Diskretes Äußeres Kalkül (DEC) auf Oberflächen ohne Rand

Ingo Nitschke

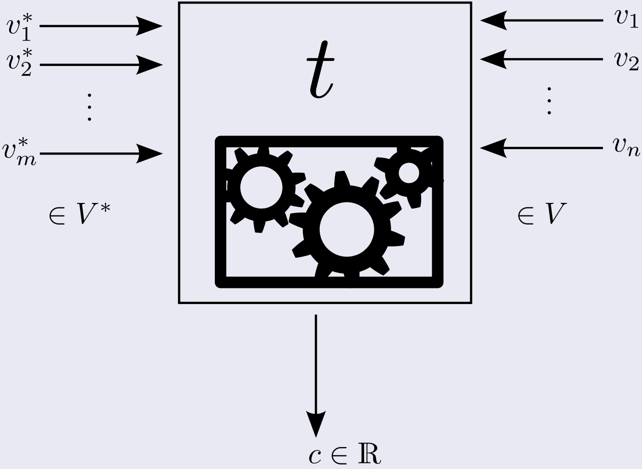
IWR - TU Dresden

23. September 2014

Content

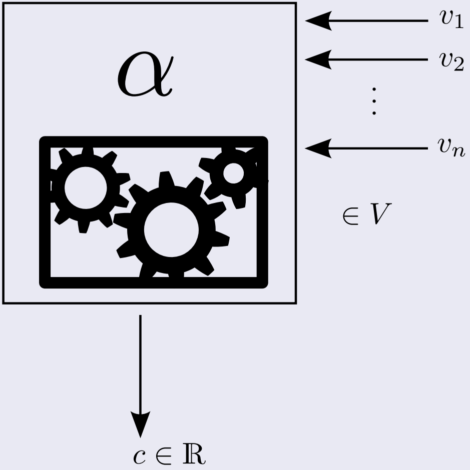
„Tensor-Maschine“

Für einen Vektorraum V nimmt ein (m, n)-Tensor m Kovektoren aus V^* (Dualraum von V) und n Vektoren aus V und gibt einen Wert aus $\mathbb{R}$ zurück.



Differentialform als „Tensor-Maschine“

Eine Differentialform vom Grad n ist ein antisymmetrischer $(0, n)$-Tensor.



Beispiel im $\mathbb{R}^2 \supseteq U$, $dim(U) = 2$

0-Formen $f : \emptyset \to \mathbb{R}$ sind Konstanten bzw. Funktionen.

$$f : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_x := f(x)\,.$$

1-Formen $\alpha \in \left(\mathbb{R}^2\right)^* \cong \mathbb{R}^2$ können als Zeilenvektoren (Kovektoren) aufgefasst werden

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} \mapsto \alpha(v) = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2$$

bzw. als Zeilenvektorfeld

$$\alpha : U \times \mathcal{V}(U) \to \mathbb{R}$$
$$(x, \vec{v}) \mapsto \alpha_x(\vec{v}) = \alpha_1(x) v^1(x) + \alpha_2(x) v^2(x)$$

2-Formen können als antisymmetrische Matrizen aufgefasst werden.

Metrischer Tensor zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten

- o.E.d.A orthogonal:

$$g = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix}$$

- Skalarprodukt:

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_g = \vec{w}^T g \vec{v} = g_1 w^1 v^1 + g_2 w^2 v^2$$

- Länge:

$$\|\vec{v}\|_g = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_g}$$

- Winkel:

$$\cos\Theta = \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_g}{\|\vec{v}\|_g \, \|\vec{w}\|_g}$$

Motivation: Skalarprodukt $\rightsquigarrow$ Kontraktion von 1-Formen

$$\begin{aligned}\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle_g &= g_1 w^1 v^1 + g_2 w^2 v^2 \\ &= w_1 v^1 + w_2 v^2 = \vec{w}^\flat(\vec{v})\end{aligned}$$

Motivation: Gradient $\rightsquigarrow$ äußere Ableitung

- $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $dx^i(\partial_i) = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\nabla f &= g^1 \partial_1 f \partial_1 + g^2 \partial_2 f \partial_2 = \begin{bmatrix} g^1 \partial_1 f \\ g^2 \partial_2 f \end{bmatrix} \\ &= \left(\partial_1 f dx^1 + \partial_2 f dx^2\right)^\sharp = [\partial_1 f, \partial_2 f]^\sharp \\ &= (\mathbf{d} f)^\sharp\end{aligned}$$

- $\Rightarrow \mathbf{d}f$ metrikunabhängig

Beispiel: Polarkoordinaten (ϕ, r) (flacher Fall)

- $\vec{x} : [0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2$, $(\phi, r) \mapsto r\,[\cos\phi, \sin\phi]^T$
- mit $\vec{e}_i := \left\|\partial_i \vec{x}\right\|^{-1} \partial_i \vec{x}$ gilt

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{1}{r}\partial_\phi f\,\vec{e}_\phi + \partial_r f\,\vec{e}_r \\ \mathbf{d}f &= \partial_\phi f d\phi + \partial_r f dr\end{aligned}$$

- $\Rightarrow$ $\mathbf{d}f$ koordinatenunabhängig (koordinatenfrei)

Beispiel: Einheitssphäre (nichtflacher Fall)

- u Breitengrad und v Längengrad

$$\vec{x} : (0,\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{bmatrix}$$

-

$$\nabla f = \partial_u f \partial_u \vec{x} + \frac{1}{\sin^2 u} \partial_v f \partial_v \vec{x}$$
$$\mathbf{d} f = \partial_u f du + \partial_v f dv$$

Richtungsableitung

$$\mathbf{d} f(\vec{v}) = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle_g$$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
  - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
    - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$
    - $*\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = -\sqrt{g_1 g^2} w_2 dx^1 + \sqrt{g^1 g_2} w_1 dx^2$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
  - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$
  - $*\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = -\sqrt{g_1 g^2} w_2 dx^1 + \sqrt{g^1 g_2} w_1 dx^2$
  - $*w_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{g^1 g^2} w_{12}$

Äußere Ableitung für 1-Formen in 2D

$$\mathbf{d}\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = \left(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1\right) dx^1 \wedge dx^2$$

Hodge-Stern-Operator

- $*$ ist Isomorphismus zwischen $\Omega^p(M)$ und $\Omega^{n-p}(M)$
- für $n = 2$:
  - $*f = \sqrt{g_1 g_2} f dx^1 \wedge dx^2$
  - $*\left(w_1 dx^1 + w_2 dx^2\right) = -\sqrt{g_1 g^2} w_2 dx^1 + \sqrt{g^1 g_2} w_1 dx^2$
  - $*w_{12} dx^1 \wedge dx^2 = \sqrt{g^1 g^2} w_{12}$
- $\Rightarrow$ nicht metrikunabhängig!

Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1.Ordnung für $dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & \Omega^1(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[d, shift right, "\sharp"'] & \Omega^2(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\
C^\infty(M) \arrow[r, "\nabla"'] & \mathcal{V}^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] \arrow[u, shift right, "\flat"'] & C^\infty(M)
\end{tikzcd}$$

Baukasten für lineare Differentialoperatoren 1.Ordnung für $dim(M) = 2$

- $C^\infty(M)$ glatte Funktionen, $\mathcal{V}^\infty(M)$ glatte Vektorfelder auf M

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & \Omega^1(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[d, shift right, "\sharp"'] & \Omega^2(M) \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\
C^\infty(M) \arrow[r, "\nabla"'] & \mathcal{V}^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] \arrow[u, shift right, "\flat"'] & C^\infty(M)
\end{tikzcd}$$

- $\delta := - * \mathbf{d} *$ Koableitung

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(M) \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & \Omega^1(M) \arrow[l, "\delta"] \arrow[d, shift left, "\sharp"] & \Omega^2(M) \arrow[l, "\delta"] \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\
C^\infty(M) & \mathcal{V}^\infty(M) \arrow[l, "\mathrm{Div}"] \arrow[u, shift left, "\flat"] & C^\infty(M) \arrow[l, "\text{-Rot}"]
\end{tikzcd}$$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K, Kettenkomplex $C_p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K, Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega^p_d(K) := C^p(K)$

Diskretisierungen

- Mannigfaltigkeit $M \rightsquigarrow$ Simplizialkomplex K, Kettenkomplex $C_p(K)$
- Differentialformen $\Omega^p(M) \rightsquigarrow$ Kokettenkomplex $\Omega^p_d(K) := C^p(K)$
- Operatoren auf $\Omega^p(M)$ ($\mathbf{d}$, $*$, usw.) $\rightsquigarrow$ Operatoren auf $\Omega^p_d(K)$, $C_p(K)$

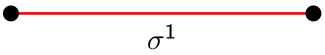
Simplizes σ^p ...

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.

σ^0

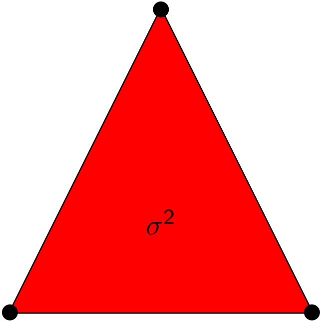
Simplizes σ^p ...

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.



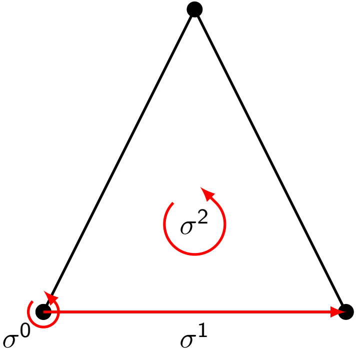
Simplizes σ^p ...

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.



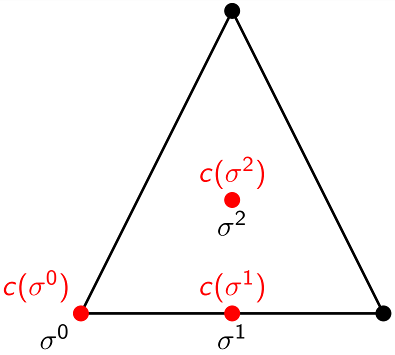
Simplizes σ^p ...

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden



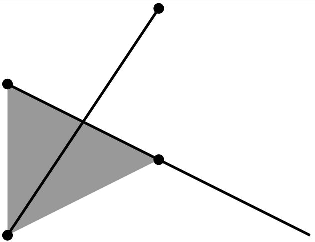
Simplizes σ^p ...

- sind Knoten, Kanten, Dreiecke, usw.
- können mit einer Orientierung versehen werden
- besitzen einen Umkreismittelpunkt $c(\sigma^p)$
  ($c(\sigma^p) \in Int(\sigma^p) \Rightarrow$: Wohlzentrierheit)



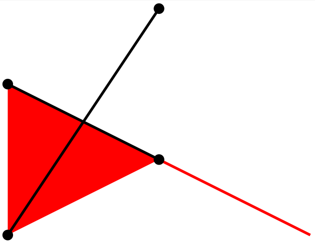
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.



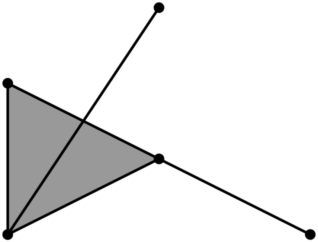
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.



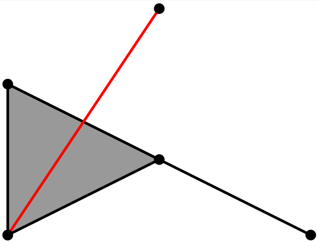
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.



