

Diskretes Äußeres Kalkül (DEC) auf Oberflächen ohne Rand

Ingo Nitschke

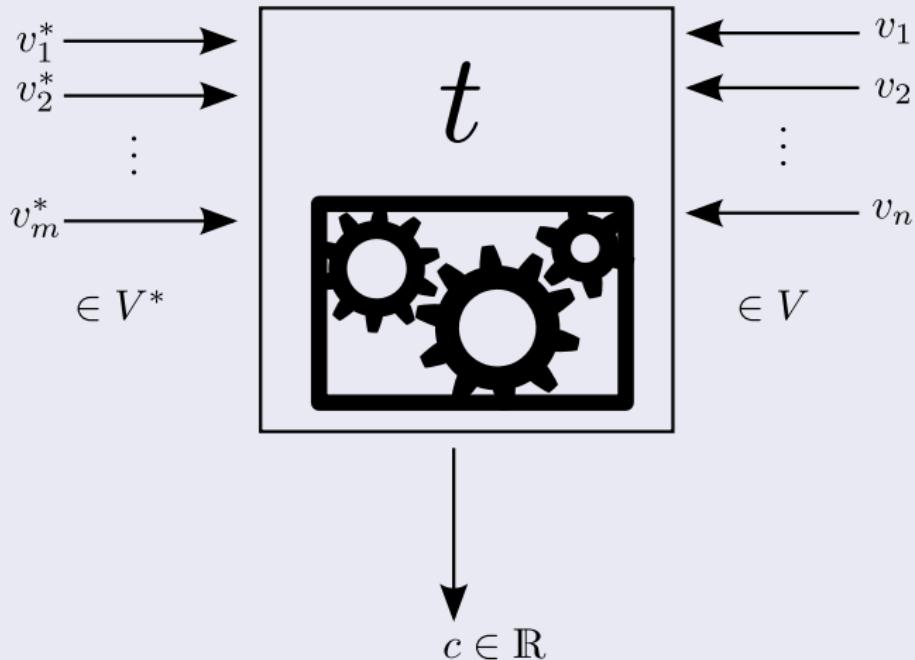
IWR - TU Dresden

25. September 2014

- 1 Differentialformen und Motivation
- 2 Simplizialer Kettenkomplex
- 3 Diskrete Differentialformen
- 4 Krümmungsberechnungen mit DEC
- 5 Fazit und Ausblicke

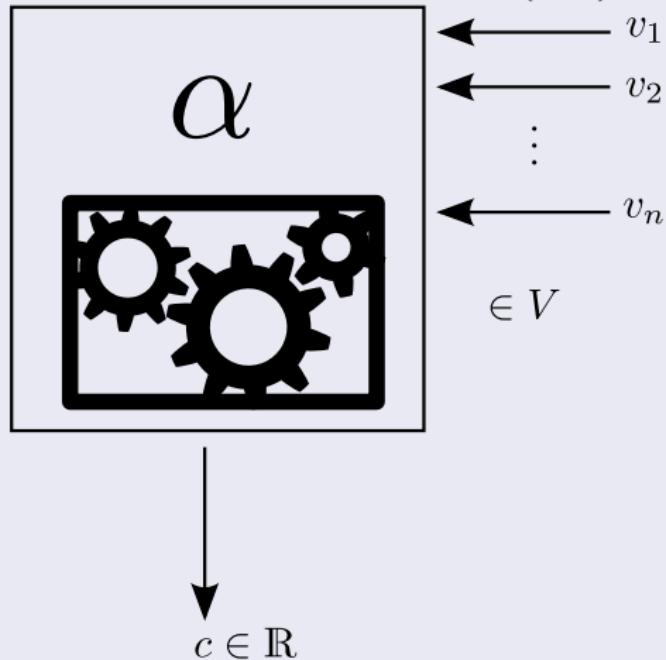
„Tensor-Maschine“

Für einen Vektorraum V nimmt ein (m, n) -Tensor t m Kovektoren aus V^* (Dualraum von V) und n Vektoren aus V und gibt einen Wert aus \mathbb{R} zurück.



Differentialform als „Tensor-Maschine“

Eine Differentialform vom Grad n ist ein antisymmetrischer $(0, n)$ -Tensor.



Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1. Ordnung für $\dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \uparrow & & \sharp \uparrow \text{b} & & \downarrow * \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1. Ordnung für $\dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{\mathbf{d}} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \uparrow & & \sharp \downarrow & \text{b} \uparrow & \downarrow * \\
 C^\infty(M) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

- $\delta := - * \mathbf{d} *$ Koableitung

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^0(M) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^1(M) & \xleftarrow{\delta} & \Omega^2(M) \\
 \text{id} \uparrow & & \text{b} \uparrow & \sharp \downarrow & \downarrow * \\
 C^\infty(M) & \xleftarrow{\text{Div}} & \mathcal{V}^\infty(M) & \xleftarrow{-\text{Rot}} & C^\infty(M)
 \end{array}$$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega_d^p(K) := C^p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K , Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega_d^p(K) := C^p(K)$
- Operatoren auf $\Omega^p(M)$ (\mathbf{d} , $*$, usw.) \rightsquigarrow Operatoren auf $\Omega_d^p(K)$, $C_p(K)$

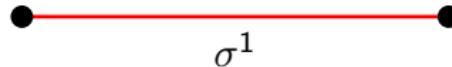
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind **Knoten**, Kanten, Dreiecke, usw.

$$\sigma^0$$

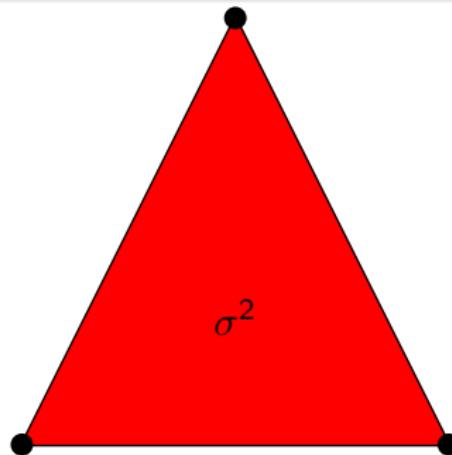

Simplizes $\sigma^P \dots$

- sind Knoten, **Kanten**, Dreiecke, usw.



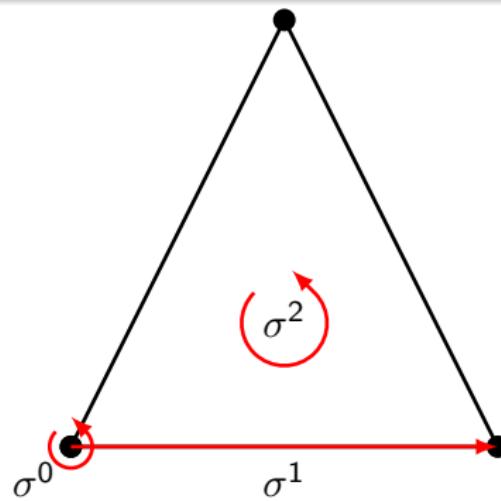
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, **Dreiecke**, usw.



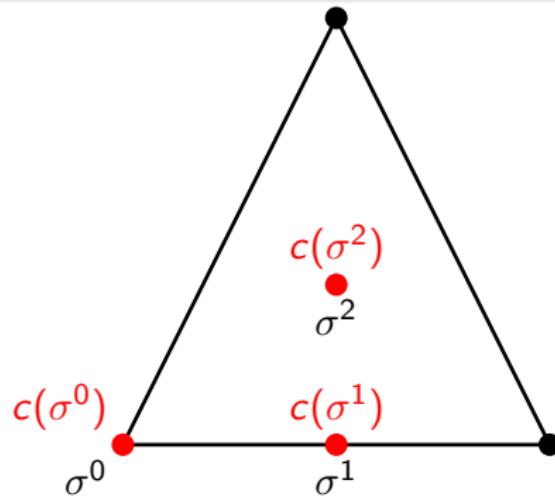
Simplizes $\sigma^P \dots$

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden



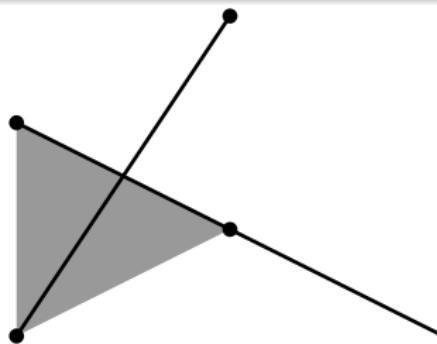
Simplizes $\sigma^p \dots$

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden
- besitzen einen Umkreismittelpunkt $c(\sigma^p)$
($c(\sigma^p) \in \text{Int}(\sigma^p) \Rightarrow:$ Wohlzentriertheit)



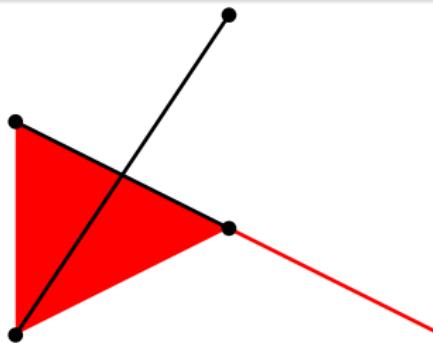
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.



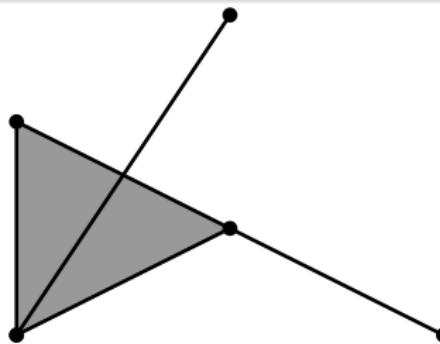
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .



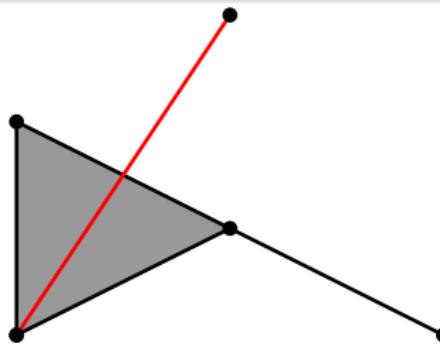
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .



