ギリシャ文字

大文字	小文字	読み	大文字	小文字	読み
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	グザイ（クシイ）
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
E	ϵ, ε	イプシロン	P	ρ	ロー
Z	ζ	ゼータ（ツェータ）	Σ	σ	シグマ
H	η	イータ（エータ）	T	τ	タウ
Θ	θ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
I	ι	イオタ	Φ	φ, ϕ	ファイ
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ（プシイ）
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

Chapter 1

数列と関数の極限

1 数列とその和

1.1 数列

数列とその一般項　数を一定の規則にしたがって一列に並べたものを**数列**という．数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ と表す．並べられたおのおのの数を**項**といい，a_1 を第 1 項または**初項**，a_2 を第 2 項，a_3 を第 3 項，$\cdots$，a_n を第 n 項という．たとえば，奇数を並べてできる数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

を $\{a_n\}$ とすれば，初項は $a_1 = 1$，第 2 項は $a_2 = 3$，$\ldots$ である．このとき，第 n 項は，$a_n = 2n-1$ と表される．このように，第 n 項 a_n を n の式で表したものを数列 $\{a_n\}$ の**一般項**という．

例 1.1　一般項が $a_n = n^2 - 3n$ と表される数列のはじめの 3 項，および第 10 項は，それぞれ次のようになる．

$$a_1 = 1^2 - 3\cdot 1 = -2, \qquad a_2 = 2^2 - 3\cdot 2 = -2,$$

$$a_3 = 3^2 - 3\cdot 3 = 0, \qquad a_{10} = 10^2 - 3\cdot 10 = 70$$

問 1.1　一般項が次の式で表される数列の，はじめの 3 項，および第 10 項を求めよ．

(1)　$a_n = n(2n-1)$　　(2)　$a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$　　(3)　$a_n = \dfrac{n}{2(n+1)}$

例 1.2　数列の一般項を求める．

(1)　3 の倍数の数列 3，6，9，12，15，$\ldots$ の一般項は $a_n = 3n$ である．

(2)　数列 1，4，9，16，25，$\ldots$ の一般項は $a_n = n^2$ である．

問 1.2　次の数列の規則を考え，(　) の中に適切な数を入れよ．また，一般項 a_n を求めよ．

(1)　4, 8, 12, 16, (　), (　), …　　(2)　1, 2, 4, 8, 16, (　), (　), …

(3)　1, −1, 1, −1, (　), (　), …　　(4)　$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{6}{27}$, $\frac{8}{81}$, (　), (　), …

1.2　等差数列

等差数列とその一般項　数列 1, 4, 7, 10, … は，初項 1 に次々に 3 を加えていくことによって作られている．一般に，a, d が定数のとき，初項 a に一定の数 d を次々に加えていくことによって作られる数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

を等差数列といい，d をその公差という．

note　等差数列という名称は「となり合う 2 つの項の差が一定」という性質 $a_{n+1} - a_n = d$ に由来している．

等差数列の第 n 項は，初項 a に，公差 d を $n-1$ 回加えれば求められる．したがって，次のことが成り立つ．

1.1　等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，次の式で表される．

$$a_n = a + (n-1)d$$

例 1.3　等差数列 9, 5, 1, −3, … の初項は $a = 9$，公差は $d = -4$ である．したがって，その一般項 a_n は次の式で表される．

$$a_n = 9 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 13$$

問 1.3　次の等差数列の一般項 a_n を求めよ．

(1)　1, 6, 11, 16, …　　(2)　5, 2, −1, −4, …

例題 1.1　等差数列の一般項

第 3 項が 6，第 6 項が 18 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

解　初項を a，公差を d とおく．$a_3 = 6$, $a_6 = 18$ であるから，a, d は連立方程式

$$\begin{cases} a + 2d = 6 \\ a + 5d = 18 \end{cases}$$

を満たす．これを解けば，$a = -2$, $d = 4$ が得られる．したがって，求める一般項は，$a_n = -2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 6$ である．

問 1.4　次の等差数列の初項 a，公差 d，一般項 a_n を求めよ．

(1)　初項が 1，第 5 項が 13　　(2)　第 3 項が 19，第 10 項が 5

等差数列の和　等差数列の和を求める．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ を S_n と表す．

例 1.4　等差数列 $1, 3, 5, \ldots$ の初項から第 5 項までの和 $S_5 = 1+3+5+7+9$ を計算する．項の順序を逆にして加え合わせると，

