begin{aligned} [B_1, B_2] &= c^2 L_3, \quad [B_1, B_3] = -c^2 L_2, \quad [B_2, B_3] = c^2 L_1, \\ [L_1, B_2] &= -B_3, \quad [L_1, B_3] = B_2, \quad [L_2, B_1] = B_3, \\ [L_2, B_3] &= -B_1, \quad [L_3, B_1] = -B_2, \quad [L_3, B_2] = B_1, \quad [L_i, B_i] = 0. \end{aligned}$$

Jeder 2-Form F einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^m, g) können wir mittels der Formel

$$T^F := \sum_{i,j=1}^m g^{ij} (e_i \lrcorner F) \odot (e_j \lrcorner F)$$

einen symmetrischen $(2,0)$ -Tensor T^F zur Seite stellen. Dabei bezeichnet \odot das symmetrische Produkt der entsprechenden 1-Formen (siehe Abschnitt 5.3). Ist F beispielsweise durch das elektromagnetische Feld gegeben,

$$F = \omega_E \wedge cdt + B_1 dx^2 \wedge dx^3 - B_2 dx^1 \wedge dx^3 + B_3 dx^1 \wedge dx^2,$$

so ergibt sich für T^F die Formel

$$\begin{aligned} T^F &= (E_1 cdt - B_2 dx^3 + B_3 dx^2)^2 + (E_2 cdt + B_1 dx^3 - B_3 dx^1)^2 \\ &\quad + (E_3 cdt + B_1 dx^2 - B_2 dx^1)^2 - (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + B_3 dx^3)^2. \end{aligned}$$

Der sogenannte *Maxwellsche Spannungstensor* T^M entsteht durch

$$T^M := -2T^F + \langle F, F \rangle (dx^1 \odot dx^1 + dx^2 \odot dx^2 + dx^3 \odot dx^3 - c^2 dt \odot dt).$$

Die Komponenten dieses Tensor haben eine physikalische Interpretation. Die reine Zeitkomponente ist

$$T_{44}^M = -(\|E\|^2 + \|B\|^2)c^2 dt^2$$

und die gemischten Komponenten

$$T_{i4}^M = 4(E \times B)_i dx^i \odot dt$$

sind die Komponenten des sogenannten *Poynting-Vektors* $E \times B$.

Das elektromagnetische Potential \mathcal{A} ist eine im Minkowski-Raum definierte, reellwertige 1-Form. Wir fassen die reellen Zahlen als die Lie-Algebra der kompakten, eindimensionalen Gruppe $U(1)$ auf, in der die einzige in der Maxwellschen Theorie relevante Größe des Elektrons – seine elektrische Ladung – kodiert ist. Gehen wir nunmehr zur Beschreibung komplizierterer Elementarteilchen über, welche nicht nur eine elektrische Ladung sondern auch weitere Merkmale (Geschmack, Farbe...) haben, so müssen wir die eindimensionale Gruppe $U(1)$ durch eine höher dimensionale, kompakte Lie-Gruppe G ersetzen. Wollen wir zudem noch die Gravitation verstanden im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie in das Modell einbeziehen, so ist der flache Minkowski-Raum durch eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit zu ersetzen. Insgesamt kommen wir dazu, unter einem „verallgemeinerten elektromagnetischen Feld mit Gravitation“ ein 4-Tupel (M, g, G, \mathcal{A}) bestehend aus einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, einer Lie-Gruppe und einer 1-Form $\mathcal{A} : T(M) \rightarrow \mathfrak{g}$ mit Werten in der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G zu verstehen. Die Nichtkommutativität der Gruppe G wird hierbei wesentlich. Die Feldstärke $F_{\mathcal{A}}$ ist durch eine \mathfrak{g} -wertige 2-Form gegeben und der Maxwellschen Gleichung im Vakuum entspricht die sog. Yang-Mills-Gleichung:

$$F_{\mathcal{A}} := d\mathcal{A} + \frac{1}{2} [\mathcal{A}, \mathcal{A}], \quad D^{\mathcal{A}}(\star F_{\mathcal{A}}) := d\star F_{\mathcal{A}} + [\mathcal{A}, \star F_{\mathcal{A}}] = 0.$$

Die unter Umständen komplizierte topologische Struktur des Basisraums M bewirkt es, dass das verallgemeinerte elektromagnetische Potential \mathcal{A} keine auf M

global definierte 1-Form ist. Dies führt auf die Differentialgeometrie der Hauptfaserbündel und die Zusammenhangstheorie. Mit ihrer Hilfe lassen sich korrekt die Modelle der Elementarteilchenphysik formulieren und studieren².

9.5. Die Lorentz-Kraft

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Bewegungsgleichungen desjenigen Lagrange-Systems, welches ein Masseteilchen in einem elektromagnetischen Feld beschreibt. In Beispiel 11 von Kapitel 7 hatten wir das Lagrange-System bereits beschrieben. Desweiteren beschreiben wir die Bewegungen in speziellen Fällen, z. B. für das statische homogene Feld sowie für den Dirac-Monopol. Die Frenet-Formeln der Kurventheorie werden dabei benutzt.

Sei (M^n, g, A) eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit samt einer 1-Form A . Als Lagrange-Funktion wählen wir

$$L(v) = \frac{m}{2} g(v, v) - A(v).$$

Satz 8 (Lorentz-Gleichung). *Eine Kurve $\varrho : \mathbb{R} \rightarrow M^n$ ist genau dann eine Bewegung des Lagrange-Systems (M^n, L) falls*

$$m \frac{\nabla \dot{\varrho}}{ds} = \dot{\varrho} \lrcorner dA$$

gilt. Dabei identifizieren wir die 1-Form $\dot{\varrho} \lrcorner dA$ mittels der pseudo-Riemannschen Metrik mit einem Vektor. Insbesondere ist die Länge $g(\dot{\varrho}(s), \dot{\varrho}(s))$ der Tangente einer Bewegung konstant.

Beweis. Wir nutzen lokale Koordinaten x^1, \dots, x^n in M^n . Die Lagrange-Funktion ist

$$L(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n) = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \sum_{i=1}^n A_i(x^1, \dots, x^n) \dot{x}^i.$$

Sei $\varrho(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$ eine Kurve. Wir berechnen

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}(\dot{\varrho}(s)) = \frac{m}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{dx^i}{ds},$$

und

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}(\varrho(s)) \right) = m \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} + m \sum_{i=1}^n g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{dx^i}{ds}.$$

Die Kurve $\varrho(s)$ löst daher die Lagrange-Gleichung genau dann, falls

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right] \frac{dx^i}{ds} = m \sum_{i=1}^n g_{ik} \frac{d^2 x^i}{ds^2} + m \sum_{i,j=1}^n \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right] \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}.$$

²Siehe Thomas Friedrich, *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Vieweg-Verlag Braunschweig / Wiesbaden, 1997.