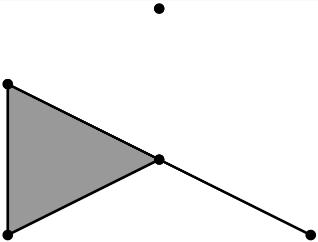
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)



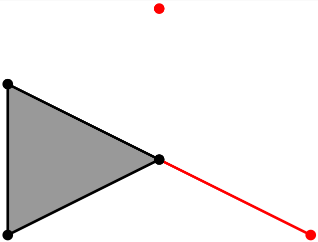
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)



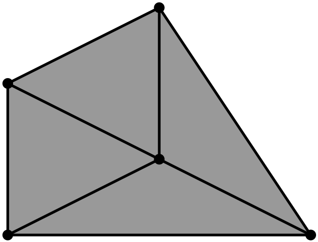
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0-Mannigfalltigkeit. ($\Rightarrow$: mannigfaltigartig)



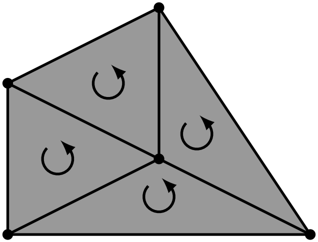
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0-Mannigfalltigkeit. ($\Rightarrow$: mannigfaltigartig)



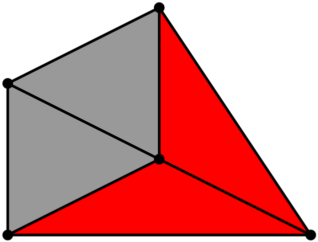
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0-Mannigfalltigkeit. ($\Rightarrow$: mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. ($\Rightarrow$: Orientierbarkeit)



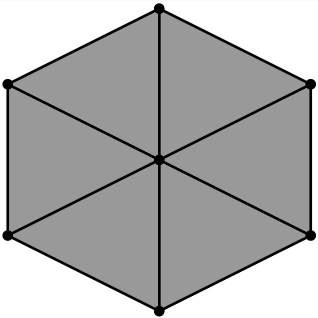
Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0-Mannigfalltigkeit. ($\Rightarrow$: mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. ($\Rightarrow$: Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Zweidimensionales Primärgitter K

- K besteht aus (orientierten) Simplizes.
- Jede Facette liegt in K.
- Der Schnitt zweier Simplizes ist leer oder liegt in K. ($\Rightarrow$: Simplizialkomplex)
- Das Polytop $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ ist C^0-Mannigfalltigkeit. ($\Rightarrow$: mannigfaltigartig)
- Alle Dreiecke sind gleichorientiert. ($\Rightarrow$: Orientierbarkeit)
- Zusätzlich: Jedes Simplex ist wohlzentriert. ($\Rightarrow \exists$ Dualgitter)



Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t\vec{x}_i = \vec{F}\left(\vec{x}_i\right)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. $\vec{F}$ wird nach folgenden Kriterien definiert.

Gitter wohlzentrieren

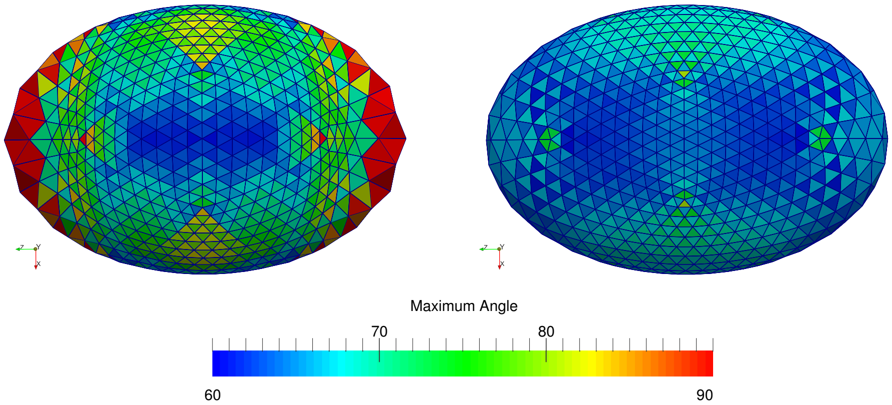
Über einen mechanischen Ansatz $d_t\vec{x}_i = \vec{F}\left(\vec{x}_i\right)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. $\vec{F}$ wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°

Gitter wohlzentrieren

Über einen mechanischen Ansatz $d_t \vec{x}_i = \vec{F}\left(\vec{x}_i\right)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. $\vec{F}$ wird nach folgenden Kriterien definiert.

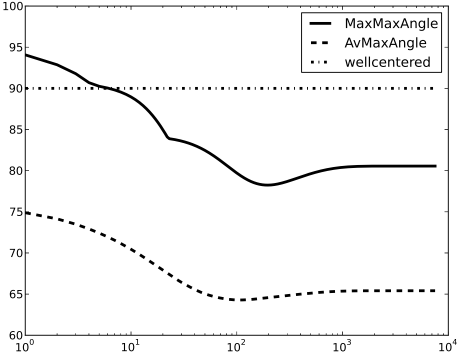
- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall \sigma^1 \in K : \quad \left|\sigma^1\right| = l^*$



Gitter wohlzentrieren

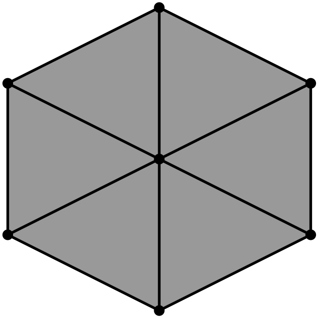
Über einen mechanischen Ansatz $d_t\vec{x}_i = \vec{F}(\vec{x}_i)$ lassen sich Gitterpunkte u.U. neu arrangieren. $\vec{F}$ wird nach folgenden Kriterien definiert.

- Optimale Winkel von 60°
- Optimale Kantenlänge: $\forall\sigma^1 \in K : \quad \left|\sigma^1\right| = l^*$



Dualgitter csd$K$

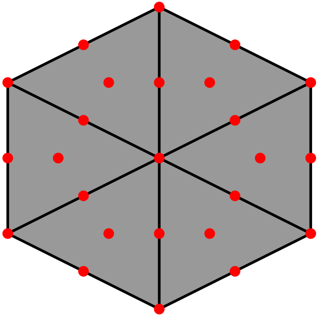
Das Dualgitter csd$K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...