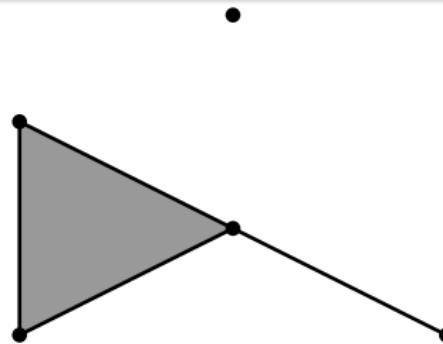
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)



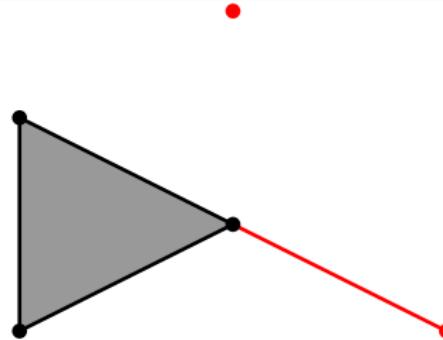
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)



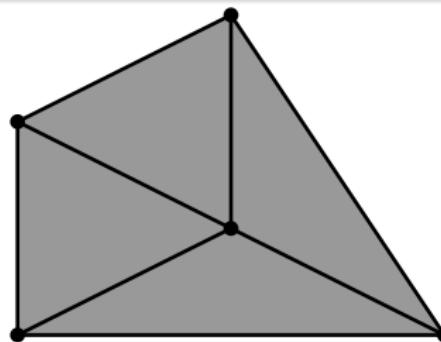
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)



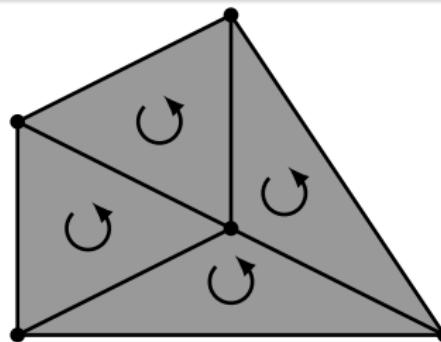
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)



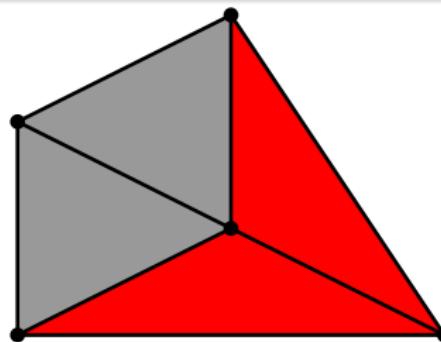
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)



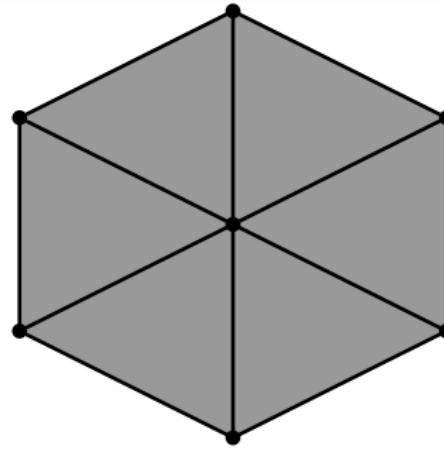
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K .
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K . (\Rightarrow : Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0 -Mannigfaltigkeit. (\Rightarrow : mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. (\Rightarrow : Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

Gitter wohlzentrieren

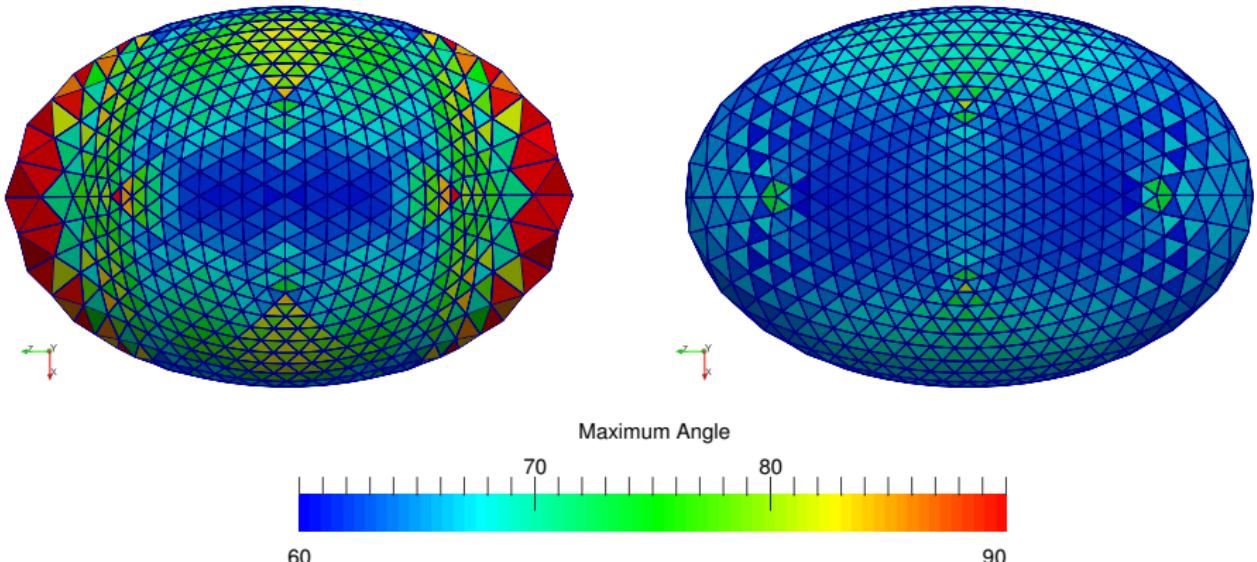
Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°

Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

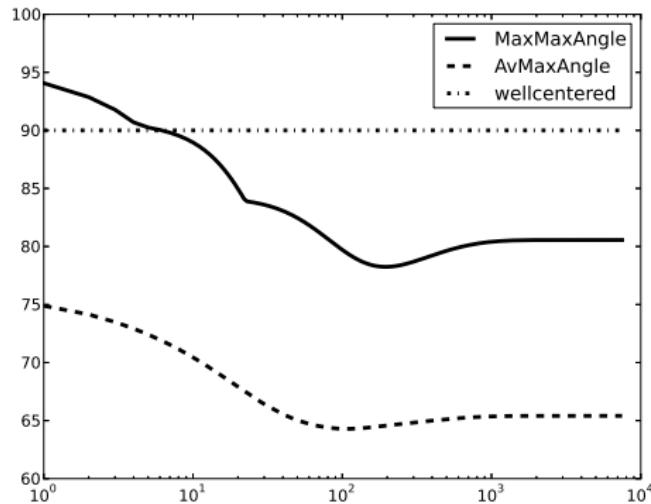
- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : |\sigma^1| = l^*$



Gitter wohlzentrieren

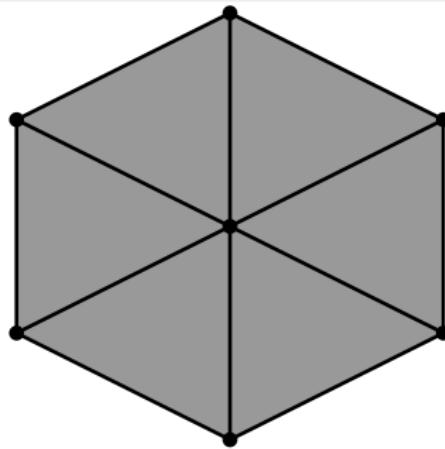
Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. \vec{F} wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : |\sigma^1| = l^*$



Dualgitter $\text{csd}K$

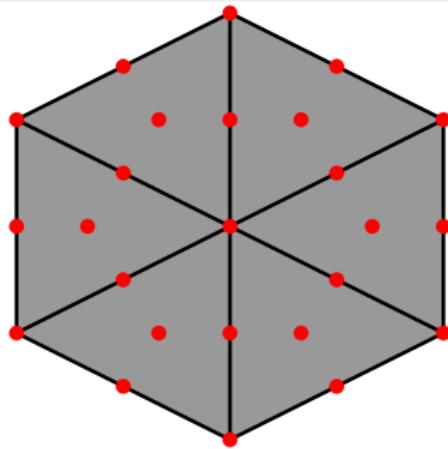
Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

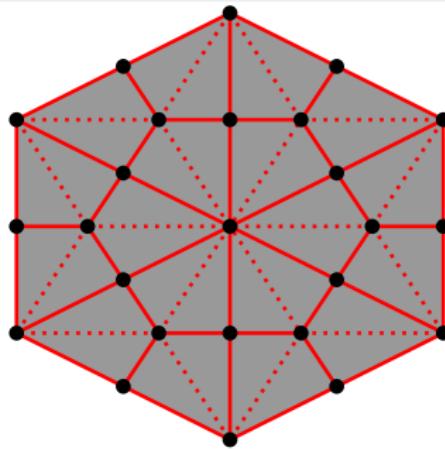
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

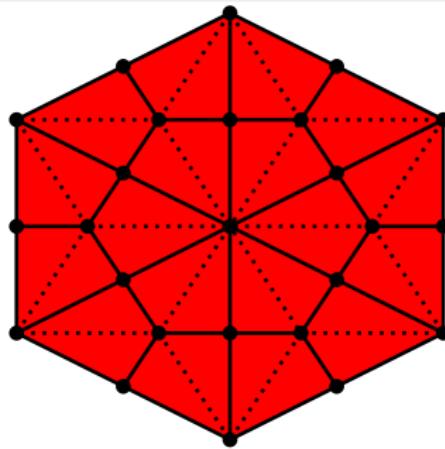
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

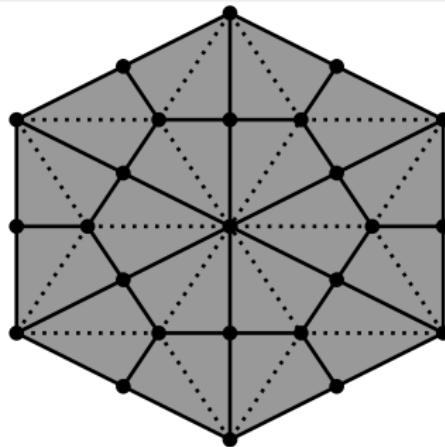
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Dualgitter $\text{csd}K$

Das Dualgitter $\text{csd}K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^P)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^P), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^P \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Das Dualgitter ist wieder ein Primärgitter, aber kein wohlzentriertes.

