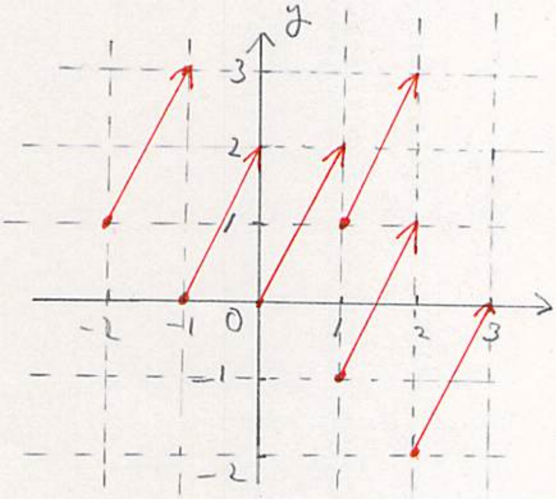
本日(5/27)の目標(教科書P12〜17)

1. ベクトルの成分表示を理解する.
2. 成分表示されたベクトルの演算法則を理解する.

第1回授業で見た法則



ベクトルの相等(第1回目)の定義により左の6つのベクトルは全て同じものと見なす.

⇩

座標平面・空間の中でベクトルを扱う場合, 原点Oを始点とするベクトル(Oに関する位置ベクトル)を扱い, ベクトルを"数値化"する.

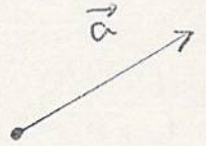
⇩

ベクトルの成分表示.

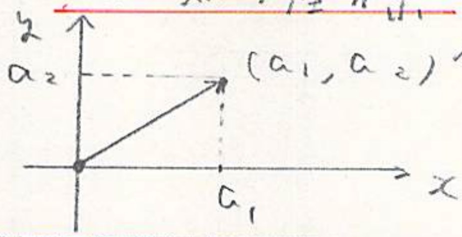
ベクトルの成分表示(2次元)

ベクトルを数字で表したい!

① ベクトル $\vec{a}$ ⇒ ② 始点を原点に移動したときの終点の座標 ⇒ ③ ベクトルの成分表示



⇒

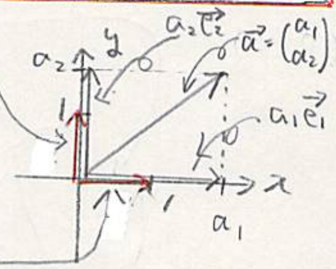


縦に並べる

⇒ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 　a_1:x成分　a_2:y成分　という

定義(基本ベクトル)

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルという



定理(ベクトルの成分表示による計算)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき

- $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
- $\underset{\vec{a} \pm \vec{b}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$, $\underset{k\vec{a}}{\underset{\parallel}{k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$ (k:実数)
- $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = |k|\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ を用いて表すと

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

ベクトルの成分は,基本ベクトルで表したときの"係数"である.

例18 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき, $2\vec{a} - \vec{b}$ と $|2\vec{a} - \vec{b}|$ を求めてみよう.

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

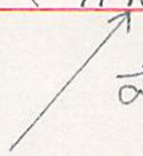
$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{89} \;/\!/$$

問4 $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ のとき, $3\vec{c} - 2\vec{d}$, $|3\vec{c} - 2\vec{d}|$ を求めよ.

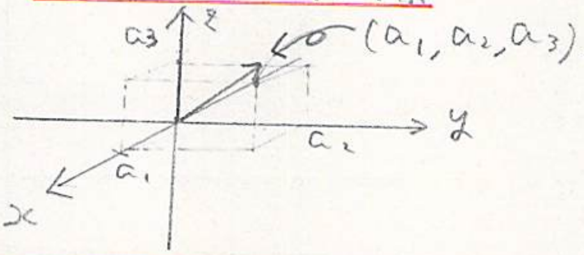
ベクトルの成分表示（3次元）

3次元ベクトルの成分表示

① ベクトル $\vec{a}$



$\Rightarrow$ ② $\vec{a}$ の始点が座標空間の原点にくる様に平行移動したときの終点の座標



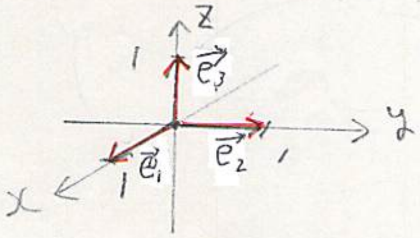
$\Rightarrow$ ③ ベクトルの成分表示

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

a_1 : x成分
a_2 : y成分
a_3 : z成分

定義（基本ベクトル）

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を基本ベクトルという



定理（3次元ベクトルの成分表示）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ について

- $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_3 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$
- $k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$
- $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$ （k：実数）

