

Diskretes Äußeres Kalkül (DEC) auf Oberflächen ohne Rand

Ingo Nitschke

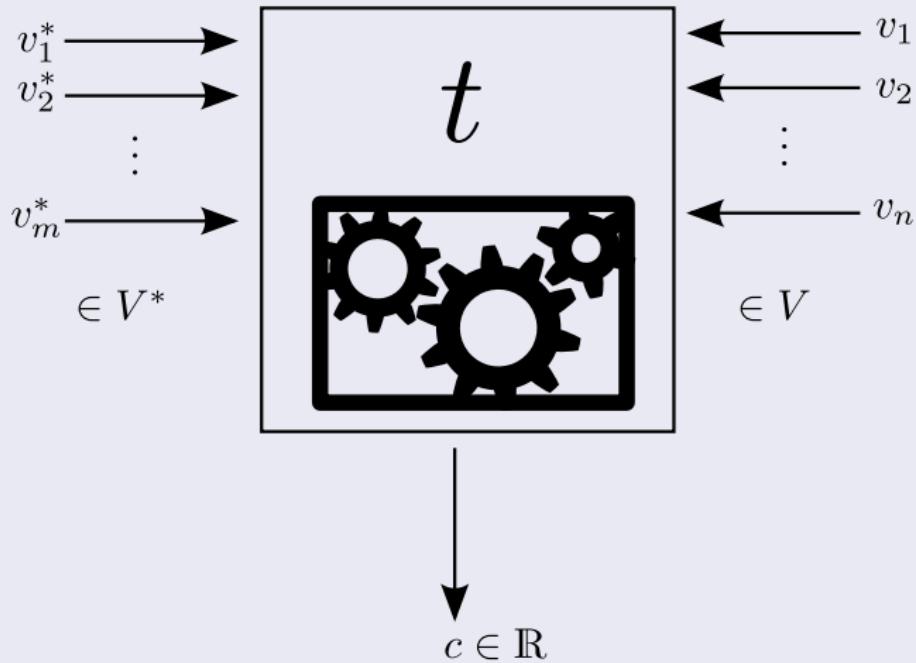
IWR - TU Dresden

24. September 2014

- 1 Differentialformen und Motivation
- 2 Simplizialer Kettenkomplex
- 3 Diskrete Differentialformen
- 4 Krümmungsberechnungen mit DEC
- 5 Fazit und Ausblicke

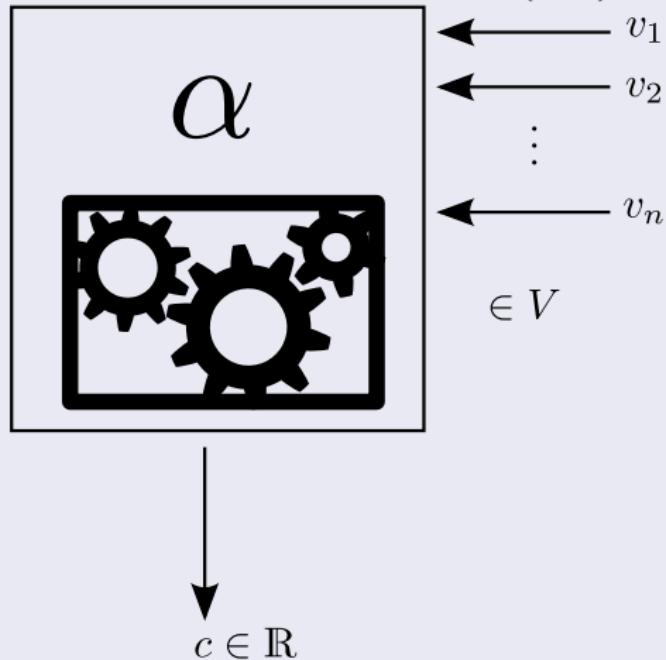
„Tensor-Maschine“

Für einen Vektorraum V nimmt ein (m, n) -Tensor t m Kovektoren aus V^* (Dualraum von V) und n Vektoren aus V und gibt einen Wert aus \mathbb{R} zurück.



Differentialform als „Tensor-Maschine“

Eine Differentialform vom Grad n ist ein antisymmetrischer $(0, n)$ -Tensor.



Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1. Ordnung für $\dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \uparrow & & \sharp \uparrow \text{b} & & \downarrow * \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1. Ordnung für $\dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \uparrow & & \sharp \downarrow & \text{b} \uparrow & \downarrow * \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

- $\delta := - * \mathbf{d} *$ Koableitung

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^1(M) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \uparrow & & \text{b} \uparrow & \sharp \downarrow & \downarrow * \\
 C^\infty(M) & \xleftarrow{\text{Div}} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xleftarrow{-\text{Rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega_d^p(K) := C^p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega_d^p(K) := C^p(K)$
- Operatoren auf $\Omega^p(M)$ (\mathbf{d} , $*$, usw.) \rightsquigarrow Operatoren auf $\Omega_d^p(K)$, $C_p(K)$

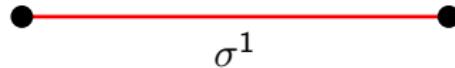
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind **Knoten**, Kanten, Dreiecke, usw.

$$\sigma^0$$

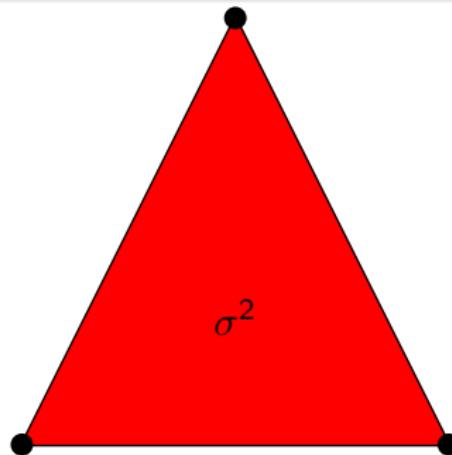
Simplizes $\sigma^P \dots$

- sind Knoten, **Kanten**, Dreiecke, usw.



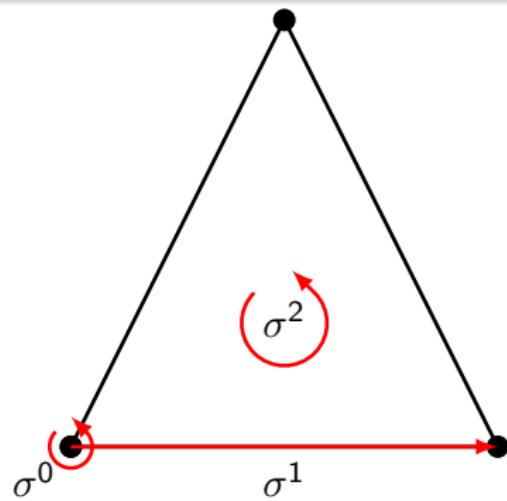
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, **Dreiecke**, usw.