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

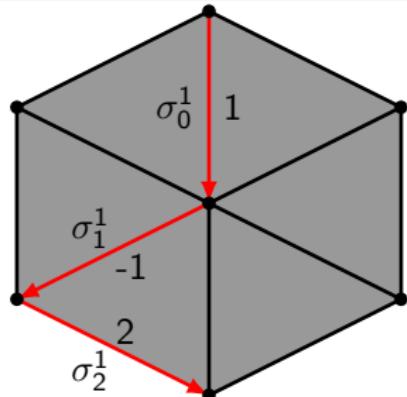
$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$

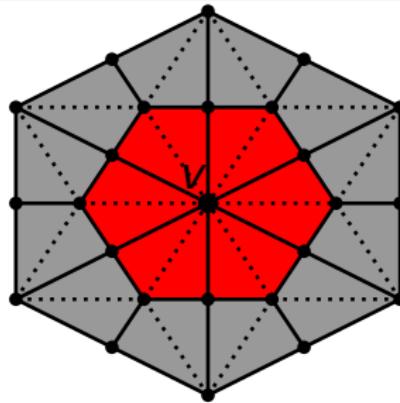


Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p -Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p -Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$
- zB. $c^2 := \sum_{\sigma^2 \succ v} \sigma^2 \in C_2(\text{csd}K)$ (1-Ring um v im $\text{csd}K$, $\star v$)



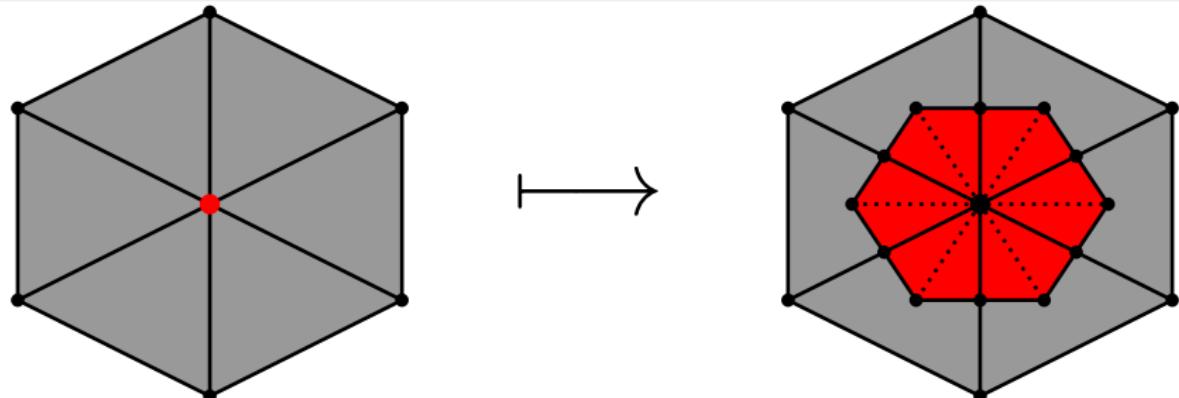
Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

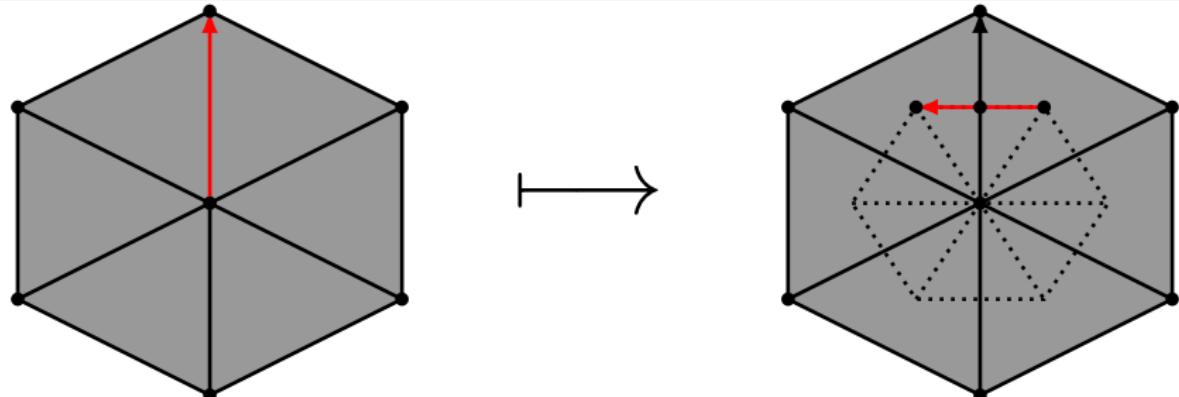
- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

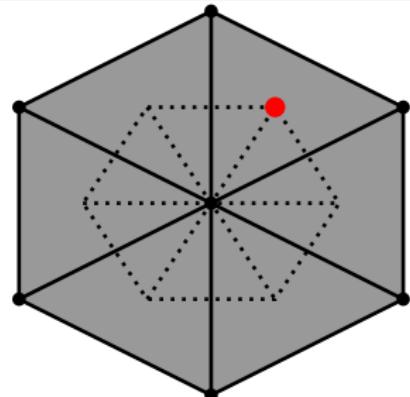
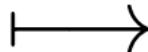
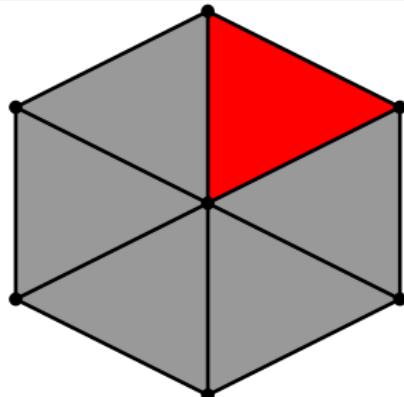
- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star\sigma^1 \in C_1(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \rightarrow C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\text{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \dots \sigma^n} [c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \dots, c(\sigma^n)]$$

- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star\sigma^1 \in C_1(\star K)$
- Dreieck $\sigma^2 \mapsto$ Voronoiknoten $\star\sigma^2 \in C_0(\star K)$



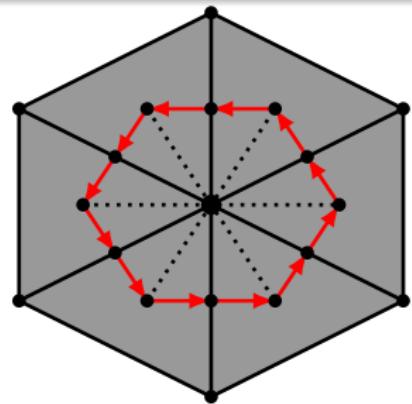
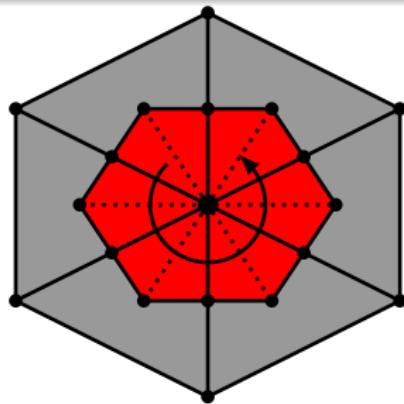
Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$

Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$

- (Dual) $\partial_p \star \sigma^{n-p} = \begin{cases} \sum_{\sigma^{n-p+1} \succ \sigma^{n-p}} \star (s_{\sigma^{n-p+1}} \sigma^{n-p+1}) & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$



Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- (Dual) $\partial_p \star \sigma^{n-p} = \begin{cases} \sum_{\sigma^{n-p+1} \succ \sigma^{n-p}} \star (s_{\sigma^{n-p+1}} \sigma^{n-p+1}) & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- Es gilt die Komplexeigenschaft $\partial \circ \partial = 0 \Rightarrow$ Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \star & & \downarrow \star & & \downarrow \star \\
 0 & \longleftarrow & C_0(\star K) & \xleftarrow{\partial_1} & C_1(\star K) & \xleftarrow{\partial_2} & \dots \xleftarrow{\partial_n} C_n(\star K) \longleftarrow 0
 \end{array}$$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0 \quad \Rightarrow \text{Kokettenkomplex}$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C_p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0 \qquad \Rightarrow \text{Kokettenkomplex}$

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega_d^p(K) \rightarrow \Omega_d^{n-p}(\star K) < \Omega_d^{n-p}(\text{csd} K)$

- $\langle * \alpha, \star \sigma^p \rangle := \frac{|\star \sigma^p|}{|\sigma^p|} \alpha(\sigma^p)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C_p(K) := \text{Hom}(C_p(K), \mathbb{R})$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

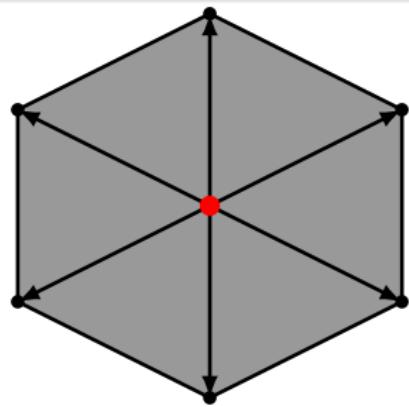
- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial \quad (\text{d.h. } \langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle)$
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0 \quad \Rightarrow \text{Kokettenkomplex}$

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega_d^p(K) \rightarrow \Omega_d^{n-p}(\star K) < \Omega_d^{n-p}(\text{csd} K)$

- $\langle * \alpha, \star \sigma^p \rangle := \frac{|\star \sigma^p|}{|\sigma^p|} \alpha(\sigma^p)$
- (n=2) Für $\alpha \in \Omega^p(|K|)$ gilt $\|*\psi(\alpha) - \psi(*\alpha)\| \leq \mathcal{O}(h^{3-p})$.

