

Diskretes Äußeres Kalkül (DEC) auf Oberflächen ohne Rand

Ingo Nitschke

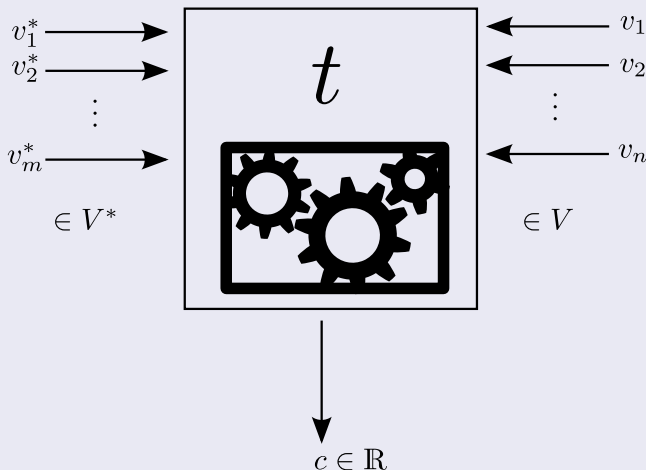
IWR - TU Dresden

21. September 2014

- 1 Differentialformen und Motivation
- 2 Simplicialer Kettenkomplex

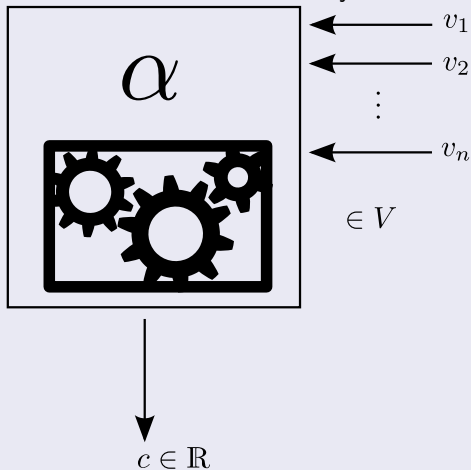
„Tensor-Maschine“

Für einen Vektorraum V nimmt ein (m, n) -Tensor m Kovektoren aus V^* (Dualraum von V) und n Vektoren aus V und gibt einen Wert aus \mathbb{R} zurück.



Differentialform als „Tensor-Maschine“

Eine Differentialform vom Grad n ist ein antisymmetrischer $(0, n)$ -Tensor.



Beispiel im $\mathbb{R}^2 \supseteq U$, $\dim(U) = 2$

0-Formen $f : \emptyset \rightarrow \mathbb{R}$ sind Konstanten bzw. Funktionen.

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_x := f(x).$$

1-Formen $\alpha \in (\mathbb{R}^2)^* \cong \mathbb{R}^2$ können als Zeilenvektoren (Kovektoren) aufgefasst werden

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} \mapsto \alpha(\vec{v}) = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2$$

bzw. als Zeilenvektorfeld

$$\alpha : U \times \mathcal{V}(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \vec{v}) \mapsto \alpha_x(\vec{v}) = \alpha_1(x)v^1(x) + \alpha_2(x)v^2(x)$$

2-Formen können als antisymmetrische Matrizen aufgefasst werden.

Metrischer Tensor zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten

- o.E.d.A orthogonal:

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}$$

- Skalarprodukt:

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_g = \vec{w}^T g \vec{v} = g_1 w^1 v^1 + g_2 w^2 v^2$$

- Länge:

$$\|\vec{v}\|_g = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_g}$$

- Winkel:

$$\cos \Theta = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_g}{\|\vec{v}\|_g \|\vec{w}\|_g}$$

Motivation: Skalarprodukt \rightsquigarrow Kontraktion von 1-Formen

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_g &= g_1 w^1 v^1 + g_2 w^2 v^2 \\
 &= w_1 v^1 + w_2 v^2 = \vec{w}^b(\vec{v})
 \end{aligned}$$

Motivation: Gradient \rightsquigarrow äußere Ableitung

- $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $dx^i(\partial_i) = \delta_{ii}$

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= g^1 \partial_1 f \partial_1 + g^2 \partial_2 f \partial_2 = \begin{bmatrix} g^1 \partial_1 f \\ g^2 \partial_2 f \end{bmatrix} \\
 &= (\partial_1 f dx^1 + \partial_2 f dx^2)^\sharp = [\partial_1 f, \partial_2 f]^\sharp \\
 &= (df)^\sharp
 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow df$ metrikunabhängig

Beispiel: Polarkoordinaten (ϕ, r) (flacher Fall)

