

# Einführung in das Kalkül diskreter Differentialformen (DEC)

Ingo Nitschke

IWR - TU Dresden

6. Dezember 2013

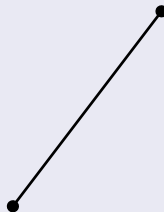
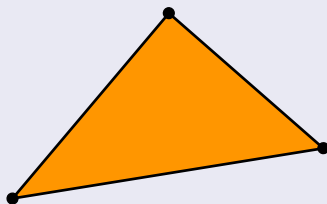
- 1 Primär- und Dualkomplexe
- 2 Differentialformen und diskrete Formen in 2D
- 3 Äußere Ableitung
- 4 Hodge-Operator
- 5 Koableitung

Ein  $p$ -Simplex ist die konvexe Hülle von  $p + 1$  geometrisch unabhängigen Punkten (**Knoten**, **Vertices**)

$$\sigma^p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^p \mu^i v_i \text{ wobei } \mu^i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^p \mu^i = 1 \right\}$$

**Geometrisch unabhängig** heißt, dass die  $p$  Vektoren  $v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0$  linear unabhängig sind.

Beispiel für  $\sigma^2$ ,  $\sigma^1$  und  $\sigma^0$



Ein **Simplizialkomplex**  $K$  der **Dimension**  $n$  ist eine Menge von Simplizes  $\{\sigma^p \in \mathbb{R}^N \mid 0 \leq p \leq n \leq N\}$ , so dass

- (i)  $\forall \sigma^r \prec \sigma^p : \sigma^r \in K \quad (0 \leq r \leq p)$
- (ii) für alle  $\sigma^r := \sigma^p \cap \sigma^q$  gilt  $(0 \leq r \leq \min\{p, q\})$ 
  - (a) entweder  $\sigma^r \prec \sigma^p$  und  $\sigma^r \prec \sigma^q$
  - (b) oder  $\sigma^r = \emptyset$

D.h. z.B. hängende Knoten sind nicht zulässig.

Das **Polytop** von  $K$  ist (der zu Grunde liegende Raum)

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

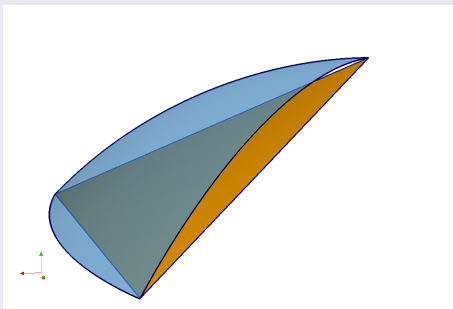
(Andersherum heißt  $K$  eine **Triangulation** von  $|K|$ )

Achtung:  $|K|$  liegt nur für **flache (lineare)**  $K$  in einem affinen  $n$ -dim. Untervektorraum des  $\mathbb{R}^N$ .

## Diskretisierung einer Mannigfaltigkeit $M$

- Wir wollen nicht die Kartengebiete auf der Mannigfaltigkeit diskretisieren.
- Die  $n$ -Mannigfaltigkeit wird in den  $\mathbb{R}^N$  eingebettet.
- Wir setzen dann nur voraus, dass  $\sigma_M^0 = \sigma_K^0$

## Beispiel

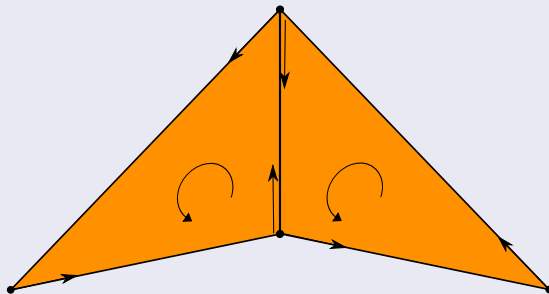


## Orientierter mannigfaltigartiger Simplicialkomplex $K$ (Primärgitter)

orientiert:  $\text{sgn}(\sigma_1^n, \sigma_2^n) = +1$  für  $\sigma_1^n \cap \sigma_2^n \neq \emptyset$

mannigfaltigartig:  $|K|$  ist eine  $\mathbb{C}^0$ -Mannigfaltigkeit

### Beispiel



Durch lokale Nummerierung der Knoten (z.B. im math. pos. Drehsinn) auf den Volumenelementen  $\sigma^n$  lässt sich eine Orientierung induzieren.