Die rechte und linke Seite der letzten Gleichung können invariant jedoch wie folgt geschrieben werden,

$$dA\left(\dot{\varrho}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = mg\left(\frac{\nabla\dot{\varrho}}{ds}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

und dies beendet den Beweis weil die pseudo-Riemannsche Metrik nichtausgeartet ist. \square

Im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$ betrachten wir die aus dem elektrischen Potential ϕ sowie dem magnetischen Potential A zusammengesetzte 1-Form

$$\mathcal{A} = -\frac{e}{c}A + e\phi dt = -\frac{e}{c}(A_1dx^1 + A_2dx^2 + A_3dx^3) + e\phi dt.$$

Es gilt

$$d\mathcal{A} = -\frac{e}{c}F = -e\omega_E \wedge dt - \frac{e}{c}(B_1dx^2 \wedge dx^3 - B_2dx^1 \wedge dx^3 + B_3dx^1 \wedge dx^2).$$

Sei $\varrho(s) = (x^1(s), x^2(s), x^3(s), t(s))$ eine Bewegung. Dann ist $g(\dot{\varrho}(s), \dot{\varrho}(s))$ konstant. Weil Teilchen sich nur unterhalb der Lichtgeschwindigkeit bewegen, interessieren uns nur Bewegungen mit negativer Konstante. Reparametrisieren wir eventuell, so können wir $g(\dot{\varrho}(s), \dot{\varrho}(s)) \equiv -c^2$ voraussetzen. Weiterhin führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\gamma := \frac{dt}{ds}, \quad v_i := \frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dx^i}{ds}, \quad v := (v_1, v_2, v_3), \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Aus

$$-c^2 = g(\dot{\varrho}(s), \dot{\varrho}(s)) = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{dx^i}{ds} \right]^2 - c^2 \left[\frac{dt}{ds} \right]^2 = (v^2 - c^2) \left[\frac{dt}{ds} \right]^2$$

erhalten wir

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{und} \quad \frac{d\varrho}{ds} = \gamma \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Die rechte Seite der Lorentz-Gleichung kann nunmehr berechnet werden,

$$\frac{d\varrho}{ds} \lrcorner d\mathcal{A} = \gamma \left[-e(vE)dt + \sum_{i=1}^3 (eE_i + \frac{e}{c}(v \times B)_i)dx^i \right].$$

Dabei bedeutet (vE) das Skalarprodukt und $(v \times B)$ das Vektorprodukt der entsprechenden 3-dimensionalen Vektoren. Gehen wir mittels der Minkowski-Metrik zum Vektorfeld über, so gilt

$$\frac{d\varrho}{ds} \lrcorner d\mathcal{A} = \gamma \left[+\frac{e}{c^2}(vE)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 (eE_i + \frac{e}{c}(v \times B)_i)\frac{\partial}{\partial x^i} \right].$$

Insgesamt schreibt sich Lorentz-Gleichung für die Bewegung $\varrho(s)$ als

$$m \frac{d(\gamma v)}{ds} = eE + \frac{e}{c}(v \times B), \quad m \frac{d\gamma}{ds} = \frac{e}{c^2}(vE).$$

Wir diskutieren den Fall eines reinen Magnetfeldes, $E = 0$. Dann ist γ konstant und der Raumteil $x(s) := (x^1(s), x^2(s), x^3(s))$ der Bewegung ist eine Kurve in \mathbb{R}^3 , welche Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x(s)}{ds^2} = \lambda \left(\frac{dx(s)}{ds} \times B \right)$$

ist. Die Konstante $\lambda = \lambda(e, c, m, \gamma)$ hängt dabei von allen bisher verwendeten Größen ab. Dabei ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors der räumlichen Bewegung konstant. Wir reparametrisieren die Kurve erneut und wollen fortan annehmen, dass s der natürliche Parameter ist, $\|dx/ds\| \equiv 1$. In den folgenden Beispielen beschreiben wir geometrisch die Lösungskurven in zwei Fällen, in denen das Magnetfeld zeitunabhängig ist.

Beispiel 4 (Das statische homogene Magnetfeld). In diesem Beispiel betrachten wir den Fall, dass B konstant ist. Sind \vec{t} und \vec{h} der Tangential- bzw. der Hauptnormalenvektor der Kurve und ist κ deren Krümmung, so lautet die Lorentz-Gleichung

$$\kappa \vec{h} = \lambda (\vec{t} \times B).$$

Die Frenet-Formeln ergeben jetzt

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{t}, B \rangle = \langle \kappa \vec{h}, B \rangle = \lambda \langle (\vec{t} \times B), B \rangle = 0$$

und damit ist $\langle \vec{t}, B \rangle$ konstant. Insbesondere ist die Krümmung konstant,

$$\kappa = \lambda \| \vec{t} \times B \| = \lambda \sqrt{\|B\|^2 - \langle \vec{t}, B \rangle^2}.$$

Die Windung τ der Kurve ist gleichfalls konstant. Aus den Frenet-Formeln und der Lorentz-Gleichung folgt nämlich nach Differenzieren

$$-\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} = \frac{d\vec{h}(s)}{ds} = \lambda (\vec{h} \times B).$$

Multiplizieren wir mit dem Binormalenvektor \vec{b} , so erhalten wir

$$\tau = \lambda \langle (h \times B), \vec{b} \rangle = \lambda \langle (h \times B), (\vec{t} \times \vec{h}) \rangle = -\lambda \langle \vec{t}, B \rangle.$$

Die räumliche Bewegungskurve $x(s)$ hat also eine konstante Krümmung und eine konstante Windung. Damit ist sie eine Schraubenlinie ($\kappa \neq 0$) bzw. eine Gerade, deren Richtung parallel zu B ist ($\kappa = 0$), siehe Kapitel 5, Aufgabe 6. Im Spezialfall $\langle \vec{t}, B \rangle \equiv 0$ ist die Kurve ein Kreis in einer zu B orthogonalen Ebene. Die Krümmung dieses Kreises beträgt $\kappa = \lambda \|B\|$.

Beispiel 5 (Der Dirac-Monopol³). Das Feld eines magnetischen Monopols und die entsprechende Lorentz-Gleichung sind bis auf Konstanten gegeben durch

$$B(x) = \frac{x}{\|x\|^3}, \quad \ddot{x}(s) = \frac{\lambda}{\|x(s)\|^3} (\dot{x}(s) \times x(s)).$$

³Dieses Lagrange-System wurde von Katharina Habermann, geb. Neitzke, in dem Artikel K. Neitzke, *Die Lorentz-Kraft auf pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Math. Nachr. **149** (1990), 183–214, diskutiert.

Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle &= \langle \dot{x}(s), \dot{x}(s) \rangle + \langle x(s), \ddot{x}(s) \rangle = 1 + 0 = 1 \\ \frac{d}{ds} \left[\|x(s)\|^2 - \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle^2 \right] &= 2 \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle - 2 \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle 1 = 0.\end{aligned}$$

Damit haben wir ein erstes Integral k der Bewegung gefunden,

$$\|x(s)\|^2 - \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle^2 =: k^2,$$

und wir berechnen die Krümmung

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \|\ddot{x}(s)\| = \frac{\lambda}{\|x(s)\|^3} \|\dot{x}(s) \times x(s)\| \\ &= \frac{\lambda}{\|x(s)\|^3} \sqrt{\|x(s)\|^2 - \langle \dot{x}(s), x(s) \rangle^2} = \frac{\lambda k}{\|x(s)\|^3}.\end{aligned}$$

Ist $k = 0$, so ist $x(s) = \vec{v}s + \vec{w}$ eine Gerade. Setzen wir dies erneut in die Lorentz-Gleichung ein, so folgt $\vec{v} \times \vec{w} = 0$. Damit sind die Vektoren \vec{v} und \vec{w} proportional und $x(s) = (s+a)\vec{v}$ wird eine durch $0 \in \mathbb{R}^3$ verlaufende Gerade.

Sei jetzt $k \neq 0$. Dann gilt

$$\langle x(s), \dot{x}(s) \rangle = s + a, \quad \|x(s)\|^2 = (s+a)^2 + k^2, \quad \kappa(s) = \frac{\lambda k}{(\sqrt{(s+a)^2 + k^2})^3},$$

und wir sehen, dass die Kurve $x(s)$ niemals auf den Nullpunkt von \mathbb{R}^3 trifft, also für alle Parameter s definiert ist. Der Haupt- und Binormalenvektor sind

$$\vec{h}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \ddot{x}(s) = \frac{1}{k} (\dot{x}(s) \times x(s)), \quad \vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{h}(s) = \frac{1}{k} (\langle \dot{x}(s), x(s) \rangle \dot{x}(s) - x(s)).$$

Wir differenzieren den Binormalenvektor,

$$-\tau \vec{h}(s) = \dot{\vec{b}}(s) = \frac{1}{k} \langle \dot{x}(s), x(s) \rangle \ddot{x}(s) = \frac{\kappa(s)}{k} \langle \dot{x}(s), x(s) \rangle \vec{h}(s)$$

und erhalten somit eine Formel für die Windung,

$$\tau(s) = -\frac{\kappa(s)}{k} \langle \dot{x}(s), x(s) \rangle = -\frac{\lambda(s+a)}{(\sqrt{(s+a)^2 + k^2})^3}.$$

Wir berechnen die Stammfunktionen der Krümmung und Windung,

$$\int \kappa(s) ds = \frac{\lambda(s+a)}{k \sqrt{(s+a)^2 + k^2}} =: f(s), \quad \int \tau(s) ds = \frac{\lambda}{\sqrt{(s+a)^2 + k^2}} =: g(s),$$

und bemerken, dass $\kappa(s)f(s) + \tau(s)g(s) \equiv 0$ gilt. Daraus folgt unter Verwendung der Frenet-Formeln unmittelbar, dass der Vektor

$$\vec{u} := \vec{h}(s) + f(s) \vec{t}(s) + g(s) \vec{b}(s)$$

konstant ist. Die Länge des Vektors beträgt

$$\|\vec{u}\|^2 = 1 + f^2(s) + g^2(s) = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2}.$$

Die Rechnung

$$\langle x(s), \vec{u} \rangle = f(s) \langle x(s), \dot{x}(s) \rangle - k g(s) = \frac{\lambda}{k} \sqrt{(s+a)^2 + k^2} = \frac{\lambda}{k} \|x(s)\|$$

zeigt, dass der Winkel φ zwischen dem Vektor \vec{u} und $x(s)$ konstant ist,

$$\cos(\varphi) = \frac{\lambda}{k\|u\|} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{k}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} = \frac{1}{\|u\|}.$$

Damit liegt die Kurve $x(s)$ auf einem Kegel. Letztlich betrachten wir noch den Winkel ψ zwischen dem Krümmungsvektor $\vec{h}(s)$ und dem Vektor \vec{u} . Offenbar gilt

$$|\cos(\psi)| = \frac{1}{\|\vec{u}\|} = \sin(\varphi)$$

und es folgt $\psi = \pi/2 \pm \varphi$. Damit ist der Krümmungsvektor der Kurve $x(s)$ orthogonal zum Kegel, d.h. $x(s)$ ist eine geodätische Linie des Kegels. Wir fassen zusammen: *Die Bewegungen eines Elektrons unter der Einwirkung des magnetischen Dirac-Monopols sind die geodätischen Linien von Kegeln mit der Spitze im Zentrum des Monopols.*

Aufgaben

1 (Kirchhoff-Formel). Sei $u(x, t)$ eine auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ definierte Funktion und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein kompaktes Gebiet mit glattem Rand. Man beweise für jeden Punkt $(x_0, t_0) \in \Omega \times \mathbb{R}$ die *Kirchhoff-Formel*:

$$4\pi u(x_0, t_0) = - \int_{\Omega} \frac{\square u(y, t_0 - r/c)}{r} dy + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(\alpha, t_0 - \frac{r}{c})}{r \partial \mathcal{N}} + \frac{\partial u(\alpha, t_0 - \frac{r}{c})}{cr \partial t} \frac{\partial r(\alpha, t_0)}{\partial \mathcal{N}} - u(\alpha, t_0 - \frac{r}{c}) \frac{\partial r^{-1}(\alpha, t_0)}{\partial \mathcal{N}} \right] d(\partial\Omega)(\alpha),$$

wobei $r := \|x_0 - y\|$ der Abstand zum räumlichen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$, \mathcal{N} der Normalenvektor an den Rand $\partial\Omega$ und $\square = \Delta_x - 1/c^2 \partial_{tt}$ der Wellenoperator sind. Indem man für Ω die dreidimensionale Kugel wähle, leite man hieraus die Formeln für das Cauchy-Problem der Wellengleichung her.

2. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Helmholtz lassen sich das elektrische und das magnetische Feld E und B sowie das Stromdichtefeld J als Summe eines divergenzfreien und eines rotationsfreien Vektorfeldes schreiben,

$$E = E_{\text{div}} + E_{\text{rot}}, \quad B = B_{\text{div}} + B_{\text{rot}} \quad \text{und} \quad J = J_{\text{div}} + J_{\text{rot}}.$$

a) Man beweise, dass sich die Maxwellschen Gleichungen nun wie folgt schreiben lassen:

$$\begin{aligned} \text{rot}(E_{\text{div}}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_{\text{div}}}{\partial t}, \quad \text{div}(B_{\text{rot}}) = 0 \\ \text{rot}(B_{\text{div}}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_{\text{div}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_{\text{div}}, \quad \text{div}(E_{\text{rot}}) = 4\pi \varrho. \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\operatorname{div}(J_{\text{rot}}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Hinweis: im Beweis von Satz 2 wurde gezeigt, dass unter den hier gemachten Voraussetzungen ein Vektorfeld, welches zugleich divergenz- und rotationsfrei ist, identisch verschwindet.

- b) Andererseits haben wir für das elektrische Feld E bereits die Zerlegung

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{grad}(-\phi).$$

Man beweise, dass dies genau die Helmholtz-Zerlegung von E ist, falls das magnetische Potential die *Coulomb-Eichung* genannte Bedingung erfüllt:

$$\operatorname{div}(A) = 0.$$

3. Man bestimme mit Hilfe der Sätze 1 und 2 das elektrische bzw. magnetische Feld in \mathbb{R}^3 , welches in den folgenden Situationen erzeugt wird:

- a) homogen geladene Kugel vom Radius R und der konstanten Ladungsdichte ϱ ;
- b) geladene Kugelschale vom Radius R und der konstanten Flächenladungsdichte σ ;
- c) ein mit der konstanten Stromdichte j durchflossener unendlich langer gerader Draht vom Radius R .

4 (unendlich lange schwingende Saite). Wir betrachten für die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u, \quad t \geq 0,$$

das durch zwei Funktionen $u_0(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u_1(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ bestimmte Cauchy-Problem

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x).$$

Teil 1. Allgemeine Gestalt der Lösung. Man beweise, dass zwei \mathcal{C}^2 -Funktionen f und g existieren, für die

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

gilt. Die Lösung ist die Überlagerung einer nach links und einer nach rechts laufenden Welle. Hinweis: man führe die neuen Koordinaten $x_{\pm} = x \pm ct$ ein und zeige, dass die Wellengleichung äquivalent ist zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_+ \partial x_-} = 0.$$

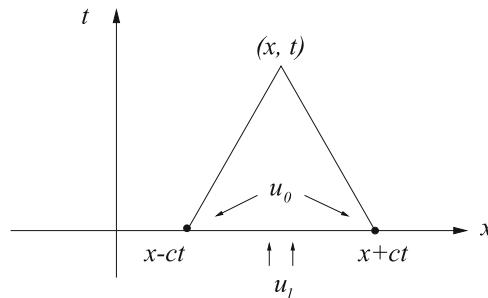
Teil 2. Lösung des Cauchy-Problems. Mit diesem Ansatz für die Lösung muss

$$u_0(x) = f(x) + g(x), \quad u_1(x) = c(f'(x) - g'(x))$$

gelten. Durch Integration der zweiten Gleichung über dem Intervall $[0, x]$ beweise man, dass die Gesamtlösung durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds$$

gegeben sein muss. Insbesondere folgt aus dem Lösungsweg die *Eindeutigkeit* der Lösung. Wie lässt sich das Ergebnis qualitativ mit Hilfe des Lichtkegels beschreiben?



5 (einseitig unendlich lange schwingende Saite). Eine in positiver x -Richtung unendlich lange schwingende Saite wird modelliert durch die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Neben den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x)$$

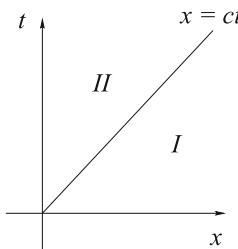
muss man auch noch eine Randbedingung stellen, die das Verhalten der „Wand“ bei $x = 0$ für alle Zeiten t beschreibt:

$$u(0, t) = \varphi(t).$$

Hierbei soll $u_0, \varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ und $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ sein. Man zeige (mit einem ähnlichen Ansatz wie in der vorangegangenen Aufgabe), dass die Lösung durch

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds & \text{für } (x, t) \in I \\ \frac{1}{2}[u_0(x + ct) - u_0(ct - x)] + \varphi(t - x/c) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{ct+x} u_1(s) ds & \text{für } (x, t) \in II \end{cases}$$

gegeben ist. Mit I und II sind dabei die Gebiete des Quadranten gemeint, die durch die Gleichung $x = ct$ getrennt werden. Was ist zum Verhalten des Lichtkegels insbesondere in II zu sagen? Weiterhin beschreibe man die Regularitäts-eigenschaften der Lösung auf der Geraden $x = ct$ und begründe sorgfältig, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen sie dort der Klasse \mathcal{C}^2 ist.



6 (beidseitig eingespannte schwingende Saite). Für die Wellengleichung auf beschränkten Gebieten hat sich ein auf Bernoulli zurückgehender Separationsansatz bewährt, der das Problem auf die Theorie der Fourier-Reihen reduziert. Gesucht ist eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung auf dem Intervall $[0, 1]$,

$$\partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Es sollen die Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

gelten. Die *Begründung* der Fourier-Methode und die damit einhergehenden zu fordernden Regularitätseigenschaften für u_0 und u_1 werden getrennt in der nächsten Aufgabe behandelt. Wir machen den Ansatz

$$u(x, t) = T(t)X(x).$$

- a) Man zeige, dass eine Konstante λ existiert, mit der

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2T} = \lambda$$

gilt;

- b) Man zeige: Die Fälle $\lambda = 0$ und $\lambda > 0$ führen notwendig auf die triviale Lösung $u = 0$; im Fall $\lambda < 0$ muss eine natürliche Zahl k existieren, mit der $\lambda = -k^2\pi^2$ gilt, und es ist

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \sin k\pi x (a_k \sin k\pi ct + b_k \cos k\pi ct).$$

Als Gesamtlösung erhält man also die Reihe

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi x (a_k \sin k\pi ct + b_k \cos k\pi ct).$$

- c) Man finde eine Integralformel für die Koeffizienten a_k, b_k in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen u_0 und u_1 . Lösung:

$$a_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^1 u_1(x) \sin k\pi x dx, \quad b_k = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin k\pi x dx.$$

7 (Gültigkeit der Fourier-Methode). Nach einem Satz von Dirichlet ist die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, die $f(0) = f(1) = 0$ erfüllt, gleichmäßig konvergent und konvergiert punktweise gegen f . Man beweise folgendes Lemma:

Ist $f \in \mathcal{C}^k([0, 1])$ und verschwinden $f^{(0)}, \dots, f^{(k-1)}$ in 0 und 1, dann existiert eine Konstante A derart, dass die Fourierreihenkoeffizienten von f die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|c_n| = \left| \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \right| \leq \frac{A}{n^k}.$$

Man formuliere notwendige Bedingungen an u_0 und u_1 , damit die in der vorangegangenen Aufgabe gefundene Lösung $u(x, t)$ zweimal partiell nach x und t differenzierbar ist und die Anfangsbedingungen erfüllt.

