

Todo list

genauer 4

Inhaltsverzeichnis

1 Anwendung: Oberflächenkrümmung	3
1.1 Weingartenabbildung	3
1.1.1 Implementierung	5
1.2 Krümmungsvektor	9
1.3 Gauß-Bonnet-Operator	9
1.3.1 Implementierung	10
1.4 Numerisches Experiment	11
2 Appendix	24
2.1 Algorithmen	24
2.1.1 Element-Knotenkräfte	24
2.1.2 Laplace-Beltrami-Operator	24
2.1.3 Gradient	24
2.1.4 Gauss-Bonnet-Operator	25
2.2 Krümmungen für impliziten Oberflächen	25
2.3 Ausgewählte Oberflächen	26
2.3.1 Einheitssphäre	26
2.3.2 Torus	26
2.3.3 Quartische Oberfläche	28
2.3.4 Ellipsoid	28

1 Anwendung: Oberflächenkrümmung

Zielsetzung. In vielen wissenschaftlichen Problemen kann die Krümmung einer Oberfläche eine entscheidende Rolle spielen. Sie kann zum Beispiel ein wichtiger Bestandteil von Differentialgleichungen sein. So kommt die mittlere Krümmung H bei fluidmechanischen Formulierungen auf bewegliche Membranen M_t in der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \rho \text{Div} \vec{v} - \rho v_{\vec{v}} H = 0 \quad (1.1)$$

vor (siehe [AD09]). Ein weiteres einfaches Beispiel ist die Evolution von Oberflächen M_t über den mittleren Krümmungsfluss

$$\dot{\vec{x}} = 2H\vec{\nu} \quad (1.2)$$

oder die Bestimmung des topologisch invarianten Geschlechts

$$\mathfrak{g} = 1 - \frac{1}{4\pi} \int_M K d\mu \quad (1.3)$$

einer orientierten Mannigfaltigkeit M ohne Rand mit Gaußscher Krümmung K , was direkt aus dem Satz von Gauß-Bonnet und den Zusammenhang für die Euler-Charakteristik $\chi = 2 - 2\mathfrak{g}$ folgt. Unter den gewählten Voraussetzungen gibt \mathfrak{g} die Anzahl der „Löcher“/„Poren“/„Henkel“ an.

Es ließen sich noch weitere Beispiele finden in dem diverse Krümmungsgrößen für die Behandlung von Nöten wären. Oftmals liegt die Oberfläche allerdings nur als diskrete Eingangsgröße vor. Somit sind viele geometrische Werte nicht bekannt und müssen Approximiert werden. Wir werden uns in diesem Kapitel speziell die Gaußsche und die mittlere Krümmung betrachten. Diese werden wir mit Hilfe des DECs approximieren und zum einen mit den Ergebnissen von C.-J. Heine [Hei04] vergleichen und zum anderen, im Falle der Gauß-Krümmung, mit einer naiven Gauß-Bonnet-Diskretisierung.

1.1 Weingartenabbildung

Die Weingartenabbildung S , auch Formoperator (Shapeoperator), ist im Prinzip die 2. Fundamentalform \mathcal{II} unter Beachtung der Metrik g (1. Fundamentalform). S gibt uns Informationen über die Gestalt von M . Sie misst in einer gewissen Weise wie sehr sich die Oberfläche von einer Ebene unterscheidet, speziell ist M eine flache Ebene genau dann wenn die Weingartenabbildung identisch Null ist. Des Weiteren lassen sich aus der Weingartenabbildung die Hauptkrümmungen k_1 und k_2 herleiten und damit auch die Gaußkrümmung $K = k_1 * k_2$ und die mittlere Krümmung $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Die 1. Fundamentalform ist eine Größe der inneren Geometry und kann somit alleine auf der Oberfläche selbst bestimmt werden invariant gegenüber jeglicher Einbettungen/Parametrisierungen. Das ist bei der Weingartenabbildung anders, sie hängt von der äußeren Geometrie ab, d.h. die der Einbettung in einem Ambienteraum. In unserem Fall ist das der \mathbb{R}^3 und die Weingartenabbildung lässt sich über das Normalenvektorfeld (Gaussabbildung)

$$\vec{\nu} = [\nu^1, \nu^2, \nu^3]^T : M \rightarrow TN \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{\nu}_{\vec{x}} \in T_{\vec{x}}N \perp T_{\vec{x}}M \quad (1.5)$$

berechnen. Hierbei ist $\vec{\nu}_{\vec{x}}$ der Normalenvektor im Punkt \vec{x} und $T_{\vec{x}}N$ der eindimensionale Normalenraum der orthogonal zum Tangentialraum ist. Da meistens klar ist, dass wir Punktweise arbeiten, kann auch hier die Indizierung weggelassen werden und wir schreiben nur $\vec{\nu}$ statt $\vec{\nu}_{\vec{x}}$.

Definition 1.1.1. Die Weingartenabbildung ist in jedem Punkt der Oberfläche eine lineare Abbildung und definiert sich dort durch

$$S : T_{\vec{x}}M \rightarrow T_{\vec{x}}M \quad (1.6)$$

$$\vec{v} \mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{v}) , \quad (1.7)$$

wobei $\mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{v})$ der \mathbb{R}^3 -Vektor der Richtungsableitungen in Richtung \vec{v} ist, wie sich einfach nachrechnen ließe ($\vec{\nu}$ ist eine \mathbb{R}^3 -vektorisierter 0-Form).

Bei der Definition von S ist etwas Obacht geboten, weil sie oft auch mit negativen Vorzeichen definiert wird. Da wir uns aber vordergründig für dessen Eigenwerte interessieren spielt das Vorzeichen aber keine Rolle für uns. Anders als in [Hei04] angegeben ist die Weingartenabbildung ((1, 1)-Tensor) nicht die 2. Fundamentalform ((0, 2)-Tensor). In der Matrixdarstellung unterscheiden sich beide in der Höhe der Indizes, das heißt $S = (h^i_j)$ und $II = (h_{ij})$ oder anders geschrieben $S = (g)^{-1}II$ (vgl. [Shi14]). Somit sind auch die Eigenwerte beider Matrizen im Allgemeinen nicht gleich. Die Komponenten der Weingartenabbildung lassen sich für eine lokales orthogonales Koordinatensystem (x^1, x^2) mit Riemannmetrik $g = \text{diag}(g_1, g_2)$ berechnen durch

$$h^i_j = g^i h_{ij} = g^i \mathbf{d}\vec{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1.8)$$

$$= \nabla_i \vec{\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1.9)$$

für $i, j \in \{1, 2\}$ und $\nabla_i \vec{\nu}$, die i -ten Komponente (Zeile) des Gradienten des Normalenvektors, das heißt

$$\nabla \vec{\nu} = (\mathbf{d}\vec{\nu})^\sharp = \left(\sum_{k=1,2} \frac{\partial}{\partial x^k} \vec{\nu} dx^k \right)^\sharp \quad (1.10)$$

$$= \sum_{k=1,2} g^k \frac{\partial}{\partial x^k} \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1.11)$$

$$=: \sum_{k=1,2} \nabla_k \vec{\nu} \frac{\partial}{\partial x^k} , \quad (1.12)$$

Zu beachten ist dabei, dass ∇_i sich von der Richtungsableitung in der i -ten Basisrichtung um einen metrischen Faktor unterscheidet.

Nun wollen wir aber nicht in lokalen sondern in globalen \mathbb{R}^3 -Koordinaten rechnen in denen auch das Bild des Normalenvektorfeldes definiert ist. Dazu definieren wir die erweiterte Weingartenabbildung in diesen Koordinaten.

Definition 1.1.2. Die erweiterte Weingartenabbildung \bar{S} sei an jedem Punkt der Oberfläche gegeben durch

$$\bar{S} := \nabla \vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} . \quad (1.13)$$

Dabei sei das Ableiten in Normalenrichtung zulässig ergibt jedoch den Wert Null (konstante Erweiterung in Normalenrichtung).

Die erweiterte Weingartenabbildung eingeschränkt auf $T_{\vec{x}}M$ in lokalen Koordinaten ist dann gerade S , wobei die Eigenwerten von \bar{S} gleich $\{k_1, k_2, 0\}$ sind. Einen Beweis dazu findet sich in [KLY⁺08] (Part 2, Kap. 2).

genauer

1.1.1 Implementierung

Die Komponenten der erweiterte Weingartenabbildung können wir nun mit Hilfe des diskreten Primär-Dual-Gradienten im Mittel approximieren, das heißt

$$\bar{h}^i_j = [\nabla \vec{\nu}]_{ij} = \nabla_j \nu^i \approx \left[\nabla^{\overline{pd}} \nu^i \right]_j =: \left[S^{\overline{pd}} \right]_{ij} \quad (1.14)$$

mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Für die Berechnung der Eigenwerte $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ an jedem Gitterpunkt nutzen wir den von der MTL4 (Matrix Template Library 4) bereitgestellten QR-Algorithmus. Der betragsmäßig kleinste Eigenwert, der annährend null ist, ist o.E.d.A. λ_0 . Somit können die Gaußsche Krümmung und die mittlere Krümmung durch

$$K \approx \lambda_1 * \lambda_2 \quad \text{bzw.} \quad (1.15)$$

$$H \approx \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \quad (1.16)$$

approximiert werden. Die Weingartenabbildung S ist symmetrisch, das können wir von der numerisch ermittelten nicht exakt erwarten. Deshalb berechnen wir auch alle Einträge von $S^{\overline{pd}}$ und nicht nur die obere oder untere Dreicksmatrix. Die Eigenwerte können dann über die symmetrisch gemittelten Matrix erhalten werden, also von der Matrix

$$\frac{1}{2} \left(S^{\overline{pd}} + (S^{\overline{pd}})^T \right). \quad (1.17)$$

Mit dem Normalenraum auf den Gitterpunkten haben wir das gleiche Problem, wie schon mit dem Tangentialraum. Es ist nicht klar wo der Normalenraum auf den Ecken des Polyeders $|K|$ liegen soll, denn eindeutig ist er nur auf den Inneren der Dreiecke bzw. auf den Voronoiecken. Deshalb mitteln wir wieder über einen 1-Ring des Primärgitterpunktes v zu

$$\begin{aligned} \vec{\nu}^{\text{Av}}(v) &= \langle \vec{\nu}^{\text{Av}}, v \rangle := \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \langle \vec{\nu}, \star \sigma^2 \rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Die Elementnormalen $\vec{\nu}^{\sigma^2}$ werden von AMDiS bereit gestellt. Wenn wir $\vec{\nu}_i$ wieder im „Dualem“ lösen wollen, das heißt anwenden des Hodge-Operators auf die Gleichung (1.18) und damit durchmultiplizieren der Gleichung mit $|\star v_i|$, dann können auch hier die Eckennormalen elementweise bestimmt werden. Dadurch ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\langle * \vec{\nu}^i, \star v \rangle = \langle * [\vec{\nu}^{\text{Av}}]_i, \star v \rangle \quad (1.19)$$

$$\left\langle * \left[\nabla^{\overline{pd}} \vec{\nu}^i \right]_j, \star v \right\rangle - \left\langle * \left[S^{\overline{pd}} \right]_{ij}, \star v \right\rangle = 0 \quad (1.20)$$

für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $v \in K^{(0)}$ in dem alle Operatoren elementweise bestimmt werden können. Zusammen ergibt das 12 DOFs pro Knoten v . Gleichung (1.19) (3 Dofs pro Knoten) und (1.20) (9 Dofs pro Knoten) könnten zwar auch separat gelöst werden wodurch wir Speichervorteile hätten, aber das Lösen der beiden kleineren Gleichungssystem wäre nicht schneller, da der Lösungsaufwand für die resultierenden dünnbesetzten Systeme mit angepassten Lösern etwa linear ist. Hinzu würden außerdem noch Initialisierungskosten kommen.

Eine alternative Möglichkeit an die Normalen an einer Ecke v zu mitteln ist eine Mittelung über die Elementnormalen ohne Wichtung, das heißt

$$\begin{aligned}\vec{\nu}^{\text{Conn}}(v) &= \langle \vec{\nu}^{\text{Conn}}, v \rangle := \frac{1}{m_v} \sum_{\sigma^2 \succ v} \langle \vec{\nu}, \star \sigma^2 \rangle \\ &= \frac{1}{m_v} \sum_{\sigma^2 \succ v} \vec{\nu}^{\sigma^2},\end{aligned}\tag{1.21}$$

wobei $m_v = \sum_{\sigma^2 \succ v} 1 \in \mathbb{N}_+$ die Anzahl der 2-Simplizes im 1-Ring um v ist. Das Problem hierbei ist, dass m_v a priori auf einem einzelnen Dreieckselement nicht bekannt ist und damit vor dem Assemblieren der Systemmatrix zusätzliche globale Arbeit in die Bestimmung aller m_v gesteckt werden muss.