例9　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ のとき、$2\vec{a} - 3\vec{b}$ と $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$ を求めよう。

$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-3) \\ 10-6 \\ -4-(-9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{9^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{122} \;/\!/$$

定理（点とベクトル）

空間内の2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について,

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$,

（Oは原点とする）

- $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

例10 2点 $A(5, 3, 1)$, $B(-1, 0, 2)$ について, $\overrightarrow{AB}$ と $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ.

解

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{46}.$$

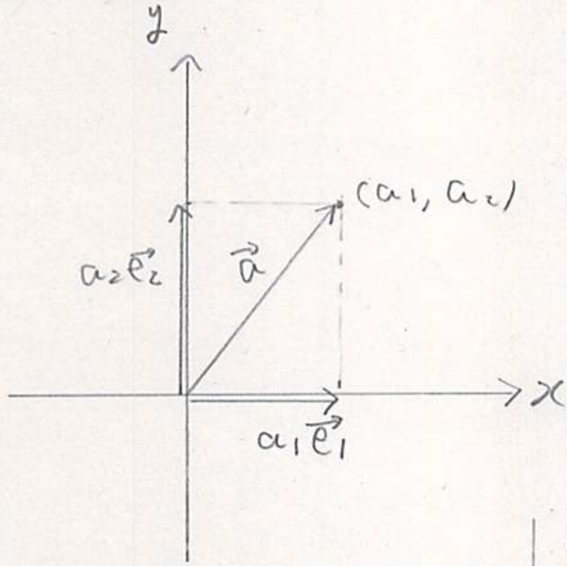
//

"複雑な現象 $f: M \circlearrowright$"

$\Longrightarrow$ fは"伸びる方向"と"縮む方向"をもつ

$$f: \begin{cases} \vec{e_1} \text{ 方向に縮む作用をする} \\ \vec{e_2} \text{ 方向に伸びる作用をする} \end{cases}$$
とする

$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$



"f"でうつす

fが"線形写像"の場合

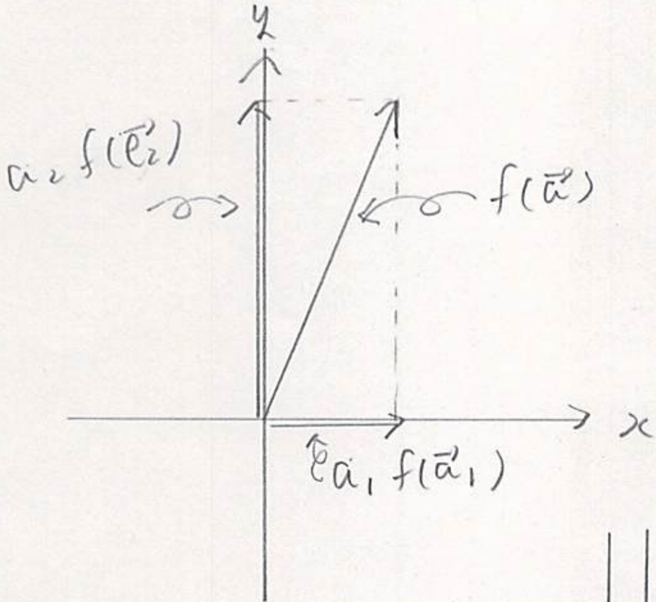
定義

$f(\vec{a}) = f(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2})$

$= a_1 f(\vec{e_1}) + a_2 f(\vec{e_2})$

fは$\vec{e_1}$を縮小させる

fは$\vec{e_2}$を拡大させる



$\Downarrow$

元の空間を現象fの作用に関して"拡大する方向"と"縮小する方向"に分解して考える。

線形代数3,4で扱う"固有値","固有ベクトル","対角化"