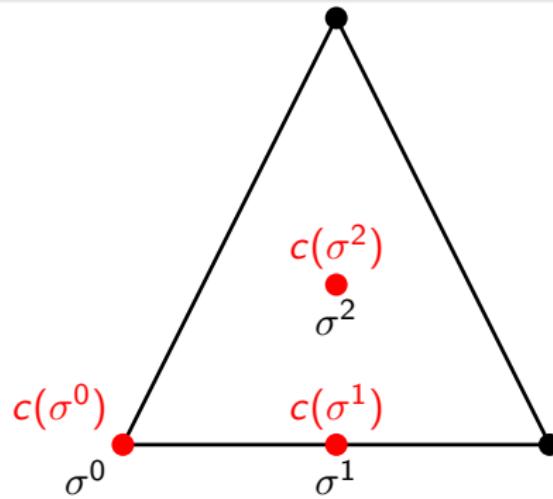
Simplizes $\sigma^P \dots$

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden



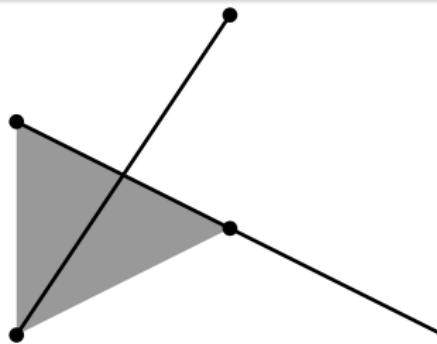
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden
- besitzen einen Umkreismittelpunkt $c(\sigma^p)$
($c(\sigma^p) \in \text{Int}(\sigma^p) \Rightarrow:$ Wohlzentriertheit)



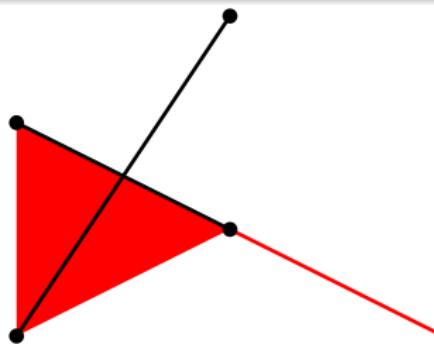
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.



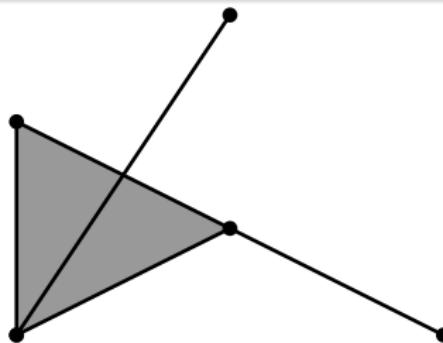
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .



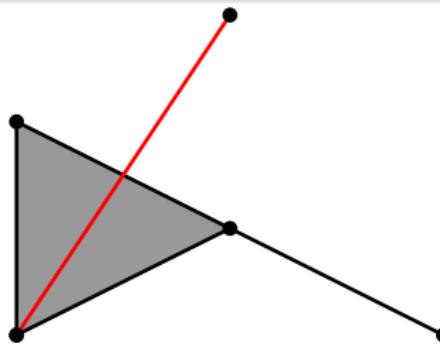
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .



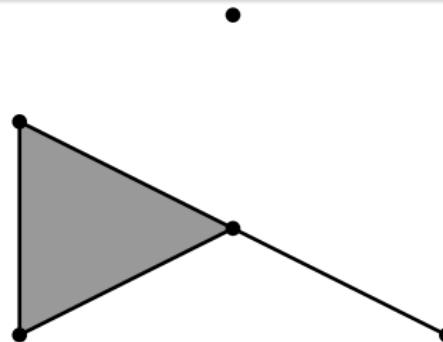
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)



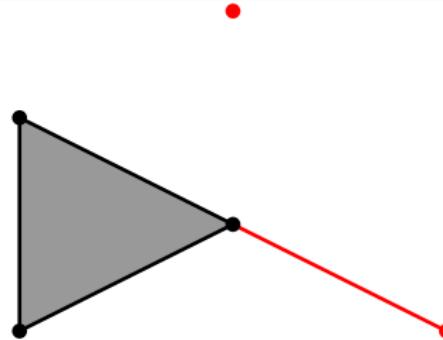
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)



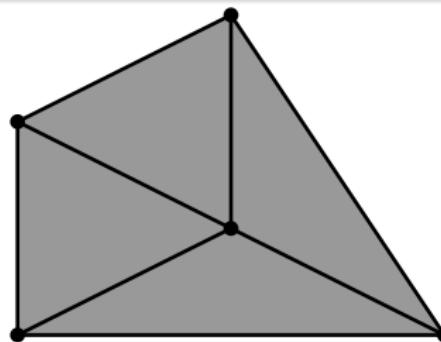
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)



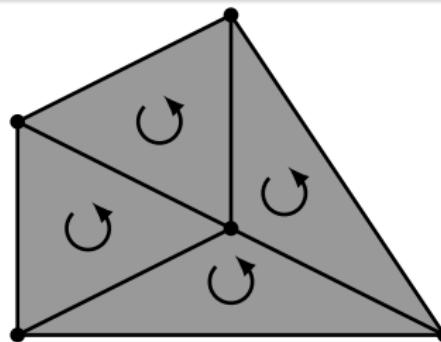
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)



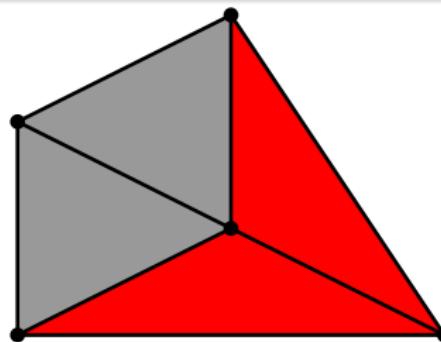
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)



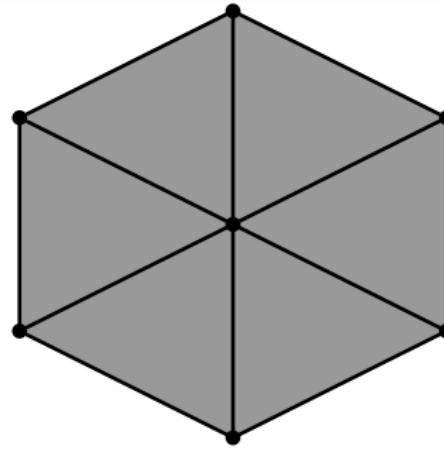
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