Beispiel 1.1.3 (Torus). Auf dem Torus sind die Gaußkrümmung K , die mittlere Krümmung H und die Normalen $\vec{\nu}$ bekannt (siehe Appendix 2.3.2) und stehen uns zum vergleichen bzw. als Eingangsgröße zur Verfügung. Die Weingartenabbildung wurde als Gradient der exakten Normalen $\vec{\nu}$ (Tab. 1.1) und der beiden hier vorgestellten gemittelten Normalen $\vec{\nu}^{\text{Av}}$ (Tab. 1.2) und $\vec{\nu}^{\text{Conn}}$ (Tab. 1.3) berechnet. Es werden wieder die relativen Fehler für die Auswertung benutzt. Für die Approximation der Krümmungsgrößen mit den exakten Normalen bekommen wir etwa eine experimentelle Konvergenzordnung von 2. Gerade in der Maximumsnorm überrascht das ein wenig, da in Beispiel ?? der diskrete Gradient auf feineren Gitter eine schlechteres Konvergenzverhalten aufwies. Bei den beiden Berechnungen mit den gemittelten Normalen bricht die Konvergenzrate bei feineren Gittern ein. Wobei die Approximation der Weingartenabbildung mit $\vec{\nu}^{\text{Conn}}$ noch etwas besser ausfällt als mit $\vec{\nu}^{\text{Av}}$. In Abbildung 1.1 ist zudem noch der Fehler von $\vec{\nu}^{\text{Av}}$ aufgetragen (der von $\vec{\nu}^{\text{Conn}}$ ist ähnlich). Wie wir sehen liegt das schlechte Konvergenzverhalten nicht primär an die Mittelung der Normalen an sich. Vermutlich kommt es bei kleiner werdenden h zur starken Rundungsfehlern bei der Differenz in der Gradientenbildung, denn hier werden zwei Werte von einander abgezogen, die auf überlappenden Bereichen gemittelt werden. In Abbildung 1.3 ist die mittlere Krümmung und die lokalen absoluten Fehler für die Berechnung mit $\vec{\nu}^{\text{Av}}$ abgebildet. Auch hier können wieder gewisse Strukturen im Fehlerbild erkannt werden, was darauf schließen lässt, dass der Fehler von der Gestalt der Dreieckselemente und seinen Nachbarn abhängt, denn auf den Niveaulinien des Fehlers sind die Gitter nahezu gleich. Hierbei konnte eine Verbindung zu diversen Gitterqualitätsmaßen¹ nicht hergestellt werden.

Fazit. Wenn die Normalvektoren an jedem Kote der Oberflächentriangulierung bekannt sind, zum Beispiel aus einer Parametrisierung $\vec{x} : (u, v) \mapsto (x, y, z)$ durch

$$\vec{\nu} = \frac{\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\|}\tag{1.22}$$

oder einer signierten Distanzfunktion φ durch

$$\vec{\nu} = \frac{\nabla_{\mathbb{R}^3} \varphi}{\|\nabla_{\mathbb{R}^3} \varphi\|},\tag{1.23}$$

dann können mit der diskreten Weingartenabbildung gute Ergebnisse erzielt werden. Sind dagegen die Normalen nicht bekannt, so muss in zukünftigen Arbeiten entweder

¹die von ParaView zur Verfügung stehen, z.B. **Radius Ratio**, **Aspect Frobenius**, **Maximum Angle**, usw.

DOFs	h	Err_2^K	EOC	Err_{\max}^K	EOC	Err_2^H	EOC	Err_{\max}^H	EOC
1360	0.263	4.21E-02		1.18E-01		1.59E-02		1.84E-02	
2016	0.215	2.77E-02	2.06	7.85E-02	2.02	1.11E-02	1.76	1.28E-02	1.79
4752	0.138	1.16E-02	1.98	3.64E-02	1.75	4.97E-03	1.83	5.64E-03	1.86
10192	0.094	5.42E-03	1.97	1.72E-02	1.93	2.38E-03	1.90	2.71E-03	1.89
24640	0.060	2.26E-03	1.97	7.44E-03	1.89	1.01E-03	1.94	1.15E-03	1.93
48832	0.043	1.15E-03	1.98	3.71E-03	2.03	5.14E-04	1.96	5.91E-04	1.95
100480	0.030	5.61E-04	1.97	1.88E-03	1.88	2.52E-04	1.97	2.94E-04	1.93
250992	0.019	2.26E-04	1.98	7.04E-04	2.14	1.01E-04	1.98	1.25E-04	1.87

Tabelle 1.1: Fehler von K und H (aus Weingartenabb. und exakten Normalen) (*ExN) auf dem Torus.

DOFs	h	Err_2^K	EOC	Err_{\max}^K	EOC	Err_2^H	EOC	Err_{\max}^H	EOC
1360	0.263	6.01E-02		1.20E-01		2.68E-02		3.77E-02	
2016	0.215	4.06E-02	1.93	8.15E-02	1.90	1.87E-02	1.77	2.75E-02	1.55
4752	0.138	1.77E-02	1.89	3.86E-02	1.71	8.33E-03	1.84	1.23E-02	1.84
10192	0.094	8.65E-03	1.85	1.77E-02	2.02	4.07E-03	1.86	7.68E-03	1.21
24640	0.060	4.13E-03	1.67	1.44E-02	0.46	2.14E-03	1.44	8.90E-03	-0.33
48832	0.043	2.79E-03	1.14	1.01E-02	1.03	2.02E-03	0.18	6.35E-03	0.98
100480	0.030	2.18E-03	0.68	9.68E-03	0.11	1.82E-03	0.29	6.08E-03	0.12
250992	0.019	1.61E-03	0.66	1.07E-02	-0.22	1.29E-03	0.74	5.50E-03	0.22

Tabelle 1.2: Fehler von K und H (aus Weingartenabb. und gemittelten Normalen nach (1.18)) (*AvN) auf dem Torus.

DOFs	h	Err_2^K	EOC	Err_{\max}^K	EOC	Err_2^H	EOC	Err_{\max}^H	EOC
1360	0.263	5.90E-02		1.13E-01		2.48E-02		2.92E-02	
2016	0.215	4.02E-02	1.89	7.77E-02	1.84	1.73E-02	1.76	2.11E-02	1.59
4752	0.138	1.75E-02	1.89	3.62E-02	1.74	7.75E-03	1.83	9.45E-03	1.83
10192	0.094	8.39E-03	1.91	1.71E-02	1.95	3.75E-03	1.88	5.73E-03	1.30
24640	0.060	3.64E-03	1.88	7.49E-03	1.85	1.78E-03	1.68	5.86E-03	-0.05
48832	0.043	2.12E-03	1.58	4.81E-03	1.29	1.41E-03	0.68	3.94E-03	1.15
100480	0.030	1.39E-03	1.16	4.23E-03	0.36	1.19E-03	0.47	3.31E-03	0.48
250992	0.019	8.84E-04	0.99	3.73E-03	0.27	8.24E-04	0.80	2.51E-03	0.60

Tabelle 1.3: Fehler von K und H (aus Weingartenabb. und gemittelten Normalen nach (1.21)) (*ConnN) auf dem Torus.

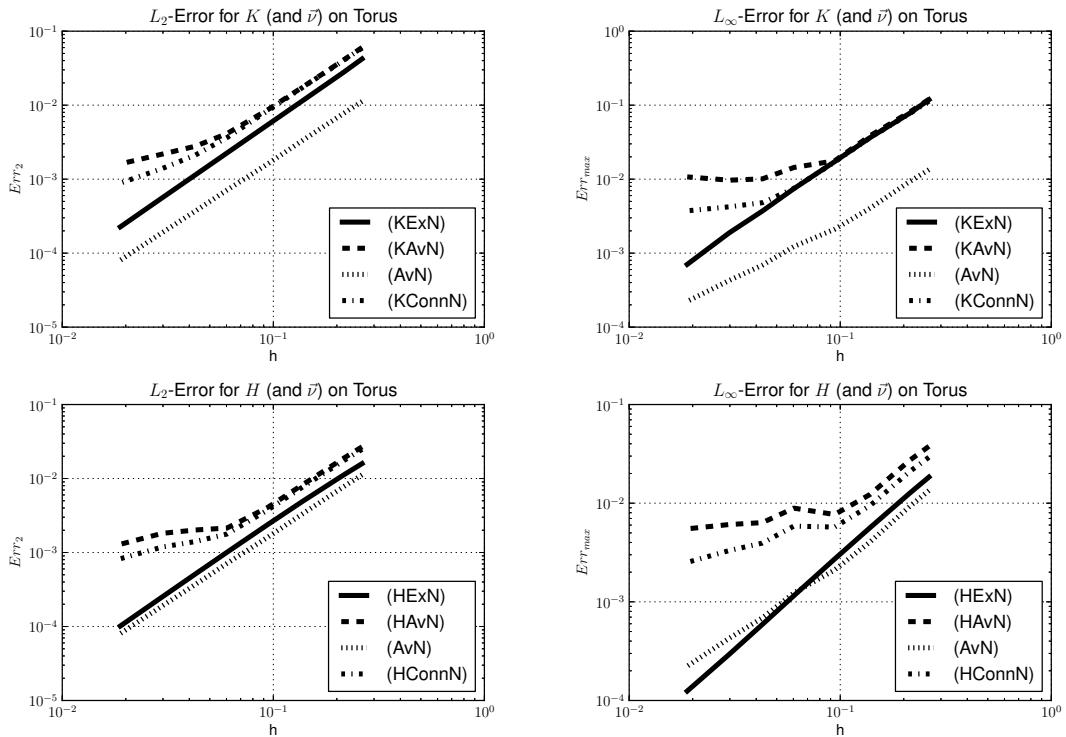


Abbildung 1.1: (LogLogPlot) Fehler in diskreter L_2 - und Maximumsnorm für die Gaußkrümmung K bzw. mittlere Krümmung H berechnet aus der Weingartenabbildung mit exakten Normalen (KExN)/(HExN), nach (1.18) gemittelte Elementnormalen (KAvN)/(HAvN) und nach (1.21) gemittelte Elementnormalen (KConnN)/(HConnN). Zudem ist auch der Fehler der Normalenmittelung nach (1.18) in der jeweiligen Norm zusehen (AvN).

eine angepasstere Möglichkeit bereitgestellt werden die Normalen an den Ecken des Polyeders zu gewinnen oder ein für diese Problemstellung geeigneter diskreter Gradient, zum Beispiel ein Dual-Primär-Gradient für eine diskrete duale 0-Form ausgewertet auf den primären Gitterpunkten. Hätten wir so einen Gradienten, dann könnten die Elementnormalen $\vec{\nu}^{\sigma^2}$ direkt ausgewertet für eine Berechnung der diskreten Weingartenabbildung auf den Ecken.

In Abschnitt 1.4 wird zudem die hier vorgestellte Krümmungsapproximation auch auf anderen Oberflächen getestet und mit den Ergebnissen von [Hei04] verglichen.

1.2 Krümmungsvektor

Der Krümmungsvektor \vec{H} ist die mittlere Krümmung in Normalenrichtung unter Beachtung der Dimension n der Oberfläche. Das heißt in unserem Fall für eine 2-Mannigfaltigkeit

$$\vec{H} := 2H\vec{\nu}. \quad (1.24)$$

Nach [Che84] (Kap. 4.5) gilt für jede isometrische Immersion $\vec{x} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$-\Delta_B \vec{x} = \vec{H}, \quad (1.25)$$

wobei auch hier wieder die Gleichung komponentenweise, also als vektorisiertes skalarwertiges Problem, zu sehen ist. Da wir numerisch nicht in lokalen Koordinaten rechnen möchten (außer zur Verifizierung der Ergebnisse) und uns die Oberfläche als Punktmenge im \mathbb{R}^3 vorliegt, wählen wir als Abbildung zwischen der Oberfläche und dem \mathbb{R}^3 einfach die Inklusion, das heißt

$$\vec{x} := \iota : \mathbb{R}^3 \supset M \hookrightarrow \mathbb{R}^3. \quad (1.26)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Inklusion als Identität eingeschränkt auf M eine isometrische Immersion ist ($g \equiv I$ und der Pushforward $\iota_* : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$ ist injektiv). Mit Hilfe des DEC-diskretisierten Laplace-Beltrami-Operators erhalten wir nun das diskreten Problem

$$\langle \vec{H}, v \rangle = -\langle \Delta_B \vec{x}, v \rangle \quad (1.27)$$

für alle Ecken $v \in K^{(0)}$. Durch anwenden des Hodge-Stern-Operators auf beiden Seiten können wir das resultierende „duale“ Problem in gewohnter Weise in AMDiS lösen (vgl. Abschnitt ??). Als \mathbb{R}^3 -vektorisierte Aufgabenstellung kann dabei auch jede der drei Komponenten unabhängig von einander gelöst werden. Nach (1.24) lässt sich die mittlere Krümmung über die euklidische Norm des Krümmungsvektors erhalten, also

$$H = \frac{1}{2} \left\| \vec{H} \right\|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.28)$$

Numerische Beispiele dazu finden sich im Abschnitt 1.4.