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & S_5 & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 \\
+) & S_5 & = & 9 & + & 7 & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\
\hline
 & 2S_5 & = & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 & + & 10 \\
 & & = & 5 \cdot 10 & & & & & & & &
\end{array}$$

となる．したがって，$S_5 = \dfrac{5 \cdot 10}{2} = 25$ が得られる．

これを一般化して，初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求める．例 1.4 と同様にして，項の順序を逆にして加え合わせると，

$$\begin{array}{rrcccccccccc}
 & S_n & = & a_1 & + & a_2 & + \cdots + & a_{n-1} & + & a_n \\
+) & S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + \cdots + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
\end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \cdots ①$$

となる．式①の右辺の（　）の中の式は，

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_n \quad &= a \qquad\quad + \{a + (n-1)d\} = 2a + (n-1)d \\
a_2 + a_{n-1} &= (a + d) \quad + \{a + (n-2)d\} = 2a + (n-1)d = a_1 + a_n \\
a_3 + a_{n-2} &= (a + 2d) \ + \{a + (n-3)d\} = 2a + (n-1)d = a_1 + a_n \\
&\ \vdots \\
a_n + a_1 \quad &= \{a + (n-1)d\} + a \qquad\quad = 2a + (n-1)d = a_1 + a_n
\end{aligned}
$$

となり，すべて $a_1 + a_n = 2a + (n-1)d$ に等しい．したがって，

$$
2S_n = n(a_1 + a_n) \quad \text{よって} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}
$$

が成り立ち，次の等差数列の和の公式が得られる．

1.2　等差数列の和

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，次の式で表される．

$$
S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}
$$

とくに，$a = d = 1$ とすれば，1 から n までの自然数の和は，次のようになる．

$$
1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}
$$

例 1.5　(1)　初項が 5，第 20 項が 23 の等差数列の初項から第 20 項までの和 S_{20} は，次のようになる．

$$
S_{20} = \frac{20(5 + 23)}{2} = 280
$$

(2)　初項が 11，公差が -3 の等差数列の初項から第 10 項までの和 S_{10} は，次のようになる．

$$
S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 11 + (10 - 1) \cdot (-3)\}}{2} = -25
$$

問 1.5　次の等差数列の和を求めよ．

(1)　初項が 30，第 10 項が -6 のとき，初項から第 10 項までの和

(2)　初項が 5，公差が 2 のとき，初項から第 8 項までの和

1.3 等比数列

等比数列とその一般項　数列 3, 6, 12, 24, ... は，初項 3 に次々に 2 をかけていくことによって作られている．一般に，a, r が定数のとき，初項 a に一定の数 r を次々にかけていくことによって作られる数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots$$

を**等比数列**といい，r をその**公比**という．

note　等比数列という名称は「となり合う 2 つの項の比が一定」という性質 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ に由来している．

等比数列の第 n 項は，初項 a に，公比 r を $n-1$ 回かければ求められる．したがって，次のことが成り立つ．

1.3　等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，次の式で表される．

$$a_n = ar^{n-1}$$

初項 a，公比 r $(a \fallingdotseq 0,\ r \fallingdotseq 0)$ の等比数列では $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{ar^n}{ar^{n-1}} = r$ が成り立つ．したがって，初項と第 2 項など連続する 2 つの項から公比を求めることができる．

例 1.6　等比数列 27, 18, 12, 8, ... の初項は $a = 27$，公比は $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{2}{3}$ であるから，その一般項は次のようになる．

$$a_n = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{3^3 \cdot 2^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-4}}$$

問 1.6　次の等比数列の公比 r と一般項 a_n を求めよ．

(1)　3, 6, 12, 24, ...　　(2)　2, −2, 2, −2, ...

(3)　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \ldots$　　(4)　8, −4, 2, −1, ...