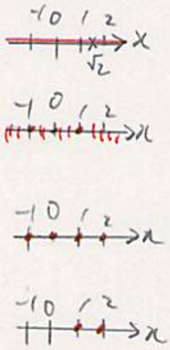
本日（6/3）の目標（教科書 P17〜19）

1. 平面内の直線の3つの表し方を理解する:
   - ・ベクトル方程式
   - ・媒介変数表示
   - ・媒介変数を消去した方程式（陰関数表示）

そのために

2. ベクトルの平行条件を再び見る.

記号のおさらい

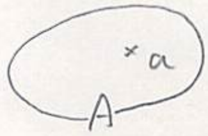


$\mathbb{R}$ … 実数全体の集合 $=\{x \mid -\infty < x < \infty\}$,

$\mathbb{Q}$ … 有理数全体の集合 $=\left\{\dfrac{q}{p} \;\middle|\; \begin{array}{l} p \in \mathbb{N}, \\ q \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$,

$\mathbb{Z}$ … 整数全体,

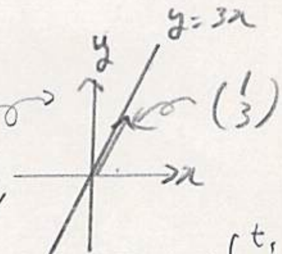
$\mathbb{N}$ … 自然数全体.



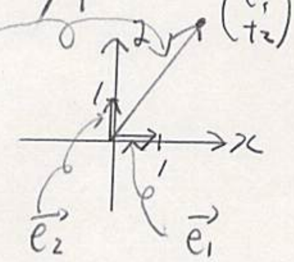
$a \in A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ a は集合 A の要素（又は元）

例 $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

何故直線をベクトルを用いて表すのか？



例えば 直線 $y=3x$ は $\left\{t\binom{1}{3} \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$ により,
平面は $\{t_1\vec{e_1} + t_2\vec{e_2} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ により,
"骨組み"（"基底"というベクトル）を
用いて表せる.



$\Longrightarrow$ 線形写像（力学系の一種）の合成反復による
変化の過程を調べる！

- 行列 $\longleftarrow$ 力学系の"微分"（接空間上の作用）
- 線形汎関数（フーリエ変換やラプラス変換）（関数空間上の作用）

ベクトルにより可視化する

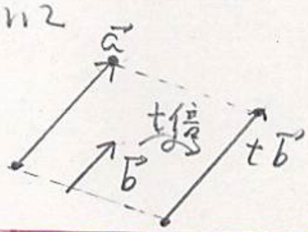
定義（ベクトルの平行）

$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$,

$\vec{a} \parallel \vec{b} \overset{\text{def}}{\iff}$ ある $t \in \mathbb{R}$ $(t \neq 0)$ を用いて

$$\vec{a} = t\vec{b}$$

と表せる



例11 $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix}$ が $\vec{a} \parallel \vec{b}$ を満たす様な実数 k の値をもとめよう。

解 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ であるから、ある実数 $t \neq 0$ を用いて

$$\vec{b} = t\vec{a} \quad \text{——} ⓪$$ と表せる。

$$\begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5t\\2t\end{pmatrix}$$

ベクトルの相等の定義

$$\iff \begin{cases} -1 = 5t & \text{——} ① \\ k = 2t & \text{——} ② \end{cases}$$

① より $t = -\dfrac{1}{5}$ 、② より $k = -\dfrac{2}{5}$ //

⓪ を $\vec{a} = u\vec{b}$ ($u \neq 0$ はある実数) と表した場合.

$$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}-1\\k\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5 = -u & \text{——} ①' \\ 2 = uk & \text{——} ②' \end{cases}$$

