Einführung in das Kalkül diskreter Differentialformen (DEC)

Ingo Nitschke

IWR - TU Dresden

8. April 2014

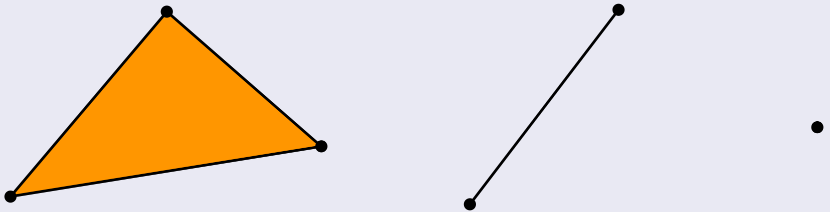
Content

Ein p-Simplex ist die konvexe Hülle von $p+1$ geometrisch unabhängigen Punkten (Knoten, Vertices)

$$\sigma^p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \middle| x = \sum_{i=0}^{p} \mu^i v_i \text{ wobei } \mu^i \geq 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{p} \mu^i = 1 \right\}$$

Geometrisch unabhängig heißt, dass die p Vektoren $v_1 - v_0, \ldots, v_p - v_0$ linear unabhängig sind.

Beispiel für σ^2, σ^1 und σ^0



Ein Simplizialkomplex K der Dimension n ist eine Menge von Simplizes $\left\{\sigma^p \in \mathbb{R}^N \middle| 0 \leq p \leq n \leq N\right\}$, so dass

(i) $\forall \sigma^r \prec \sigma^p : \quad \sigma^r \in K \qquad (0 \leq r \leq p)$

(ii) für alle $\sigma^r := \sigma^p \cap \sigma^q$ gilt $\qquad (0 \leq r \leq \min\{p, q\})$

  (a) entweder $\sigma^r \prec \sigma^p$ und $\sigma^r \prec \sigma^q$

  (b) oder $\sigma^r = \emptyset$

D.h. z.B. hängende Knoten sind nicht zulässig.

Das Polytop von K ist (der zu Grunde liegende Raum)

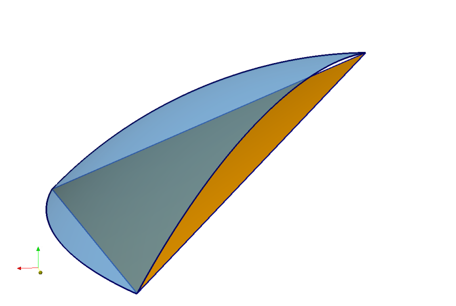
$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

(Andersherum heißt K eine **Triangulation** von $|K|$)
Achtung: $|K|$ liegt nur für **flache (lineare)** K in einem affinen n-dim. Untervektoraum des $\mathbb{R}^N$.

Diskretisierung einer Mannigfaltigkeit M

- Wir wollen nicht die Kartengebiete auf der Mannigfaltigkeit diskretisieren.
- Die n-Mannigfaltigkeit wird in den $\mathbb{R}^N$ eingebettet.
- Wir setzen dann nur voraus, dass $\sigma_M^0 = \sigma_K^0$

Beispiel

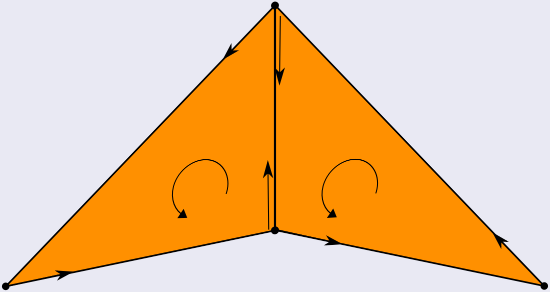


Orientierter mannigfaltigartiger Simplizialkomplex K (Primärgitter)

orientiert: $\operatorname{sgn}(\sigma_1^n, \sigma_2^n) = +1$ für $\sigma_1^n \cap \sigma_2^n \neq \emptyset$

mannigfaltigartig: $|K|$ ist eine $\mathfrak{C}^0$-Mannigfaltigkeit

Beispiel



Durch lokale Nummerierung der Knoten (z.B. im math. pos. Drehsinn) auf den Volumenelementen σ^n lässt sich eine Orientierung induzieren.