Dualgitter csd$K$

Das Dualgitter csd$K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

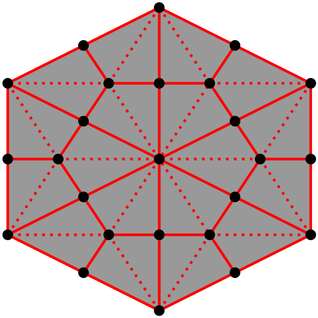
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$



Dualgitter csd$K$

Das Dualgitter csd$K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

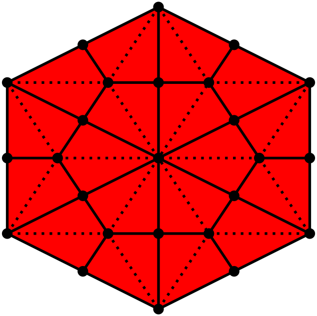
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q$



Dualgitter csd$K$

Das Dualgitter csd$K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

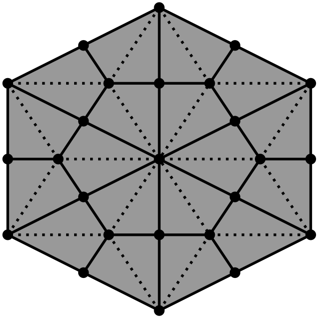
- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Dualgitter csd$K$

Das Dualgitter csd$K$ ist die Umkreismittelpunktsunterteilung eines wohlzentrierten Primärgitters. Dazu gehören ...

- alle Umkreismittelpunkte $c(\sigma^p)$
- alle Kanten $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q$
- alle Dreiecke $s[c(\sigma^p), c(\sigma^q), c(\sigma^r)]$ mit $\sigma^p \prec \sigma^q \prec \sigma^r$



Das Dualgitter ist wieder ein Primärgitter, aber kein wohlzentriertes.

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p-Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p-Simplizes

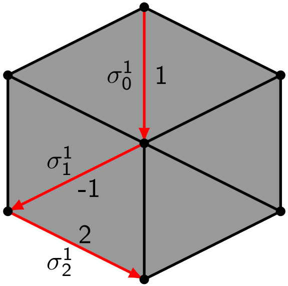
$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \,\middle|\, a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p-Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p-Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \,\middle|\, a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$

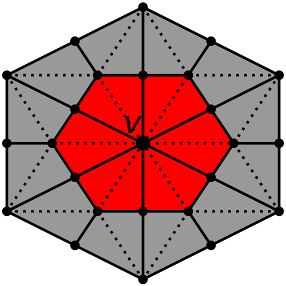


Kettenkomplex $C_p(K)$

- Eine p-Kette aus $C_p(K)$ ist eine formale Summe aus p-Simplizes

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{\sigma \in K^{(p)}} a_\sigma \sigma \,\middle|\, a_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

- zB. $c^1 := \sigma_0^1 - \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1 \in C_1(K)$
- zB. $c^2 := \sum_{\sigma^2 \succ v} \sigma^2 \in C_2(\mathrm{csd}K)$ (1-Ring um v im $\mathrm{csd}K$, $\star v$)



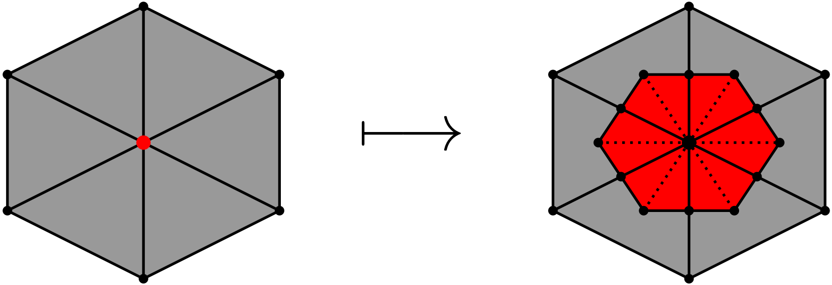
Sternoperator $\star : C_p(K) \to C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\mathrm{csd} K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \ldots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \ldots \sigma^n} \left[c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \ldots, c(\sigma^n) \right]$$

Sternoperator $\star : C_p(K) \to C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\operatorname{csd} K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \ldots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \ldots \sigma^n} \left[c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \ldots, c(\sigma^n) \right]$$

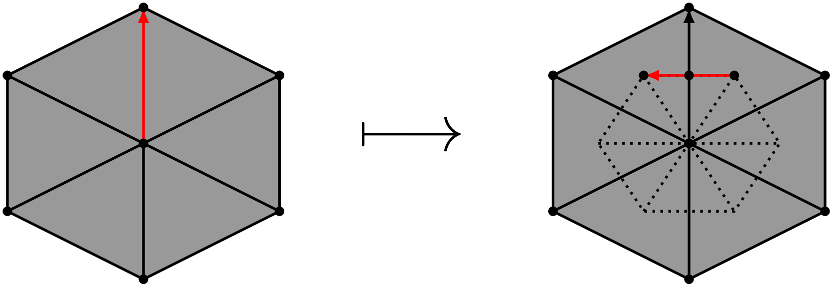
- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \to C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\mathrm{csd}K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \ldots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p\sigma^{p+1}\ldots\sigma^n} \left[c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \ldots, c(\sigma^n) \right]$$

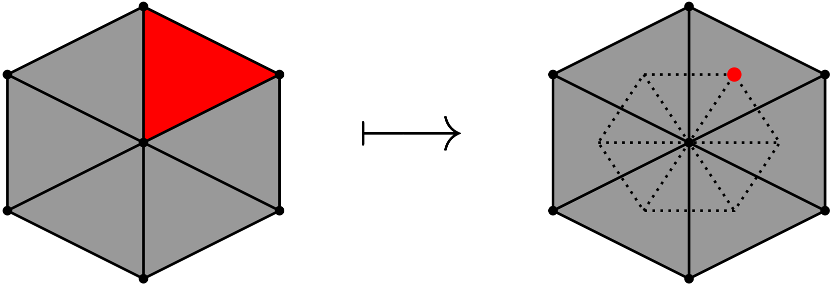
- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star\sigma^1 \in C_1(\star K)$