1.3 Gauß-Bonnet-Operator

Eine weitere Möglichkeit die Gaußsche Krümmung zu approximieren besteht aus einem einfachen geometrischen Ansatz, der aus dem Satz von Gauß-Bonnet folgt. Dieser Satz besagt speziell für eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit P mit nur stückweise differenzierbaren Rand (vgl. [BG88], Kap. 10.5)

$$\int_P K d\mu = 2\pi - \sum_{i=1}^m \beta_i - \int_{\partial P} k_g ds \quad (1.29)$$

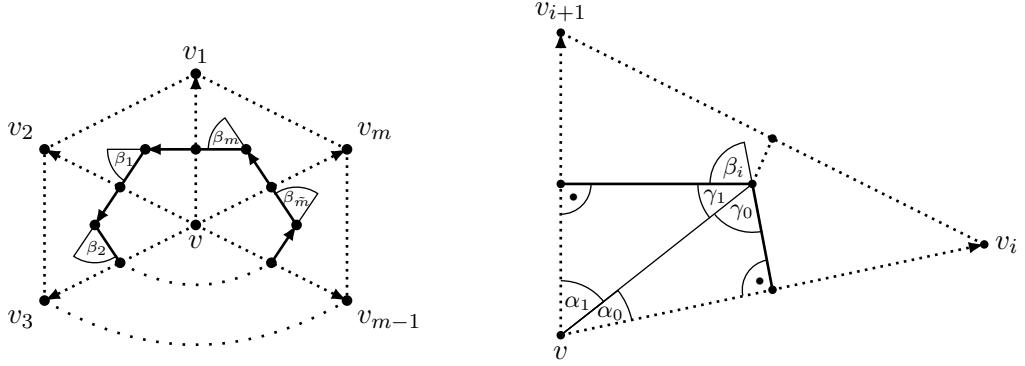


Abbildung 1.2: Die $m = m_v =: \tilde{m} + 1$ Außenwinkel β_i an den Ecken der Voronoizelle (links) und die zugehörigen Innenwinkel bzgl. der Primär- und Dualkanten für ein Dreieckelement σ^2 (rechts).

wobei β_i die Außenwinkel an den m „Knicke“ der Randkurve sind und k_g die geodätische Krümmung der Randkurve. Diese Formel können wir auch auf eine abstrakte Voronoizelle $P = \star\pi(v) \in C_2(\star L)$ für die Ecke $v \in K^{(0)} = L^{(0)}$ anwenden. Da die „Knicke“ immer genau im Umkreismittelpunkt der Dreieckselemente um v sind, ergibt sich $m = m_v$, die Anzahl der 2-Simplizes des 1-Ringes um v . Die Approximation besteht nun darin $\star v \in C_2(\star K)$ als Nährung für $\star\pi(v)$ in Gleichung (1.29) zu verwenden. Da die Randkurve $\partial(\star v)$ auf den differentierbaren Teilstücken gerade ist, verschwindet dort die geodätische Krümmung. An den Schnitten mit den Primärkanten $\star\sigma^1 \cap \sigma^1 = c(\sigma^1) \in \text{csd}K$ ist die geodätische Krümmung ebenfalls null, da dort die Randkurve einen Winkel von genau π auf dem Polytop $|K|$ hat (vgl. [?]). Weil nun die Volumenform $d\mu = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2$ nichts weiter als das Hodge-Stern-Duale der Eins ist, das heißt $d\mu = *1$ und damit $Kd\mu = *K$, ergibt sich folgende approximative Aufgabenstellung

$$\langle *K, \star v \rangle \approx 2\pi - \sum_{i=1}^{m_v} \beta_i \quad (1.30)$$

mit den Außenwinkeln an den Ecken von $\star v$ (vgl. Abb. 1.2). Damit haben wir schon eine „duale“ DEC-Formulierung der rechten Seite zur elementweisen Assemblierung über

$$\langle *K, \star v \rangle = |\star v| \langle K, v \rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \langle K, v \rangle \quad (1.31)$$

automatisch erhalten mit dem Freiheitsgrad K am Knoten v . Der zugehörige „primäre“ Gauss-Bonnet-Operator definiert sich dementsprechend in DEC-Notation

$$\langle K^{GB}, v \rangle := \frac{1}{|\star v|} \left(2\pi - \sum_{i=1}^{m_v} \beta_i \right). \quad (1.32)$$

Der obere Index GB kann auch weggelassen werden, wenn klar ist, dass es sich um den Gauss-Bonnet-Operator handelt.

1.3.1 Implementierung

Um auch die rechte Seite von (1.30) elementweise zu berechnen müssen die Außenwinkel auf jedem Dreieck berechnet werden. Nun ist der Außenwinkel β_i gleich dem Innenwinkel

des i -ten Dreiecks an der Ecke v , denn mit den Bezeichnern aus Abbildung 1.2 gilt

$$\gamma_k = \frac{\pi}{2} - \alpha_k \quad (k = 0, 1) \quad (1.33)$$

$$\beta_i = \pi - \gamma_0 - \gamma_1 = \pi + \alpha_0 - \frac{\pi}{2} + \alpha_1 - \frac{\pi}{2} \quad (1.34)$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1. \quad (1.35)$$

Weiterhin lassen sich die Winkel α_k über die Längen der Primärkanten und der auf $\sigma^2 = [v, v_i, v_{i+1}]$ eingeschränkten Voronoikanten bestimmen durch

$$\alpha_k = \arctan \left(\frac{|\star[v, v_{i+k}] \cap \sigma^2|}{\frac{1}{2} |[v, v_{i+k}]|} \right) = \text{atan2}(2 |\star[v, v_{i+k}] \cap \sigma^2|, |[v, v_{i+k}]|). \quad (1.36)$$

Insgesamt erhalten wir also für die Summe der Außenwinkel der Voronoizelle $\star v$

$$\sum_{i=1}^{m_v} \beta_i = \sum_{\sigma^2 \succ v} \sum_{\sigma^2 \succ \sigma^1 \succ v} \text{atan2}(2 |\star \sigma^1 \cap \sigma^2|, |\sigma^1|), \quad (1.37)$$

die somit immernoch elementweise Bestimmt werden kann. Ein Problem stellt jedoch noch der Minuend 2π in der rechten Seite von 1.30 dar. Eine Möglichkeit wäre es den globalen Rechte-Seite-Vektor mit $[2\pi]_{v \in K^{(0)}}$ statt wie gewohnt mit $[0]_{v \in K^{(0)}}$ zu initialisieren und beim assemblieren die sich aus (1.37) ergebenden Elementvektoren abzuziehen. Eine andere Möglichkeit ist es 2π selbst auch elementweise zu zerlegen, sodass wir

$$\langle *K^{GB}, \star v \rangle = 2\pi - \sum_{i=1}^{m_v} \beta_i = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left(\frac{2\pi}{m_v} - \sum_{\sigma^2 \succ \sigma^1 \succ v} \text{atan2}(2 |\star \sigma^1 \cap \sigma^2|, |\sigma^1|) \right) \quad (1.38)$$

für die Voronoizelle am Knoten v erhalten. Jedoch ist zu bedenken, dass m_v a priori auf einem Dreieckelement nicht bekannt ist, somit wäre es sinnvoll m_v für alle Ecken $v \in K^{(0)}$ noch vor dem Aufstellen der Systemmatrix zu bestimmen falls eine Parallisierung des Assemblierungsalgorithmus gewünscht ist.

Ein Algorithmus zur Berechnung der Elementvektoren ist im Appendix 2.1.4 gegeben. In Abschnitt 1.4 werden wir den Operator als Vergleich zur diskreten Weingartenabbildung und den Ergebnissen von [Hei04] testen. In [MDSB03] wird der Gauss-Bonnet-Operator ebenfalls mit anderen Methoden verglichen.

1.4 Numerisches Experiment

Zur Bestimmung der Gaußkrümmung K und der mittleren Krümmung H stehen uns nun jeweils zwei Methoden zur Verfügung. Die Gaußsche Krümmung kann aus der diskreten Weingartenabbildung berechnet werden (SK) oder mit Hilfe des Gauß-Bonnet-Operators (GB) und die mittlere Krümmung ebenfalls aus der diskreten Weingartenabbildung (SH) oder aus dem Krümmungsvektor, der aus dem diskreten Laplace-Beltrami-Operators der Koordinatenabbildung folgt (LX).

In [Hei04] wird K und H auch aus einer Approximation der Weingartenabbildung gewonnen. Hierbei wird ein isoparametrischer Finite-Elemente-Ansatz (FEM) genutzt. Die Oberfläche M wird elementweise Langrage-interpoliert zu M_h^γ mit dem Polynomgrad $\gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$. Zunächst wird dabei M linear zu \mathcal{T}_h^1 trianguliert, so dass

$$M_h^1 = |K| \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_h^1 = K^{(2)} \quad (1.39)$$

gilt. Für $\gamma = 2, 3, 4$ werden dann die noch übrigen 3, 7 bzw. 12 Langrange-Knoten $Q_i \in \sigma^2$ durch $\pi(Q_i) \in M$ orthogonal projiziert. Der Raum der Ansatzfunktion definiert sich dann über

$$W_h^\gamma := \left\{ w_h \in C^{0,1}(M_h^\gamma) \mid \forall T_h^\gamma \in \mathcal{T}_h^\gamma : (w_h \circ \Phi_{T_h^\gamma}^\gamma) \in \mathbb{P}_\gamma(\hat{T}) \right\}, \quad (1.40)$$

wobei $\hat{T} := \Delta^2 \in \mathbb{R}^2$ das Referenzdreieck ist und $\Phi_{T_h^\gamma}^\gamma : \hat{T} \rightarrow T_h^\gamma$ die polynomiale Parametrisierung vom Grad γ . Das diskrete Problem für die Weingartenabbildung lautete nun für alle $\vec{\psi}_h \in (W_h^\gamma)^3$

$$\int_{M_h^\gamma} H_h^j \cdot \vec{\psi}_h d\mu = - \int_{M_h^\gamma} \nu_h^j (\nabla_{M_h^\gamma} \cdot \vec{\psi}_h + \vec{H}_h \cdot \vec{\psi}_h) d\mu \quad (1.41)$$

mit der diskreten Weingartenabbildung

$$\Pi_h = [\Pi_h^1, \Pi_h^2, \Pi_h^3] \in (W_h^\gamma)^{3 \times 3} \quad (1.42)$$

als Lösung. $\vec{\nu}_h = [\nu_h^1, \nu_h^2, \nu_h^3]^T$ ist das äußere Normalenfeld von M_h^γ . Des Weiteren ist die Tangentialdivergenz der vektorisierten Ansatzfunktion $\vec{\psi}_h = [\psi_h^1, \psi_h^2, \psi_h^3]^T$ definiert als

$$\nabla_{M_h^\gamma} \cdot \vec{\psi}_h := \nabla_{\mathbb{R}^3} \cdot \vec{\psi}_h - \sum_{i=1}^3 (\nabla_{\mathbb{R}^3} \psi_h^i \cdot \vec{\nu}_h) \nu_h^i. \quad (1.43)$$

Der diskrete Krümmungsvektor $\vec{H}_h := [H_h^1, H_h^2, H_h^3]^T \in (W_h^\gamma)^3$ ergibt sich als Lösung von

$$\int_{M_h^\gamma} H_h^i \psi_h^i d\mu = \int_{M_h^\gamma} \nabla_{M_h^\gamma} x_h^i \cdot \nabla_{M_h^\gamma} \psi_h^i d\mu \quad (1.44)$$

für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und $\vec{\psi}_h \in (W_h^\gamma)^3$. Dabei ist $\vec{x}_h = [x_h^1, x_h^2, x_h^3]^T$ die Identität und $\nabla_{M_h^\gamma} = (I - \vec{\nu}_h \vec{\nu}_h^T) \nabla_{\mathbb{R}^3}$ der Oberflächengradient auf M_h^γ . Weitere Einzelheiten dazu können in [Hei04] nachgelesen werden.