## Umkreismittelpunkt (Circumcenter) $c(\sigma^p)$

$$c(\sigma^0) := \sigma^0$$

$$v_0, \dots, v_p \in \mathbb{S}_{c(\sigma^p)}^{p-1} \subset P(\sigma^p)$$

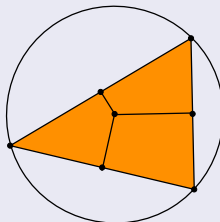
## Wohlzentrierter Simplicialkomplex $K$

$$\forall \sigma \in K : \quad c(\sigma) \in \text{Int}(\sigma)$$

$$(\text{Int}(\sigma^0) = \sigma^0, \text{Bd}(\sigma^0) = \emptyset)$$

Die Wohlzentriertheit lässt sich durch Verfeinerung sicherstellen.

### Beispiel

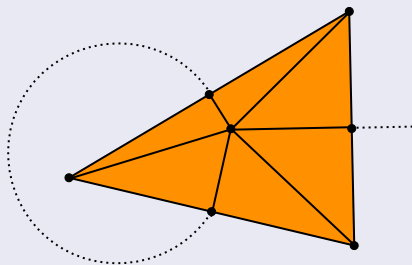


## Umkreismittelpunktunterteilung eines wohlzentrierten Simplicialkomplexes (Circumcentric SubDivision)

$$\text{csd}K := \{[c(\sigma_1), \dots, c(\sigma_k)] \mid \sigma_1 \prec \dots \prec \sigma_k, 1 \leq k \leq n\}$$

- $|\text{csd}K| = |K|$
- Umsetzbar als Verfeinerung ohne Oberflächenprojektion
- Vorsicht:  $\text{csd}$  induziert eine andere Kantenorientierung als die oben angegebene.
- Ist  $K$  ein Primärgitter, dann ist  $\text{csd}K$  das Dualgitter.

### Beispiel





## Der Raum der $p$ -Formen $\Omega^p(M)$ auf einer (2-)Mannigfaltigkeit $M$

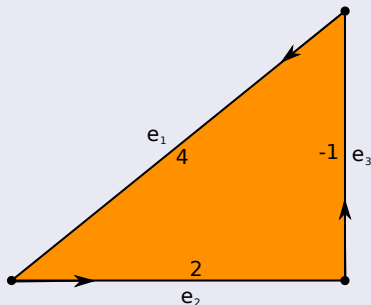
$x \in M$ :

- allg.:  $\Omega_x^p(M) = \mathfrak{A}((T_x M)^p, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}((T_x M)^p, \mathbb{R})$
- $\Omega_x^0(M) = \text{span} \{1\}$ , d.h.  $\Omega^0(M) = \mathfrak{C}^\infty(M, \mathbb{R})$
- $\Omega_x^1(M) = \text{span} \{dx^1, dx^2\} = T_x^* M = \mathfrak{L}(T_x M, \mathbb{R})$ 
  - $dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_i^j$  (Dualität)
  - $\Omega^p(M) \xleftrightarrow{\flat} \mathfrak{X}(M)$
  - $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i \in \Omega^1(M)$ ,  $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$ :  
 $\alpha(v) = \sum_i \alpha_i v^i = \sum_{i,j} g_{ij} \alpha^j v^i = \langle \alpha^\sharp, v \rangle_M$   
 (Beziehung zum Skalarprodukt)
- $\Omega_x^2(M) = \text{span} \{dx^1 \wedge dx^2\} \subset \mathfrak{L}(T_x M \times T_x M, \mathbb{R})$ 
  - $(dx^1 \wedge dx^2) \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \right) = - (dx^1 \wedge dx^2) \left( \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1} \right) = 1$  (alternierend)

(Primärer) Kettenkomplex  $C_p(K)$ 

- $C_p(K) = \text{span} \{ \sigma^p \in K \}$  (formal)
- $c^p \in C_p(K)$  heißt (primäre) p-Kette.