Sternoperator $\star : C_p(K) \to C_{n-p}(\star K) < C_{n-p}(\mathrm{csd} K)$

$$\star\sigma^p := \sum_{\sigma^p \prec \sigma^{p+1} \prec \ldots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p \sigma^{p+1} \ldots \sigma^n} \left[c(\sigma^p), c(\sigma^{p+1}), \ldots, c(\sigma^n) \right]$$

- Knoten $\sigma^0 \mapsto$ Voronoizelle $\star\sigma^0 \in C_2(\star K)$
- Kante $\sigma^1 \mapsto$ Voronoikante $\star\sigma^1 \in C_1(\star K)$
- Dreieck $\sigma^2 \mapsto$ Voronoiknoten $\star\sigma^2 \in C_0(\star K)$

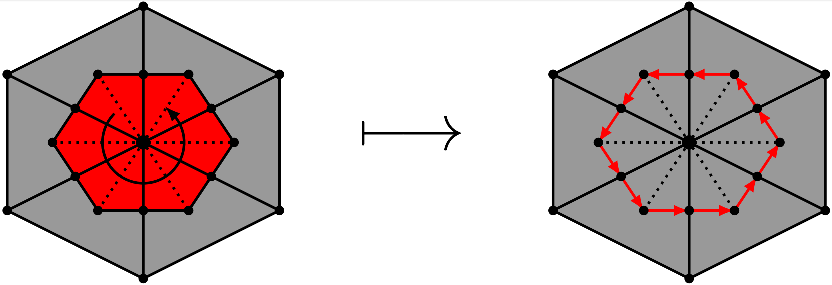


Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \to C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial\sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$

Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \to C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- (Dual) $\partial_p \star \sigma^{n-p} = \begin{cases} \sum_{\sigma^{n-p+1} \succ \sigma^{n-p}} \star \left(s_{\sigma^{n-p+1}} \sigma^{n-p+1} \right) & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$



Randoperator $\partial : C_p(\mathcal{K}) \to C_{p-1}(\mathcal{K}) \quad (\mathcal{K} \in \{K, \star K\})$

- (Primär) $\partial \sigma^p := \begin{cases} \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \, [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p] & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- (Dual) $\partial_p \star \sigma^{n-p} = \begin{cases} \sum_{\sigma^{n-p+1} \succ \sigma^{n-p}} \star \left(s_{\sigma^{n-p+1}} \sigma^{n-p+1} \right) & \text{für } p > 0 \\ 0 & \text{für } p = 0 \end{cases}$
- Es gilt die Komplexeigenschaft $\partial \circ \partial = 0 \quad \Rightarrow$ Kettenkomplex

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\star"] & C_{n-1}(K) \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "\star"] & \ldots \arrow[r, "\partial_1"] & C_0(K) \arrow[r] \arrow[d, "\star"] & 0 \\
0 & C_0(\star K) \arrow[l] & C_1(\star K) \arrow[l, "\partial_1"] & \ldots \arrow[l, "\partial_2"] & C_n(\star K) \arrow[l, "\partial_n"] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \operatorname{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega^p_d(\mathcal{K})$

- $\Omega^p_d(K) := C^p(K) := \mathrm{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle\right)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega^p_d(\mathcal{K})$

- $\Omega^p_d(K) := C^p(K) := \operatorname{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle\right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega^p_d(\mathcal{K}) \to \Omega^{p+1}_d(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p\left(\alpha\right) := \psi^{p+1}\left(\mathbf{d}\alpha\right)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \mathrm{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle\right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \to \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p\left(\alpha\right) := \psi^{p+1}\left(\mathbf{d}\alpha\right) = \psi^p\left(\alpha\right) \circ \partial$ (d.h $\langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle$)

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega^p_d(\mathcal{K})$

- $\Omega^p_d(K) := C^p(K) := \mathrm{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega^p_d(\mathcal{K}) \to \Omega^{p+1}_d(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial$ (d.h $\langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle$)
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega^p_d(\mathcal{K})$

- $\Omega^p_d(K) := C^p(K) := \operatorname{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle \right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega^p_d(\mathcal{K}) \to \Omega^{p+1}_d(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial$ (d.h $\langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle$)
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ $\Rightarrow$ Kokettenkomplex

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega^p_d(\mathcal{K})$

- $\Omega^p_d(K) := C^p(K) := \operatorname{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle\right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega^p_d(\mathcal{K}) \to \Omega^{p+1}_d(\mathcal{K})$

- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial$ (d.h $\langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle$)
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ $\Rightarrow$ Kokettenkomplex

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega^p_d(K) \to \Omega^{n-p}_d(\star K) < \Omega^{n-p}_d(\mathrm{csd}K)$

- $\langle *\alpha, \star\sigma^p \rangle := \frac{|\star\sigma^p|}{|\sigma^p|}\alpha(\sigma^p)$

De-Rham-Abbildung $\psi^d : \Omega^p(M) \to \Omega_d^p(\mathcal{K})$

- $\Omega_d^p(K) := C^p(K) := \mathrm{Hom}\left(C_p(K), \mathbb{R}\right)$
- $\psi^p(\alpha) = \left(\sigma^p \mapsto \int\limits_{\pi(\sigma^p)} \alpha =: \psi^p(\alpha)(\sigma^p) =: \langle \psi^p(\alpha), \sigma^p \rangle\right)$

Diskrete äußere Ableitung $\mathbf{d} : \Omega_d^p(\mathcal{K}) \to \Omega_d^{p+1}(\mathcal{K})$

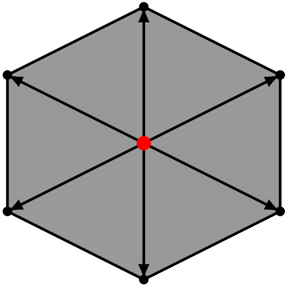
- $\mathbf{d}\psi^p(\alpha) := \psi^{p+1}(\mathbf{d}\alpha) = \psi^p(\alpha) \circ \partial$ (d.h $\langle \mathbf{d}\alpha_d, \sigma \rangle = \langle \alpha_d, \partial\sigma \rangle$)
- Satz von Stokes: $\int_U \mathbf{d}\alpha = \int_{\partial U} \alpha$
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ $\Rightarrow$ Kokettenkomplex