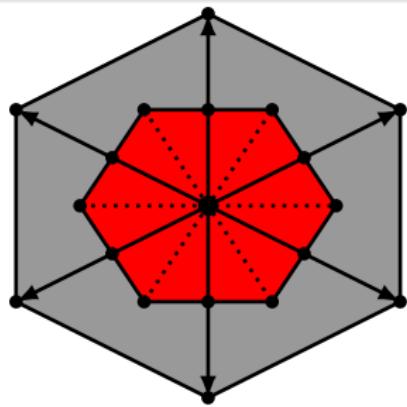
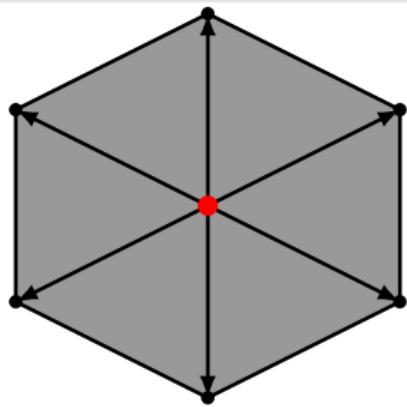
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle *d * df, v \rangle$$



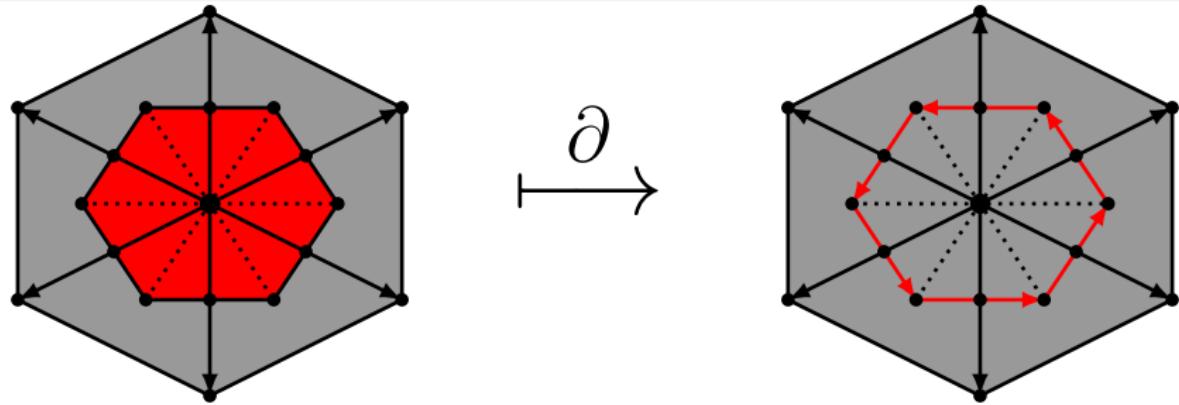
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle$$



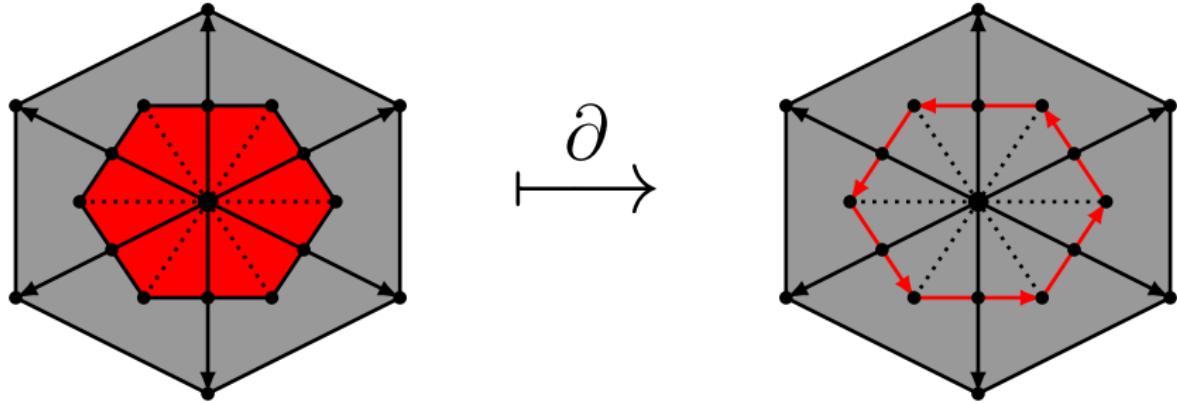
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}\langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle\end{aligned}$$



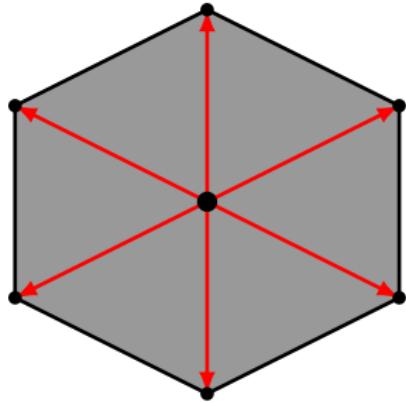
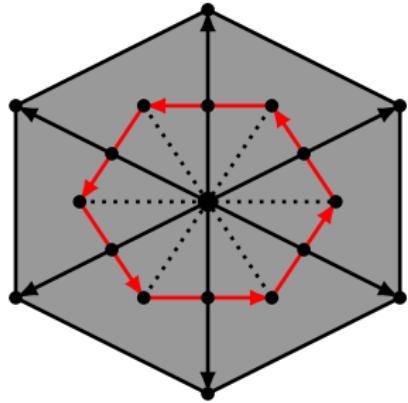
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}\langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle *df, \star \sigma^1 \rangle\end{aligned}$$



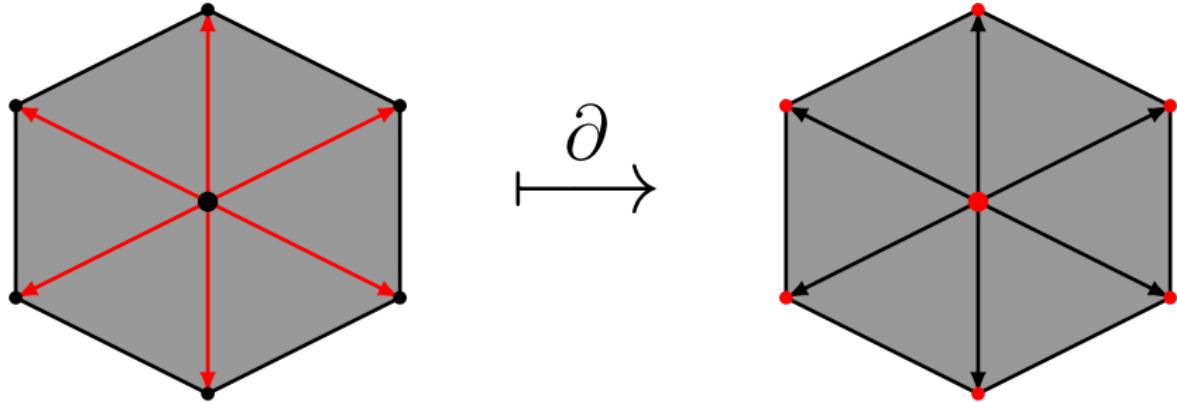
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle *df, \star \sigma^1 \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} \langle df, \sigma^1 \rangle
 \end{aligned}$$



Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta_B f, v \rangle &= \langle *d * df, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle d * df, \star v \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \langle *df, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle *df, \star \sigma^1 \rangle \\
 &= \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} \langle df, \sigma^1 \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1=[v, v_i]} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} (f(v_i) - f(v))
 \end{aligned}$$



Implementierung am Beispiel

- Aufstellen des dualen Problems an einem globalen Knoten $v_i \in K^{(0)}$:

$$\langle * \Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\sigma^1=[v_i, v_j]} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} (f_j - f_i)$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen des dualen Problems an einem globalen Knoten $v_i \in K^{(0)}$:

$$\langle * \Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\sigma^1 = [v_i, v_j]} \frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|} (f_j - f_i)$$

- Umschreiben als Summe über Dreiecke σ^2 und Wechsel zu lokaler (Element)Indizierung:

$$\langle * \Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\substack{\sigma^2 = [v_0^{\sigma^2}, v_1^{\sigma^2}, v_2^{\sigma^2}] \\ v_0^{\sigma^2} = v_i}} \sum_{l=1,2} C_{0,l}^{\sigma^2} (f_l^{\sigma^2} - f_0^{\sigma^2})$$

mit den Koeffizienten

$$C_{k,I}^{\sigma^2} = C_{I,k}^{\sigma^2} = \frac{|\star [v_k^{\sigma^2}, v_I^{\sigma^2}] \cap \sigma^2|}{|[v_k^{\sigma^2}, v_I^{\sigma^2}]|}$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen der Elementmatrizen für jedes Dreieck σ^2 :

$$\begin{bmatrix} -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{02}^{\sigma^2}\right) & C_{01}^{\sigma^2} & C_{02}^{\sigma^2} \\ C_{01}^{\sigma^2} & -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) & C_{12}^{\sigma^2} \\ C_{02}^{\sigma^2} & C_{12}^{\sigma^2} & -\left(C_{02}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{\sigma^2} \\ f_1^{\sigma^2} \\ f_2^{\sigma^2} \end{bmatrix} =: A^{\sigma^2} f^{\sigma^2}$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen der Elementmatrizen für jedes Dreieck σ^2 :

$$\begin{bmatrix} -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{02}^{\sigma^2}\right) & C_{01}^{\sigma^2} & C_{02}^{\sigma^2} \\ C_{01}^{\sigma^2} & -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) & C_{12}^{\sigma^2} \\ C_{02}^{\sigma^2} & C_{12}^{\sigma^2} & -\left(C_{02}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{\sigma^2} \\ f_1^{\sigma^2} \\ f_2^{\sigma^2} \end{bmatrix} =: A^{\sigma^2} f^{\sigma^2}$$

- Assemblierung der globalen Systemmatrix A
(oder Rechte-Seite-Vektor)

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

- Stetiges Problem: $(\mathbb{R}^3\text{-vektoriertes skalares Problem})$

$$\vec{H} = -\Delta_B \iota$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \implies H = \frac{1}{2} \|\vec{H}\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

- Stetiges Problem: $(\mathbb{R}^3\text{-vektoriisiertes skalares Problem})$

$$\vec{H} = -\Delta_B \iota$$

- Diskretes Problem: Für alle $k = 1, 2, 3$ und $v \in K^{(0)}$:

$$\langle *H_k, \star v \rangle = -\langle *\Delta_B \iota_k, \star v \rangle$$

Weingartenabbildung

- ist ein $(1,1)$ -Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}} M &\rightarrow T_{\vec{x}} M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

Weingartenabbildung

- ist ein $(1,1)$ -Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}} M &\rightarrow T_{\vec{x}} M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

- Erweiterte Weingartenabbildung:

$$\bar{S} := \nabla \vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Die zwei betragsmäßig größten Eigenwerte sind Hauptkrümmungen.

Weingartenabbildung

- ist ein $(1,1)$ -Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}} M &\rightarrow T_{\vec{x}} M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

- Erweiterte Weingartenabbildung:

$$\bar{S} := \nabla \vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Die zwei betragsmäßig größten Eigenwerte sind Hauptkrümmungen.