Als Oberflächen wählen wir drei, die auch in [Hei04] genutzt werden. Dazu gehören die Einheitssphäre (Appendix 2.3.1), eine quartische Oberfläche, die sich als Null-Level-Sets eines Polynomes vierten Grades beschreiben lässt (Appendix 2.3.3) und ein Ellipsoid (Appendix 2.3.4). Für unsere Berechnungen, wie auch bei [Hei04], ist die Makrotriangulation ein Ikosaeder projiziert auf die Oberfläche. Da für die DEC-Diskretisierung wohlzentriertheit an das Primärgritter gestellt wird, verfeinern wir zunächst die Ikosaederflächen. Für die Sphäre ist bei den hier verwendeten Verfeinerungsmechanismus (Cinema4D) nichts weiter zu tun, da wir schon eine sehr gleichmäßige Triangulierung erhalten. Für die anderen beiden Oberflächen verwenden wir den in Abschnitt ?? vorgestellten Algorithmus um die Triangulierung zu verbessern und Wohlzentriertheit zu gewährleisten. Ein Nachteil dieser Prozedur ist es, dass gerade an Orten mit starker Krümmung das Gitter schlechter Aufgelöst wird als bei flacheren Umgebungen. So war es zum Beispiel nicht möglich bei größeren Gittern unter ca. 5300 Gitterpunkten ($h \approx 0.26$) bei der quartischen Oberfläche die beiden Wölbungen ordentlich darzustellen, wie wir in Abbildung 1.6 sehen können.

Die exakten mittleren Krümmungen und die Gaußschen Krümmungen für den Ellipsoiden und der quartischen Oberfläche sind in Abbildung 1.7 bzw. 1.10 dargestellt. Für die Sphäre sind beide Krümmungsgrößen konstant eins.

Für die Berechnung der Weingartenabbildung werden zum einen die gemittelten Normalen verwenden (S*AvN), das heißt es werden die Gleichungen (1.19)+(1.20) gelöst ($3 \cdot (9+3) = 36$ DOFs p. Element²). Zum anderem nutzen wir die exakten Normal (S*)

²lokale Freiheitsgrade

an den Knoten, die wir durch die genormten Gradienten der signierten Distanzfunktion erhalten (vgl. (1.23)) und lösen nur Gleichung (1.20) ($3 \cdot 9 = 27$ DOFs p. Element). Zum vergleich, bei [Hei04] müssen zu den 9 Komponenten der Weingartenabbildung auch noch die 3 Komponenten des Krümmungsvektor berechnet werden, das heißt für die linearen Elemente sind ebenfalls $3 \cdot (9 + 3) = 36$ DOFs pro Element zu bestimmen, wie auch bei unserem (S*AvN)-Problem. Für den Grad 2, 3 bzw. 4 sind es dann schon 72, 120 bzw. 180 DOFs pro Element. Für unsere Berechnung der mittleren Krümmung direkt aus dem Krümmungsvektor (LX) nach Gleichung (1.27) erhalten wir nur 9 DOFs pro Element und für die Ermittlung der Gaußkrümmung mit den Gauß-Bonnet-Operators nach Gleichung (1.38) sogar nur 3 Dofs pro Dreieckelement. Prinzipiell sollte sich der Assemblierungsaufwand für einen einzelnen Freiheitsgrad asymptotisch nicht von der FEM-Diskretisierung unterscheiden, da bei der FEM-Diskretisierung mit den Gittern in [Hei04] im Mittel etwa genauso viele Elemente (ca. 6) für die Assemblierung eines globalen DOFs beteiligt sind. Bei allen Problemen ließe sich im „Primärraum“ auf das lösen eines linearen Gleichungssystems verzichten, da auch bei den (S*AvN)-Problemen sich die Gleichungen entkoppeln lassen, so dass alle zu berechnenden Größen auf der rechten Seite stehen (Vektoroperatoren) und auf der linken Seite nur die Identität als Systemmatrix. Da wir uns aber wegen dem Vorteil der einfacheren elementweisen Assemblierung dazu entschlossen hatten im „Dualraum“ zurechnen haben wir für die entkoppelten Probleme einen Eintrag pro Zeile in der Systemmatrix der den metrischen Faktor $|v|$ für jeden Knoten $v \in K^{(0)}$ enthält. Um auch zu zeigen, dass Differentialgleichungssysteme mit einem DEC möglich sind lösen wir die (S*AvN)-Probleme ((1.19)+(1.20)) nicht entkoppelt, so dass in der Systemmatrix, wegen der impliziten Berechnung der Normalen-Gradienten, 7 Nicht-Null-Einträge für Knoten mit hexagonaler Struktur und 6 für die Defekte (Fünfer-1-Ring) pro Zeile stehen. Da in [Hei04] keine genaue Aussage getroffen wird, wie hoch der tatsächliche betriebene relative Aufwand ist, können wir davon ausgehen, dass die Anzahl der Freiheitsgrade ein geeignetes Maß dafür ist. Somit sind die Kosten für alle hier vorgestellten DEC-Probleme kleiner oder gleich (für (S*AvN)) dem der isoparametrischen FEM vom Grade 1. Für das Lösen der dünnbesetzten Gleichungssysteme wird in allen Fällen einheitlich der BiCGStab-Algorithmus benutzt mit einer Abbruchstoleranz von $1.0E - 10$. Wie zu erwarten übersteigt der Assemblierungsaufwand in den meisten Fällen den des Lösungsaufwandes.

In den Tabellen 1.4 - 1.12 sind die relativen Fehler und die sich ergebenden experimentellen Konvergenzordnungen der sechs DEC-Probleme (SK, SH, SKAvN, SHAvN, GB, LX) zu unterschiedlichen maximalen Gitterweiten niedergeschrieben. Tabellarische Ergebnisse der gleichen Form für die isoparametrische FEM können in [Hei04] nachgelesen werden. In den Abbildungen 1.5, 1.8 und 1.11 sind die relativen FEM-Fehler als Vergleich mit gezeichnet worden. Dabei sei zu bemerken das der lineare FE-Ansatz gar nicht konvergierte.

Für (SK) und (SH) sind die Ergebnisse für die Sphäre und den Ellipsoiden mit denen der FEM vom Grad 2 und 3 in etwa vergleichbar. Dagegen fällt das Konvergenzverhalten auf der quartischen Oberfläche nicht so gut aus. Jedoch liegt die Vermutung nahe, dass die Konvergenzordnung mit feiner werdenen Gitter, unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern, noch steigt, wie wir das zum Beispiel auch auf dem Ellipsoiden sehen können. Die größten Fehler kommen erwartungsgemäß dort vor, wo die Krümmung am größten ist wie wir in Abbildung 1.7 für den Ellipsoiden und 1.10 für die quartische Oberfläche sehen können. Das liegt vermutlich zum größten Teil an die wesentlich schlechtere Gitterauflösung an diesen Stellen. Für den Fall, dass die Normalen weder explizit noch implizit an den Gitterknoten bekannt wären stehen die Problemeformulierungen (SKAvN) und (SHAvN) zur Verfügung. Dabei fallen die Konvergenztests schlechter aus als bei den (S*)-Problemen. Vor allem in der Maximumsnorm bricht in den meisten

Fällen die Konvergenzrate ab einer bestimmten Gitterweite ein. Dieses Verhalten war schon auf dem Torus im Beispiel 1.1.3 zu beobachten.

Das Verhalten der Fehler der gaußschen Krümmung mit dem Gauß-Bonnet-Operator (GB) überrascht ein wenig. Wie wir sehen, konnten solide Ergebnisse erzielt werden trotz des sehr geringen Aufwandes für die Berechnung. Einzig in der Maximumsnorm auf dem Ellipsoiden war keine Konvergenz meßbar. Hier hält sich vor allem der Fehler an den seitlichen Defekten hartnäckig (vgl. Abb. 1.10).

Das (LX)-Problem zur Berechnung der mittleren Krümmung brachte auf der Sphäre im Vergleich zu allen anderen Verfahren die besten Ergebnisse hervor. Der Grund für das abnehmen der experimentellen Konvergenzordnung ist die Genauigkeit der Lösung des linearen Gleichungssystems. Mit einer kleineren Abbruchstoleranz für den BiCGStab ließe sich auch eine Konvergenzrate von über 3 beibehalten. Auf der quartischen Oberfläche stagniert vor allem die Konvergenzrate in der L_2 -Norm wobei sie in der Maximumsnorm etwa linear bleibt. Das lässt darauf schließen, dass die größeren Fehler sich in einem festen Bereich der Oberfläche befinden. Wie wir in Abbildung 1.7 sehen können, sind die Fehler im Bereich der Sattelfläche recht hoch, obwohl dort das Gitter vergleichsweise fein ist. Auf einer Sattelfläche ist die eine Hauptkrümmung negativ und die andere positive, folglich ist die Gaußsche Krümmung dort negativ. Solche eine Situation liegt auch im „inneren Bereich“ des Torus vor und auch hier haben wir ein ähnliches Feherverhalten, wie eine Vergleichsrechnung zeigt (siehe Abb. 1.9). Während auf dem Ellipsoiden die Konvergenzrate in der diskreten L_2 -Norm etwas unter 2 bleibt, bricht sie in der Maximumsnorm ein. Die maximalen Fehler befinden sich hier dort, wo die Krümmung am stärksten ist und zudem die Gitterauflösung vergleichsweise schlecht (vgl. 1.10).

h	Err_2^{SK}	EOC	Err_{∞}^{SK}	EOC	Err_2^{SH}	EOC	Err_{∞}^{SH}	EOC
0.152	4.93E-03		5.69E-03		2.47E-03		2.85E-03	
0.109	2.53E-03	2.00	2.94E-03	1.97	1.26E-03	2.00	1.47E-03	1.98
0.0664	9.39E-04	2.00	1.10E-03	1.99	4.70E-04	2.00	5.49E-04	1.99
0.0477	4.85E-04	2.00	5.69E-04	1.99	2.43E-04	2.00	2.84E-04	2.00
0.0306	1.99E-04	2.00	2.33E-04	2.00	9.95E-05	2.00	1.17E-04	2.00
0.0215	9.87E-05	2.00	1.16E-04	2.00	4.93E-05	2.00	5.79E-05	2.00
0.0153	4.98E-05	2.00	5.83E-05	2.00	2.49E-05	2.00	2.92E-05	2.00
0.00967	1.99E-05	2.00	2.34E-05	2.00	9.97E-06	2.00	1.17E-05	2.00

Tabelle 1.4: Relative Fehler für K und H (diskreten Weingartenabbildung(S^*)) auf der Sphäre.

h	Err_2^{SK}	EOC	Err_{∞}^{SK}	EOC	Err_2^{SH}	EOC	Err_{∞}^{SH}	EOC
0.152	2.63E-02		5.22E-02		1.32E-02		2.58E-02	
0.109	1.65E-02	1.38	3.35E-02	1.32	8.31E-03	1.39	1.66E-02	1.31
0.0664	8.09E-03	1.44	1.81E-02	1.24	4.06E-03	1.45	9.07E-03	1.22
0.0477	4.99E-03	1.47	1.45E-02	0.68	2.50E-03	1.47	7.25E-03	0.68
0.0306	2.59E-03	1.47	2.31E-02	-1.05	1.30E-03	1.47	1.16E-02	-1.06
0.0215	1.56E-03	1.45	2.95E-02	-0.69	7.79E-04	1.45	1.48E-02	-0.70
0.0153	9.52E-04	1.44	3.38E-02	-0.40	4.77E-04	1.43	1.70E-02	-0.40
0.00967	5.00E-04	1.41	3.78E-02	-0.25	2.51E-04	1.40	1.91E-02	-0.25

Tabelle 1.5: Relative Fehler für K und H (diskreten Weingartenabbildung mit gemittelten Normalen(S^*AvN)) auf der Sphäre.

h	Err_2^{GB}	EOC	Err_{∞}^{GB}	EOC	Err_2^{LX}	EOC	Err_{∞}^{LX}	EOC
0.152	3.10E-03		3.58E-03		4.55E-06		1.02E-05	
0.109	1.58E-03	2.01	1.84E-03	1.98	1.35E-06	3.62	2.78E-06	3.87
0.0664	5.87E-04	2.00	6.87E-04	1.99	2.11E-07	3.75	4.16E-07	3.83
0.0477	3.03E-04	2.00	3.56E-04	2.00	6.03E-08	3.79	1.45E-07	3.19
0.0306	1.24E-04	2.00	1.46E-04	2.00	1.22E-08	3.59	3.85E-08	2.98
0.0215	6.16E-05	2.00	7.23E-05	2.00	3.89E-09	3.26	2.54E-08	1.18
0.0153	3.10E-05	2.00	3.65E-05	2.00	1.55E-09	2.69	1.54E-08	1.47
0.00967	1.24E-05	2.00	1.46E-05	2.00	5.14E-10	2.41	7.13E-09	1.68