Gitter wohlzentrieren

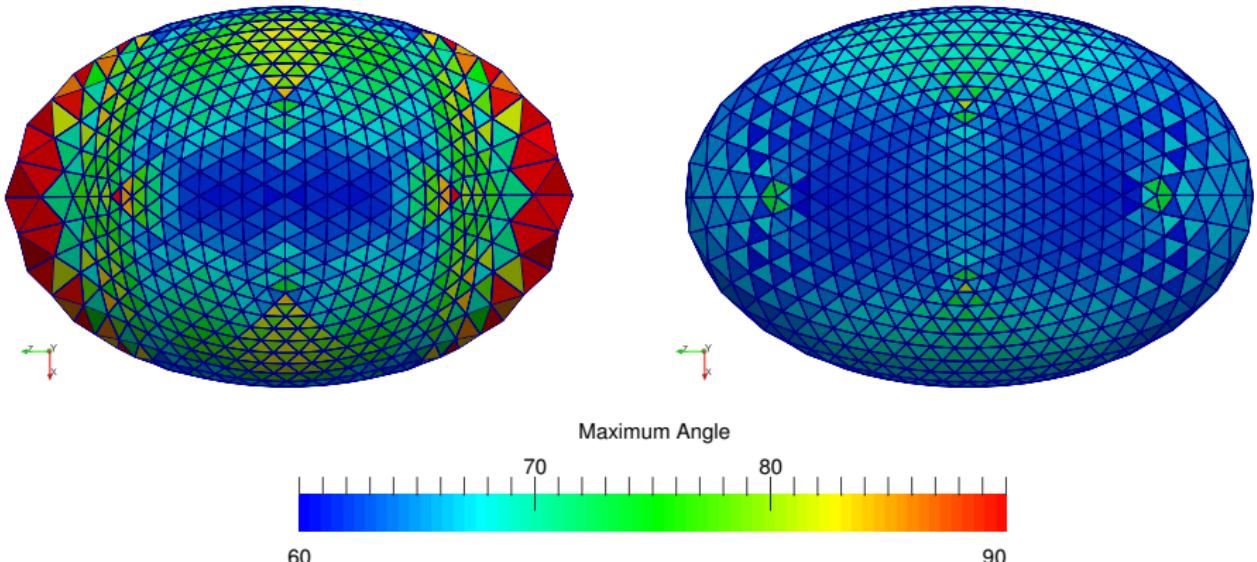
Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°

Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

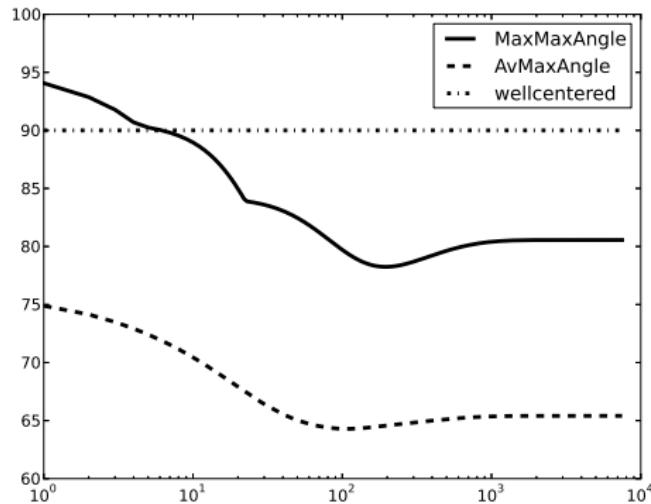
- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : |\sigma^1| = l^*$



Gitter wohlzentrieren

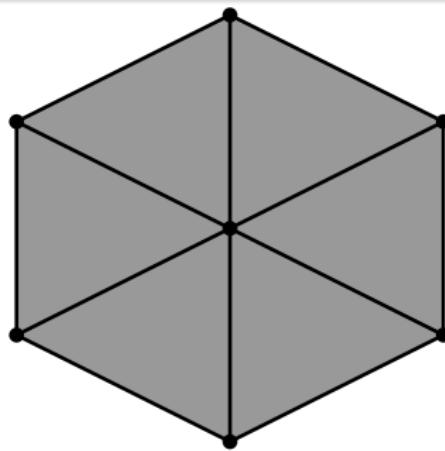
Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : |\sigma^1| = l^*$



Dualgitter $\text{csd}K$

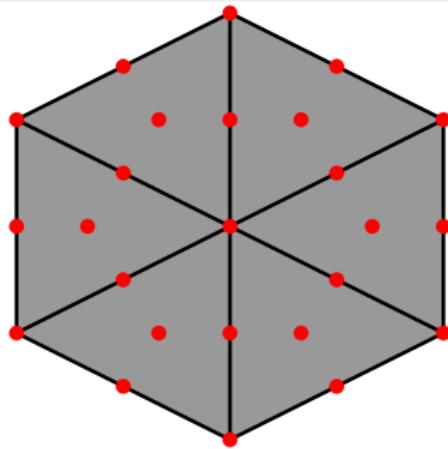
Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

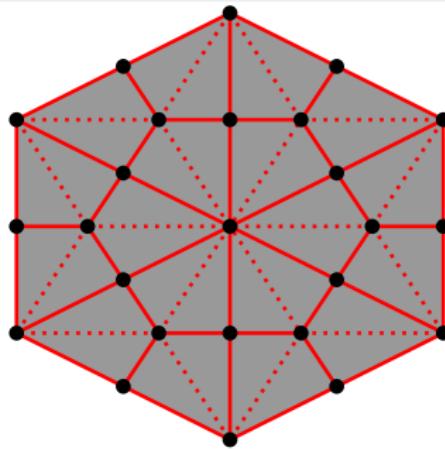
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

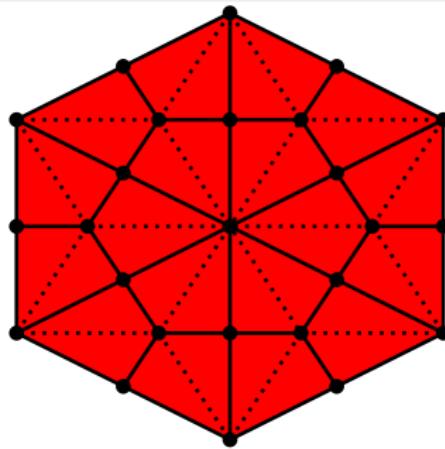
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

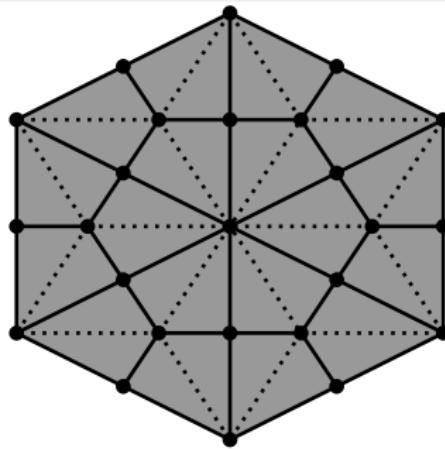
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Das Dualgitter ist wieder ein Primärgitter, aber kein wohlzentriertes.