- Diskretes Problem: Für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $v \in K^{(0)}$:

$$\langle * \vec{\nu}^i, \star v \rangle = \left\langle * \left[\vec{\nu}^{Av} \right]_i, \star v \right\rangle \quad (1)$$

$$\left\langle * \left[\nabla^{\overline{pd}} \vec{\nu}^i \right]_j, \star v \right\rangle - \left\langle * \left[S^{\overline{pd}} \right]_{ij}, \star v \right\rangle = 0 \quad (2)$$

Falls $\vec{\nu}$ bekannt, dann kann (1) weglassen werden.

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle * \vec{\nu}^{Av}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle * \vec{\nu}^{\text{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskreter Primär-Dual-Gradient im Mittel

$$\left\langle * \nabla^{\overline{pd}} f, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \sum_{\sigma^0 \prec \sigma^2} (f(\sigma^0) - f(v)) \nabla \Phi_{\sigma^0}^{\sigma^2}$$

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle * \vec{\nu}^{\text{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskreter Primär-Dual-Gradient im Mittel

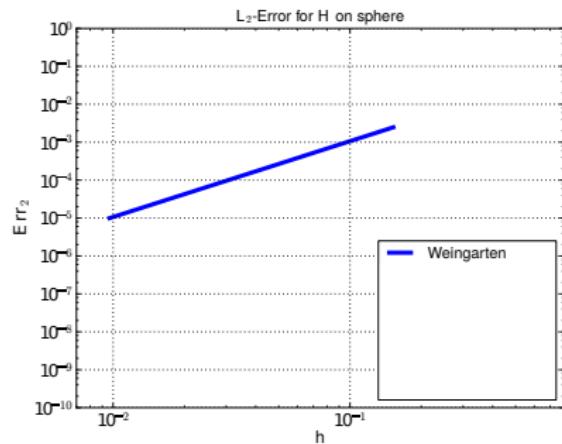
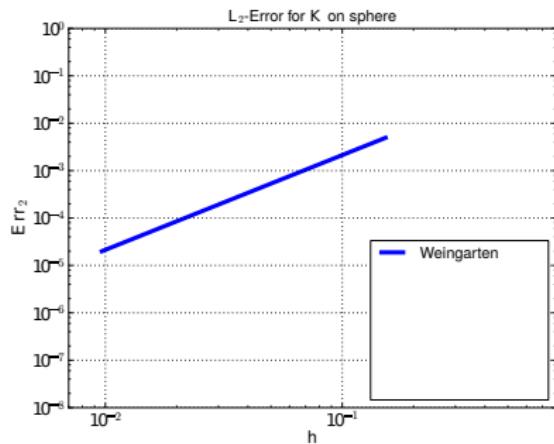
$$\left\langle * \nabla^{\overline{pd}} f, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} |\star v \cap \sigma^2| \sum_{\sigma^0 \prec \sigma^2} (f(\sigma^0) - f(v)) \nabla \Phi_{\sigma^0}^{\sigma^2}$$

Gauß-Bonnet-Operator

$$\left\langle * K^{GB}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left(\frac{2\pi}{m_v} - \sum_{\sigma^2 \succ \sigma^1 \succ v} \text{atan2} \left(2 |\star \sigma^1 \cap \sigma^2|, |\sigma^1| \right) \right)$$

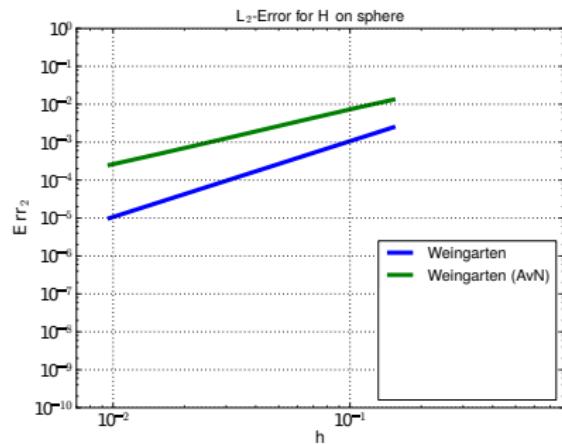
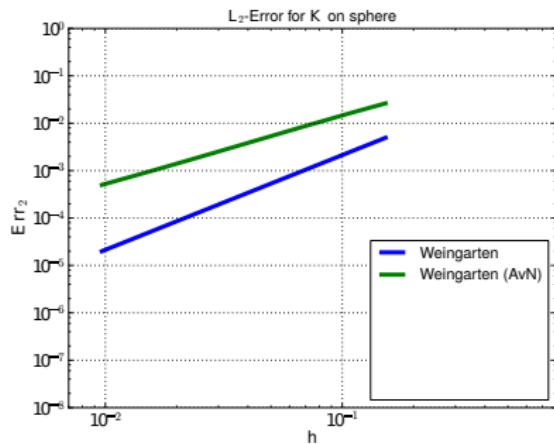
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



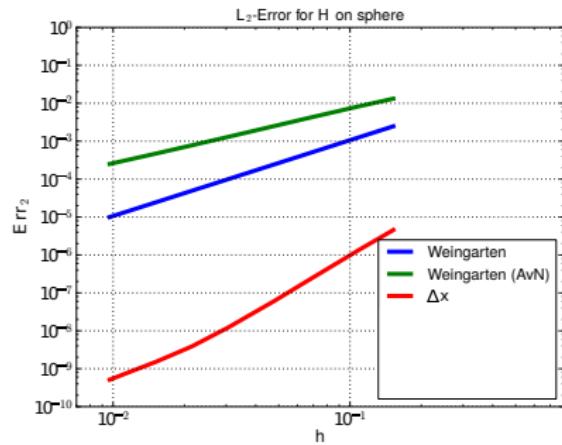
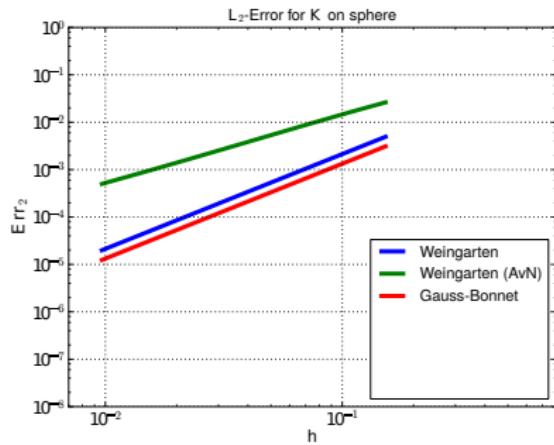
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



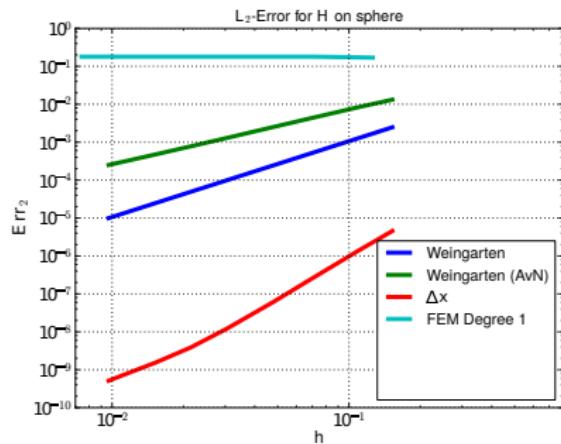
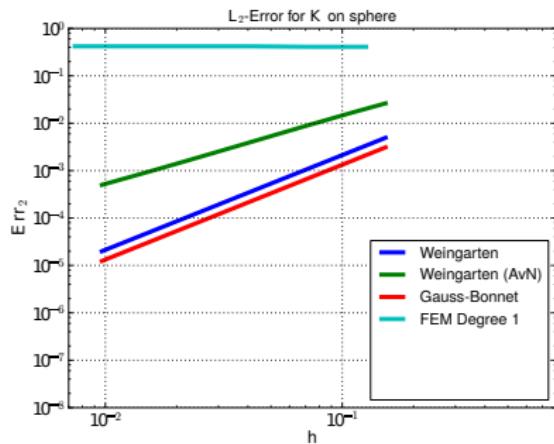
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



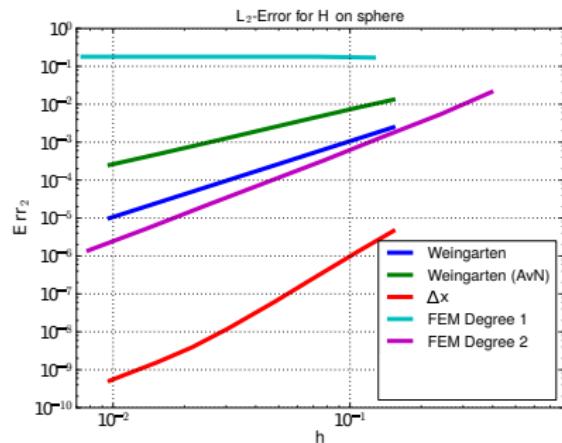
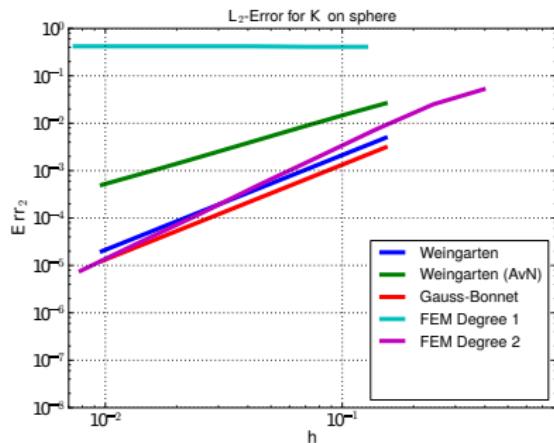
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