Tabelle 1.6: Relative Fehler für K (Gauss-Bonnet-Operator(GB)) und H (Krümmungsvektor(LX)) auf der Sphäre.

h	Err_2^{SK}	EOC	Err_{∞}^{SK}	EOC	Err_2^{SH}	EOC	Err_{∞}^{SH}	EOC
0.414	9.82E-01		1.24E+00		3.93E-01		5.09E-01	
0.340	1.02E+00	-0.20	1.51E+00	-1.02	3.60E-01	0.45	4.54E-01	0.57
0.257	8.83E-01	0.52	9.39E-01	1.72	2.88E-01	0.80	3.74E-01	0.70
0.109	2.21E-01	1.62	4.81E-01	0.78	1.11E-01	1.12	3.59E-01	0.05
0.0786	2.25E-01	-0.06	4.32E-01	0.32	1.01E-01	0.27	3.74E-01	-0.13
0.0598	2.10E-01	0.27	4.35E-01	-0.02	8.46E-02	0.66	3.26E-01	0.50
0.0391	1.40E-01	0.95	3.04E-01	0.83	5.33E-02	1.08	2.22E-01	0.89

Tabelle 1.7: Relative Fehler für K und H (diskreten Weingartenabbildung(S^*)) auf einer quartischen Oberfläche.

h	Err_2^{SK}	EOC	Err_{∞}^{SK}	EOC	Err_2^{SH}	EOC	Err_{∞}^{SH}	EOC
0.414	7.66E-01		8.38E-01		3.26E-01		4.13E-01	
0.340	7.56E-01	0.07	1.02E+00	-0.97	3.01E-01	0.41	4.45E-01	-0.38
0.257	6.22E-01	0.70	6.81E-01	1.44	2.55E-01	0.59	5.04E-01	-0.45
0.109	3.73E-01	0.60	6.46E-01	0.06	1.79E-01	0.42	5.00E-01	0.01
0.0786	3.78E-01	-0.04	6.38E-01	0.04	1.64E-01	0.27	5.11E-01	-0.07
0.0598	3.25E-01	0.55	5.72E-01	0.40	1.36E-01	0.68	4.46E-01	0.50
0.0391	2.22E-01	0.89	4.24E-01	0.70	8.93E-02	0.99	3.23E-01	0.76

Tabelle 1.8: Relative Fehler für K und H (diskreten Weingartenabbildung mit gemittelten Normalen(S^*AvN)) auf einer quartischen Oberfläche.

h	Err_2^{GB}	EOC	Err_{∞}^{GB}	EOC	Err_2^{LX}	EOC	Err_{∞}^{LX}	EOC
0.414	1.92E+00		3.24E+00		5.31E-01		7.99E-01	
0.340	1.87E+00	0.12	4.20E+00	-1.30	4.76E-01	0.55	6.69E-01	0.90
0.257	1.89E+00	-0.03	3.21E+00	0.97	3.94E-01	0.68	6.50E-01	0.10
0.109	4.42E-01	1.70	6.70E-01	1.83	1.18E-01	1.41	2.31E-01	1.21
0.0786	1.75E-01	2.79	2.79E-01	2.64	8.76E-02	0.91	1.54E-01	1.22
0.0598	1.04E-01	1.90	1.86E-01	1.49	8.02E-02	0.32	1.31E-01	0.59
0.0391	5.18E-02	1.64	1.03E-01	1.38	7.48E-02	0.16	8.37E-02	1.05

Tabelle 1.9: Relative Fehler für K (Gauss-Bonnet-Operator(GB)) und H (Krümmungsvektor(LX)) auf einer quartischen Oberfläche.

h	Err_2^{SK}	EOC	Err_{∞}^{SK}	EOC	Err_2^{SH}	EOC	Err_{∞}^{SH}	EOC
0.25	2.10E-01		4.73E-01		9.68E-02		3.22E-01	
0.18	1.40E-01	1.22	3.27E-01	1.12	6.40E-02	1.25	2.19E-01	1.16
0.11	6.90E-02	1.44	1.57E-01	1.49	3.08E-02	1.49	1.05E-01	1.49
0.078	3.97E-02	1.66	9.15E-02	1.63	1.75E-02	1.70	6.10E-02	1.64
0.050	1.77E-02	1.82	4.04E-02	1.84	7.76E-03	1.84	2.70E-02	1.84
0.036	9.52E-03	1.92	2.17E-02	1.93	4.15E-03	1.93	1.44E-02	1.93
0.026	4.82E-03	1.95	1.10E-02	1.95	2.10E-03	1.95	7.31E-03	1.95
0.017	2.07E-03	1.97	4.71E-03	1.97	8.97E-04	1.98	3.14E-03	1.97

Tabelle 1.10: Relative Fehler für K und H (diskreten Weingartenabbildung(S^*)) auf einem Ellipsoid.

h	Err_2^{SK}	EOC	Err_{∞}^{SK}	EOC	Err_2^{SH}	EOC	Err_{∞}^{SH}	EOC
0.25	3.22E-01		6.03E-01		1.61E-01		4.38E-01	
0.18	2.33E-01	0.98	4.65E-01	0.79	1.12E-01	1.09	3.27E-01	0.88
0.11	1.26E-01	1.25	2.63E-01	1.16	5.77E-02	1.35	1.79E-01	1.22
0.078	7.60E-02	1.52	1.66E-01	1.38	3.41E-02	1.58	1.12E-01	1.43
0.050	3.54E-02	1.72	7.91E-02	1.67	1.56E-02	1.76	5.29E-02	1.69
0.036	1.94E-02	1.85	6.26E-02	0.72	8.50E-03	1.88	4.72E-02	0.35
0.026	1.00E-02	1.91	6.12E-02	0.06	4.35E-03	1.92	4.60E-02	0.08
0.017	4.36E-03	1.93	5.93E-02	0.07	1.89E-03	1.95	4.34E-02	0.13

Tabelle 1.11: Relative Fehler für K und H (diskreten Weingartenabbildung mit gemittelten Normalen (S^*AvN)) auf einem Ellipsoid.

h	Err_2^{GB}	EOC	Err_{∞}^{GB}	EOC	Err_2^{LX}	EOC	Err_{∞}^{LX}	EOC
0.25	6.06E-02		5.86E-02		3.77E-02		1.32E-01	
0.18	3.04E-02	2.08	5.53E-02	0.18	2.25E-02	1.56	8.20E-02	1.44
0.11	1.17E-02	1.93	5.36E-02	0.06	1.04E-02	1.57	3.54E-02	1.71
0.078	6.49E-03	1.79	5.17E-02	0.11	5.89E-03	1.71	1.98E-02	1.75
0.050	3.08E-03	1.68	5.12E-02	0.02	2.61E-03	1.83	1.71E-02	0.33
0.036	1.84E-03	1.59	5.22E-02	-0.06	1.41E-03	1.91	1.65E-02	0.12
0.026	1.12E-03	1.43	5.19E-02	0.02	7.27E-04	1.89	1.62E-02	0.04
0.017	6.24E-04	1.36	5.35E-02	-0.07	3.22E-04	1.90	1.57E-02	0.08

Tabelle 1.12: Relative Fehler für K (Gauss-Bonnet-Operator(GB)) und H (Krümmungsvektor(LX)) auf einem Ellipsoid.

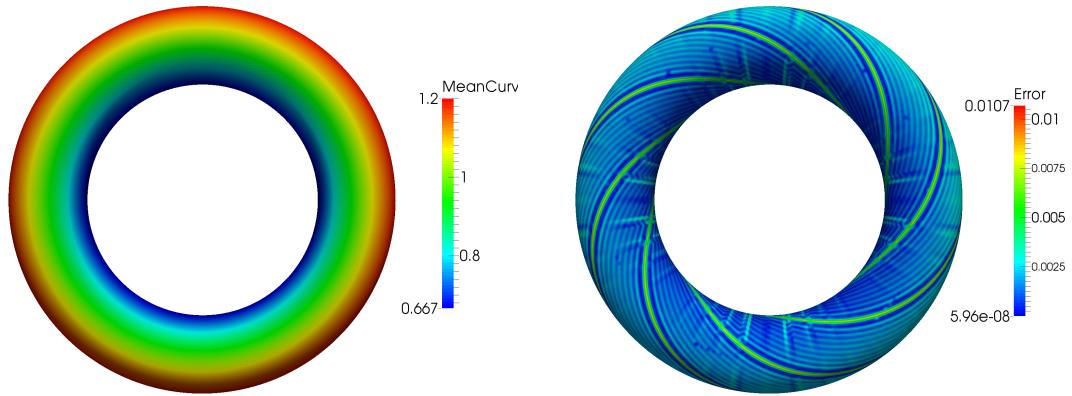


Abbildung 1.3: Links: Mittlere Krümmung H Rechts: Lokaler absoluter Fehler für die Bestimmung von H über die Weingartenabbildung mit gemittelten Normalen (1.18). Das Gitter hat 24640 DOFs ($h \approx 0.06$). Ab dieser Gitterauflösung fängt die Konvergenzrate an stark zu stagnieren. Deutlich sind wieder die Verdrillungsstrukturen des Torus zu sehen.

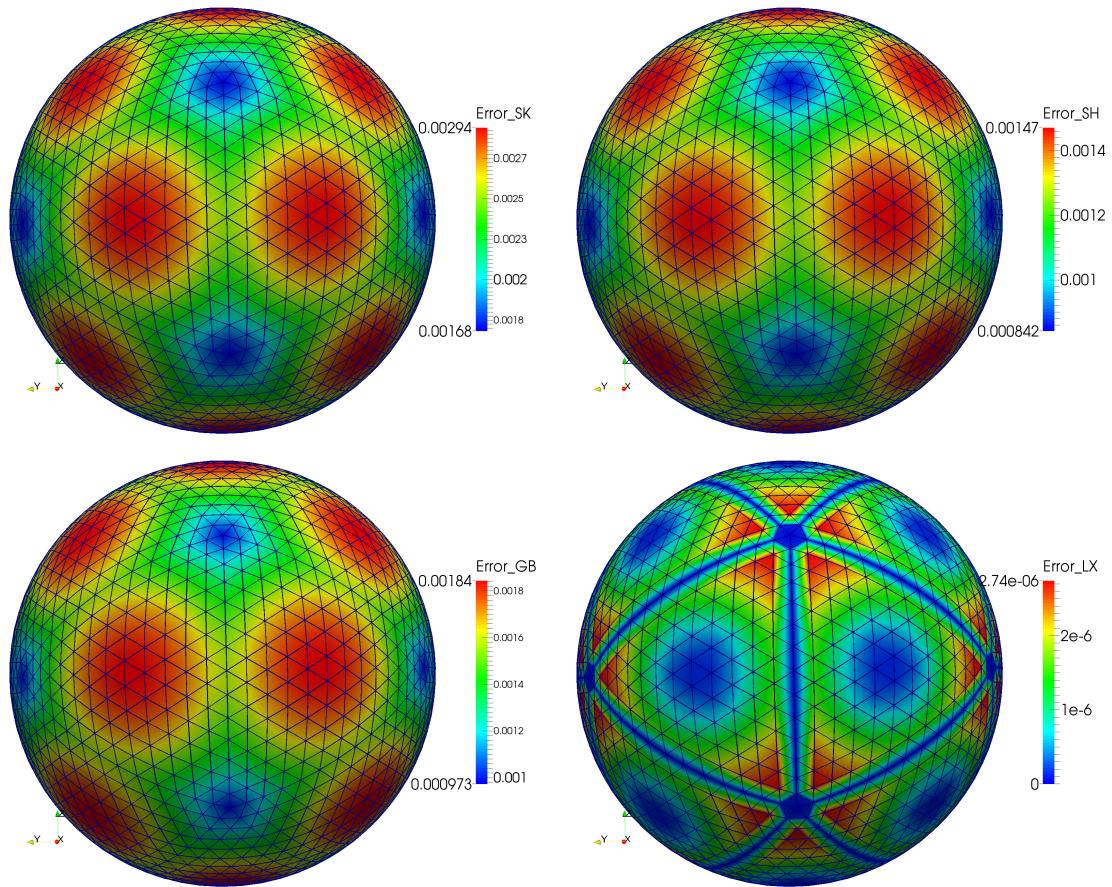


Abbildung 1.4: Absolute lokale Fehler für die Gaußsche Krümmung (links) und mittlere Krümmung (rechts) auf der Sphäre ermittelt aus den Eigenwerten der diskreten Weingartenabbildung (oben), dem Gauß-Bonnet-Operator (unten links) bzw. dem Krümmungsvektor (unten rechts). (1962 DOFs, $h \approx 0.11$)