Umkreismittelpunkt (Circumcenter) $c(\sigma^p)$

$$c(\sigma^0) := \sigma^0$$

$$v_0, \ldots, v_p \in \mathbb{S}^{p-1}_{c(\sigma^p)} \subset P(\sigma^p)$$

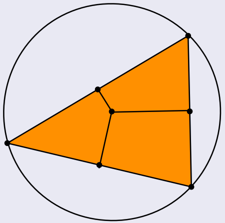
Wohlzentrierter Simplizialkomplex K

$$\forall \sigma \in K : \quad c(\sigma) \in \mathrm{Int}(\sigma)$$

$(\mathrm{Int}(\sigma^0) = \sigma^0, \mathrm{Bd}(\sigma^0) = \emptyset)$

Die Wohlzentriertheit lässt sich durch Verfeinerung sicherstellen.

Beispiel

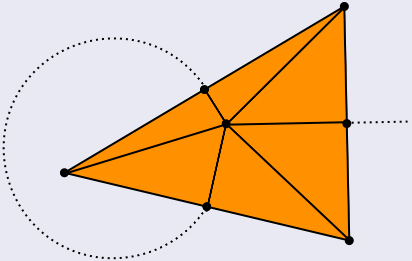


Umkreismittelpunktunterteilung eines wohlzentrierten Simplizialkomplexes (Circumcentric SubDivision)

$$\mathrm{csd}K := \{[c(\sigma_1), \ldots, c(\sigma_k)] | \sigma_1 \prec \ldots \prec \sigma_k, 1 \leq k \leq n\}$$

- $|\mathrm{csd}K| = |K|$
- Umsetzbar als Verfeinerung ohne Oberflächenprojektion
- Vorsicht: csd induziert eine andere Kantenorientierung als die oben angegebene.
- Ist K ein Primärgitter, dann ist $\mathrm{csd}K$ das Dualgitter.

Beispiel



Der Raum der **Differential-p-Formen** $\Omega^p(M)$ auf einer (2-)Mannigfaltigkeit M

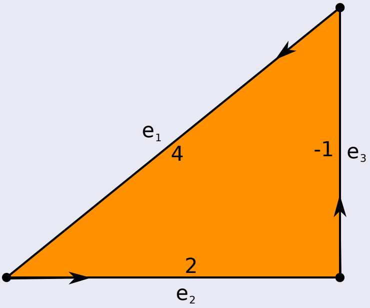
$x \in M$:

- allg.: $\Omega^p_x(M) = \mathfrak{A}((T_xM)^p, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{L}((T_xM)^p, \mathbb{R})$
- $\Omega^0_x(M) = \operatorname{span}\{1\}$, d.h. $\Omega^0(M) = \mathfrak{C}^\infty(M, \mathbb{R})$
- $\Omega^1_x(M) = \operatorname{span}\left\{dx^1, dx^2\right\} = T^*_xM = \mathfrak{L}(T_xM, \mathbb{R})$
  - $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^j_i$ (Dualität)
  - $\Omega^1(M) \overset{\flat \quad \sharp}{\longleftrightarrow} \mathfrak{X}(M)$
  - $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i \in \Omega^1(M)$, $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(M)$:
    $$\alpha(v) = \sum_i \alpha_i v^i = \sum_{i,j} g_{ij}\alpha^j v^i = \langle \alpha^\sharp, v\rangle_M$$
    (Beziehung zum Skalarprodukt)
- $\Omega^2_x(M) = \operatorname{span}\left\{dx^1 \wedge dx^2\right\} \subset \mathfrak{L}(T_xM \times T_xM, \mathbb{R})$
  - $\left(dx^1 \wedge dx^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right) = -\left(dx^1 \wedge dx^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = 1$ (alternierend)

(Primärer) Kettenkomplex $C_p(K)$

- $C_p(K) = \text{span}\,\{\sigma^p \in K\}$ (formal)
- $c^p \in C_p(K)$ heißt (primäre) p-Kette.