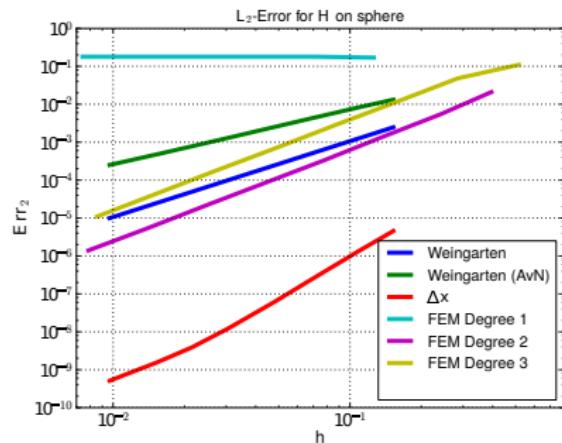
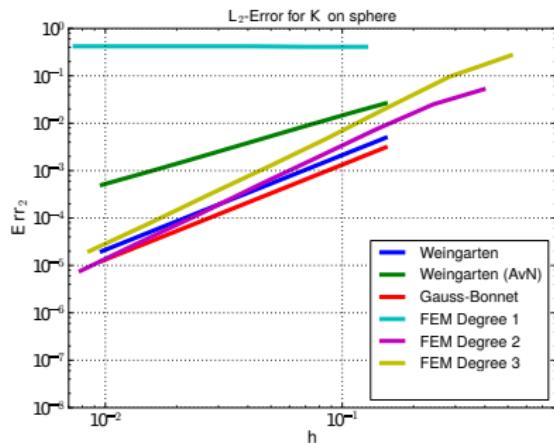
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



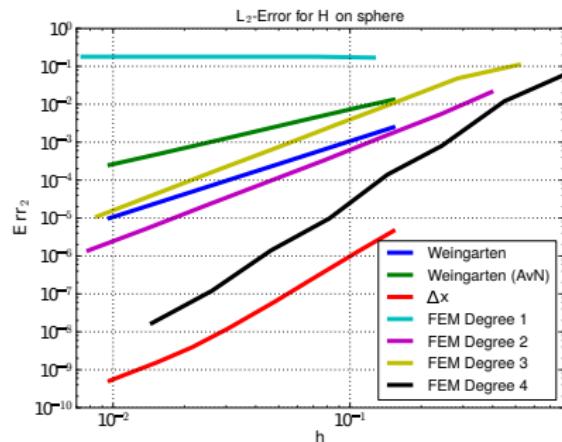
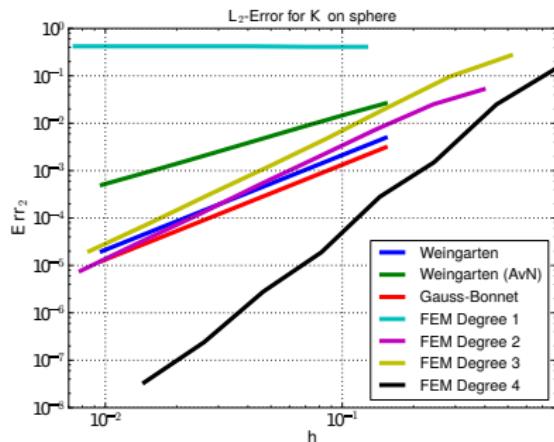
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



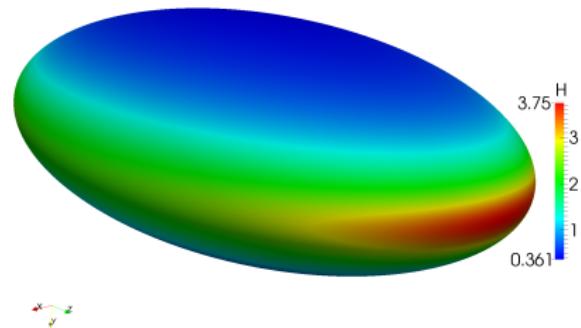
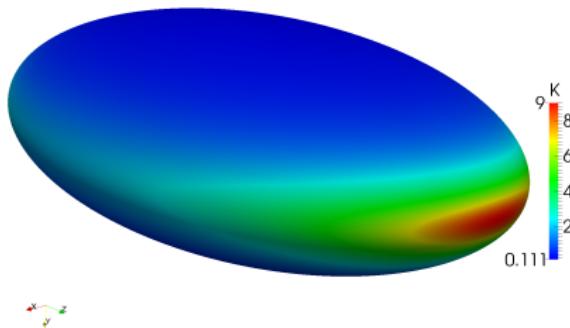
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$



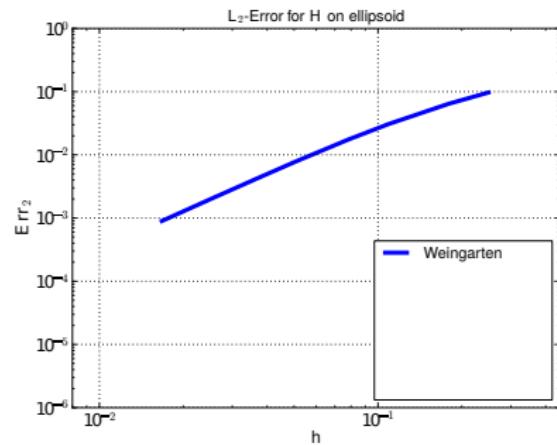
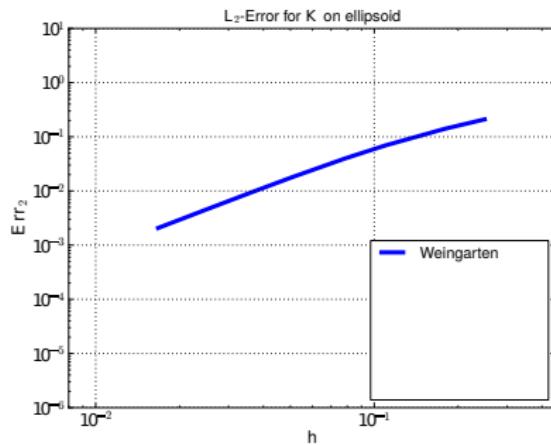
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



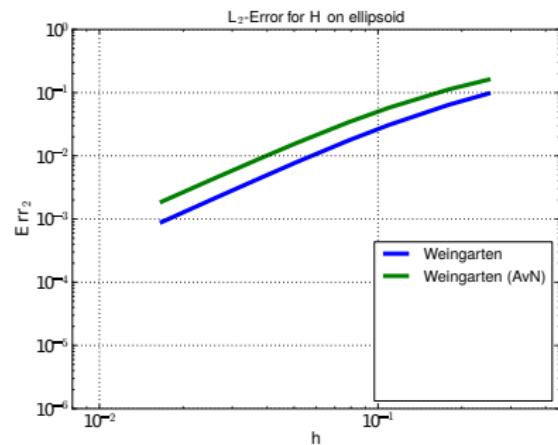
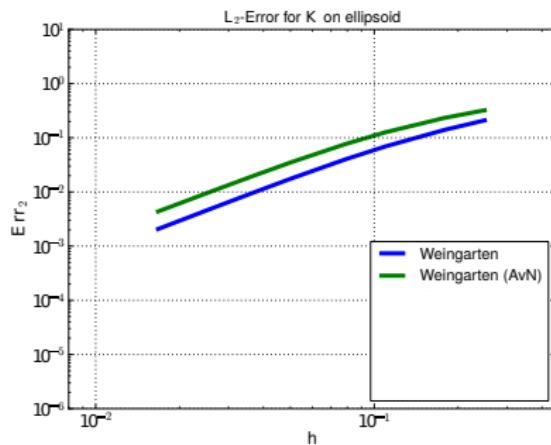
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



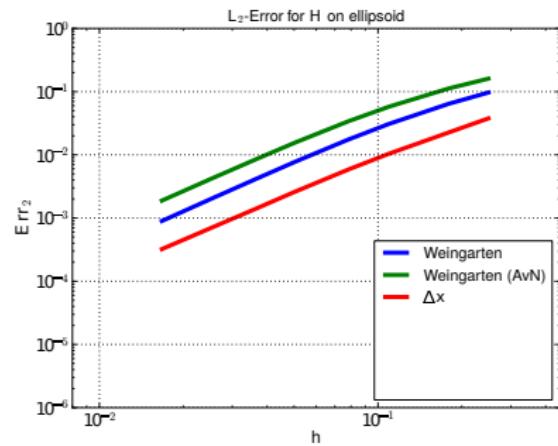
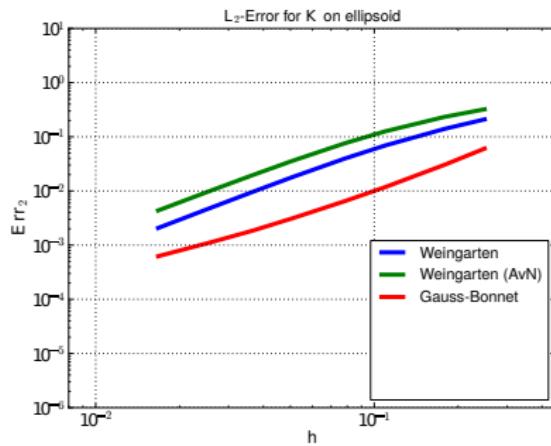
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



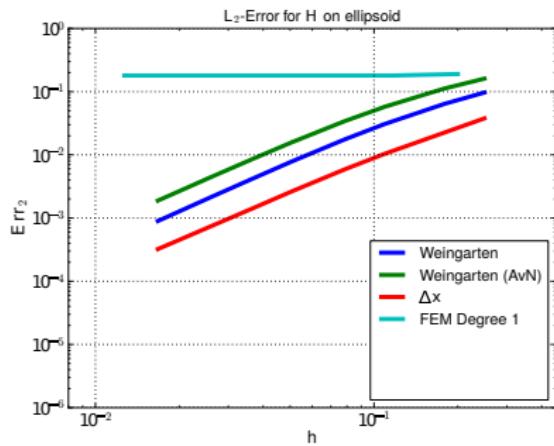
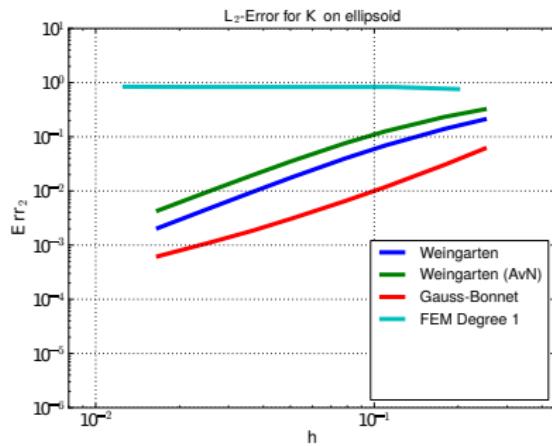
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