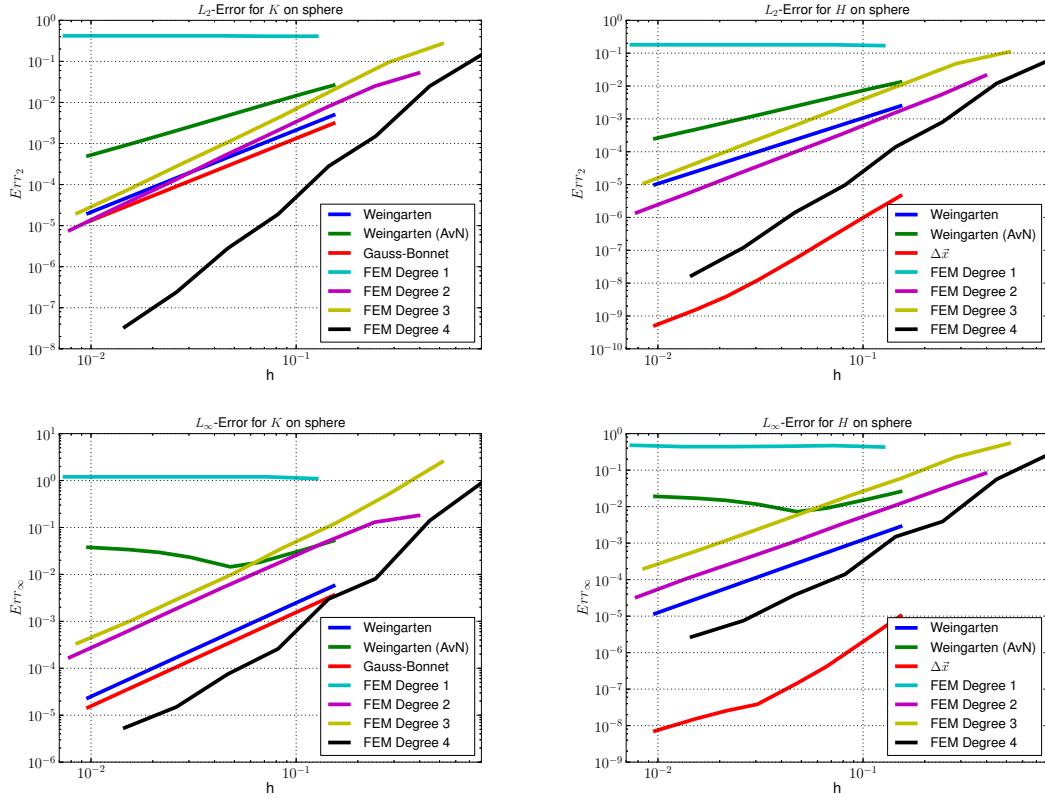


Abbildung 1.5: Log-Log-Plot der relativen diskreten L_2 -Fehler (oben) und Maximumsfehler (unten) für die Gaußsche Krümmung (links) und mittlere Krümmung (rechts) auf der Sphäre.

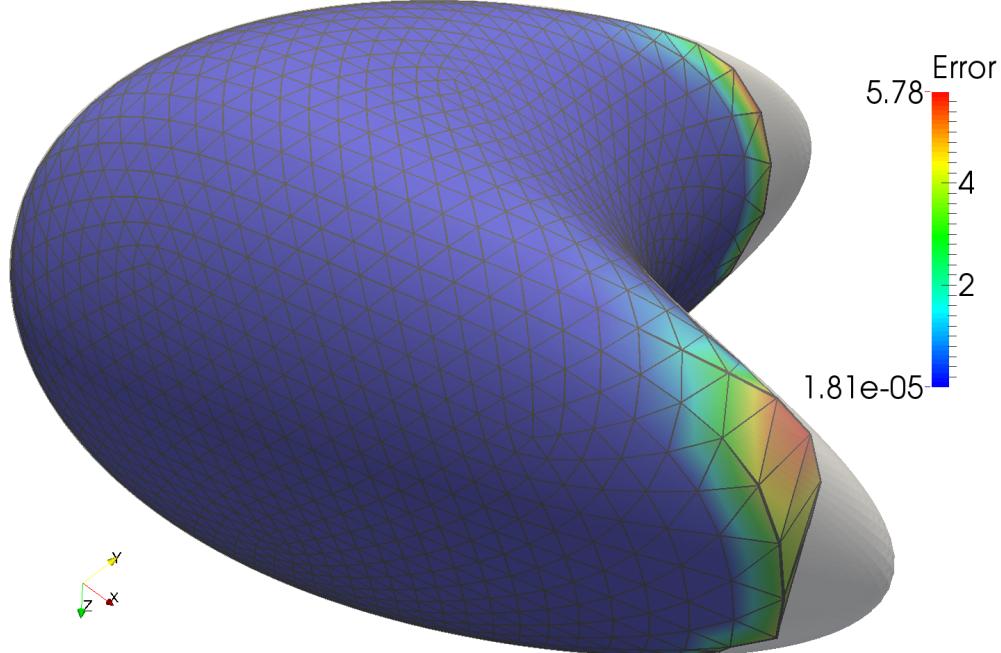


Abbildung 1.6: Das Gitter mit 1962 DOFs ($h \approx 0.34$) löst die beiden Wölbungen mit starker Krümmung nicht auf. Der Fehler (hier für K (Weingarten)) ist dort am größten. Zum Vergleich ist ein Gitter mit 249642 DOFs ($h \approx 0.04$) halbtransparent dargestellt.

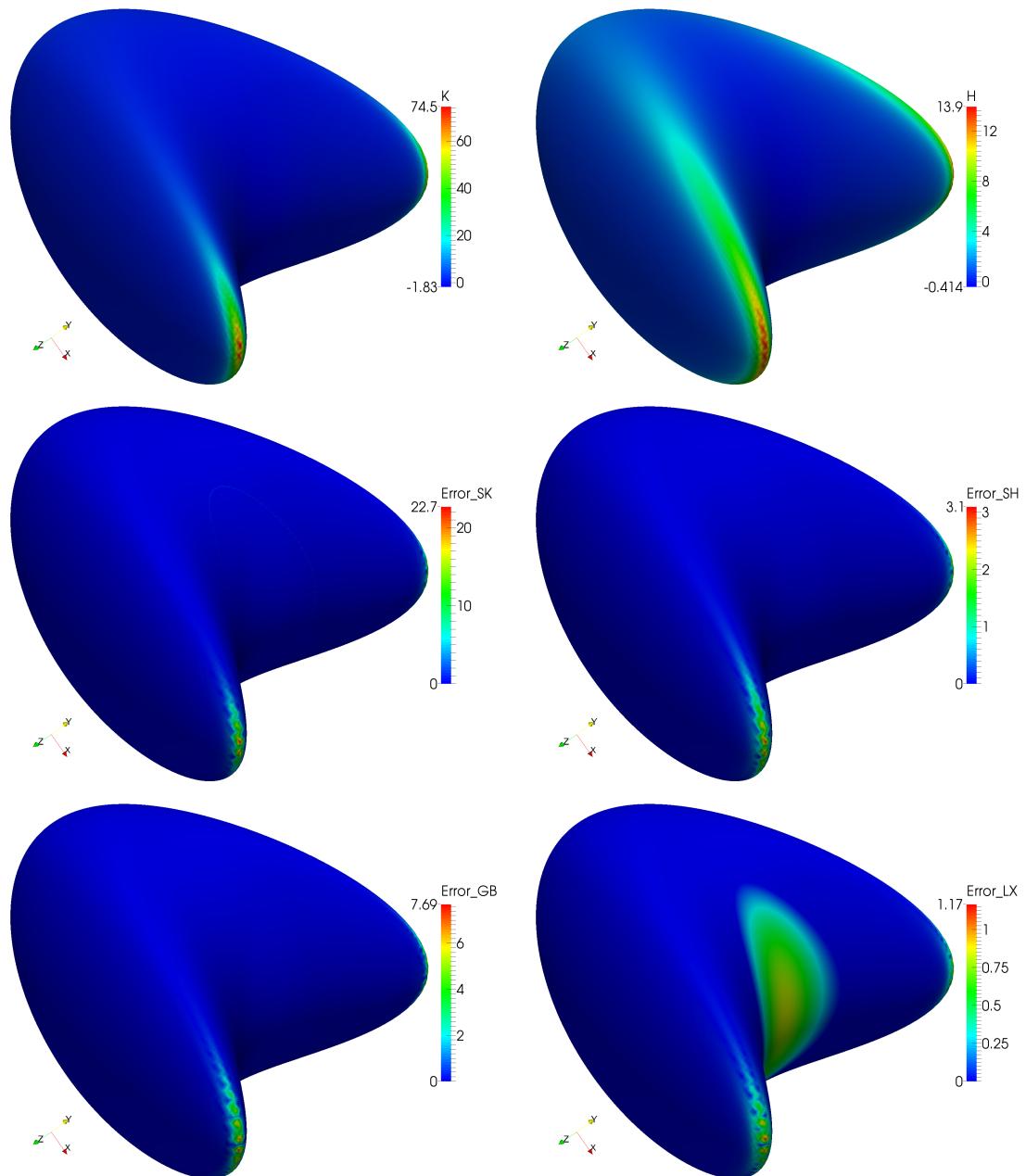


Abbildung 1.7: Absolute lokale Fehler für die Gaußsche Krümmung (links) und mittlere Krümmung (rechts) auf einer quadratischen Oberfläche ermittelt aus den Eigenwerten der diskreten Weingartenabbildung (mitte), dem Gauß-Bonnet-Operator (unten links) bzw. dem Krümmungsvektor (unten rechts). (249642 DOFs, $h \approx 0.04$)

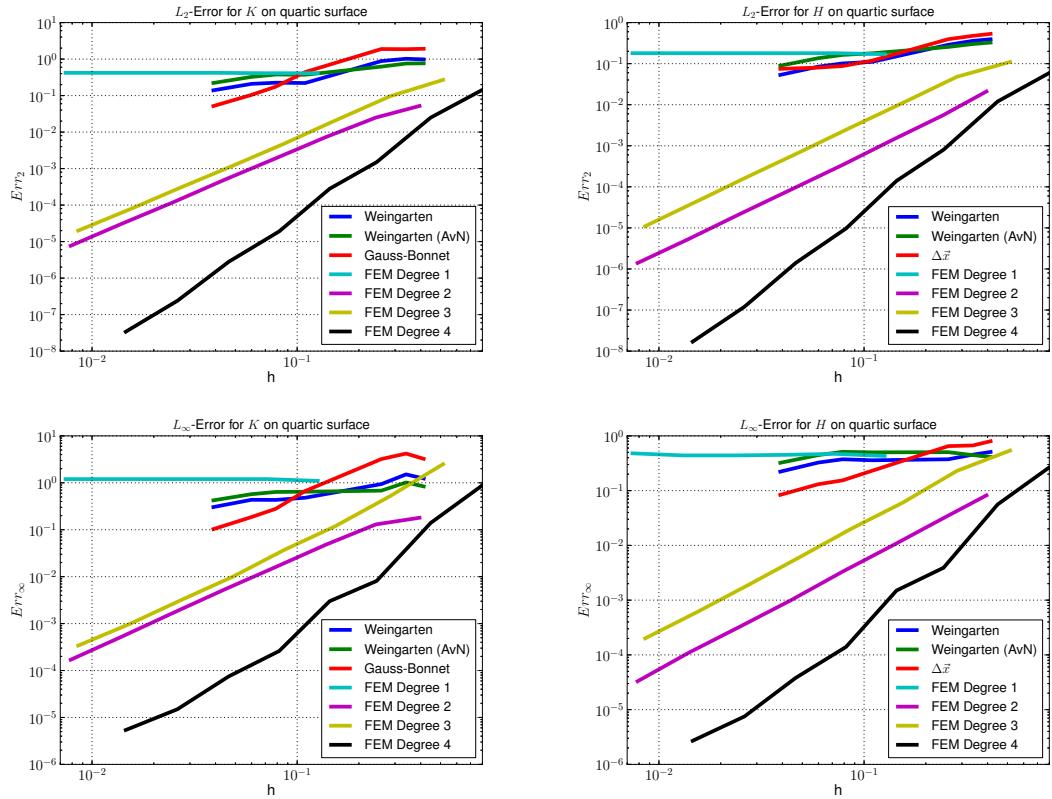


Abbildung 1.8: Log-Log-Plot der relativen diskreten L_2 -Fehler (oben) und Maximumsfehler (unten) für die Gaußsche Krümmung (links) und mittlere Krümmung (rechts) auf einer quadratischen Oberfläche.