## Beispiel



$$c^1 = 4e_1 + 2e_2 - e_3 \in C_1(K)$$

Raum der (primären) diskreten  $p$ -Formen

$$\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \mathfrak{L}(C_p(K), \mathbb{R})$$

Von  $p$ -Formen zu diskreten  $p$ -Formen

- Projektion eines Simplexes auf die Mannigfaltigkeit (abstraktes Simplex):

$$\pi : K \ni \sigma^p \longmapsto \pi(\sigma^p) =: \tau^p \in L \quad (\tau^p \subset M)$$

- De-Rham-Abbildung  $\psi^p : \Omega^p(M) \rightarrow C^p(L)$ :

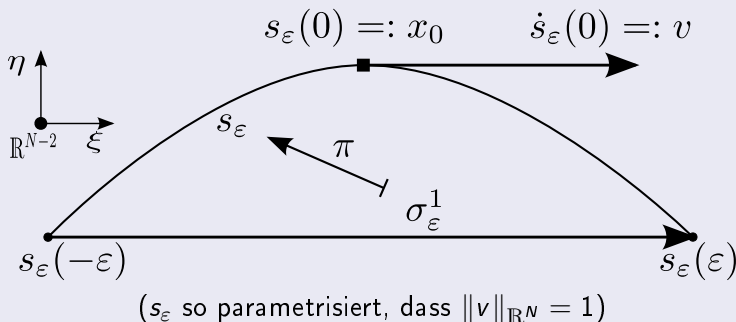
$$\langle \psi^p(\alpha), \tau^p \rangle := \psi^p(\alpha)(\tau^p) := \int_{\tau^p} \alpha$$

- diskrete  $p$ -Form  $\alpha_d \in C^p(K)$  einfach durch  $\psi(\alpha) \circ \pi$ , d.h.

$$\langle \alpha_d, \sigma^p \rangle := \alpha_d(\sigma^p) := \langle \psi^p(\alpha), \pi(\sigma^p) \rangle$$

## Beispiel: diskrete 1-Form im Limes

$$\begin{aligned}
\alpha_d(\sigma_\varepsilon^1) &= \langle \psi^1(\alpha), s_\varepsilon \rangle = \int_{s_\varepsilon} \alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle \alpha, \dot{s}_\varepsilon(t) \rangle_M dt \\
&= 2\varepsilon \langle \alpha, v \rangle_M + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \max_{\tau} \|\ddot{s}_\varepsilon(\tau)\|) \text{ bei } x_0 \\
\Rightarrow \frac{1}{|\sigma_\varepsilon^1|} \alpha_d(\sigma_\varepsilon^1) &= \alpha_d(v) = \alpha(v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \max_{\tau} \|\ddot{s}_\varepsilon(\tau)\|)
\end{aligned}$$



Äußere (Cartan) Ableitung  $\mathbf{d} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$  auf einer (2-)Mannigfaltigkeit  $M$

- $f \in \Omega^0(M) : \mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 \in \Omega^1(M)$
- $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 \in \Omega^1(M) :$

$$\mathbf{d}\alpha = \left( \frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(M)$$

- $0 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \xrightarrow{\mathbf{d}_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \Omega^2(M) \rightarrow 0$   
(↗ De-Rham-Kohomologie)
- d.h.  $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$
- Stokes' Theorem:

$$\int_M \mathbf{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (\omega \in \Omega^p(M))$$

(Kurzschreibweise, eigentlich  $\int_{\partial M} i^* \omega$  auf der RHS mit  $i : \partial M \rightarrow M$ )

Randoperator  $\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$

$$\partial \sigma^p = \partial [v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$$

- $\partial [v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_1] + [v_0, v_1]$
- $\partial [v_0, v_1] = [v_0] - [v_1]$
- $\partial \circ \partial = 0$  ( $\nearrow$  Kettenkomplex)