Beispiel



$$c^1 = 4e_1 + 2e_2 - e_3 \in C_1(K)$$

Raum der **(primären) diskreten** p-**Formen**

$$\Omega^p_d(K) := C^p(K) := \mathfrak{L}(C_p(K), \mathbb{R})$$

Von p-Formen zu diskreten p-Formen

- Projektion eines Simplexes auf die Mannigfaltigkeit (abstraktes Simplex):

$$\pi : K \ni \sigma^p \longmapsto \pi(\sigma^p) =: \tau^p \in L \quad (\tau^p \subset M)$$

- **De-Rham-Abbildung** $\psi^p : \Omega^p(M) \to C^p(L)$:

$$\langle \psi^p(\alpha), \tau^p \rangle := \psi^p(\alpha)(\tau^p) := \int_{\tau^p} \alpha$$

- diskrete p-Form $\alpha_d \in C^p(K)$ einfach durch $\psi(\alpha) \circ \pi$, d.h.

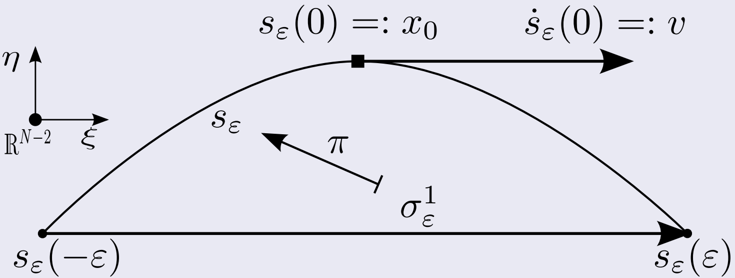
$$\langle \alpha_d, \sigma^p \rangle := \alpha_d(\sigma^p) := \langle \psi^p(\alpha), \pi(\sigma^p) \rangle$$

Beispiel: diskrete 1-Form im Limes

$$\alpha_d(\sigma^1_\varepsilon) = \langle\psi^1(\alpha), s_\varepsilon\rangle = \int_{s_\varepsilon}\alpha = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\langle\alpha, \dot{s}_\varepsilon(t)\rangle_M dt$$

$$= 2\varepsilon\langle\alpha, v\rangle_M + \mathcal{O}(\varepsilon^3 \max_\tau \|\ddot{s}_\varepsilon(\tau)\|) \text{ bei } x_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\sigma^1_\varepsilon|}\alpha_d(\sigma^1_\varepsilon) = \alpha_d(v) = \alpha(v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \max_\tau \|\ddot{s}_\varepsilon(\tau)\|)$$



(s_ε so parametrisiert, dass $\|v\|_{\mathbb{R}^N} = 1$)

Äußere (Cartan) Ableitung $\mathbf{d} : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{p+1}(M)$ auf einer (2-)Mannigfaltigkeit M

- $f \in \Omega^0(M)$: $\quad \mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 \in \Omega^1(M)$
- $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 \in \Omega^1(M)$:

$$\mathbf{d}\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(M)$$

- $0 \to \mathfrak{C}^\infty(M) \xrightarrow{\mathbf{d}_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \Omega^2(M) \to 0$
  ($\nearrow$ De-Rham-Kohomologie)
- d.h. $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$
- Stokes' Theorem:

$$\int_M \mathbf{d}\omega = \int_{\partial M} \omega \qquad (\omega \in \Omega^p(M))$$

(Kurzschreibweise, eigentlich $\int_{\partial M} i^*\omega$ auf der RHS mit $i : \partial M \to M$)

Randoperator $\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$

$$\partial\sigma^p = \partial\left[v_0, \dots, v_p\right] = \sum_{i=0}^{p}(-1)^p\left[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p\right]$$