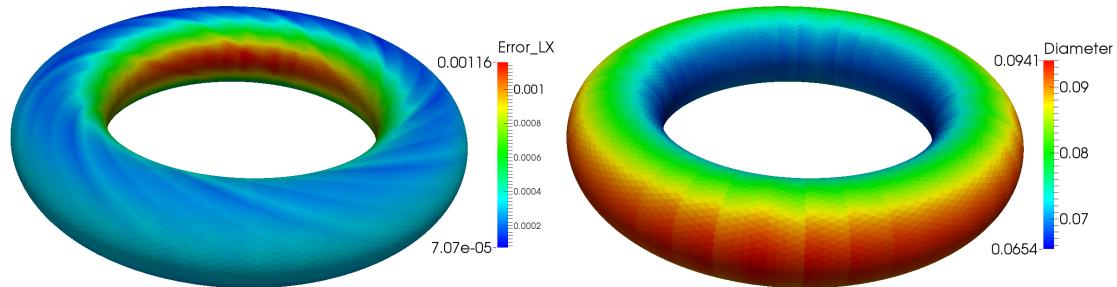


Abbildung 1.9: Absolute lokale Fehler für die mittlere Krümmung berechnet aus dem Krümmungsvektor (links) und die Umkreisdurchmesser der Dreieckselemente (rechts).

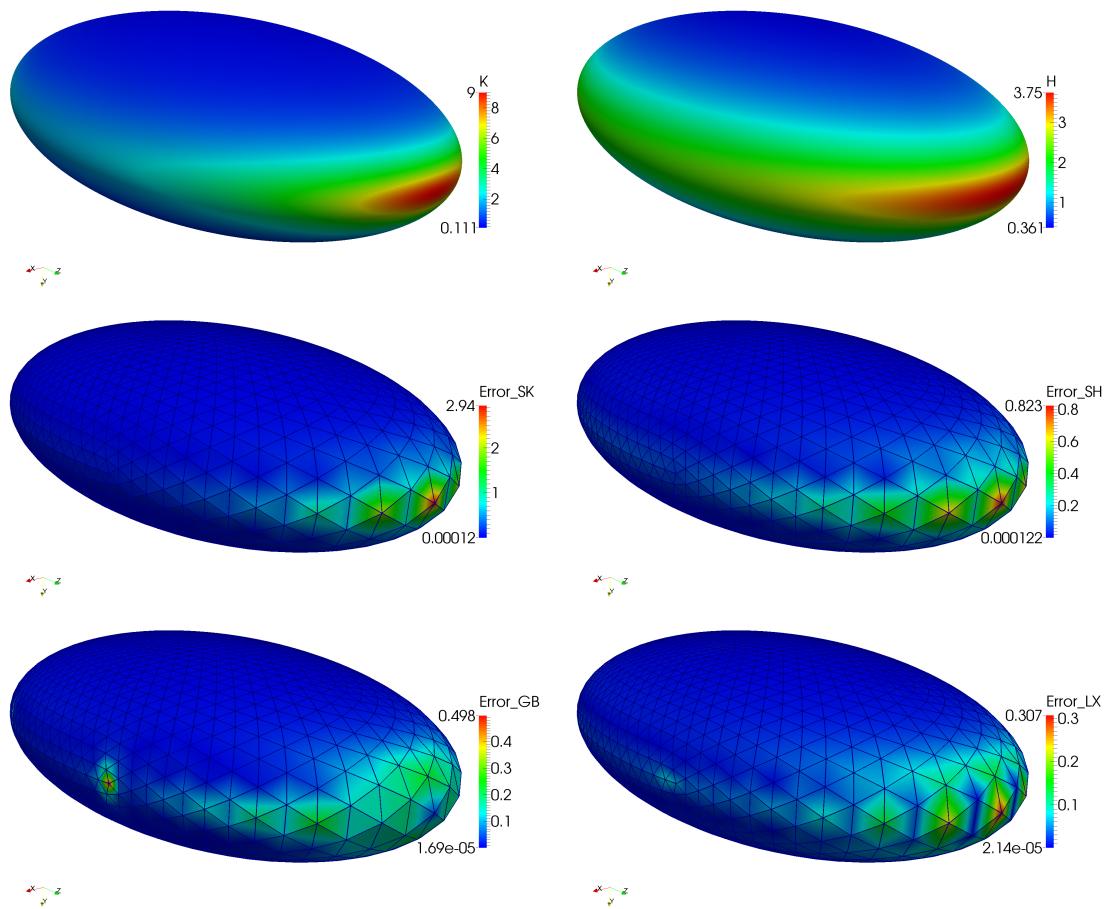


Abbildung 1.10: Absolute lokale Fehler für die Gaußsche Krümmung (links) und mittlere Krümmung (rechts) auf einem Ellipsoid ermittelt aus den Eigenwerten der diskreten Weingartenabbildung (mitte), dem Gauß-Bonnet-Operator (unten links) bzw. dem Krümmungsvektor (unten rechts). (1962 DOFs, $h \approx 0.18$)

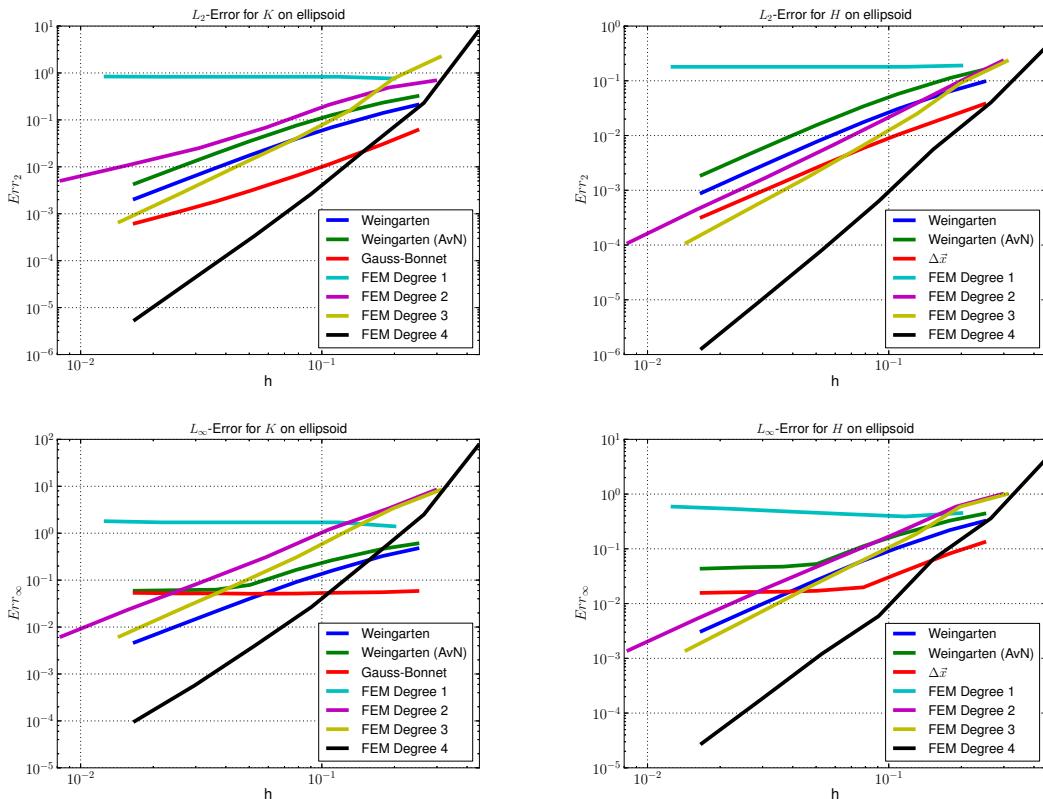


Abbildung 1.11: Log-Log-Plot der relativen diskreten L_2 -Fehler (oben) und Maximumsfehler (unten) für die Gaußsche Krümmung (links) und mittlere Krümmung (rechts) auf einem Ellipsoid.

2 Appendix

2.1 Algorithmen

2.1.1 Element-Knotenkräfte

Berechnung der Knotenkräfte $\text{Force} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ für ein Element $T \in K^{(2)}$:

```
for all v in T:  
    T <-> [v,v0,v1]  
  
    E0 = X(v0) - X(v)  
    l0 = length(E0)  
    forceLength = d * (l0/lRef - k)  
  
    E1 = X(v1) - X(v)  
    l1 = length(E1)  
    forceAngle = (d - 1) * ((E0.E1) / (l0*l1) - c);  
  
    Force(v) += project( (forceLength + forceAngle)*(E0/l0)  
                        + forceAngle *(E1/l1) )
```

Parameter $c, d, k \in \mathbb{R}$, Koordinatenabbildung $X: \sigma^0 \mapsto \vec{x} \in M \subset \mathbb{R}^3$ und Tangentialprojektion $\text{project}: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_p M \subset \mathbb{R}^3$ sind (approximativ oder exakt) gegeben.

Zu Beachten ist hierbei, dass die Kantenkraft `forceLength` nur auf einem Knoten aufgetragen wird. Der andere Knoten der ebenfalls zu dieser Kante gehört bekommt die gleiche Kantenkraft aufgetragen, wenn die Knotenkräfte auf dem 2. Dreieckelement, das sich diese Kante teilt, berechnet werden.

2.1.2 Laplace-Beltrami-Operator

Berechnung der Elementmatrix $AT \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ für das Dreieckelement $T \in K^{(2)}$:

```
for all k in {0,1,2}:  
    for all l in {k+1,k+2} mod 3:  
        C = T.dualLength(k,l) / T.length(k,l)  
        AT(k,k) -= C  
        AT(k,l) += C
```

Wobei $T.length(k,l)$ bzw. $T.dualLength(k,l)$ die Länge von $[v_k^T, v_l^T]$ bzw. dessen Dualkante eingeschränkt auf T ist.

2.1.3 Gradient

Berechnung der q -ten Elementmatrix $AT \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ für das Dreieckelement $T \in K^{(2)}$:

```

for all k in {0,1,2}:
    vol = T.dualVolume(k)
    for all l in {k+1,k+2} mod 3:
        C = vol * (T.Grad(l))[q]
        AT(k,k) -= C
        AT(k,l) += C
    
```

Wobei $T.\text{dualVolume}(k)$ das Volumen der Voronoizelle der Ecke v_k eingeschränkt auf T ist und $T.\text{Grad}(l)$ der von AMDiS bereitgestellte Gradient der linearen Ansatzfunktion zu v_l auf dem Element.

2.1.4 Gauss-Bonnet-Operator

Aufstellung des Elementvektors $b_T \in \mathbb{R}^3$ für das Dreieckelement $T \in K^{(2)}$:

```

for all k in {0,1,2}:
    bT(k) += 2 * Pi / mv(T.globalIndex(k))
    for all l in {k+1,k+2} mod 3:
        bT(k) -= atan2(2 * T.dualLength(k,l), T.length(k,l))
    
```

Wobei $T.\text{length}(k,l)$ bzw. $T.\text{dualLength}(k,l)$ die Länge von $[v_k^T, v_l^T]$ bzw. dessen Dualkante eingeschränkt auf T ist. $mv(i) \in \mathbb{N}$ gibt die Anzahl der Dreieckelemente des 1-Ringes um den Knoten v_i an. Durch $T.\text{globalIndex}(k)$ erhalten wir den globalen Index zum lokalen Index k auf T .

2.2 Krümmungen für impliziten Oberflächen

Es sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ gegeben mit $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \varphi(\vec{x}) = 0\}$. Die Gaußkrümmung K und die Mittlere Krümmung H von M berechnet sich im \mathbb{R}^3 wie folgt (siehe [Gol05]):

$$K = \frac{\nabla^T \varphi \cdot \mathcal{H}^*[\varphi] \cdot \nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|_2^4} = -\frac{\det \begin{bmatrix} \mathcal{H}[\varphi] & \nabla \varphi \\ \nabla^T \varphi & 0 \end{bmatrix}}{\|\nabla \varphi\|_2^4} \quad (2.1)$$

$$H = \frac{1}{2} \nabla \cdot \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} = \frac{\|\nabla \varphi\|_2^2 \cdot \text{Trace}(\mathcal{H}[\varphi]) - \nabla^T \varphi \cdot \mathcal{H}[\varphi] \cdot \nabla \varphi}{2 \cdot \|\nabla \varphi\|_2^3} \quad (2.2)$$

wobei $\mathcal{H}^*[\varphi]$ die Adjunkte¹ der Hesse-Matrix $\mathcal{H}[\varphi]$ ist. Alle hier verwendeten Differentialoperatoren sind keine Oberflächenoperatoren sondern die aus dem flachen \mathbb{R}^3 , dass heißt z.B. $\nabla = \nabla_{\mathbb{R}^3}$.