①′ より $u = -5$ 　②′ より $2 = -5k$

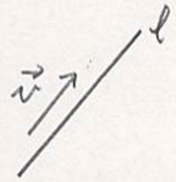
$$k = -\frac{2}{5}$$

方向ベクトルと直線

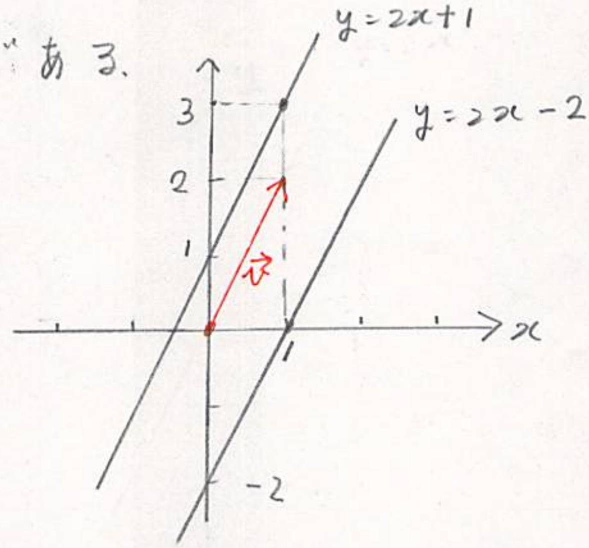
定義（方向ベクトル）

ベクトル $\vec{v}$ が直線 l の方向ベクトル

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{v}$ は l に平行



例12 $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は直線 $y=2x+1$, $y=2x-2$ の方向ベクトルである.



- 媒介変数 … 座標平面（や空間）上の点 (x, y)（や (x, y, z)）を表すときに用いられる変数のこと. s, t, u, 等で表す.

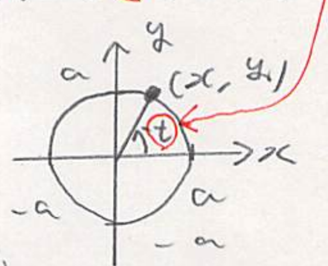
例13

媒介変数 t で表す

媒介変数

$$\text{円}: x^2+y^2=a^2 \ (a>0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

媒介変数 t を消す

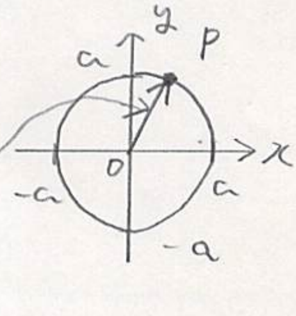


- ベクトル方程式 … "図形"の上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}=\vec{OP}$ が満たす方程式のこと

例14

$$\text{円}: x^2+y^2=a^2 \Longleftrightarrow |\vec{p}| = a$$

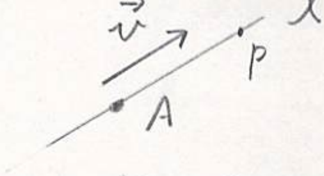
このベクトルの長さ



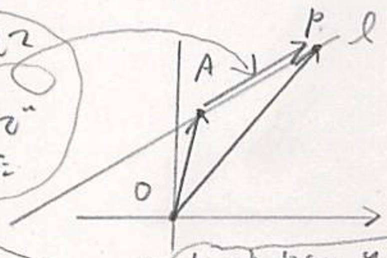
定理（方向ベクトルによる直線の3つの表し方）

l：平面上の点 $A(a_1, a_2)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の直線 ※ $\vec{v} \neq \vec{0}$

$P(x, y)$：l 上の任意の点



とする．直線 l は $P(x, y)$ を用いて，次の3つのいずれかで表せる：



$\vec{v}$ を t 倍して P の位置までもっていった

(1) ベクトル方程式

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

t は $P(x, y)$ に依存して決まる

$$\left(\vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \quad (t \in \mathbb{R}) \right.$$

$\vec{p}$：P の位置ベクトル，$\vec{a}$：A の位置ベクトル）

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(2) 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = a_1 + t v_1 \\ y = a_2 + t v_2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(3) 媒介変数を消去した方程式（陰関数表示）

$v_1, v_2 \neq 0$ とする

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

$\because$）$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \iff \overrightarrow{AP} = t\vec{v}$ と表せる（$t \neq 0$ はある実数）$\iff \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t\vec{v}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$ ← ベ

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = a_1 + t v_1 & \text{―①} \\ y = a_2 + t v_2 & \text{―②} \end{cases}$$ ← 媒