8 (inhomogene Wellengleichung).

Teil 1. Unter der *inhomogenen Wellengleichung* versteht man die Gleichung

$$(*) \quad \partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u + f(x, t)$$

mit einer vorgegebenen Funktion f . Wir betrachten diese Gleichung auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x)$$

sowie zunächst den trivialen Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Man zeige, dass der Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x)$$

die Randbedingungen erfüllt und beweise, dass die Funktionen $a_n(t)$ eindeutig bestimmt sind. Dazu beweise man, dass sie Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind und die Anfangswerte $a_n(0), a'_n(0)$ sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Hinweis: Die Fourier-Koeffizienten von u_0 , u_1 und f spielen hierbei eine grosse Rolle.

Teil 2. Gesucht ist nun die Lösung $u(x, t)$ der inhomogenen Wellengleichung $(*)$ bei beliebig vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(1, t) = \varphi_1(t).$$

Man zeige, dass die Lösung dieser Gleichung auf die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung mit trivialen Randbedingungen (und einer anderen Inhomogenität f !) zurückgeführt werden kann. Hinweis: Sei $\Phi(x, t)$ irgendeine Funktion zweier Variablen, die $\Phi(0, t) = \varphi_0(t)$ und $\Phi(1, t) = \varphi_1(t)$ erfüllt, z. B.

$$\Phi(x, t) = (1-x)\varphi_0(t) + x\varphi_1(t).$$

Betrachte nun die Funktion $v = u - \Phi$.

9 (das Beispiel von Hadamard). Ziel der Aufgabe ist es zu illustrieren, dass das Cauchy-Problem nicht für *jede* Differentialgleichung korrekt gestellt ist, d. h. die Lösung nicht notwendig „stetig“ von den Anfangswerten abhängt. Wir betrachten folgendes Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung: es ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

zu finden, die bei $t = 0$ den Bedingungen

$$u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = \frac{1}{n^k} \sin nx$$

genügt, wobei k und n positive ganze Zahlen sind. Ferner sei $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

- a) Man prüfe nach, dass dieses Problem die Lösung

$$u(t, x) = \frac{e^{nt} - e^{-nt}}{2 n^{k+1}} \sin nx$$

besitzt. Wie verhalten sich $|\partial_t u(0, x)|$ sowie $u(t, x)$ für beliebig kleine t , sofern n hinreichend groß ist?

- b) Wir nehmen nun an, dass wir die Lösung $\tilde{u}(t, x)$ unter den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x)$$

gefunden hätten. Welche ist dann die Lösung des Cauchy-Problems mit den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x) + \frac{1}{n^k} \sin nx ?$$

Man schließe hieraus, dass das Cauchy-Problem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung nicht korrekt gestellt ist.

Literaturverzeichnis

Lehrbücher zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten

- M. P. do Carmo, *Differential forms and applications*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- H. Flanders, *Differential forms. With applications to the physical sciences*, Academic Press, New York–London, 1963.
- O. Forster, *Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*, Aufbaukurs Mathematik, 5. Auflage, Vieweg+Teubner-Verlag, Wiesbaden, 2009.
- O. Kowalski, *Elemente der Analysis auf Mannigfaltigkeiten*, Teubner-Verl., Leipzig, 1981.
- K. Maurin, *Analysis II*, Reidel/PWN, Warschau, 1980.
- W. Rudin, *Analysis*, neu bearbeitete dt. Ausgabe, Oldenbourg-Verlag, München, 1998.
- M. Spivak, *Calculus on manifolds*, Addison-Wesley, New York, 1965.

Lehrbücher zur Flächentheorie und Differentialgeometrie

- W. Blaschke, H. Reichardt, *Einführung in die Differentialgeometrie*, Grundl. der math. Wiss., Bd. 58, Springer-Verlag Berlin, 1960.
- M. P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1992.
- M. P. do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg-Studium, Bd. 55, Vieweg-Verlag Braunschweig–Wiesbaden, 1994.
- C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann éd., Paris, 1969.
- A. Gray, *Differentialgeometrie: Klassische Theorie in moderner Darstellung (mit mathematica)*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg–Berlin, 1994.
- H. Reckziegel, M. Kriener, K. Pawel, *Elementare Differentialgeometrie mit Maple*, Vieweg-Verlag Braunschweig–Wiesbaden, 1998.
- K. Strubecker, *Differentialgeometrie I–III*, Sammlung Göschen, W. de Gruyter Verlag, Berlin, 1969.
- R. Sulanke, P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel*, VEB Dt. Verlag der Wiss., Berlin, 1972.

A. Svec, *Global differential geometry of surfaces*, VEB Dt. Verlag der Wiss., Berlin, 1981.

Lehrbücher zur Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren

J. F. Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin–Univ. of Chicago Press, 1969.

Th. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, GTM 98, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, *Lie groups*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory – a first course*, GTM 129, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

J. Hilgert, K.-H. Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg-Verlag Braunschweig–Wiesbaden, 1991.

K. H. Hofmann, *Einige Ideen Sophus Lies – Hundert Jahre danach. Ein Kolloquiumsvortrag*, Jahrb. Überbl. Math. 1991, 93–125.

Lehrbücher zur symplektischen Geometrie und Mechanik

R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Reading, Massachusetts: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1978.

V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, GTM 60, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

A. T. Fomenko, *Symplectic geometry*, Advanced Studies in Contemporary Mathematics 5, Gordon and Breach Publ., Amsterdam, 1995.

L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band I: Mechanik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1990.

J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *Einführung in die Mechanik und Symmetrie*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band I: Mechanik*, Verlag Harri Deutsch, Thun–Frankfurt a. M., Nachdruck der 6. Auflage von 1969, 1992.

W. Thirring, *Lehrbuch der mathematischen Physik, Band 1: Klassische dynamische Systeme*, Springer-Verlag, Wien, 1988.

Lehrbücher zur statistischen Mechanik und Thermodynamik

R. Becker, *Theorie der Wärme*, Heidelb. Taschenb. Bd. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band V: Statistische Physik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1979.