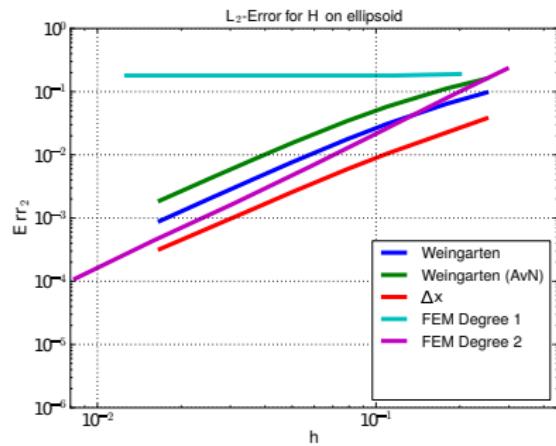
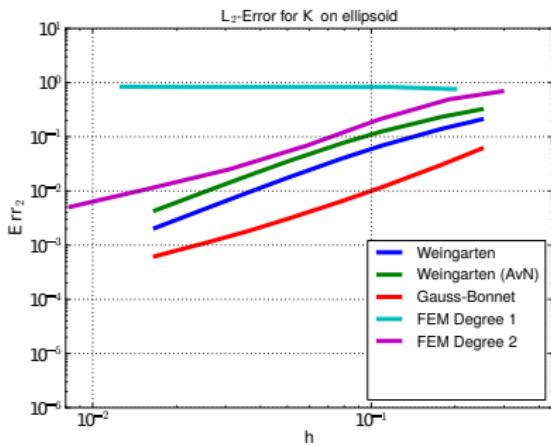
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



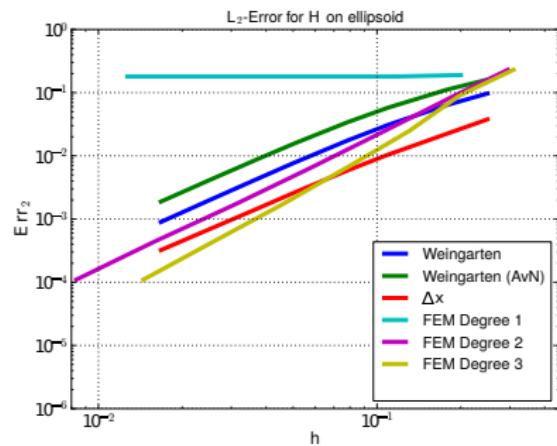
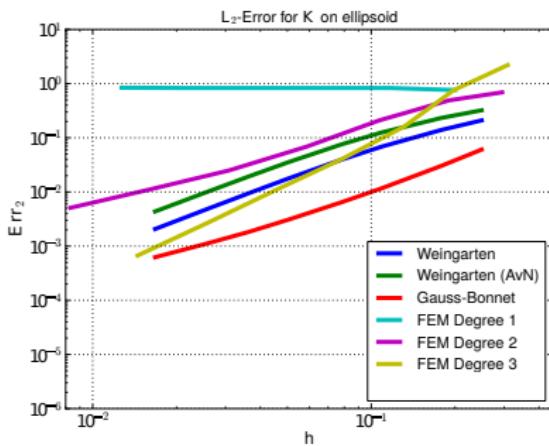
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



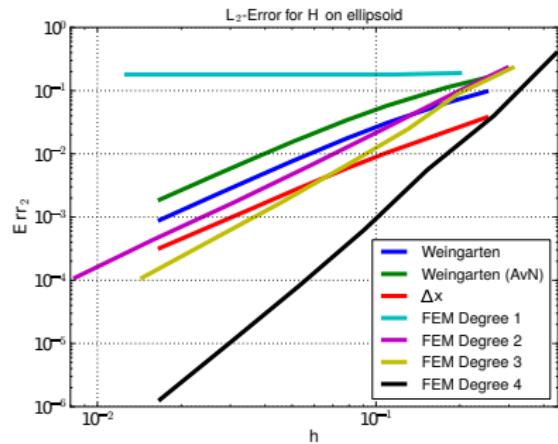
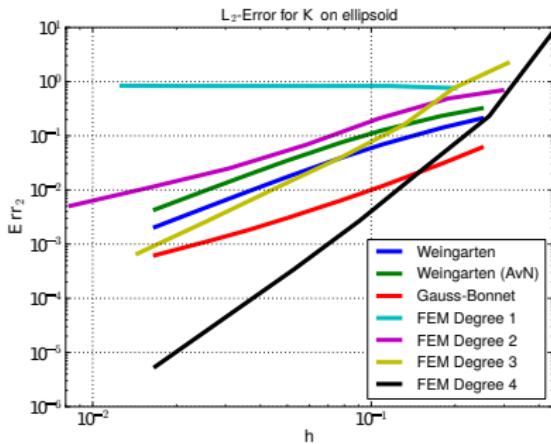
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



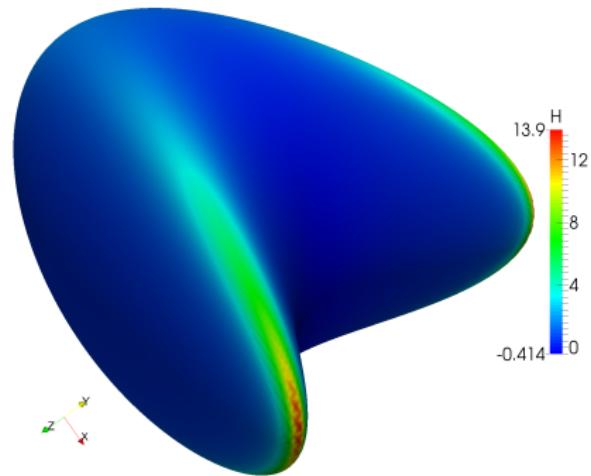
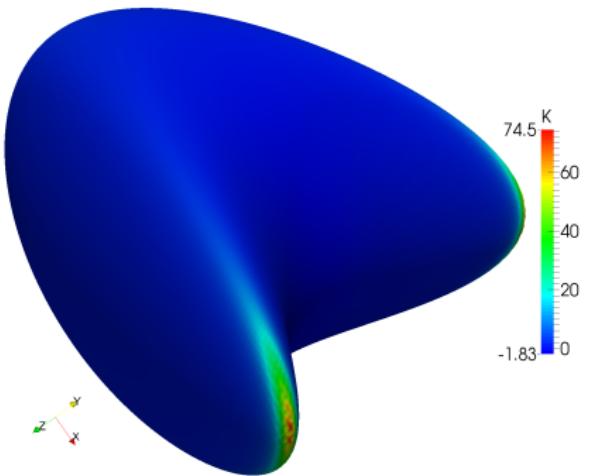
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$



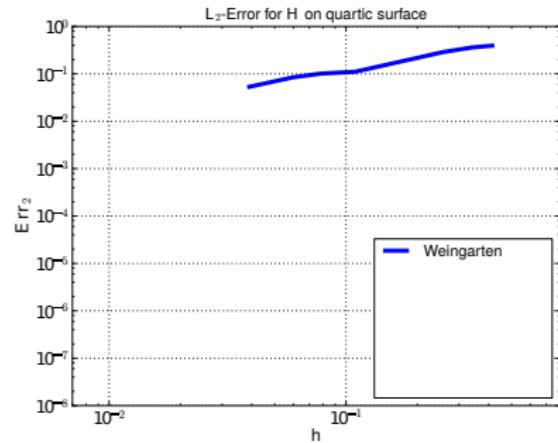
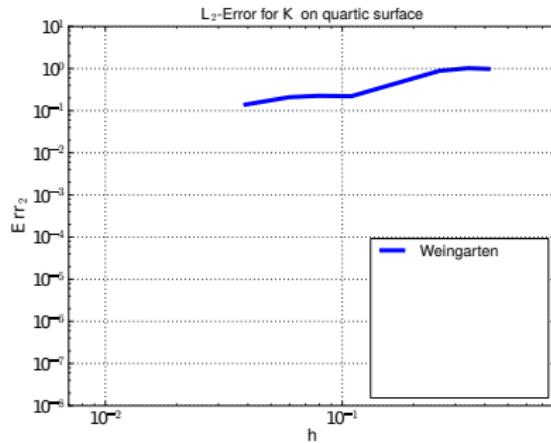
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



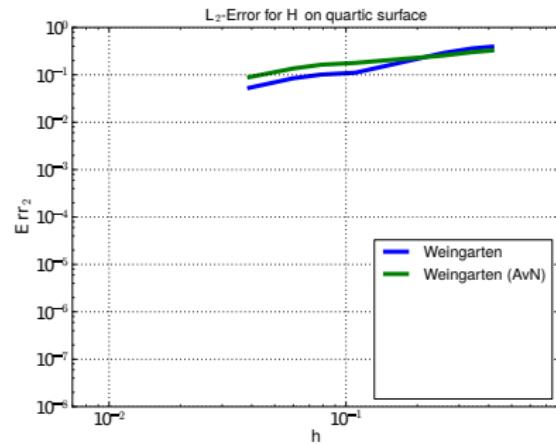
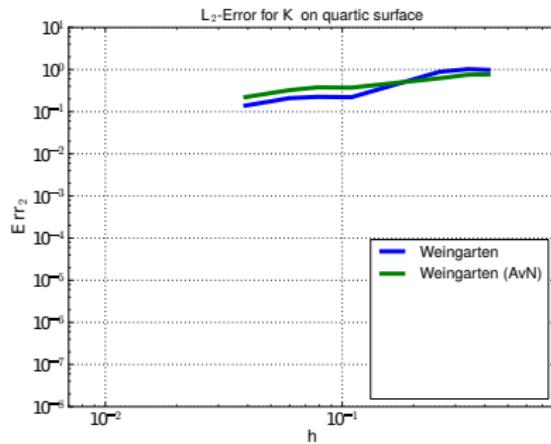
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



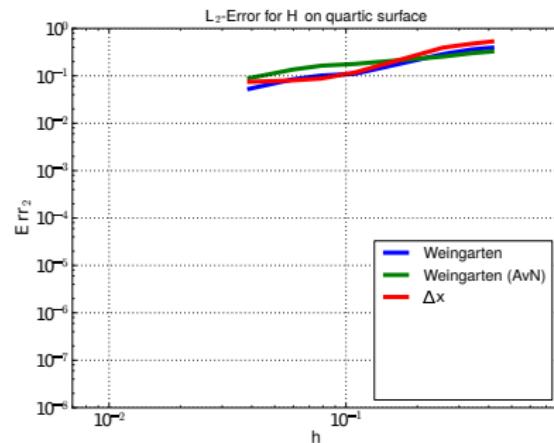
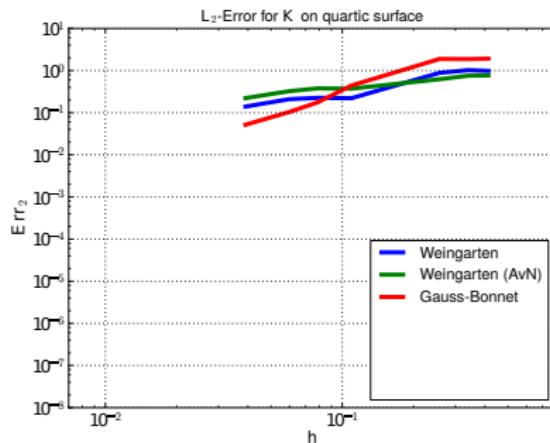
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