Diskrete Äußere Ableitung (Korandoperator)  $\mathbf{d} : \Omega_d^p(K) \longrightarrow \Omega_d^{p+1}(K)$

$$\mathbf{d}\alpha := \alpha \circ \partial$$

- d.h.  $\langle \mathbf{d}\alpha, c_{p+1} \rangle = \langle \alpha, \partial c_{p+1} \rangle$  (Diskretes Stokes' Theorem)
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$  ( $\nearrow$  Kokettenkomplex)

Beispiel: Rücktransport (Pullback) einer diskreten Form  $\alpha \in \Omega_d^p(K)$  bzgl.  
 $\varphi : |\tilde{K}| \rightarrow |K|$

$$\begin{aligned} \langle \varphi^*(\mathbf{d}\alpha), \sigma^{p+1} \rangle &= \langle \mathbf{d}\alpha, \varphi\sigma^{p+1} \rangle = \langle \alpha, \partial(\varphi\sigma^{p+1}) \rangle = \langle \varphi^*\alpha, \partial\sigma^{p+1} \rangle \\ &= \langle \mathbf{d}(\varphi^*\alpha), \sigma^{p+1} \rangle \end{aligned}$$

( $\varphi^*\alpha \in \Omega_d^p(\tilde{K})$  ist dann die zurückgezogene diskrete Form)

Hodge-Stern-Operator  $*$  :  $\Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$  auf einer (2-)Mannigfaltigkeit  $M$  (mit Metrik  $g = \text{diag}(g_1, g_2)$ )

- $* \circ * = (-1)^{p(n-p)} \text{Id}$  (für  $\text{Ind}(M) = 0$ )
- $f \in \Omega^0(M)$  :  $*f = f \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 = f \mu$
- $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 \in \Omega^1(M)$  :

$$*\alpha = \sqrt{|g|} (g^1 \alpha_1 dx^2 - g^2 \alpha_2 dx^1) = \sqrt{|g|} (\alpha^1 dx^2 - \alpha^2 dx^1)$$

- $\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(M)$  :  $*\omega = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \omega_{12}$
- Allgemeine Definition:  $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \mu$  für  $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$   
 $\Rightarrow * (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) =$   

$$\sqrt{|g|} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ j_{p+1} < \dots < j_n}} \text{sgn}(j_1, \dots, j_n) g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} dx^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}$$



(Stern-)Dualitätsoperator  $\star : C_p(K) \longrightarrow C_{n-p}(\text{csd} K)$

$$\star(\sigma^p) = \sum_{\sigma^p \prec \dots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p, \dots, \sigma^n} [c(\sigma^p), \dots, c(\sigma^n)]$$

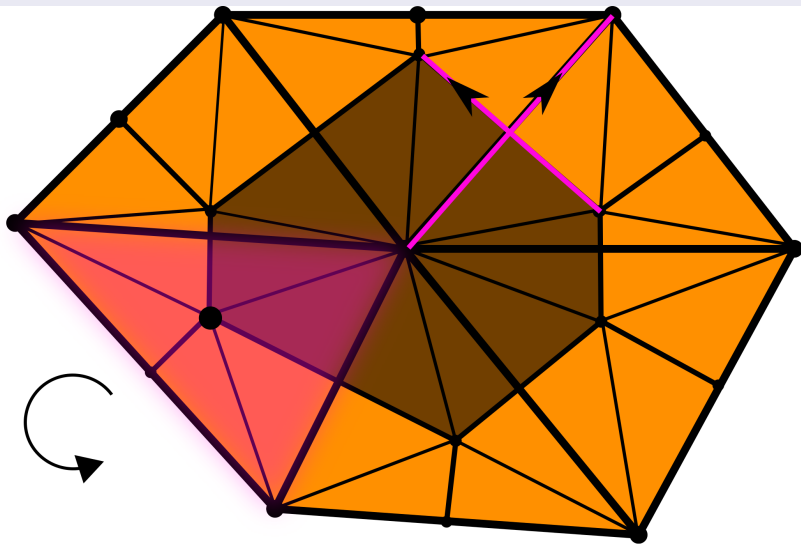
wobei für beliebige  $\sigma^0 \prec \dots \prec \sigma^{p-1} \prec \sigma^p$  aus  $K$ :

$$s_{\sigma^p, \dots, \sigma^n} = \text{sgn}([c(\sigma^0), \dots, c(\sigma^p)], \sigma^p) \cdot \text{sgn}([c(\sigma^0), \dots, c(\sigma^n)], \sigma^n)$$