A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band V: Thermodynamik und Statistik*, Verlag Harri Deutsch–Thun, Frankfurt a. M., Nachdruck der 6. Auflage von 1965, 1992.

D. N. Zubarev, V. Morozov, G. Roepke, *Statistical mechanics of non equilibrium processes*, vol. 1 and 2, Akademie-Verlag 1996, Berlin, 1997.

Lehrbücher zur Elektrodynamik

L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II: Klassische Feldtheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1992.

A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band III: Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Thun–Frankfurt a. M., Nachdruck der 6. Auflage von 1969, 1992.

A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band VI: Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Verlag Harri Deutsch, Thun–Frankfurt a. M., Nachdruck der 6. Auflage von 1969, 1992.

W. Thirring, *Lehrbuch der mathematischen Physik, Band 2: Klassische Feldtheorie*, Springer-Verlag Wien–New York, 1978.

Symbolverzeichnis

\sqcup	4, 64	G_F	216	$O(t^2)$	202
$*$	6, 22	\mathfrak{g}	196	ω^k	1
$[,]$	85	$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$	196	$*\omega_{\mathcal{V}}^1$	22
$\{, \}$	220	$\mathrm{grad}(f)$	23, 56	ω_{ij}	132
\odot	13	$\mathrm{grad}(V)$	238	$\omega_{\mathcal{O}^*}$	217
∇	139	Γ_{ij}^k	174	Ω	132
∇/dt	177	$\vec{h}(s)$	123	R_g	196
∂	26, 50	$H_{DR}^k(U)$	18	$Rf(x, t)$	285
$\partial/\partial x^i$	11	\mathbb{H}^k	49	$\mathrm{rot}(\mathcal{V})$	24
$\Delta(f)$	23, 61, 94	\mathbb{H}	208	$\mathcal{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V})\mathcal{W}$	141
$\square(f)$	283	\mathcal{H}^2	138	$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$	99, 198, 207
$\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$	196	I^k	26	$\mathrm{SO}(n, \mathbb{K})$	99, 208
Ad	209	$I(A)$	256	$\mathrm{SU}(1, 1)$	214
Ad^*	216	$I\varphi$	282	$\mathrm{SU}(n)$	208
$\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}_*$	210	I	138	s-grad(H)	219
b_{ij}	141	II	139	supp(φ)	71
$\vec{b}(s)$	123	$j(\mu)$	254	$S(\Omega, \mu), S(\mu)$	256
$B^k(U)$	18	$K^*(x)$	185	σ_i	132
c^k	25	$K(z, M)$	35	$\vec{t}(s)$	122
d	15, 64	$\kappa(s)$	122	$T_p \mathbb{R}^n$	11
δ	94	L_g	196	$T_x M^k$	51
dA, dQ	263	$\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$	84	TM^k	52
$\mathrm{div}(\mathcal{V})$	23, 58	$\mathcal{L}(v)$	242	T^*M^k	215
$D^n(R)$	36	$L^*(\omega^k)$	3	$\tau(s)$	123
dM^k	66	M^k	45	$\mathrm{U}(n)$	208
dM^{2m}	215	(M^{2m}, ω)	215	$\mathcal{V}(p)$	11, 53
dV	6	(M^{2m}, ω, H)	221	$\mathrm{vol}(M^m)$	73
\mathcal{E}^k	103	$m_i(f)$, $i = 1, 2, 3$	153	$\chi(M^2)$	154
Exp_x	181	μ_t	252	$Z^k(U)$	18
$f_{*,p}$	11, 53	$\mathcal{N}(x)$	69	$Z(B)$	258
$f^*(\omega^k)$	14, 63	$\mathcal{O}, \mathcal{O}_x$	64	\mathcal{Z}_G	210
Φ_t	82	$\mathcal{O}^*(F)$	216		
g_{ij}, g^{ij}	55	$\mathrm{O}(n, \mathbb{K})$	99, 208		

Namens- und Sachverzeichnis

- Adiabate, 269
adjungierte(r)
 Darstellung, 209, 211, 216
 Operator, 94
äußere(s)
 Algebra, 3
 Differential, 15, 64
 Form, 1
 Produkt, 2, 63, 198
 $\text{Aff}(\mathbb{K}^n)$, 196
affine Gruppe, 218, 247
Aharonov-Bohm-Effekt, 275
Arbeitsform, 263
Arnold-Liouville, Satz von, 226
Atlas, 46
Böschungslinie, 125
barometrische Höhenformel, 261
Betragssfläche, 136, 148, 189
Bewegung, 237
Bianchi-Identität
 erste, 175
 zweite, 180
Binormalenvektor, 123
Biot-Savart-Gesetz, 281
Birkhoff, Ergodizitätssatz von, 220
Bohr-Sommerfeld-Bedingung, 232
Boltzmann-Verteilung, 260
Boltzmannkonstante, 264
Boursche Fläche, 189
Brouwer, Satz von, 38
Caratheodory-Konstruktion, 74
Carnotscher Kreisprozess, 268
Cauchy-Integralformel, 36
Cauchy-Integralsatz, 35
Cauchy-Riemann-Gleichungen, 35
Cayley-Transformation, 213
Christoffel-Symbole zweiter Art, 164, 174
Clairaut, Satz von, 166, 244
Codazzi-Mainardi-Gleichung, 142
Coulomb-Eichung, 297
Coulomb-Potential, 279
D'Alembert-Lagrange, Satz von, 240
Daniell-Stone-Funktional, 74
Darboux, Satz von, 222
Darboux-Reper, 161
Darboux-Vektor, 187
Darstellung
 adjungierte, 216
 definierende, 209
 einer Lie-Algebra, 208
 einer Lie-Gruppe, 208
 irreduzible, 213
 koadjungierte, 216, 247
 triviale, 209
de-Rham-Kohomologie, 18
Dichtefunktion, 252
 einer elektrischen Ladung, 273
Diffeomorphismengruppe, einparametrig, 82
Differentialform, 12, 62
 exakt, 18
 geschlossen, 18
 kogeschlossen, 95
 linksinvariant, 197
Dimension, 46, 120
Dirac-Monopol, 294
Dirichlet-Problem, 88
Distribution, 103
 integrierbare, 104
 involutive, 105
Divergenz, 23, 58
 geometrische Interpretation, 85
Drehfläche, 134, 138, 147, 166, 174, 188
Drehimpuls, 249, 250
Druck, 265
duale 1-Form (eines Vektorfeldes), 22, 68