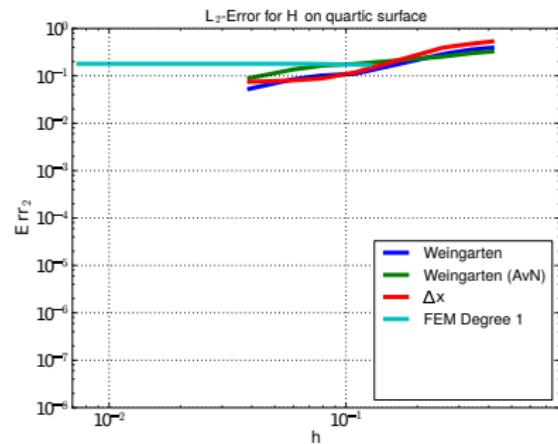
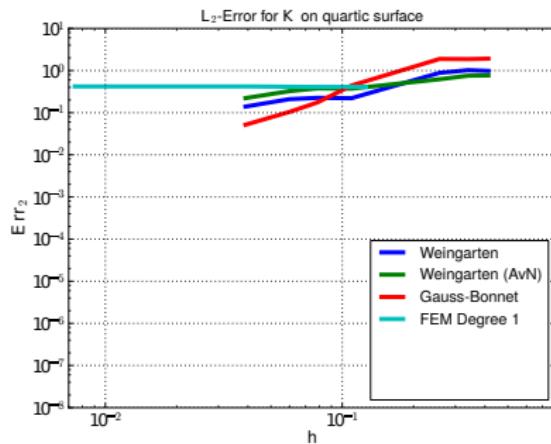
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



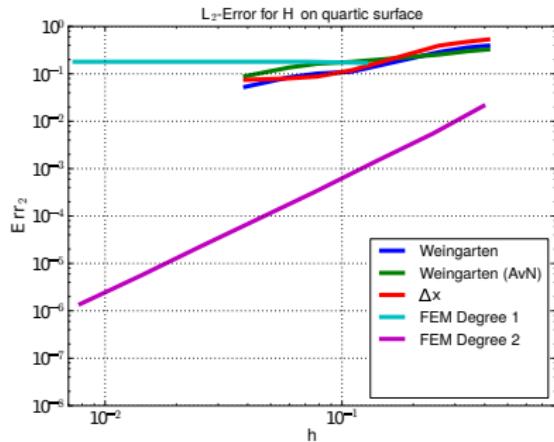
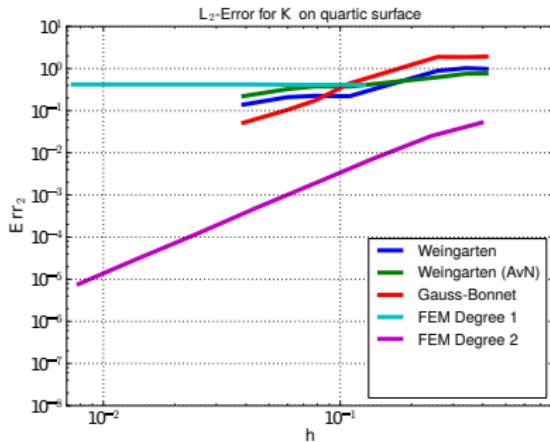
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



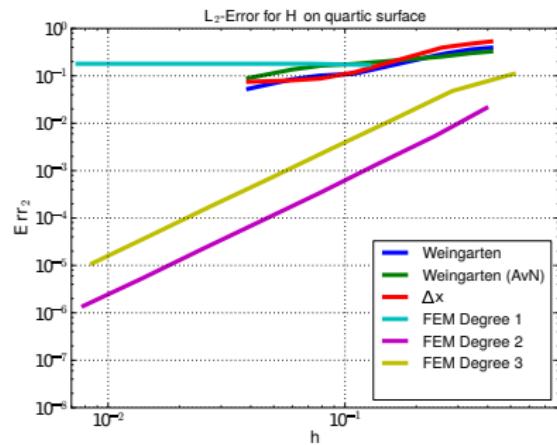
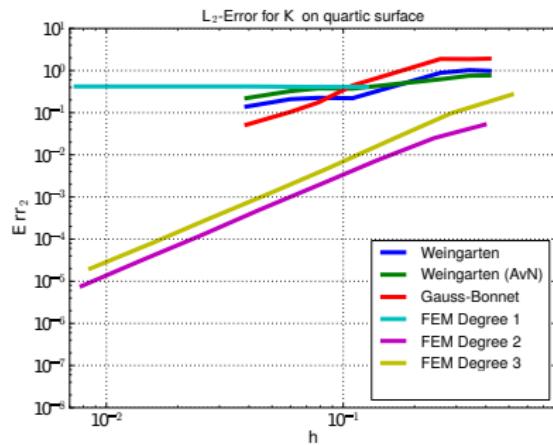
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



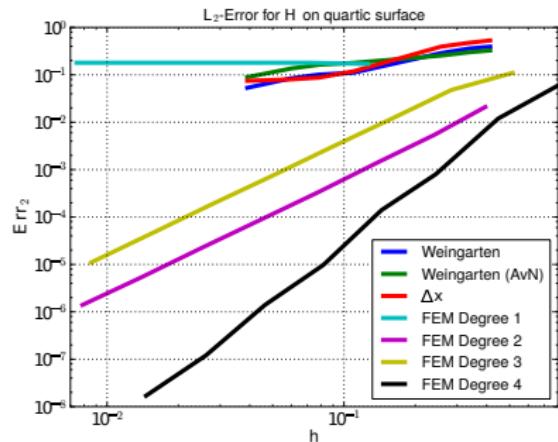
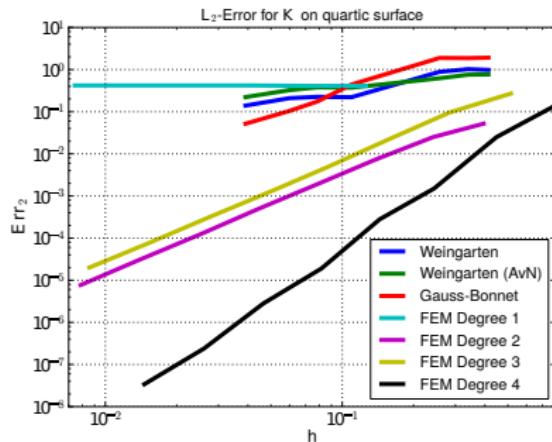
Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1, H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$



Pros

- Äußeres Kalkül (Problemformulierung)
- Geringer Aufwand im Vergleich zu Diffuse Domain Ansätzen
- Geringer Aufwand der Krümmungsberechnung im Vergleich zur isoparametrischen FEM
- Gute Integration in AMDiS

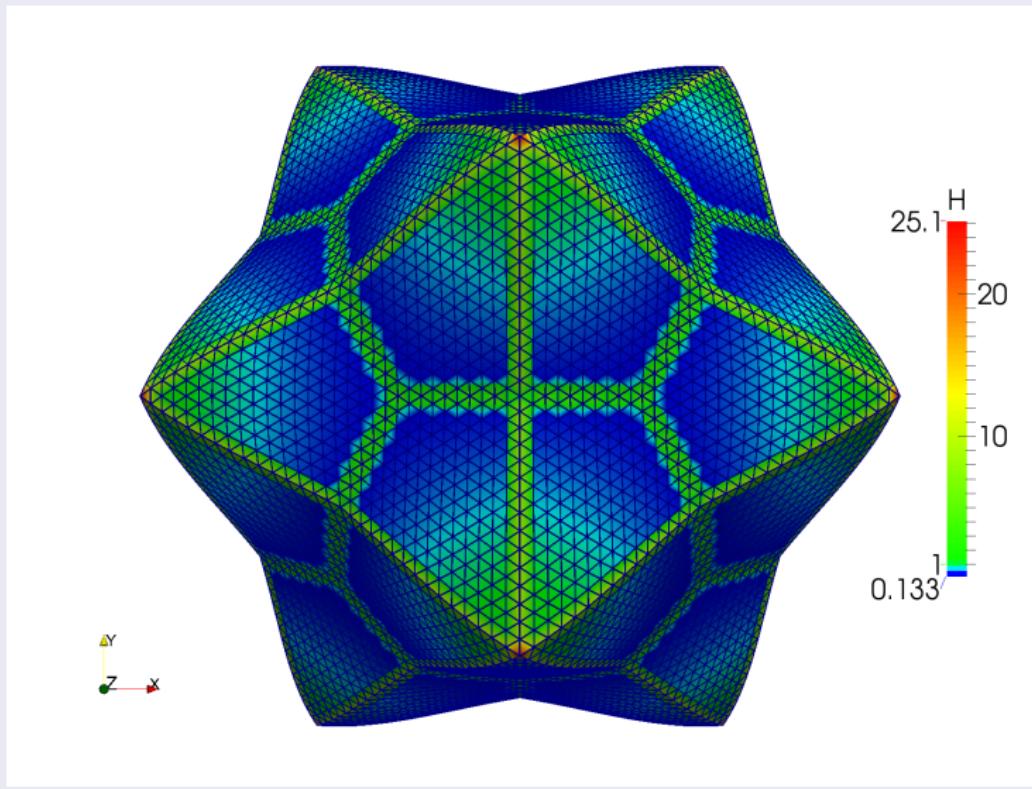
Pros

- Äußeres Kalkül (Problemformulierung)
- Geringer Aufwand im Vergleich zu Diffuse Domain Ansätzen
- Geringer Aufwand der Krümmungsberechnung im Vergleich zur isoparametrischen FEM
- Gute Integration in AMDiS

Kontras

- Äußeres Kalkül (Flat, Sharp)
- Wohlzentriertheit
- Lineare Approximation der Mannigfaltigkeit

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Ausgewählte Literatur