例題 1.2　等比数列の一般項

第 2 項が -6，第 5 項が 162 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，公比は実数とする．

解　初項を a，公比を r とおくと，一般項は $a_n = ar^{n-1}$ である．与えられた条件 $a_2 = -6$, $a_5 = 162$ から，$ar = -6$, $ar^4 = 162$ が成り立つ．したがって，

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{-6} \quad \text{よって} \quad r^3 = -27$$

となる．公比 r は実数であるから，$r = -3$ である．これを $ar = -6$ に代入すれば，$a = 2$ となる．したがって，求める一般項は $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ である．

問 1.7　次の条件を満たす等比数列の一般項 a_n を求めよ．ただし，公比は実数とする．

(1)　初項が -2，第 4 項が $-\dfrac{1}{4}$　　(2)　第 3 項が 9，第 5 項が 81

等比数列の和　　等比数列の初項から第 n 項までの和を求める．

例 1.7　初項 1，公比 3 の等比数列 1, 3, 9, ... の初項から第 5 項までの和

$$S_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$$

を求める．公比が 3 であることを考慮して，S_5 から $3S_5$ を引くと，

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_5 & = 1 & + & 3 & + & 9 & + & 27 & + & 81 & & \\ -)\ 3S_5 & = & & 3 & + & 9 & + & 27 & + & 81 & + & 243 \\ \hline -2S_5 & = 1 & & & & & & & & & - & 243 \end{array}$$

となる．したがって，$S_5 = \dfrac{1-243}{-2} = 121$ が得られる．

これを一般化して，初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 n 項までの和

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

を求める．$r = 1$ のときは，

$$S_n = \overbrace{a + a + a + \cdots + a}^{n\ 個} = na$$

である．

また，$r \neq 1$ のときには，例 1.7 と同様にして，S_n から rS_n を引くと，

$$\begin{array}{rrcl} & S_n & = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -) & rS_n & = & \phantom{a +{}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline & S_n - rS_n & = & a \phantom{+ ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}} - ar^n \end{array}$$

である．

よって，$(1-r)S_n = a(1-r^n)$ が成り立つ．$r \neq 1$ であるから，この式の両辺を $1-r$ で割れば，次の公式が得られる．

1.4　等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，次のようになる．

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1 \text{ のとき}) \\ na & (r = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

note　$r < 1$ のときは $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$，$r > 1$ のときは $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ が使いやすい．

例 1.8　初項 9，公比が 2 の等比数列の，初項から第 6 項までの和 S_6 は次のようになる．

$$S_6 = \frac{9(2^6-1)}{2-1} = 9(2^6-1) = 9 \cdot 63 = 567$$

問 1.8　次の等比数列の和を求めよ．

(1)　初項が 3，公比が -2 のとき，初項から第 7 項までの和

(2)　初項が 16，公比が $\dfrac{1}{2}$ のとき，初項から第 8 項までの和

以上をまとめると，次の，自然数の累乗の和の公式が得られる．

1.5　自然数の累乗の和の公式

任意の自然数 n に対して，次の式が成り立つ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

note　公式 (1), (3) から，任意の自然数 n に対して，次が成り立つことがわかる．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

例 1.11　自然数の累乗の和の公式を用いて，数列の和を求める．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{6(6+1)(2\cdot 6+1)}{6} = 91$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

(3) $$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{10} k^3 &= 4^3 + 5^3 + \cdots + 10^3 \\ &= (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3) \\ &= \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{3(3+1)}{2}\right\}^2 = 2989\end{aligned}$$

問 1.11　次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=11}^{20} k^2$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=5}^{8} k^3$

総和の記号の性質　数列 $\{a_n\}$ と定数 c に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$
$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

となる.

とくに, つねに $a_k = c$ $(1 \leqq k \leqq n)$ のとき,

$$\sum_{k=1}^{n} c = \overbrace{c + c + c + \cdots + c}^{n\text{個}} = nc$$

となる. さらに, 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対して,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) + \cdots + (a_n \pm b_n)$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad (\text{複号同順})$$

が成り立つ.

以上をまとめると, 総和の記号に関する次の性質が得られる.

1.6　総和の記号の性質

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ および定数 c について, 次のことが成り立つ.

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$　　(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$　（複号同順）

(2), (3) の性質をあわせて**線形性**という.

例 1.12　総和の記号の性質を用いて，いろいろな数列の和を求める．

(1) $$\sum_{k=1}^{10}(4k-3)=\sum_{k=1}^{10}4k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3=4\cdot\frac{10(10+1)}{2}-3\cdot 10=190$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}\cdot\{2(2n+1)-9\}=\frac{n(n+1)(4n-7)}{6}$$

問 1.12　次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k-7)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4k)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-2k)$

部分分数分解と数列の和　一般項が分数式になっている数列の和は，部分分数分解を用いると求められる場合がある．

例題 1.3　部分分数分解と数列の和

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を求めよ．

解　部分分数分解を行うと $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}$ となる．よって，求める和は次のようになる．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}$$