## Beispiel: 2D

- Knoten ( $\sigma^0$ ) werden auf die Voronoi-„Zellen“(-Flächenketten) abgebildet. (Orientierungen sind gleich der anderen Flächensimplexe  $\Leftarrow$  Orientierbarkeit)
- Kanten ( $\sigma^1$ ) werden auf die Voronoi-„Kanten“(-Kantenketten) abgebildet. (Orientierung (bei Rechte-Hand-Ambiente) durch Vierteldrehung von  $\sigma^1$  gegen den Uhrzeigersinn)
- Flächen ( $\sigma^2$ ) werden auf die Voronoi-Knoten abgebildet. (Orientierung ist +1 per Def.)

## Beispiel: 2D



Dualer Kettenkomplex (Voronoi-Komplex)  $C_p(\star K)$

$$C_p(\star K) := \text{Im}(\star_{n-p}) \leq C_p(\text{csd } K)$$

(Stern-)Dualitätsoperator  $\star : C_p(\star K) \longrightarrow C_{n-p}(K)$ , so dass gilt

$$\star \star \sigma^{n-p} = (-1)^{p(n-p)} \sigma^{n-p}$$

Beispiel: Kante  $\sigma^1$  in 2D

„Two Quarter Turns Make a Flip“

Raum der dualen diskreten  $p$ -Formen

$$\Omega_d^p(\star K) := C^p(\star K) := \mathcal{L}(C_p(\star K), \mathbb{R})$$

# Diskreter Hodge-Stern-Operator $*$ : $\Omega^p(K) \longrightarrow \Omega^{n-p}(\star K)$

$$\frac{1}{|\star \sigma^p|} \langle \star \alpha, \star \sigma^p \rangle := \frac{s}{|\sigma^p|} \langle \alpha, \sigma^p \rangle$$

- Für  $1 \leq p \leq n-1$  :  $s = 1$
- Für  $p = 0$  :  $s = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn}(\partial(\star \sigma^0), \star \sigma^1)$ 
  - Kante  $\sigma^1 \succ \sigma^0$  zeigt von  $\sigma^0$  weg.
  - In 2D (bei Rechte-Hand-Ambiente) ist  $s = -1$ .
- Für  $p = n$  :

$$s = \begin{cases} (-1)^{n-1} & \text{falls für } \tilde{\sigma}^{n-1} \subset \partial \sigma^n \text{ die } \star \tilde{\sigma}^{n-1} \text{ von } \star \sigma^n \text{ wegzeigen,} \\ (-1)^n & \text{sonst.} \end{cases}$$

- In 2D ist  $s = 1$ .

Koableitung  $\delta : \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M) \quad (\text{Ind}(M) = 0)$

$$\delta := (-1)^{np+1} * \mathbf{d}^*$$

- $\delta \circ \delta = 0$
- $\langle \langle \delta \alpha, \beta \rangle \rangle = \langle \langle \alpha, \mathbf{d} \beta \rangle \rangle$
- Laplace-De-Rham:  $\Delta^{dR} := \delta \mathbf{d} + \mathbf{d} \delta$
- Laplace-Beltrami:  $\Delta^B := \text{Div} \circ \text{Grad} := -\delta \mathbf{d}$
- in 2D:
  - $\delta = - * \mathbf{d}^*$
  - Laplace-Beltrami für eine 0-Form  $f$  mit Metrik  $g = \text{diag}(g_1, g_2)$ :

$$\Delta^B f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[ \frac{\partial}{\partial x^1} \left( \sqrt{|g|} g^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \sqrt{|g|} g^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$(\alpha, \beta \in \Omega^p(M) : \quad \langle \langle \alpha, \beta \rangle \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta)$$