- $\vec{x} : [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2, (\phi, r) \mapsto r [\cos \phi, \sin \phi]^T$
- mit $\vec{e}_i := \|\partial_i \vec{x}\|^{-1} \partial_i \vec{x}$ gilt

$$\nabla f = \frac{1}{r} \partial_\phi f \vec{e}_\phi + \partial_r f \vec{e}_r$$

$$df = \partial_\phi f d\phi + \partial_r f dr$$

- $\Rightarrow df$ koordinatenunabhängig (koordinatenfrei)

Beispiel: Einheitssphäre (nichtflacher Fall)

- u Breitengrad und v Längengrad

$$\vec{x} : (0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$$

•

$$\nabla f = \partial_u f \partial_u \vec{x} + \frac{1}{\sin^2 u} \partial_v f \partial_v \vec{x}$$

$$\mathbf{d}f = \partial_u f du + \partial_v f dv$$

Richtungsableitung

$$\mathbf{d}f(\vec{v}) = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle_g$$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d} (w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d} (w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d} (w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$d(w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
 - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d} (w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
 - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$
 - $*(w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = -\sqrt{g_1 g_2} w_2 dx^1 + \sqrt{g_1 g_2} w_1 dx^2$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$d(w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
 - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$
 - $*(w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = -\sqrt{g_1 g^2} w_2 dx^1 + \sqrt{g^1 g_2} w_1 dx^2$
 - $*w_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{g^1 g^2} w_{12}$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$d(w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = (\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
 - $*f = \sqrt{g_1 g_2} dx^1 \wedge dx^2$
 - $*(w_1 dx^1 + w_2 dx^2) = -\sqrt{g_1 g^2} w_2 dx^1 + \sqrt{g^1 g_2} w_1 dx^2$
 - $*w_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{g^1 g^2} w_{12}$
- \Rightarrow nicht metrikunabhängig!

Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1.Ordnung für $\dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^2(M) \\
 \updownarrow \text{id} & & \updownarrow \begin{smallmatrix} \# \\ b \end{smallmatrix} & & \updownarrow * \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1.Ordnung für $\dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \updownarrow & & \# \updownarrow b & & \updownarrow * \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

- $\delta := - * \mathbf{d} *$ Koableitung

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^1(M) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \updownarrow & & b \updownarrow \# & & \updownarrow * \\
 C^\infty(M) & \xleftarrow{\text{Div}} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xleftarrow{-\text{Rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplicialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplicialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega_d^p(K) := C^p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplicialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega_d^p(K) := C^p(K)$
- Operatoren auf $\Omega^p(M)$ (\mathbf{d} , $*$, usw.) \rightsquigarrow Operatoren auf $\Omega_d^p(K)$, $C_p(K)$

Simplizes σ^p ...

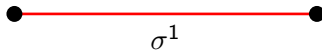
- sind **Knoten**, Kanten, Dreiecke, usw.



σ^0

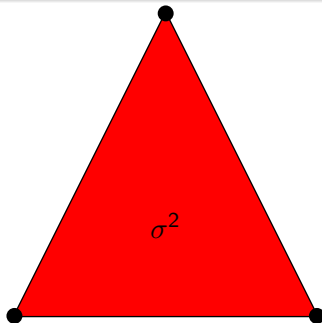
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, **Kanten**, Dreiecke, usw.



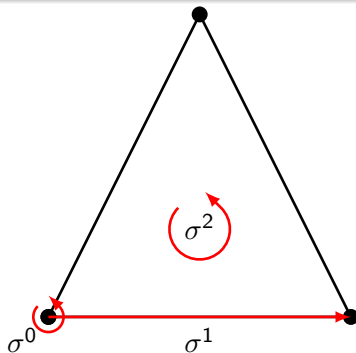
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, **Dreiecke**, usw.



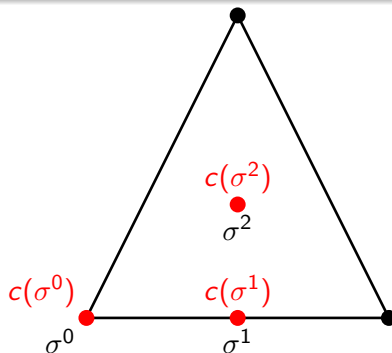
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden



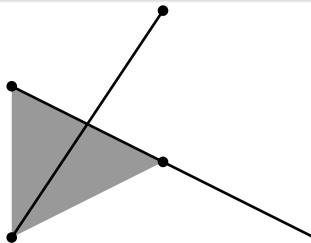
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden
- besitzen einen Umkreismittelpunkt $c(\sigma^p)$
($c(\sigma^p) \in \text{Int}(\sigma^p) \Rightarrow$: Wohlzentriertheit)



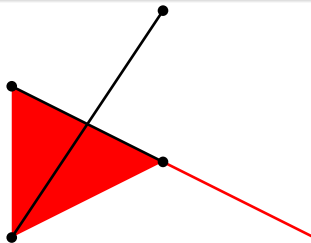
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.