- Dulong-Petitsche Regel, 267
- effektives Potential, 249
- Eikonal-Gleichung, 287
- einfach zusammenhängend, 75
- Einheitswürfel, 25
- einparametrische Diffeomorphismengruppe, 82
- Einstein-Gleichung, 192
- Einstein-Raum, 183
- Energie, 249
- eines statistischen Zustandes, 253
 - eines thermodynamischen Systems, 263
 - für Lagrange-Systeme, 243
 - für Newton-Systeme, 238
 - freie, 258, 262
 - innere, 258, 262
 - kinetische, 237
- Energieerhaltungssatz
- der statistischen Mechanik, 253
 - für Lagrange-Systeme, 243
 - für Newton-Systeme, 238
- Ennepersche Fläche, 189
- Entropie (innere), 262, 263
- Entropie, innere, 258
- Erhaltungssatz der Informationsentropie, 257
- erstes Integral, 166, 221, 247
- Euler-Charakteristik, 154
- Euler-Gleichungen, 249
- Exponentialabbildung, 181, 199
- Feld
- elektrisches, 273
 - magnetisches, 273
- Fenchel-Ungleichung, 128, 131
- Festkörper, 267
- Fixpunkt, 36
- Fixpunkteigenschaft, 36
- flächentreue Abbildung, 171
- Fluss eines Vektorfeldes, 82
- Frenet-Formeln, 123
- Frenet-Reper, 123
- Frobenius, Satz von, 105
- Fundamentalsatz
- der Flächentheorie, 133, 143
 - der Kurventheorie, 123
- Galerkin-Verfahren, 39
- Gas
- ideales, 266
 - reales, 271
- Gauß, Satz von, 78
- Gauß-Bonnet-Formel, 153, 168
- Gauß-Gleichung, 142
- Gaußsche(r)
- Krümmung, 145
 - Mittelwertsatz, 92
- geodätische(r)
- Krümmungsvektor, 162
 - Linie, 163, 181
 - Spray, 237
- Gesamtkrümmung, 169
- Gibbssche Fundamentalgleichung, 263
- Gibbsscher Zustand, 259
- Gleichgewichtszustand, 252
- $GL(n, \mathbb{K})$, 196
- Gradient, 23, 56
- symplektischer, 219
- Graph, 47, 135, 138, 148
- Greensche Formel
- erste, 33, 78
 - zweite, 34, 79
- Grundform
- erste, 138
 - zweite, 139
- Hadamard, J., 301
- Halbraum, 49
- Hamilton, Satz von, 246
- Hamilton-Funktion, 245
- Hamilton-Gleichungen, 219
- Hamilton-System, 221
- Hamiltonsche Quaternionen, 208, 212
- harmonische Differentialform, 95
- harmonische Funktion, 88
- Gaußscher Mittelwertsatz, 92
 - Liouville-Theorem, 93
 - Maximum-Prinzip, 92
 - Poisson-Formel, 92
- Harriot, Satz von, 169
- Hauptkrümmung, 157
- Hauptnormalenvektor, 123
- Hauptsätze der Thermodynamik, 263
- Helikoid, 161, 189
- Helmholtz, Satz von, 97, 282
- Hessesche Form, 152, 184
- Hilbert, David, 147
- Hodge, Satz von, 97, 282
- Hodge-Laplace-Operator, 94
- Hodge-Operator, 6, 22
- Hodge-Zerlegung, 97, 281
- homogener Raum, 207
- Homotopie, 31, 76
- Hopf, Satz von, 79
- Hopf-Poincaré, Satz von, 156
- Huygensches Prinzip, 283

-
- hyperbolische Ebene, 138, 147, 167, 179,
 190, 213
 ideales Gas, 266
 Igel, Satz vom, 77
 Impuls, 249
 Impulsabbildung, 224, 250
 Index
 eines Skalarprodukts, 4
 eines Vektorfeldes, 155
 induzierte
 Differentialform, 14, 63
 Multilinearform, 3
 Information, 255, 256
 Informationsentropie
 eines statistischen Zustands, 257
 eines Wahrscheinlichkeitsraums, 256
 inneres Produkt, 4, 64
 Integritätsbedingung, 105
 Integralkurve, 82
 Integralmannigfaltigkeit, 104
 integrierender Faktor, 112
 Isometrie, 169
 Isotherme, 269
 isotherme Koordinaten, 159
 Isotropiegruppe, 216

 Jacobi, 188
 Jacobi-Identität, 87, 220

 kanonische
 Koordinaten, 222
 symplektische Struktur, 215
 Verteilung, 259
 Karte, 46
 Kartenübergang, 46
 Katenoid, 98, 161, 189
 Kerr-Metrik, 185
 Kettenlinie, 161
 Kirchhoff-Formel, 296
 Kirillov-Form, 217
 koadjungierte Darstellung, 216
 Kommutator, 85
 Konfigurationsraum, 236
 konforme Abbildung, 100, 170
 Konjugationswirkung, 209
 Kontinuitätsgleichung, 273
 kovariante Ableitung
 auf Flächen, 139, 142
 auf Mannigfaltigkeiten, 173, 177, 179
 Krümmung, 186
 einer Kurve, 122
 Gaußsche, 145
 geodätische, 162
 mittlere, 146
 normale, 162
 Krümmungsform, 192
 Krümmungslinien, 189
 Krümmungstensor, 141, 175
 Riemannscher, 175
 Kreisprozess, 268
 kritischer Punkt, 152
 kubische Homologiegruppe, 28
 Kurvenintegral, 29
 Kurvenlänge, 121

 Länge (einer Kurve), 121
 Lagrange, Satz von, 4
 Lagrange-Funktion, 240
 Lagrange-Gleichung, 241
 Lagrange-System, 241
 hyperregulär, 245
 Lambert-Projektion, 172
 Lancret, Satz von, 125
 Laplace-Beltrami-Operator, 61
 Laplace-Operator, 23, 61
 Lebesgue-Maß, 74
 Legendre-Transformation, 242
 Levi-Civita-Zusammenhang, 173
 Lichtgeschwindigkeit, 273
 Lie-Ableitung, 84
 Lie-Algebra, 196
 Lie-Gruppe, 195
 Liouville, Satz von
 für harmonische Funktionen, 93
 für symplektische Mannigfaltigkeiten,
 219
 Liouville-Form, 215, 247
 Liouville-Gleichung, 252
 Lorentz-Gleichung, 248, 292
 Lorentz-Gruppe, 290
 Lorentz-Kraft, 292
 Loxodrome, 171

 magnetischer Monopol, 294
 Mannigfaltigkeit
 einfach zusammenhängende, 75
 flache, 177
 mit Rand, 49
 ohne Rand, 45
 orientierbare, 64
 symplektische, 215
 Maupertuis-Jacobi-Prinzip, 239
 Maurer-Cartan-Form, 198
 Maurer-Cartansche Strukturgleichung, 197
 Maximum-Prinzip, 92
 Maxwell-Verteilung, 260, 270
 Maxwellsche Gleichungen