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

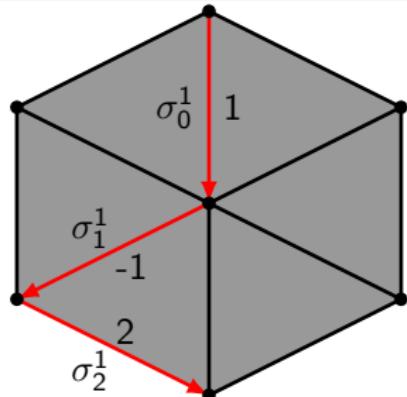
$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$

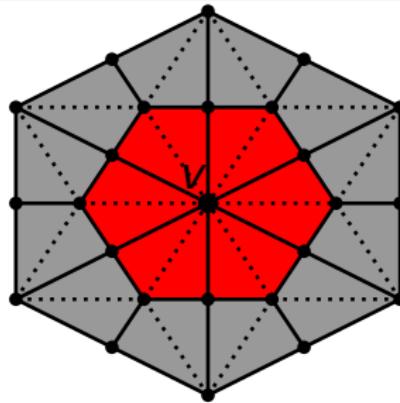


Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$
- zB. $c^2 := \sum_{\sigma^2 \succ v} \sigma^2 \in C_2(\text{csd}K)$ (1-Ring um v im $\text{csd}K$, $\star v$)



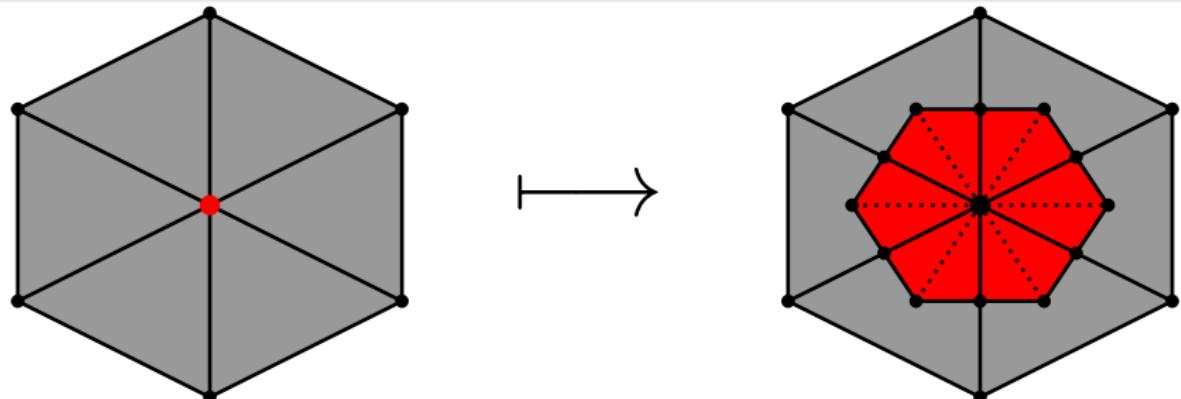
Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

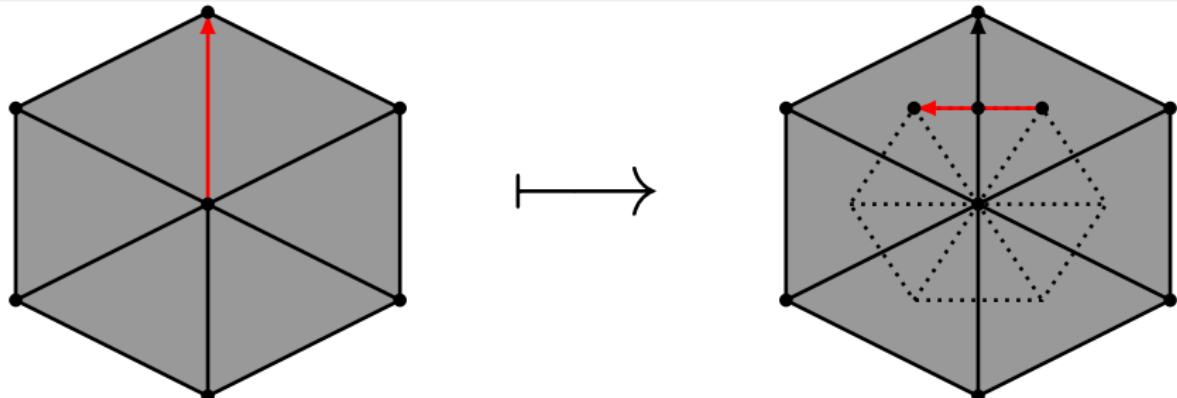
- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

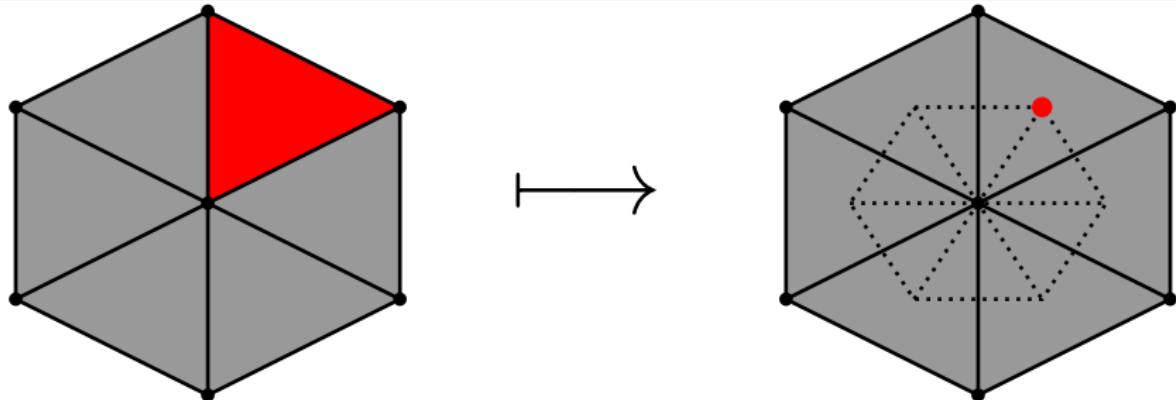
- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star\sigma^1 \in C_1(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star\sigma^1 \in C_1(\star K)$
- Dreieck $\sigma^2 \mapsto$ Voronoiknoten $\star\sigma^2 \in C_0(\star K)$



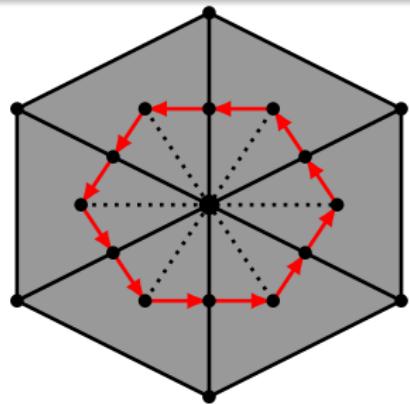
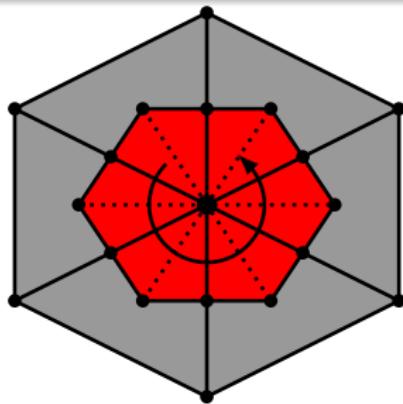
Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$

Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$

- (Dual) $\partial_p \star \sigma^{n-p} = \begin{cases} \sum_{\sigma^{n-p+1} \succ \sigma^{n-p}} \star (s_{\sigma^{n-p+1}} \sigma^{n-p+1}) & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$



Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- (Dual) $\partial_p \star \sigma^{n-p} = \begin{cases} \sum_{\sigma^{n-p+1} \succ \sigma^{n-p}} \star (s_{\sigma^{n-p+1}} \sigma^{n-p+1}) & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- Es gilt die Komplexeigenschaft $\partial \circ \partial = 0 \Rightarrow$ Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \star & & \downarrow \star & & \downarrow \star \\
 0 & \longleftarrow & C_0(\star K) & \xleftarrow{\partial_1} & C_1(\star K) & \xleftarrow{\partial_2} & \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n(\star K) \longleftarrow 0
 \end{array}$$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C_p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0 \quad \Rightarrow \text{Kokettenkomplex}$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C_p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0 \qquad \Rightarrow \text{Kokettenkomplex}$

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega_d^p(K) \rightarrow \Omega_d^{n-p}(\star K) < \Omega_d^{n-p}(\text{csd} K)$

- $\langle * \alpha, \star \sigma^p \rangle := \frac{|\star \sigma^p|}{|\sigma^p|} \alpha(\sigma^p)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C_p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

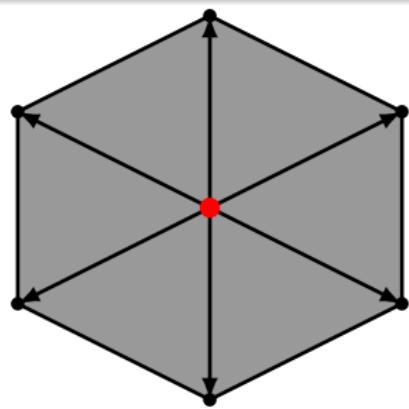
- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0 \qquad \Rightarrow \text{Kokettenkomplex}$

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega_d^p(K) \rightarrow \Omega_d^{n-p}(\star K) < \Omega_d^{n-p}(\text{csd } K)$

- $\langle * \alpha, \star \sigma^p \rangle := \frac{|\star \sigma^p|}{|\sigma^p|} \alpha(\sigma^p)$
- (n=2) Für $\alpha \in \Omega^p(|K|)$ gilt $|(*\psi(\alpha) - \psi(*\alpha))(\star \sigma^p)| \leq \mathcal{O}(h^{3-p})$.

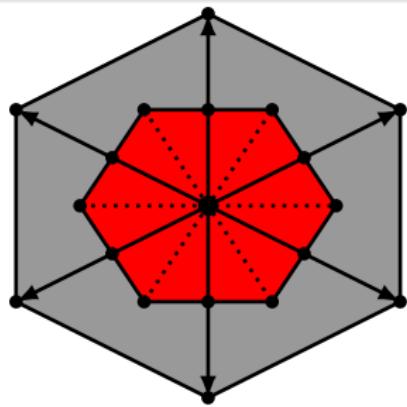
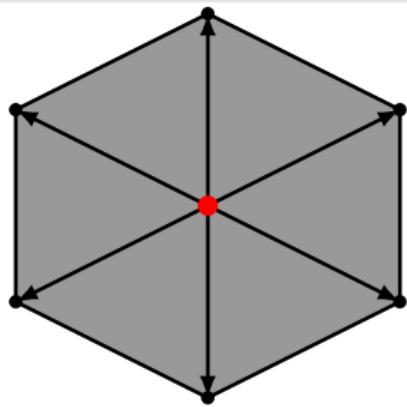
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle *d * df, v \rangle$$



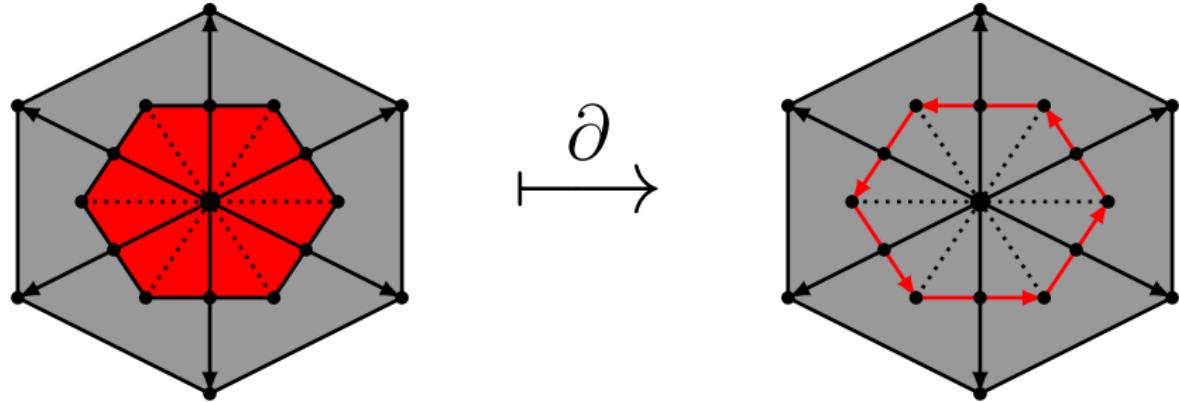
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle$$



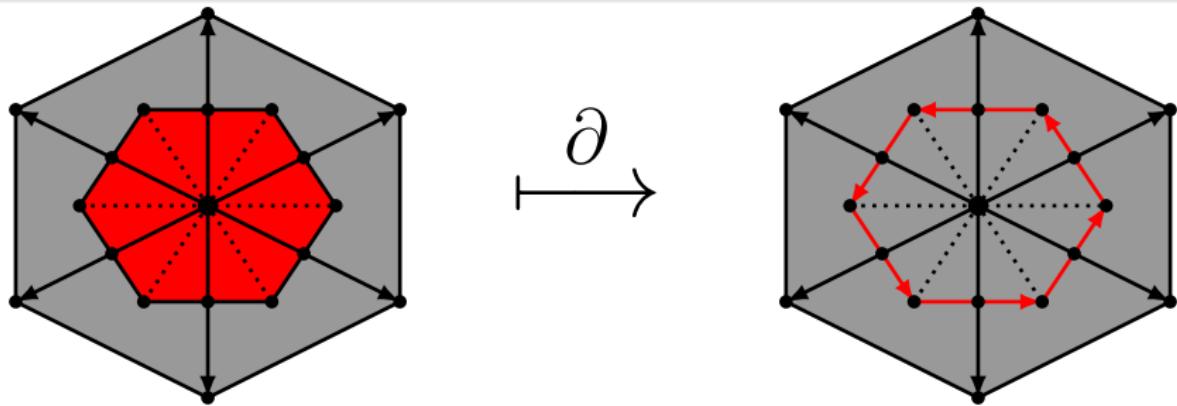
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}\langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle\end{aligned}$$