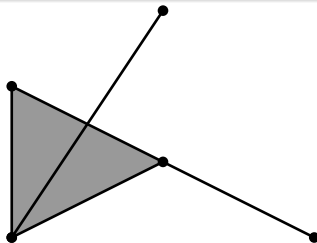
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .



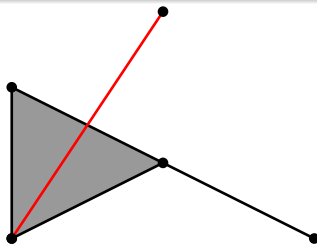
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .



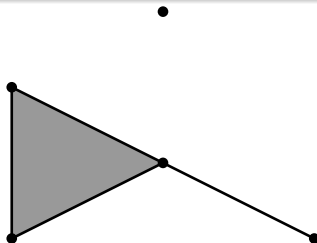
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplicialkomplex)



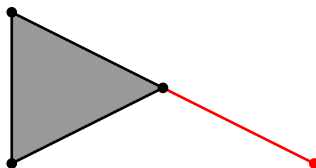
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplicialkomplex)



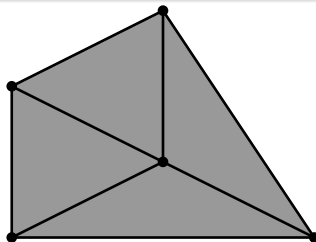
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplicialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)



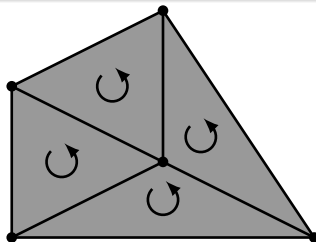
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplicialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)



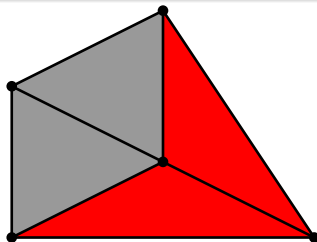
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplicialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)



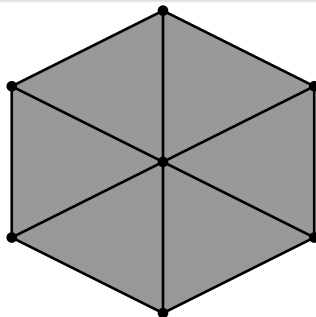
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplicialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

Gitter wohlzentrieren

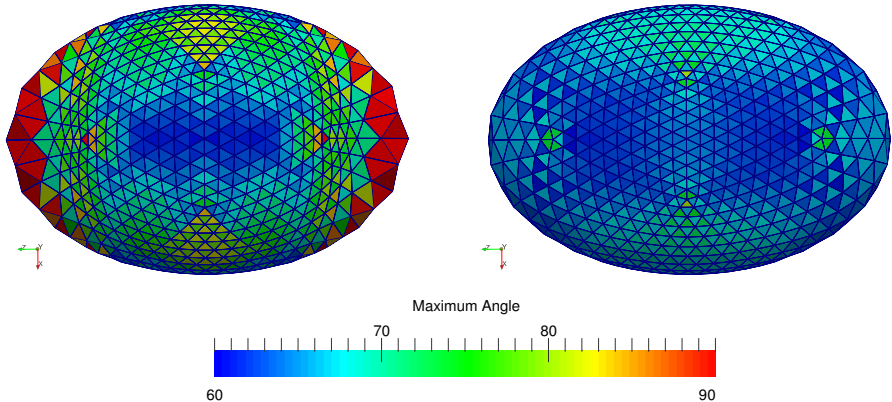
Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°

Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

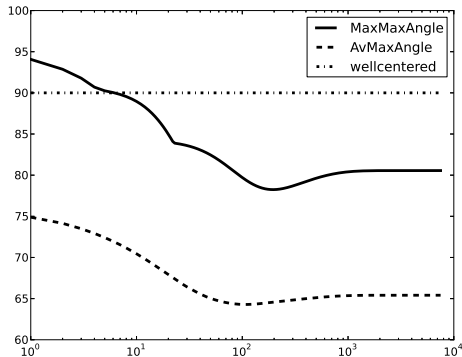
- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : |\sigma^1| = l^*$



Gitter wohlzentrieren

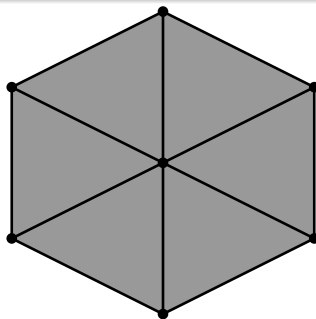
Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : |\sigma^1| = l^*$