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega_d^p(K) \to \Omega_d^{n-p}(\star K) < \Omega_d^{n-p}(\mathrm{csd}K)$

- $\langle *\alpha, \star\sigma^p \rangle := \frac{|\star\sigma^p|}{|\sigma^p|}\alpha(\sigma^p)$
- (n=2) Für $\alpha \in \Omega^p(|K|)$ gilt $\left|\left(*\psi(\alpha) - \psi(*\alpha)\right)(\star\sigma^p)\right| \leq \mathcal{O}\left(h^{3-p}\right)$.

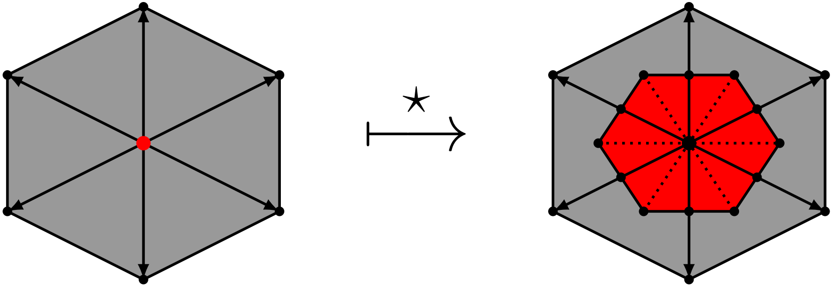
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle *\mathbf{d} * \mathbf{d} f, v \rangle$$



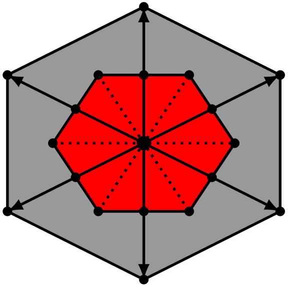
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle * \mathbf{d} * \mathbf{d} f, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle \mathbf{d} * \mathbf{d} f, \star v \rangle$$

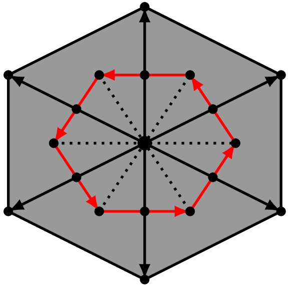


Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\langle \Delta_B f, v\rangle = \langle *\mathbf{d} * \mathbf{d}f, v\rangle = \frac{1}{|\star v|}\langle \mathbf{d} * \mathbf{d}f, \star v\rangle$$
$$= \frac{1}{|\star v|}\langle *\mathbf{d}f, \partial \star v\rangle$$



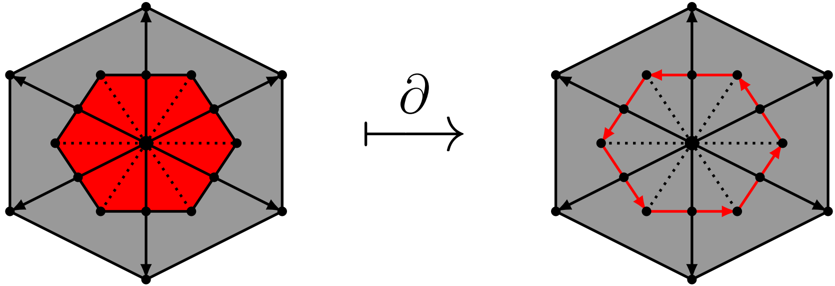
$\stackrel{\partial}{\longmapsto}$



Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

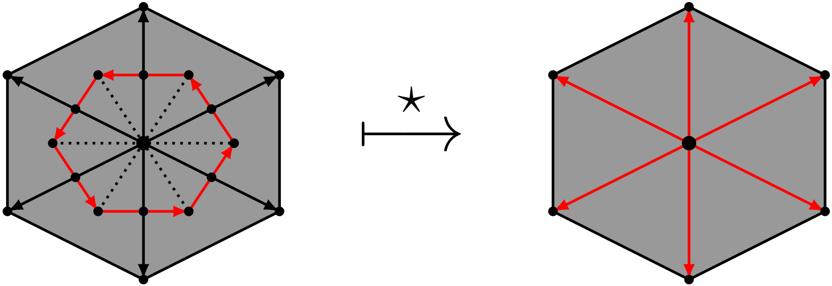
$$\langle \Delta_B f, v \rangle = \langle * \mathbf{d} * \mathbf{d} f, v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \langle \mathbf{d} * \mathbf{d} f, \star v \rangle$$

$$= \frac{1}{|\star v|} \langle * \mathbf{d} f, \partial \star v \rangle = \frac{1}{|\star v|} \sum_{\sigma^1 \succ v} \langle * \mathbf{d} f, \star \sigma^1 \rangle$$



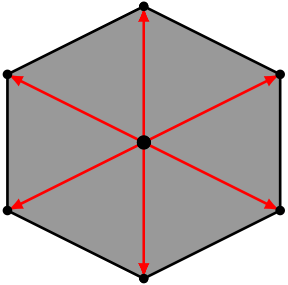
Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$\begin{aligned}\langle \Delta_B f, v\rangle &= \langle *\mathbf{d} * \mathbf{d} f, v\rangle = \frac{1}{|\star v|}\langle \mathbf{d} * \mathbf{d} f, \star v\rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|}\langle *\mathbf{d} f, \partial \star v\rangle = \frac{1}{|\star v|}\sum_{\sigma^1 \succ v}\langle *\mathbf{d} f, \star\sigma^1\rangle \\ &= \frac{1}{|\star v|}\sum_{\sigma^1 \succ v}\frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|}\langle \mathbf{d} f, \sigma^1\rangle\end{aligned}$$