- $\partial\left[v_0, v_1, v_2\right] = \left[v_1, v_2\right] - \left[v_0, v_2\right] + \left[v_0, v_1\right]$
- $\partial\left[v_0, v_1\right] = \left[v_1\right] - \left[v_0\right]$
- $\partial \circ \partial = 0$ ($\nearrow$ Ketten-Homologie)

Diskrete Äußere Ableitung (Korandoperator) $\mathbf{d} : \Omega_d^p(K) \longrightarrow \Omega_d^{p+1}(K)$

$$\mathbf{d}\alpha := \alpha \circ \partial$$

- d.h. $\langle \mathbf{d}\alpha, c_{p+1} \rangle = \langle \alpha, \partial c_{p+1} \rangle$ **(Diskretes Stokes' Theorem)**
- $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ ($\nearrow$ Ketten-Kohomologie)

Beispiel: **Rücktransport (Pullback)** einer diskreten Form $\alpha \in \Omega_d^p(K)$ bzgl. $\varphi : |\tilde{K}| \to |K|$

$$\left\langle \varphi^*(\mathbf{d}\alpha), \sigma^{p+1} \right\rangle = \left\langle \mathbf{d}\alpha, \varphi\sigma^{p+1} \right\rangle = \left\langle \alpha, \partial(\varphi\sigma^{p+1}) \right\rangle = \left\langle \varphi^*\alpha, \partial\sigma^{p+1} \right\rangle = \left\langle \mathbf{d}(\varphi^*\alpha), \sigma^{p+1} \right\rangle$$

($\varphi^*\alpha \in \Omega_d^p(\tilde{K})$ ist dann die **zurückgezogene diskrete Form**)

Hodge-Stern-Operator $* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$ (auf einer (2-)Mannigfaltigkeit M (mit Metrik $g = \mathrm{diag}(g_1, g_2)$))

- $* \circ * = (-1)^{p(n-p)}\mathrm{Id} \qquad (\text{für } \mathrm{Ind}(M) = 0)$
- $f \in \Omega^0(M): \quad *f = f\sqrt{|g|}dx^1 \wedge dx^2 = f\mu$
- $\alpha = \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2 \in \Omega^1(M):$

$$*\alpha = \sqrt{|g|}\left(g^1\alpha_1 dx^2 - g^2\alpha_2 dx^1\right) = \sqrt{|g|}\left(\alpha^1 dx^2 - \alpha^2 dx^1\right)$$

- $\omega = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 \in \Omega^2(M): \qquad *\omega = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\omega_{12}$
- Allgemeine Definition: $\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \mu$ für $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$
  $\Rightarrow *\left(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) =$
  $\sqrt{|g|} \sum_{\substack{j_1 < \ldots < j_p \\ j_{p+1} < \ldots < j_n}} \mathrm{sgn}\left(j_1, \ldots, j_n\right) g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} dx^{j_{p+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{j_n}$

(Stern-)Dualitätsoperator $\star : C_p(K) \longrightarrow C_{n-p}(\mathrm{csd}K)$

$$\star(\sigma^p) = \sum_{\sigma^p \prec \ldots \prec \sigma^n} s_{\sigma^p,\ldots,\sigma^n} \left[c(\sigma^p), \ldots, c(\sigma^n)\right]$$

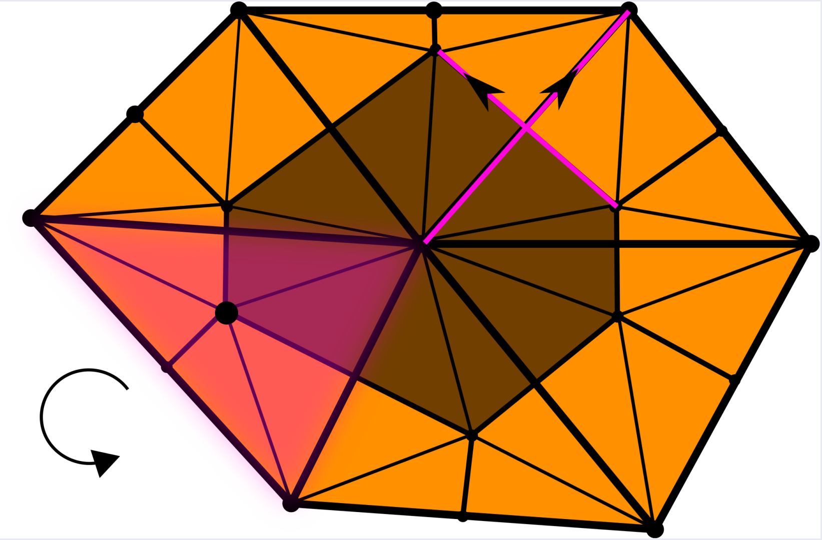
wobei für beliebige $\sigma^0 \prec \ldots \prec \sigma^{p-1} \prec \sigma^p$ aus K:

$$s_{\sigma^p,\ldots,\sigma^n} = \operatorname{sgn}\left(\left[c(\sigma^0), \ldots, c(\sigma^p)\right], \sigma^p\right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\left[c(\sigma^0), \ldots, c(\sigma^n)\right], \sigma^n\right)$$

Beispiel: 2D

- Knoten (σ^0) werden auf die Voronoi-„Zellen“(-Flächenketten) abgebildet. (Orientierungen sind gleich der anderen Flächensimplexe $\Leftarrow$ Orientierbarkeit)
- Kanten (σ^1) werden auf die Voronoi-„Kanten“(-Kantenketten) abgebildet. (Orientierung (bei Rechte-Hand-Ambiente) durch Vierteldrehung von σ^1 gegen den Uhrzeigersinn)
- Flächen (σ^2) werden auf die Voronoi-Knoten abgebildet. (Orientierung ist $+1$ per Def.)

Beispiel: 2D



Dualer Kettenkomplex (Voronoikomplex) $C_p(\star K)$

$$C_p(\star K) := \mathrm{Im}(\star_{n-p}) \leq C_p(\mathrm{csd} K)$$

(Stern-)Dualitätsoperator $\star : C_p(\star K) \longrightarrow C_{n-p}(K)$, so dass gilt

$$\star \star \sigma^{n-p} = (-1)^{p(n-p)} \sigma^{n-p}$$

Beispiel: Kante σ^1 in 2D

„Two Quarter Turns Make a Flip “

Raum der **dualen diskreten** p-**Formen**

$$\Omega_d^p(\star K) := C^p(\star K) := \mathfrak{L}(C_p(\star K), \mathbb{R})$$

Diskreter Hodge-Stern-Operator $* : \Omega^p(K) \longrightarrow \Omega^{n-p}(\star K)$

$$\frac{1}{|\star\sigma^p|}\left\langle *\alpha, \star\sigma^p \right\rangle := \frac{s}{|\sigma^p|}\left\langle \alpha, \sigma^p \right\rangle$$

- Für $1 \leq p \leq n-1$: $\quad s = 1$
- Für $p = 0$: $\quad s = (-1)^{n-1}\mathrm{sgn}\left(\partial(\star\sigma^0), \star\sigma^1\right)$
  - Kante $\sigma^1 \succ \sigma^0$ zeigt von σ^0 weg.
  - In 2D (bei Rechte-Hand-Ambiente) ist $s = -1$.
- Für $p = n$:

$$s = \begin{cases} (-1)^{n-1} & \text{falls für } \tilde{\sigma}^{n-1} \subset \partial\sigma^n \text{ die } \star\tilde{\sigma}^{n-1} \text{ von } \star\sigma^n \text{ wegzeigen,} \\ (-1)^n & \text{sonst.} \end{cases}$$

  - In 2D ist $s = 1$.