- in klassischer Formulierung, 273
- in relativistischer Formulierung, 288
- Maxwellsche Relationen, 268
- Maxwellscher Spannungstensor, 291
- Mercator-Projektion, 171
- mikrokanonische Verteilung, 261
- Minimalfläche, 158
- Minkowski-Raum, 95, 288
- Minkowski-Steiner, Satz von, 156
- mittlere Krümmung, 146
- Modul, 208
- Momentenabbildung, 224, 250
- Monopol, 294
- Morse, Marston, 152
- Morse-Funktion, 152
- Möbiusband, 48
- natürliche Parametrisierung, 122
- Neumann-Problem, 88
- Newton-System, 237
- Newton'sches System
 - mit Potentialenergie, 238
- Noether, Satz von, 166, 223, 244
- Normalenvektorfeld, 69
- normaler Krümmungsvektor, 162
- $O(n, \mathbb{R})$, 99, 208
- Orientierung, 5, 64
 - induzierte, 70
- Ostrogradski-Formel, 78
- paralleles Vektorfeld, 177
- Parallelverschiebung, 178
- parametrisierte Kurve, 120
- Peano-Kurve, 119
- Periheldrehung, 235
- Pfaffsches System, 103
- Phasenraum, 236
- Plancksches Strahlungsgesetz, 271
- Poincaré, Rückkehrssatz von, 219
- Poincaré-Lemma, 19, 76
- Poisson-Formel, 92
- Poisson-Klammer, 220
- Polarkoordinaten, 54
- Potential
 - chemisches, 265
 - elektrisches, 274
 - magnetisches, 274
 - retardiertes, 285
 - thermodynamisches, 268
- Potentialenergie, 238
- Poynting-Vektor, 291
- Prinzip der kleinsten Wirkung, 242
- pseudo-Riemannsche Metrik, 93
- Pseudosphäre, 148
- Punkt
 - elliptischer, 157
 - flacher, 157
 - hyperbolischer, 157
 - parabolischer, 157
 - umbilischer, 157
- Quaternonen, 208, 212
- Rand
 - einer Kette, 26
 - einer Mannigfaltigkeit, 50
- Raum konstanter Schnittkrümmung, 185
- Raumform, 185
- Rayleigh-Jeans-Gesetz, 272
- Real- und Imaginärteilfläche, 137, 150
- reales Gas, 271
- Ricci-Tensor, 182
- Riemann, Bernhard, 186
- Riemannsche
 - Fläche, 98
 - Metrik, 55
- Rotation, 24
- Rotationstorus, 47
- Schleppkurve, 148
- Schmiegebene, 124
- Schnittkrümmung, 182
- Schrödingergleichung, 275
- Schraubenlinie, 122, 165, 248
- Schraubfläche, 161
- Schwarzschild-Eddington-Metrik, 185, 192
- Seekarte, 171
- Signatur (eines Skalarprodukts), 4
- singuläre(r)
 - Kette, 25
 - Würfel, 25
- Skalarkrümmung, 182
- Skalarprodukt, nichtausgeartetes, 4
- $SL(2, \mathbb{R})$, 99, 198
- $SL(n, \mathbb{K})$, 207
- $SO(n, \mathbb{R})$, 99, 208
- sphärischer Mittelwert, 282
- sphärisches Pendel, 232
- sphärische Koordinaten, 56
- Standardwürfel, 26
- stationäre Endverteilung, 252
- statistischer Zustand, 251
- stereographische Projektion, 100, 170
- sternförmige Menge, 19
- Stokes
 - klassischer Satz von, 34, 80
 - Satz von, 30, 74

-
- Stromdichtevektor, 273
 Strukturgleichungen
 einer Fläche, 132
 einer Kurve, 123
 einer Lie-Gruppe, 197
 einer Mannigfaltigkeit, 175
 $SU(1, 1)$, 213
 $SU(n)$, 208
 Sylvester, Satz von, 4
 symmetrisches Produkt, 138
 symplektische(r)
 Diffeomorphismus, 223
 Form, 215
 Gradient, 219
 Koordinaten, 222
 Mannigfaltigkeit, 215
 Struktur, 215
 Volumenform, 215
 System, vollständig integrierbares, 228

 Tangentialbündel, 52
 Tangentialraum
 des \mathbb{R}^n , 11
 einer Mannigfaltigkeit, 51
 Temperatur, 263, 264
 Tensorprodukt (von Darstellungen), 213
 Theorema Egregium, 132, 152
 Theorema Elegantissimum, 169
 Thermodynamik, Hauptsätze der, 263
 thermodynamische Relationen, 268
 Toda-Gitter, 248
 Torsion, 123, 186
 Traktrix, 148
 transitive Wirkung, 207
 Träger, 71

 Überströmungsversuch, 270
 Umlaufindex, 188
 Umlaufzahl, 127
 $U(n)$, 208

 van der Waals-Gleichung, 271
 Vektorfeld, 11, 53
 der äußeren Normalen, 69
 Fluss eines, 82
 fundamentales, 217
 Komponenten, 54
 linksinvariant, 196
 parallel, 177
 verbunden, 87
 vollständig, 82
 vollständige Differentialgleichung, 112
 Volumen, 73
 Volumenform, 6, 66, 215

 Wärmeform, 263
 Wahrscheinlichkeitsstrom, 255
 Weierstraß-Darstellung, 160
 Weingarten-Abbildung, 146
 Welle (elektromagnetische), 282
 Wellenfunktion, 275
 Wellengleichung, 282
 Cauchy-Problem für die, 282
 Poisson-Formel für die, 282
 Wellenoperator, 95
 Wiensches Gesetz, 272
 Windung, 123, 186
 Windungsform, 18, 153
 Winkelkoordinaten, 231
 Winkelsumme, 169
 winkeltreue Abbildung, 100
 Wirkungsgrad, 270
 Wirkungsintegral, 242
 Wirkungskoordinaten, 231

 Yang-Mills-Gleichung, 291

 zentrales Kraftfeld, 249
 Zentrum, 210
 Zerlegung der Eins, 71
 zurückgezogene
 Differentialform, 14, 63
 Multilinearform, 3
 Zusammenhangsform, 132, 175
 Zustand, statistischer, 251
 Zustandsgleichung
 allgemeine, 262
 einfache, 259
 Zustandssumme, 258, 262
 Zylinder, 148, 157, 165, 172