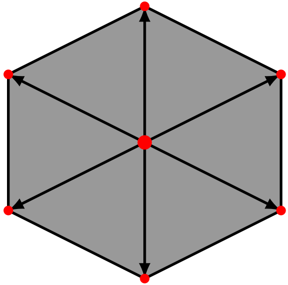


Beispiel: Diskreter Laplace-Beltrami-Operator

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta_B f, v\rangle = \langle *\mathbf{d} * \mathbf{d}f, v\rangle &= \frac{1}{|\star v|}\langle \mathbf{d} * \mathbf{d}f, \star v\rangle \\
&= \frac{1}{|\star v|}\langle *\mathbf{d}f, \partial \star v\rangle = \frac{1}{|\star v|}\sum_{\sigma^1 \succ v}\left\langle *\mathbf{d}f, \star \sigma^1\right\rangle \\
&= \frac{1}{|\star v|}\sum_{\sigma^1 \succ v}\frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|}\left\langle \mathbf{d}f, \sigma^1\right\rangle = \frac{1}{|\star v|}\sum_{\sigma^1 = [v, v_i]}\frac{|\star \sigma^1|}{|\sigma^1|}\left(f(v_i) - f(v)\right)
\end{aligned}
$$



$$\overset{\partial}{\longmapsto}$$



Implementierung am Beispiel

- Aufstellen des dualen Problems an einem globalen Knoten $v_i \in K^{(0)}$:

$$\left\langle *\Delta_B f, \star v_i \right\rangle = \sum_{\sigma^1 = [v_i, v_j]} \frac{\left|\star\sigma^1\right|}{\left|\sigma^1\right|} \left(f_j - f_i\right)$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen des dualen Problems an einem globalen Knoten $v_i \in K^{(0)}$:

$$\langle *\Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\sigma^1 = [v_i, v_j]} \frac{\left|\star\sigma^1\right|}{\left|\sigma^1\right|} (f_j - f_i)$$

- Umschreiben als Summe über Dreiecke σ^2 und Wechsel zu lokaler (Element)Indizierung:

$$\langle *\Delta_B f, \star v_i \rangle = \sum_{\substack{\sigma^2 = \left[v_0^{\sigma^2}, v_1^{\sigma^2}, v_2^{\sigma^2}\right] \\ v_0^{\sigma^2} = v_i}} \sum_{l=1,2} C_{0,l}^{\sigma^2} \left(f_l^{\sigma^2} - f_0^{\sigma^2} \right)$$

mit den Koeffizienten

$$C_{k,l}^{\sigma^2} = C_{l,k}^{\sigma^2} = \frac{\left|\star \left[v_k^{\sigma^2}, v_l^{\sigma^2}\right] \cap \sigma^2\right|}{\left|\left[v_k^{\sigma^2}, v_l^{\sigma^2}\right]\right|}$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen der Elementmatrizen für jedes Dreieck σ^2:

$$\begin{bmatrix} -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{02}^{\sigma^2}\right) & C_{01}^{\sigma^2} & C_{02}^{\sigma^2} \\ C_{01}^{\sigma^2} & -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) & C_{12}^{\sigma^2} \\ C_{02}^{\sigma^2} & C_{12}^{\sigma^2} & -\left(C_{02}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{\sigma^2} \\ f_1^{\sigma^2} \\ f_2^{\sigma^2} \end{bmatrix} =: A^{\sigma^2} f^{\sigma^2}$$

Implementierung am Beispiel

- Aufstellen der Elementmatrizen für jedes Dreieck σ^2:

$$\begin{bmatrix} -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{02}^{\sigma^2}\right) & C_{01}^{\sigma^2} & C_{02}^{\sigma^2} \\ C_{01}^{\sigma^2} & -\left(C_{01}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) & C_{12}^{\sigma^2} \\ C_{02}^{\sigma^2} & C_{12}^{\sigma^2} & -\left(C_{02}^{\sigma^2} + C_{12}^{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{\sigma^2} \\ f_1^{\sigma^2} \\ f_2^{\sigma^2} \end{bmatrix} =: A^{\sigma^2} f^{\sigma^2}$$

- Assemblierung der globalen Systemmatrix A
  (oder Rechte-Seite-Vektor)

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \quad \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\left\|\vec{H}\right\|$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \quad \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\left\|\vec{H}\right\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \quad \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\left\|\vec{H}\right\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

- Stetiges Problem: ($\mathbb{R}^3$-vektorisiertes skalares Problem)

$$\vec{H} = -\Delta_B \iota$$

Mittlere Krümmung H

- Krümmungsvektor:

$$\vec{H} = 2H\vec{\nu} \quad \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\left\|\vec{H}\right\|$$

- Inklusionsabbildung:

$$\iota : \mathbb{R}^3|_M \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

- Stetiges Problem: ($\mathbb{R}^3$-vektorisiertes skalares Problem)

$$\vec{H} = -\Delta_B \iota$$

- Diskretes Problem: Für alle $k = 1, 2, 3$ und $v \in K^{(0)}$:

$$\langle *H_k, \star v \rangle = -\langle *\Delta_B \iota_k, \star v \rangle$$

Weingartenabbildung

- ist ein (1,1)-Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}}M &\to T_{\vec{x}}M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

Weingartenabbildung

- ist ein (1,1)-Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}}M &\to T_{\vec{x}}M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

- Erweiterte Weingartenabbildung:

$$\bar{S} := \nabla\vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Die zwei betragsmäßig größten Eigenwerte sind Hauptkrümmungen.

Weingartenabbildung

- ist ein (1,1)-Tensorfeld:

$$\begin{aligned} S : T_{\vec{x}}M &\to T_{\vec{x}}M \\ \vec{w} &\mapsto \mathbf{d}\vec{\nu}(\vec{w}) \end{aligned}$$

- Erweiterte Weingartenabbildung:

$$\bar{S} := \nabla\vec{\nu} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Die zwei betragsmäßig größten Eigenwerte sind Hauptkrümmungen.