Dualgitter $\text{csd}K$

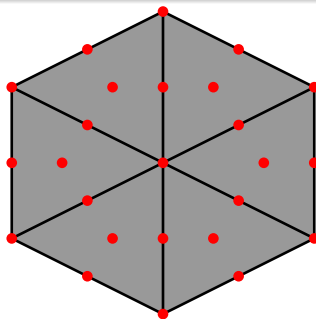
Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

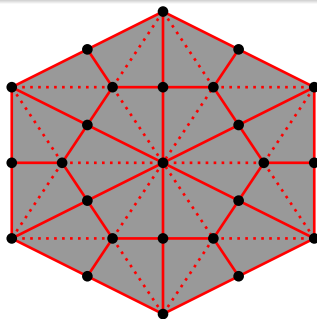
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

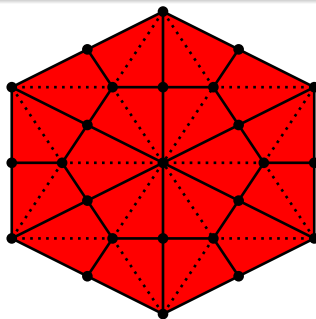
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

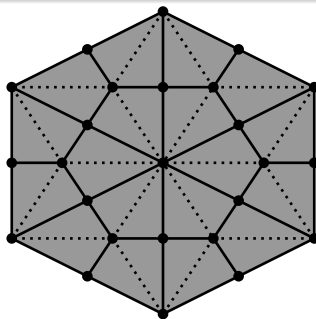
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Das Dualgitter ist wieder ein Primärgitter, aber kein wohlzentriertes.

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

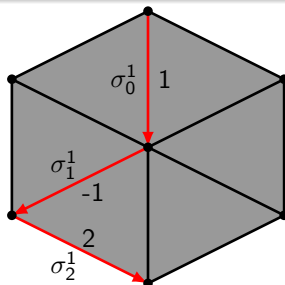
$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_{\sigma} \sigma \mid a_{\sigma} \in \mathbb{Z} \right\}$$

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$

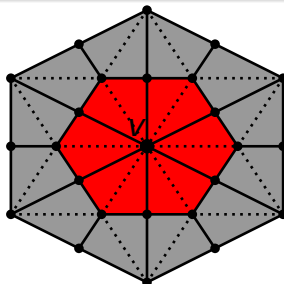


Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$
- zB. $c^2 := \sum_{\sigma^2 \succ_v} \sigma^2 \in C_2(\text{csd}K)$ (1-Ring um v im $\text{csd}K$, $\star v$)



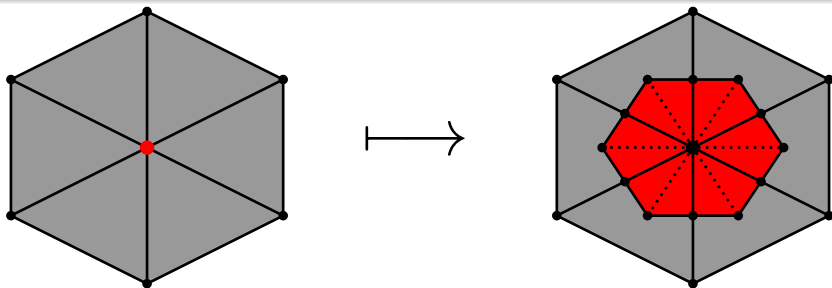
Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) \subset C_{n-p}(\text{csd} K)$

$$\star \sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) \subset C_{n-p}(\text{csd} K)$

$$\star \sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

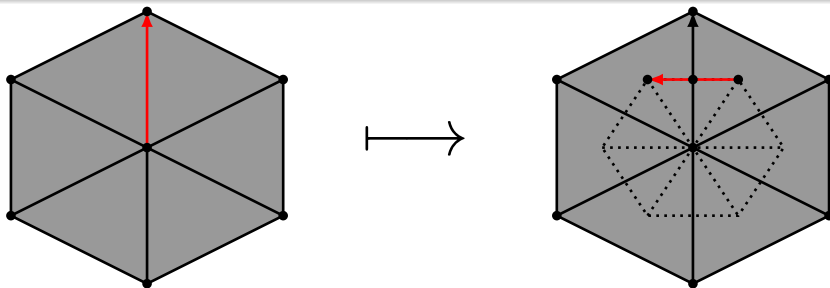
- Knoten $\sigma^0 \mapsto \text{Voronozelle } \star \sigma^0 \in C_2(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) \subset C_{n-p}(\text{csd} K)$

$$\star \sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

- Knoten $\sigma^0 \mapsto \text{Voronozelle } \star \sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto \text{Voronokante } \star \sigma^1 \in C_1(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) \subset C_{n-p}(\text{csd} K)$

$$\star \sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star \sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star \sigma^1 \in C_1(\star K)$
- Dreieck $\sigma^2 \mapsto$ Voronoiknoten $\star \sigma^2 \in C_0(\star K)$