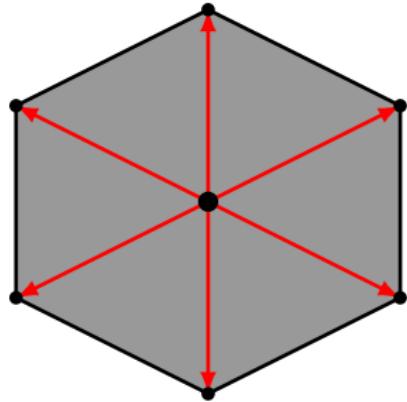
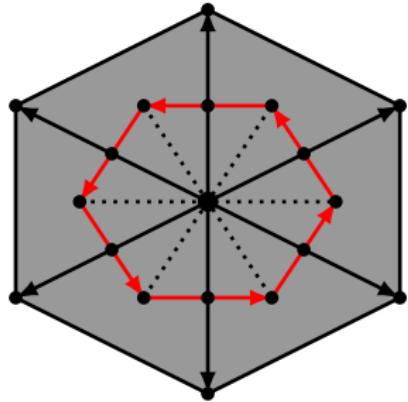
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}\langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle *df, \star \sigma^1 \rangle\end{aligned}$$



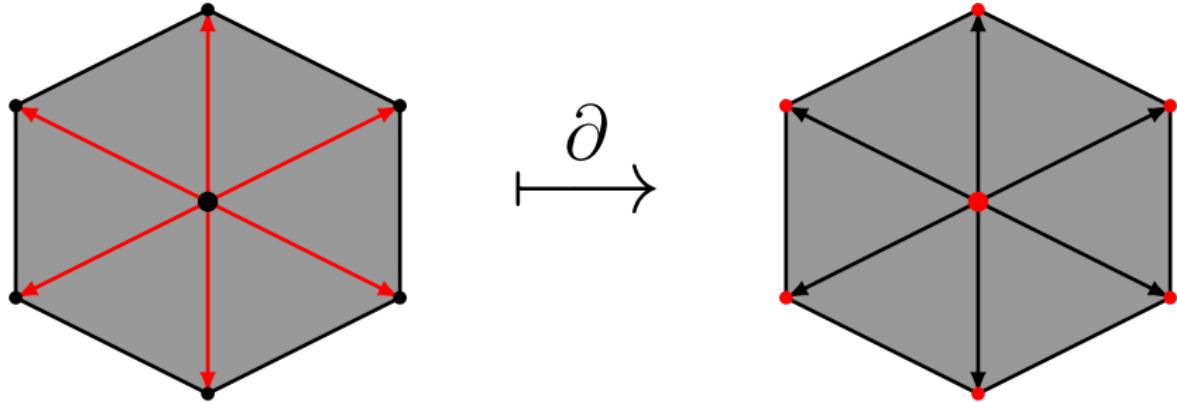
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle *df, \star \sigma^1 \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} \langle df, \sigma^1 \rangle
 \end{aligned}$$



Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle *df, \star \sigma^1 \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} \langle df, \sigma^1 \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1=[v, v_i]} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} (f(v_i) - f(v))
 \end{aligned}$$



Implementierung am Beispiel

- Aufstellen des dualen Problems an einem globalen Knoten $v_i \in K^{(0)}$:

$$\langle * \Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\sigma^1=[v_i, v_j]} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} (f_j - f_i)$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen des dualen Problems an einem globalen Knoten $v_i \in K^{(0)}$:

$$\langle * \Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\sigma^1 = [v_i, v_j]} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} (f_j - f_i)$$

- Umschreiben als Summe über Dreiecke σ^2 und Wechsel zu lokaler (Element)Indizierung:

$$\langle * \Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\substack{\sigma^2 = [v_0^{\sigma^2}, v_1^{\sigma^2}, v_2^{\sigma^2}] \\ v_0^{\sigma^2} = v_i}} \sum_{l=1,2} C_{0,l}^{\sigma^2} (f_l^{\sigma^2} - f_0^{\sigma^2})$$

mit den Koeffizienten

$$C_{k,I}^{\sigma^2} = C_{I,k}^{\sigma^2} = \frac{|\star [v_k^{\sigma^2}, v_I^{\sigma^2}] \cap \sigma^2|}{|[v_k^{\sigma^2}, v_I^{\sigma^2}]|}$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen der Elementmatrizen für jedes Dreieck σ^2 :

$$\begin{bmatrix} -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{02}^{\sigma^2}\right) & C_{01}^{\sigma^2} & C_{02}^{\sigma^2} \\ C_{01}^{\sigma^2} & -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) & C_{12}^{\sigma^2} \\ C_{02}^{\sigma^2} & C_{12}^{\sigma^2} & -\left(C_{02}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{\sigma^2} \\ f_1^{\sigma^2} \\ f_2^{\sigma^2} \end{bmatrix} =: A^{\sigma^2} f^{\sigma^2}$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen der Elementmatrizen für jedes Dreieck σ^2 :

$$\begin{bmatrix} -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{02}^{\sigma^2}\right) & C_{01}^{\sigma^2} & C_{02}^{\sigma^2} \\ C_{01}^{\sigma^2} & -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) & C_{12}^{\sigma^2} \\ C_{02}^{\sigma^2} & C_{12}^{\sigma^2} & -\left(C_{02}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{\sigma^2} \\ f_1^{\sigma^2} \\ f_2^{\sigma^2} \end{bmatrix} =: A^{\sigma^2} f^{\sigma^2}$$

- Assemblierung der globalen Systemmatrix A
(oder Rechte-Seite-Vektor)

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

- Stetiges Problem: $(\mathbb{R}^3\text{-vektoriisiertes skalares Problem})$

$$\vec{H} = -\Delta_B \iota$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

- Stetiges Problem: $(\mathbb{R}^3\text{-vektoriisiertes skalares Problem})$

$$\vec{H} = -\Delta_B \iota$$

- Diskretes Problem: Für alle $k = 1, 2, 3$ und $v \in K^{(0)}$:

$$\langle *H_k, \star v \rangle = -\langle *\Delta_B \iota_k, \star v \rangle$$

Weingartenabbildung

- ist ein $(1,1)$ -Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}} M &\rightarrow T_{\vec{x}} M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

Weingartenabbildung

- ist ein $(1,1)$ -Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}} M &\rightarrow T_{\vec{x}} M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

- Erweiterte Weingartenabbildung:

$$\bar{S} := \nabla \vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Die zwei betragsmäßig größten Eigenwerte sind Hauptkrümmungen.

