Erläuterungen zum NSDEC-Paper

Ingo Nitschke

24. November 2016

1 Konsistenz zeitdiskreter Advektion

Wir bedienen uns im Folgenden der Lagrange-Darstellung des Fluids auf der Oberfläche. D.h. die Wahl lokaler Koordinaten soll weder von der Strömung $\mathbf{u}$ noch von der Zeit t abhängen. Somit gilt insbesondere $\partial_t \mathbf{g} = 0$. Folglich sind kovariante Ortsableitungen und die Zeitableitung zu einander kommutativ in der Reihenfolge der Verkettung. Wir bezeichen mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{k+1}$ das Geschwindigkeits(-1-Form-)feld zur aktuellen Zeit $t = t_{k+1}$ und $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}(t-\tau) = \mathbf{u}_k$ das Geschwindigkeitsfeld zur vergangenen Zeit $t-\tau = t_k$. Tayler-Approximation vorwärts in der Zeit, für die relevanten Größen, liefert

$$[\tilde{\mathbf{u}}]^j = \tilde{u}^j = u^j - \tau\partial_t u^j + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \tag{1}$$

$$[\nabla\tilde{\mathbf{u}}]_{ij} = \tilde{u}_{i|j} = u_{i|j} - \tau\partial_t u_{i|j} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) . \tag{2}$$

Somit erhalten wir die Entwicklungen

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}]_i &= u^j\tilde{u}_{i|j} = u^j u_{i|j} - \tau u^j\partial_t u_{i|j} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (3)\\
&= [\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \tau\nabla_{\mathbf{u}}\partial_t\mathbf{u}]_i + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (4)\\
[\nabla_{\tilde{\mathbf{u}}}\mathbf{u}]_i &= \tilde{u}^j u_{i|j} = u^j u_{i|j} - \tau\left(\partial_t u^j\right)u_{i|j} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (5)\\
&= [\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \tau\nabla_{\partial_t\mathbf{u}}\mathbf{u}]_i + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (6)\\
[\nabla_{\tilde{\mathbf{u}}}\tilde{\mathbf{u}}]_i &= \tilde{u}^j\tilde{u}_{i|j} = \left(u^j - \tau\partial_t u^j\right)\left(u_{i|j} - \tau\partial_t u_{i|j}\right) + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (7)\\
&= u^j u_{i|j} - \tau\left(u^j\partial_t u_{i|j} + \left(\partial_t u^j\right)u_{i|j}\right) + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (8)\\
&= [\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \tau\left(\nabla_{\mathbf{u}}\partial_t\mathbf{u} + \nabla_{\partial_t\mathbf{u}}\mathbf{u}\right)]_i + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) && (9)
\end{aligned}$$

Für den linearisierten Advektionsterm erhalten wir nun

$$\nabla_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} + \nabla_{\tilde{\mathbf{u}}}\mathbf{u} - \nabla_{\tilde{\mathbf{u}}}\tilde{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \tag{10}$$

und somit eine Konsistenzordnung von 2 in der Zeit.

In "NAVIER–STOKES EQUATIONS IN ROTATION FORM: A ROBUST MULTIGRID SOLVER FOR THE VELOCITY PROBLEM" (2002), by M. A. Olshanskii A.

Reusken, findet effektiv nur der erste Term Beachtung[1], d.h.

$$\nabla_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \mathcal{O}(\tau) \ , \tag{11}$$

was nur eine Konsistenzordnung von 1 in der Zeit bringt.

Um eine diskrete Lie-Ableitung, wie in "Discrete Lie Advection of Differential Forms" (2011), by P. Mullen, A. McKenzie , D. Pavlov, L. Durant, Y. Tong, E. Kanso, J.E. Marsden, and M. Desbrun, sinnvoll nutzen zu können, muss die zeitdiskrete Advektion ihre Symmetrieeigenschaft beibehalten, da es sonst zu viele zusätzliche (antisymmetrische) Terme gibt. Gemeint ist, dass zwar

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathcal{L}_{\mathbf{u}^\sharp}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{d}\left\|\mathbf{u}\right\|^2 \tag{12}$$

gilt, aber allgemeiner auch

$$\nabla_{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{L}_{\mathbf{u}^\sharp}\tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{2}\langle\mathbf{u},\tilde{\mathbf{u}}\rangle + \frac{1}{2}\left((\operatorname{rot}\mathbf{u})(*\tilde{\mathbf{u}}) - (\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{u}})(*\mathbf{u}) + (\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}})\,\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\,\tilde{\mathbf{u}} - *\mathbf{d}\langle\mathbf{u},*\tilde{\mathbf{u}}\rangle\right) \ , \tag{13}$$

was zu der schon schlechteren zeitlichen Konsistenz auch keinen Gewinn in der Ortsdiskretisierung ergeben würde. Deshalb könnte man gleich die Lie-Advection der rechten Seite von (12) linearisieren, was uns zu (analog zu oben)

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{u}}^\sharp}\mathbf{u} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}^\sharp}\tilde{\mathbf{u}} - \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{u}}^\sharp}\tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{2}\mathbf{d}\left\|\mathbf{u}\right\|^2 + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \tag{14}$$

führt. Oder wir setzen (13) in die schon linearisierte Advektion (10) ein. Wegen der Symmetrie der Form (10) in $\mathbf{u}$ und $\tilde{\mathbf{u}}$, verschwinden die zusätzlichen Terme und wir erhalten

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{u}}^\sharp}\mathbf{u} + \mathcal{L}_{\mathbf{u}^\sharp}\tilde{\mathbf{u}} - \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{u}}^\sharp}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\mathbf{d}\left(\left\|\tilde{\mathbf{u}}\right\|^2 - 2\langle\mathbf{u},\tilde{\mathbf{u}}\rangle\right) + \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \ . \tag{15}$$

Beide Varianten unterscheiden sich augenscheinlich nur um eine exakte 1-Form, welche sich wieder in gewohnter Weise in den generalisierten Druck überführen lässt. Genauer ist es sogar so, dass

$$\frac{1}{2}\mathbf{d}\left(\left\|\tilde{\mathbf{u}}\right\|^2 - 2\langle\mathbf{u},\tilde{\mathbf{u}}\rangle\right) + \frac{1}{2}\mathbf{d}\left\|\mathbf{u}\right\|^2 = \frac{1}{2}\mathbf{d}\left\|\mathbf{u}-\tilde{\mathbf{u}}\right\|^2 = \mathcal{O}\left(\tau^2\right) \tag{16}$$

gilt und sich beide Varianten nur um $\mathcal{O}\left(\tau^2\right)$ unterscheiden.

Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass in 'Discrete Lie Advection of Differential Forms" zwar ein allgemeines Vorgehen angegeben ist, aber explizit ist die Diskrete Lie-Ableitung hier nur für flache uniforme Vierecksgitter gegeben.

[1] $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \operatorname{rot}(\mathbf{u})(*\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{d}\left\|\mathbf{u}\right\|^2$, wobei $(\operatorname{rot}\mathbf{u})(*\mathbf{u}) = (\operatorname{curl}\mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ im flachen Fall und die exakte Form $\frac{1}{2}\mathbf{d}\left\|\mathbf{u}\right\|^2$ lässt sich in den generalisierten Druck schieben. Linearisiert wird der Term $(\operatorname{curl}\mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ zu $(\operatorname{curl}\tilde{\mathbf{u}}) \times \mathbf{u}$.