- Diskretes Problem: Für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $v \in K^{(0)}$:

$$\left\langle *\bar{\nu}^i, \star v\right\rangle = \left\langle * \left[\vec{\nu}^{\mathrm{Av}}\right]_i, \star v\right\rangle \tag{1}$$

$$\left\langle * \left[\nabla^{\overline{pd}}\bar{\nu}^i\right]_j, \star v\right\rangle - \left\langle * \left[S^{\overline{pd}}\right]_{ij}, \star v\right\rangle = 0 \tag{2}$$

Falls $\vec{\nu}$ bekannt, dann kann (1) weglassen werden.

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle *\vec{\nu}^{\mathsf{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left| \star v \cap \sigma^2 \right| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle *\vec{\nu}^{\mathrm{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left| \star v \cap \sigma^2 \right| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskreter Primär-Dual-Gradient im Mittel

$$\left\langle * \nabla^{\overline{pd}} f, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left| \star v \cap \sigma^2 \right| \sum_{\sigma^0 \prec \sigma^2} \left(f(\sigma^0) - f(v) \right) \nabla \Phi_{\sigma^0}^{\sigma^2}$$

Diskretes Normalenfeld

$$\left\langle *\vec{\nu}^{\mathrm{Av}}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left|\star v \cap \sigma^2\right| \vec{\nu}^{\sigma^2}$$

Diskreter Primär-Dual-Gradient im Mittel

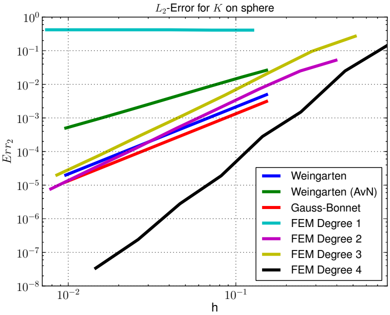
$$\left\langle * \nabla^{\overline{pd}} f, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left|\star v \cap \sigma^2\right| \sum_{\sigma^0 \prec \sigma^2} \left(f(\sigma^0) - f(v) \right) \nabla \Phi_{\sigma^0}^{\sigma^2}$$

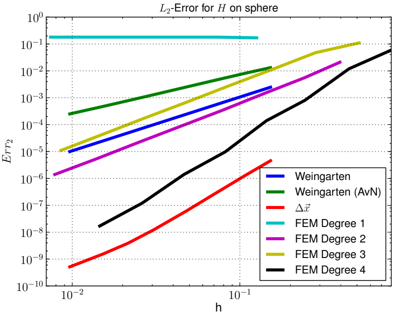
Gauß-Bonnet-Operator

$$\left\langle * K^{GB}, \star v \right\rangle = \sum_{\sigma^2 \succ v} \left(\frac{2\pi}{m_v} - \sum_{\sigma^2 \succ \sigma^1 \succ v} \operatorname{atan2}\left(2 \left|\star\sigma^1 \cap \sigma^2\right|, \left|\sigma^1\right|\right) \right)$$

Oberflächen

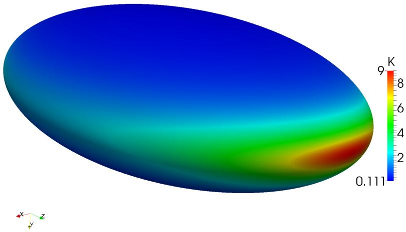
- Einheitssphäre: $K \equiv 1$, $H \equiv 1$

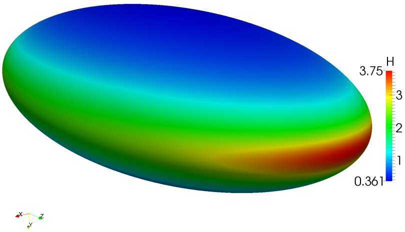




Oberflächen

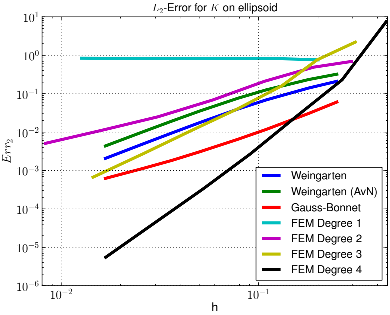
- Einheitssphäre: $K \equiv 1,\ H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$

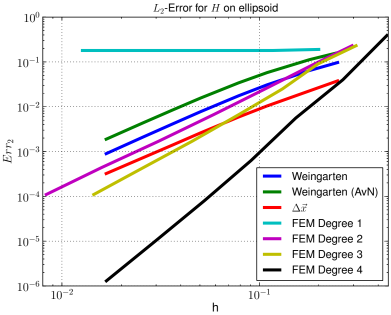




Oberflächen

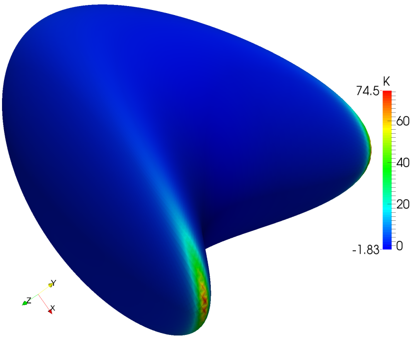
- Einheitssphäre: $K \equiv 1,\ H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$

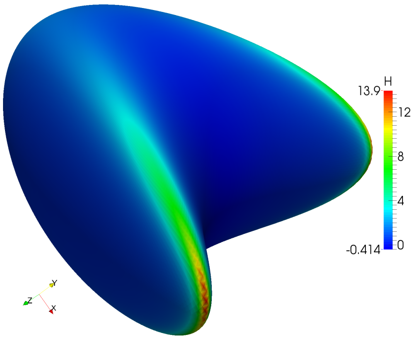




Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1,\ H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x,y,z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x,y,z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$





Oberflächen

- Einheitssphäre: $K \equiv 1,\ H \equiv 1$
- Ellipsoid: $\varphi(x, y, z) := (3x)^2 + (6y)^2 + (2z)^2 - 9$
- Quartische Oberfläche: $\varphi(x, y, z) := (x - z^2)^2 + (y - z^2)^2 + z^2 - 1$