Weingartenabbildung

- ist ein $(1,1)$ -Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}} M &\rightarrow T_{\vec{x}} M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

- Erweiterte Weingartenabbildung:

$$\bar{S} := \nabla \vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Die zwei betragsmäßig größten Eigenwerte sind Hauptkrümmungen.

- Diskretes Problem: Für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $v \in K^{(0)}$:

$$\langle * \vec{\nu}^i, \star v \rangle = \left\langle * \left[\vec{\nu}^{Av} \right]_i, \star v \right\rangle \quad (1)$$

$$\left\langle * \left[\nabla^{\overline{pd}} \vec{\nu}^i \right]_j, \star v \right\rangle - \left\langle * \left[S^{\overline{pd}} \right]_{ij}, \star v \right\rangle = 0 \quad (2)$$

Falls $\vec{\nu}$ bekannt, dann kann (1) weglassen werden.

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle * \vec{\nu}^{Av}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle * \vec{\nu}^{\text{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskreter Primär-Dual-Gradient im Mittel

$$\left\langle * \nabla^{\overline{pd}} f, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \sum_{\sigma^0 \prec \sigma^2} (f(\sigma^0) - f(v)) \nabla \Phi_{\sigma^0}^{\sigma^2}$$

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle * \vec{\nu}^{\text{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskreter Primär-Dual-Gradient im Mittel

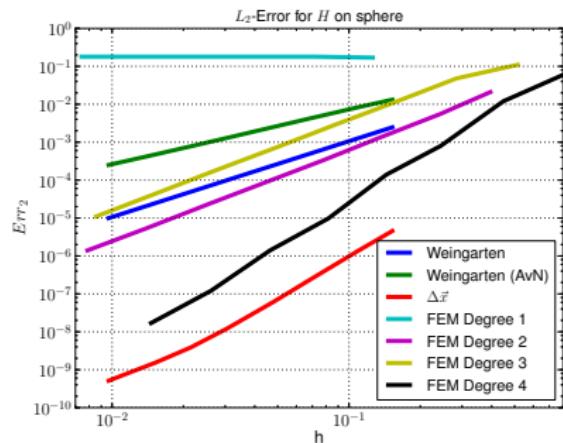
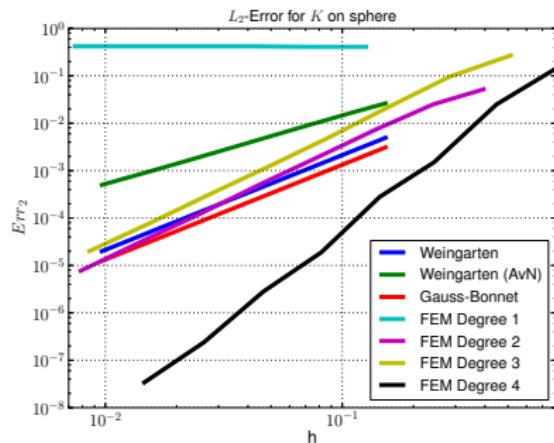
$$\left\langle * \nabla^{\overline{pd}} f, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \sum_{\sigma^0 \prec \sigma^2} (f(\sigma^0) - f(v)) \nabla \Phi_{\sigma^0}^{\sigma^2}$$

Gauß-Bonnet-Operator

$$\left\langle * K^{GB}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left(\frac{2\pi}{m_v} - \sum_{\sigma^2 \succ \sigma^1 \succ v} \text{atan2} \left(2 |\star \sigma^1 \cap \sigma^2|, |\sigma^1| \right) \right)$$

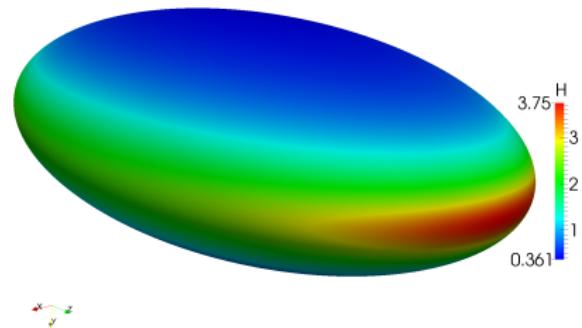
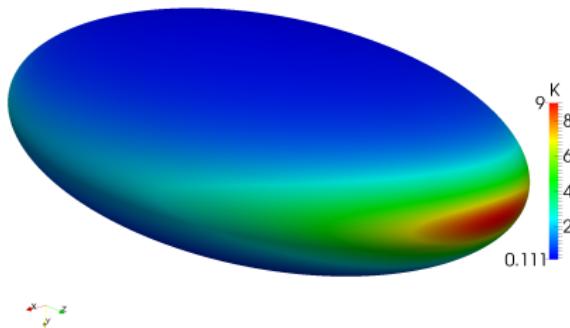
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



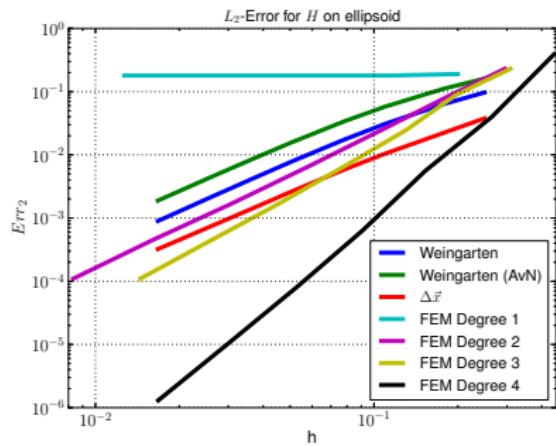
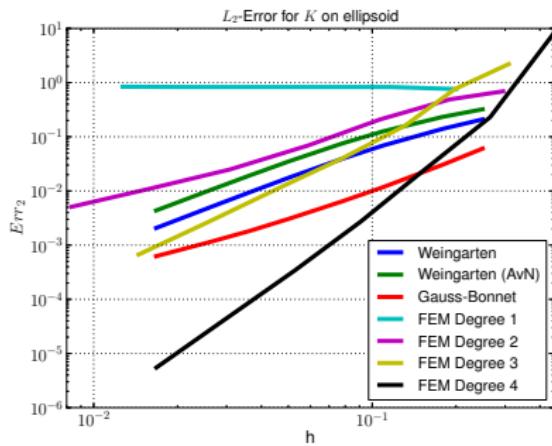
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