Koableitung $\delta : \Omega^{p+1}(M) \longrightarrow \Omega^p(M) \qquad (\mathrm{Ind}(M) = 0)$

$$\delta := (-1)^{np+1} * \mathbf{d} *$$

- $\delta \circ \delta = 0$
- $\langle\langle \delta\alpha, \beta \rangle\rangle = \langle\langle \alpha, \mathbf{d}\beta \rangle\rangle$
- Laplace-De-Rham: $\Delta^{dR} := \delta\mathbf{d} + \mathbf{d}\delta$
- Laplace-Beltrami: $\Delta^{B} := -\mathrm{Div} \circ \mathrm{Grad} := \delta\mathbf{d}$
- in 2D:
  - $\delta = - * \mathbf{d} *$
  - Laplace-Beltrami für eine 0-Form f mit Metrik $g = \mathrm{diag}(g_1, g_2)$:

$$\Delta^B f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{|g|} g^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{|g|} g^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) \right]$$

$(\alpha, \beta \in \Omega^p(M) : \qquad \langle\langle \alpha, \beta \rangle\rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta)$

Diskrete Koableitung $\delta : \Omega_d^{p+1}(K) \longrightarrow \Omega_d^p(K)$

$$\delta := (-1)^{np+1} * \mathbf{d} *$$

Beispiel: $\Delta^B f$ an einem primär Knoten σ^0 für eine diskrete 0-Form $f \in \Omega_d^p(0)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \Delta^B f, \sigma^0 \right\rangle &= -\left\langle * \mathbf{d} * \mathbf{d} f, \sigma^0 \right\rangle = \frac{1}{|\star \sigma^0|} \left\langle \mathbf{d} * \mathbf{d} f, \star\sigma^0 \right\rangle \qquad (|\sigma^0| = 1) \\
&= \frac{1}{|\star \sigma^0|} \left\langle * \mathbf{d} f, \partial(\star\sigma^0) \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\star \sigma^0|} \left\langle * \mathbf{d} f, \sum_{\sigma^1 = [\sigma^0, v]} \star\sigma^1 \right\rangle
\end{aligned}$$

Beispiel: Fortsetzung zu $\Delta^B f$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Delta^B f, \sigma^0 \right\rangle &= \frac{1}{|\star\sigma^0|} \sum_{\sigma^1=[\sigma^0,v]} \left\langle * \mathbf{d} f, \star\sigma^1 \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\star\sigma^0|} \sum_{\sigma^1=[\sigma^0,v]} \frac{|\star\sigma^1|}{|\sigma^1|} \left\langle \mathbf{d} f, \sigma^1 \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\star\sigma^0|} \sum_{\sigma^1=[\sigma^0,v]} \frac{|\star\sigma^1|}{|\sigma^1|} \left\langle f, \partial\sigma^1 \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\star\sigma^0|} \sum_{\sigma^1=[\sigma^0,v]} \frac{|\star\sigma^1|}{|\sigma^1|} \left\langle f, [v] - \sigma^0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{|\star\sigma^0|} \sum_{\sigma^1=[\sigma^0,v]} \frac{|\star\sigma^1|}{|\sigma^1|} \left(f(v) - f(\sigma^0) \right)
\end{aligned}
$$

... Fortsetzung folgt.

In den Hauptrollen:

- diskrete Vektorfelder $\mathfrak{X}_d(\star K)$ (bzw. $\mathfrak{X}_d(K)$)
- diskreter Flat-Operator $\flat : \mathfrak{X}_d(\star K) \longrightarrow \Omega_d^1(K)$
  ($\rightsquigarrow$ Div, ...)
- diskreter Sharp-Operator $\sharp : \Omega_d^1(K) \longrightarrow \mathfrak{X}_d(\star K)$
  ($\rightsquigarrow$ Grad, Rot...)
- diskretes äußeres Produkt (Dachprodukt)
  $\wedge : \Omega_d^p(K) \times \Omega_d^q(K) \longrightarrow \Omega_d^{p+q}(K)$
  ($\rightsquigarrow$ Kreuzprodukt $\times$, ...)
- diskretes inneres Produkt (Kontraktion)
  $\mathbf{i} : \mathfrak{X}_d(\star K) \times \Omega_d^{p+1}(K) \longrightarrow \Omega_d^p(K)$
  ($\rightsquigarrow$ Lie-Ableitung $\mathfrak{L}_X$, ∇_X, ...)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!