¹nicht Adjungierte!

2.3 Ausgewählte Oberflächen

2.3.1 Einheitssphäre

Parametrisierung

$$\vec{x} : (0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

u heißt Breitengrad und v Längengrad.

Riemannsche Metrik

$$\frac{\partial}{\partial u} \vec{x} = \begin{bmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{bmatrix} \perp_{\mathbb{R}^3} \quad \frac{\partial}{\partial v} \vec{x} = \begin{bmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{bmatrix} =: \text{diag}(g_u, g_v) \quad (2.5)$$

Laplace-Beltrami

$$\Delta_B \stackrel{(??)}{=} \sqrt{g^u g^v} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\sqrt{g^u g_v} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{g^u g^v} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{\sin u} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\sin u \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin u} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right) \quad (2.7)$$

$$= \cot u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin^2 u} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad (2.8)$$

Krümmungen

$$K \equiv 1 \quad (2.9)$$

$$H \equiv 1 \quad (2.10)$$

2.3.2 Torus

Parametrisierung

$$\vec{x} : [0, 2\pi)^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$(t, p) \mapsto \begin{bmatrix} x(t, p) \\ y(t, p) \\ z(t, p) \end{bmatrix} := R \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} \cos t \cos p \\ \sin t \cos p \\ \sin p \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

wobei alle Punkte des Torus von der Kreislinie mit Radius R den Abstand $r < R$ haben, das heißt r ist der Radius der Torusröhre.

Nützliche Identitäten

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 + z^2 = r^2 \quad (R + r \cos p)^2 = x^2 + y^2 \quad (2.12)$$

$$\sin p = \frac{z}{r} \quad \cos p = \frac{1}{r} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right) \quad (2.13)$$

$$\sin t = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.14)$$

Riemannsche Metrik

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{x} = R \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\sin t \cos p \\ \cos t \cos p \\ 0 \end{bmatrix} \perp_{\mathbb{R}^3} \quad \frac{\partial}{\partial p} \vec{x} = r \begin{bmatrix} -\cos t \sin p \\ -\sin t \sin p \\ \cos p \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow g = \begin{bmatrix} (R + r \cos p)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} =: \text{diag}(g_t, g_p) \quad (2.16)$$

Laplace-Beltrami

$$\Delta_B \stackrel{(\text{??})}{=} \sqrt{g^t g^p} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g^t g_p} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\sqrt{g^t g^p} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) \quad (2.17)$$

$$= \frac{1}{r(R + r \cos p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{r}{R + r \cos p} \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{R + r \cos p}{r} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) \quad (2.18)$$

$$= \frac{1}{(R + r \cos p)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{\sin p}{r(R + r \cos p)} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.19)$$

Normalen

$$\vec{\nu} = \begin{bmatrix} \cos t \cos p \\ \sin t \cos p \\ \sin p \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} x(1 - R/\sqrt{x^2 + y^2}) \\ y(1 - R/\sqrt{x^2 + y^2}) \\ z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Krümmungen

$$K = \frac{\cos p}{r(R + r \cos p)} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (2.21)$$

$$H = \frac{R + 2r \cos p}{2r(R + r \cos p)} = \frac{1}{2r} \left(2 - \frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (2.22)$$

2.3.3 Quartische Oberfläche

Level-Set-Funktion

$$\varphi(x, y, z) := \frac{1}{2} ((x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1) \quad (2.23)$$

$$\nabla \varphi(x, y, z) = \begin{bmatrix} x - z^2 \\ y - z^2 \\ z + 2z(2z^2 - x - y) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{H}[\varphi] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2z \\ 0 & 1 & -2z \\ -2z & -2z & 12z^2 - 2x - 2y + 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Krümmungsgrößen

$$K(x, y, z) = -\frac{1 + 2x - 2x^2 + 2y - 2y^2 + 2(-3 + x + y)z^2}{1 - 4(-2 + x + x^2 + y - 2xy + y^2)z^2} \quad (2.26)$$

$$H(x, y, z) = -\frac{x - x^2 + y - y^2 + (-7 + 3x + 3y)z^2}{1 - 4(-2 + x + x^2 + y - 2xy + y^2)z^2} \quad (2.27)$$

2.3.4 Ellipsoid

Level-Set-Funktion

$$\varphi(x, y, z) := \frac{1}{2} ((3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9) \quad (2.28)$$

$$\nabla \varphi(x, y, z) = [9x, 36y, 4z]^T \quad (2.29)$$

$$\mathcal{H}[\varphi] \equiv \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Krümmungsgrößen

$$K(x, y, z) = \frac{11664}{(81 + 972y^2 - 20z^2)^2} \quad (2.31)$$

$$H(x, y, z) = \frac{36(45 + 54y^2 - 10z^2)}{(81 + 972y^2 - 20z^2)^{3/2}} \quad (2.32)$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Fehler Gauß-/mittlere Krümmung aus Weingartenabb. auf Torus	8
1.2	Außenwinkel der Voronoizelle	10
1.3	Mittlere Krümmung aus Weingartenabb. auf Torus	18
1.4	Fehler (Krümmungen auf Sphäre)	18
1.5	Fehlerplot (Krümmungen auf Sphäre)	19
1.6	Gitterauflösung (quadratische Oberfläche)	19
1.7	Fehler (Krümmungen auf quadratischer Oberfläche)	20
1.8	Fehlerplot (Krümmungen auf quadratischer Oberfläche)	21
1.9	Diameter u. Fehler f. Krümmungsvektor (Torus)	21
1.10	Fehler (Krümmungen auf Ellipsoid)	22
1.11	Fehlerplot (Krümmungen auf Ellipsoid)	23

Tabellenverzeichnis

1.1	Gauß-/mittlere Krümmung aus Weingartenabb. auf Torus (ExN)	7
1.2	Gauß-/mittlere Krümmung aus Weingartenabb. auf Torus (AvN)	7
1.3	Gauß-/mittlere Krümmung aus Weingartenabb. auf Torus (ConnN)	7
1.4	Weingarten auf der Sphäre	15
1.5	Weingarten auf der Sphäre	15
1.6	Gauß-Bonnet und Krümmungsvektor auf der Sphäre	15
1.7	Weingarten auf einer quartischen Oberfläche	16
1.8	Weingarten auf der Sphäre	16
1.9	Gauß-Bonnet und Krümmungsvektor auf einer quartischen Oberfläche . .	16
1.10	Weingarten auf einem Ellipsoid	17
1.11	Weingarten auf einem Ellipsoid	17
1.12	Gauß-Bonnet und Krümmungsvektor auf einem Ellipsoid	17

Literaturverzeichnis

- [AD09] Marino Arroyo and Antonio DeSimone. Relaxation dynamics of fluid membranes. *Physical Review E*, 79(3):031915+, March 2009.
- [AMR88] R. Abraham, J.E. Marsden, and T.S. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Number Bd. 75 in Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1988.
- [BG88] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1988.
- [Che84] B. Chen. *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*. Pure Mathematics Series. World Scientific, 1984.
- [CX04] Long Chen and Jinchao Xu. Optimal Delaunay triangulations. *Journal of Computational Mathematics*, 22(2):299–308, 2004.
- [DFG99] Qiang Du, Vance Faber, and Max Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms. *SIAM Rev.*, 41(4):637–676, December 1999.
- [DHLM05] M. Desbrun, A. N. Hirani, M. Leok, and J. E. Marsden. Discrete Exterior Calculus. *ArXiv Mathematics e-prints*, August 2005.
- [DKT05] Mathieu Desbrun, Eva Kanso, and Yiyong Tong. Discrete differential forms for computational modeling. In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH '05, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [Eck09] M. Eckardt. *Cinema 4D R11: inklusive Module und BodyPaint 3D ; [3D-Modellierung, Texturierung, Animation und Rendern an einem durchgehenden Filmprojekt ; Einstieg in die Module und BodyPaint 3D ; auf CD: Demoversion von Cinema 4D R11 und alle Projekt-Dateien]*. mitp bei Redline. mitp-Verlag, 2009.
- [EH72] D. Jack Elzinga and Donald W. Hearn. The minimum covering sphere problem. *Management Science*, 19(1):96 – 104, 1972.
- [ES05] Sharif Elcott and Peter Schröder. Building your own dec at home. In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH '05, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [Gol05] Ron Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 22(7):632 – 658, 2005. Geometric Modelling and Differential Geometry.
- [Gut93] Martin H. Gutknecht. Variants of bicgstab for matrices with complex spectrum. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14(5):1020–1033, September 1993.
- [Hei04] C.-J. Heine. Isoparametric finite element approximation of curvature on hypersurfaces. *Preprint Fak. f. Math. Phys. Univ. Freiburg*, (26), 2004.

- [Hir03] Anil Nirmal Hirani. *Discrete Exterior Calculus*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2003. AAI3086864.
- [Jän05] Klaus Jänich. *Vektoranalysis*. Springer-Lehrbuch. Springer, 2005.
- [KLY⁺08] M. Kimura, P. Laurençot, S. Yazaki, M. Beneš, E. Feireisl, and Univerzita Karlova. Matematicko fyzikální fakulta. *Topics in Mathematical Modeling*. Nečas Center for Mathematical Modeling: Lecture notes. Matfyzpress, 2008.
- [Kno13] M. Knorrerhild. *Numerische Mathematik: Eine beispielorientierte Einführung*. Mathematik-Studienhilfen. Carl Hanser Verlag GmbH & Company KG, 2013.
- [Lee97] John Marshall Lee. *Riemannian manifolds : an introduction to curvature*. Graduate Texts in mathematics. Springer, New York, 1997.
- [Lü05] Wolfgang Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*. Vieweg, 1 edition, 2005.
- [MDSB03] Mark Meyer, Mathieu Desbrun, Peter Schröder, and AlanH. Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In Hans-Christian Hege and Konrad Polthier, editors, *Visualization and Mathematics III*, Mathematics and Visualization, pages 35–57. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [MMP⁺11] P. Mullen, A. McKenzie, D. Pavlov, L. Durant, Y. Tong, E. Kanso, J.E. Marsden, and M. Desbrun. Discrete lie advection of differential forms. *Foundations of Computational Mathematics*, 11(2):131–149, 2011.
- [Mun84] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Advanced book classics. Perseus Books, 1984.
- [NVW12] I. Nitschke, A. Voigt, and J. Wensch. A finite element approach to incompressible two-phase flow on manifolds. *Journal of Fluid Mechanics*, 708:418–438, 10 2012.
- [OF02] Stanley Osher and Ronald Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces (Applied Mathematical Sciences)*. Springer, 2003 edition, November 2002.
- [PCF⁺09] P Pathmanathan, J Cooper, A Fletcher, G Mirams, P Murray, J Osborne, J Pitt-Francis, A Walter, and S J Chapman. A computational study of discrete mechanical tissue models. *Physical Biology*, 6(3):036001, 2009.
- [Pra14] Simon Praetorius. AMDiS Tutorial. <https://fusionforge.zih.tu-dresden.de/plugins/mediawiki/wiki/amdis/index.php/Hauptseite#Tutorial>, 2014. [Online; accessed 08-May-2014].
- [SAM68] Robert Sadourny, Akio Arakawa, and Yale Mintz. Integration of the nondivergent barotropic vorticity equation with an icosahedral-hexagonal grid for the sphere1. *Monthly Weather Review*, 96(6):351–356, June 1968.
- [SG09] Gerd Sußner and Gunther Greiner. Hexagonal delaunay triangulation. In *Proceedings, 18th International Meshing Roundtable*, pages 519–538. Springer, 2009.

- [Shi14] Theodore Shifrin. *DIFFERENTIAL GEOMETRY: A First Course in Curves and Surfaces*. University of Georgia, 2014.
- [SSSA00] Samik Sen, Siddhartha Sen, James C. Sexton, and David H. Adams. Geometric discretization scheme applied to the abelian chern-simons theory. *Phys. Rev. E*, 61:3174–3185, Mar 2000.
- [VHGR08] Evan VanderZee, Anil N. Hirani, Damrong Guoy, and Edgar A. Ramos. Well-centered triangulation. *CoRR*, abs/0802.2108, 2008.
- [Whi57] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*. Princeton mathematical series. University Press, 1957.
- [WV10] T. Witkowski and A. Voigt. A multi-mesh finite element method for Lagrange elements of arbitrary degree. *ArXiv e-prints*, May 2010.
- [Xu04] Guoliang Xu. Discrete laplace–beltrami operators and their convergence. *Computer Aided Geometric Design*, 21(8):767 – 784, 2004. Geometric Modeling and Processing 2004.