$v_1 \neq 0$，$v_2 \neq 0$ より

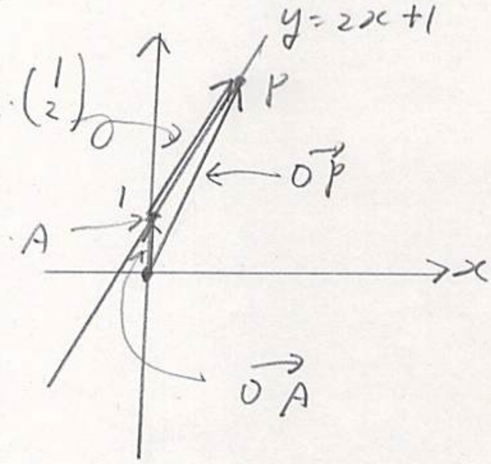
① より $t = \dfrac{x - a_1}{v_1}$，② より $t = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ $\overset{t\text{を消去して}}{\iff}$ $\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}$ ← 陰 //

例15　$l: y=2x+1$ を上の定理で見た3つの表し方で表してみよう。$P(x,y)$ は l 上の点とする。

解　$y=2x+1$ は点 $A(0,1)$ を通り、傾き2の直線
↳ 方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ベ　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$　$(t\in\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

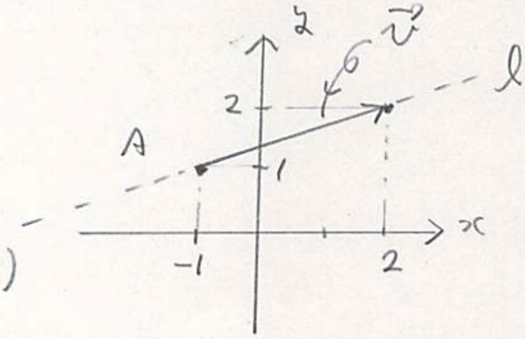


媒　$\begin{cases}x=t\\y=1+2t\end{cases}$　$(t\in\mathbb{R})$

陰　$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}$　//

例16　点 $A(-1,1)$ を通り、方向ベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ の直線 l について、l のベクトル方程式、媒介変数表示、媒介変数を消去した方程式を求めてみよう。

解　$P(x,y)$ は l 上の点とする。



ベ　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\vec{v}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$　$(t\in\mathbb{R})$

媒　$\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+2t\end{cases}$　$(t\in\mathbb{R})$

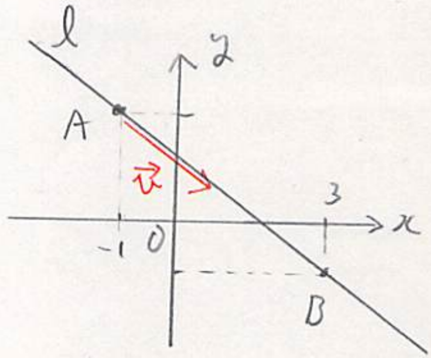
陰　$\dfrac{x-(-1)}{3}=\dfrac{y-1}{2}$

$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}$　//

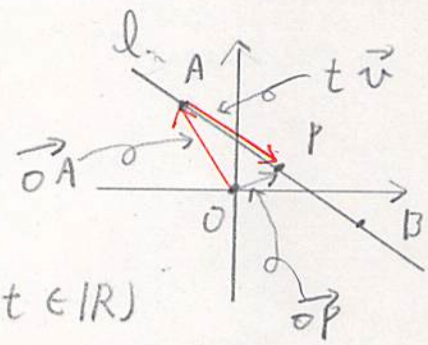
例17　2点 A $(-1, 2)$, B $(3, -1)$ を通る直線 l を上の定理で見た3つの表し方で表してみよう.

解　l を表すために必要なもの

$$\begin{cases} l \text{ の方向ベクトル } \vec{v} \longrightarrow l \text{ に平行なベクトルなら何でも良い} \\ l \text{ の通る点} \longrightarrow \text{A 又は B} \end{cases}$$



$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$



P(x, y) は l 上の点とする.

ベ　$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

媒　$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

陰　$$\frac{x - (-1)}{4} = \frac{y - 2}{-3}$$
$$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{-3}$$
//