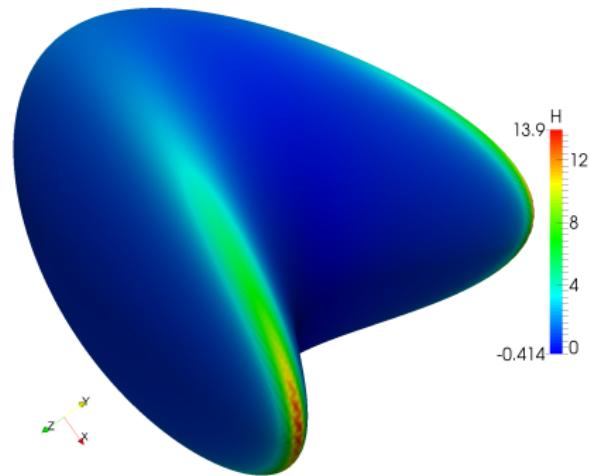
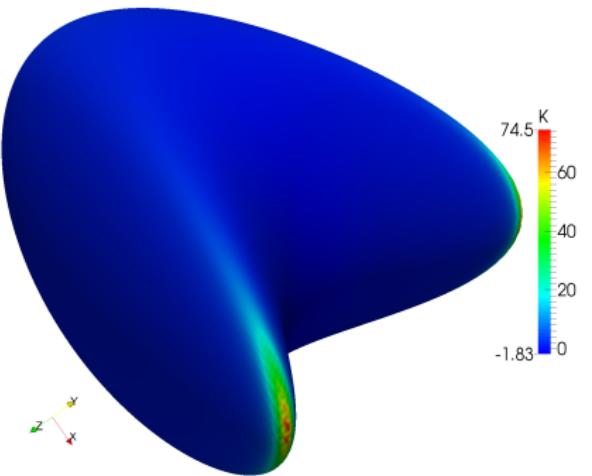
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



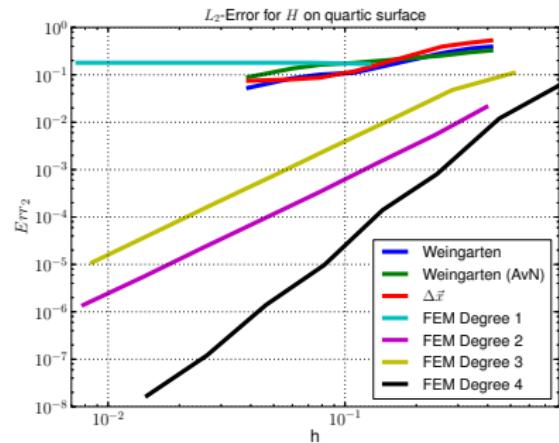
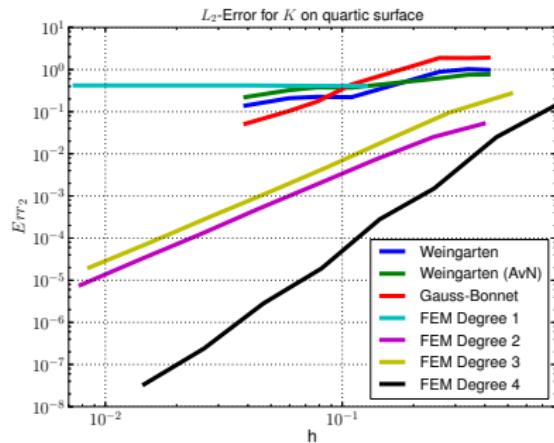
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



Pros

- Äußeres Kalkül (Problemformulierung)
- Geringer Aufwand im Vergleich zu Diffuse Domain Ansätzen
- Geringer Aufwand der Krümmungsberechnung im Vergleich zur isoparametrischen FEM
- Gute Integration in AMDiS

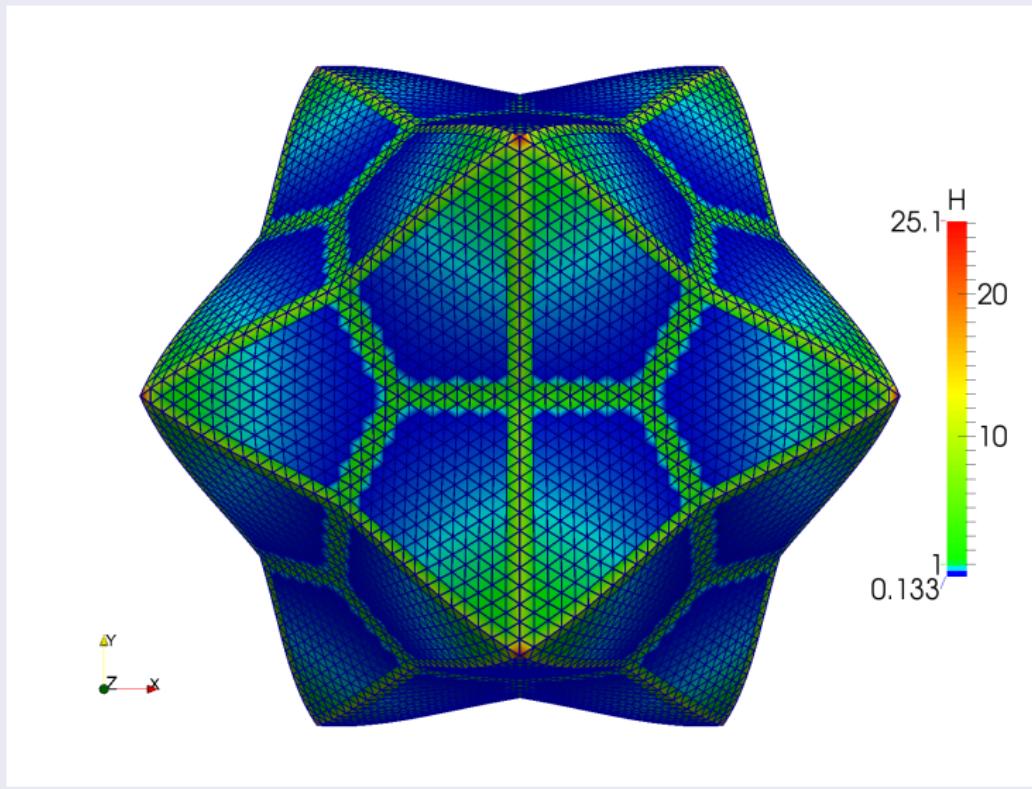
Pros

- Äußeres Kalkül (Problemformulierung)
- Geringer Aufwand im Vergleich zu Diffuse Domain Ansätzen
- Geringer Aufwand der Krümmungsberechnung im Vergleich zur isoparametrischen FEM
- Gute Integration in AMDiS

Kontras

- Äußeres Kalkül (Flat, Sharp)
- Wohlzentriertheit

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Ausgewählte Literatur



R. Abraham, J.E. Marsden, and T.S. Ratiu.

Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.

Number Bd. 75 in Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1988.



Anil Nirmal Hirani.

Discrete Exterior Calculus.

PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 2003.

AAI3086864.



Klaus Jänich.

Vektoranalysis.

Springer-Lehrbuch. Springer, 2005.



P Pathmanathan, J Cooper, A Fletcher, G Mirams, P Murray, J Osborne, J Pitt-Francis, A Walter, and S J Chapman.

A computational study of discrete mechanical tissue models.

Physical Biology, 6(3):036001, 2009.