問 1.13　部分分数分解 $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ を求めよ．

1.5 数列の漸化式

数列の漸化式　数列 $\{a_n\}$ のいくつかの項の間に，たとえば，

$$a_{n+1} = 3a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立っているとき，初項 a_1 がわかれば，この式の n に $1, 2, 3, \ldots$ を代入することによって，数列の項を順番に求めていくことができる．このような，数列 $\{a_n\}$ の，一般項を含むいくつかの項の間に成り立つ関係式を**漸化式**という．

例 1.13　数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$ および漸化式 $a_{n+1} = 3a_n + 1$ を満たすとき，はじめの 5 項は次のようになる．

$$\begin{aligned}
a_1 & & &= 1 \\
a_2 &= 3a_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 &&= 4 \\
a_3 &= 3a_2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 &&= 13 \\
a_4 &= 3a_3 + 1 = 3 \cdot 13 + 1 &&= 40 \\
a_5 &= 3a_4 + 1 = 3 \cdot 40 + 1 &&= 121 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

問 1.14　次の漸化式を満たす数列のはじめの 5 項を求めよ．

(1)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 2$　　(2)　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = -2a_n + 1$

例 1.14　(1)　漸化式 $a_{n+1} = a_n + d$ は，各項に d を加えて次の項を作る関係式である．したがって，数列 $\{a_n\}$ は公差 d の等差数列である．

(2)　漸化式 $a_{n+1} = r\,a_n$ は，各項を r 倍して次の項を作る関係式である．したがって，数列 $\{a_n\}$ は公比 r の等比数列である．

例題 1.4　数列の漸化式

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 4a_n - 6$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

解　最初に，任意の自然数 n に対して，

$$a_{n+1} - k = 4(a_n - k)$$

を満たす定数 k を求める．これを展開して整理すると，

$$a_{n+1} = 4a_n - 3k$$

となるから，与えられた漸化式 $a_{n+1} = 4a_n - 6$ と比較すれば $k = 2$ が得られる．したがって，$a_{n+1} - 2 = 4(a_n - 2)$ が成り立つ．ここで $b_n = a_n - 2$ とおけば，数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1} = 4b_n$$

を満たす．$b_1 = a_1 - 2 = 3$ であるから，$\{b_n\}$ は初項が 3，公比が 4 の等比数列である．したがって，$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ となる．よって，a_n は次のようになる．

$$a_n = b_n + 2 = 3 \cdot 4^{n-1} + 2$$

問 1.15　次の漸化式を満たす数列の一般項を求めよ．

(1)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$　　(2)　$a_1 = 5,\ a_{n+1} = -3a_n + 4$

1.6　数学的帰納法

数学的帰納法　自然数に関する命題が「任意の自然数について成り立つ」ことを証明するとき，いくつかの自然数について成り立つことだけを確かめても，その命題を証明したことにはならない．しかし，

(i)　$n = 1$ のとき，その命題は成り立つ．

(ii)　$n = k$ のときにその命題が成り立つと仮定すると，$n = k + 1$ のときにもその命題が成り立つ．

の 2 つのことが証明できれば，

$n = 1$ のとき，(i) によりその命題が成り立つ．
したがって，$n = 2$ のときにもその命題が成り立つ．
したがって，$n = 3$ のときにもその命題が成り立つ．
⋮
したがって，$n = k$ のときにもその命題が成り立つ．
したがって，$n = k + 1$ のときにもその命題が成り立つ．
⋮

となって，すべての自然数 n についてその命題が成り立つ．このような方法で自然数 n に関する命題を証明する方法を**数学的帰納法**という．

例題 1.5　**数学的帰納法**

n を自然数とするとき，命題

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

証明

(i)　$n=1$ のとき，左辺 $=1$，右辺 $=1^2=1$ となるから，与えられた命題は成り立つ．

(ii)　$n=k$ のとき命題が成り立つと仮定すれば，

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．①の両辺に $2k-1$ の次の奇数である $2k+1$ を加えると

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$

となる．右辺は $k^2+2k+1=(k+1)^2$ となるから，

$$1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

が得られる．②は $n=k+1$ のときにも命題が成り立つことを示している．

(i)，(ii) より，数学的帰納法によって，すべての自然数 n に対して与えられた命題が成り立つ．　**証明終**

問 1.16　数学的帰納法を用いて，すべての自然数 n について次の等式が成り立つことを証明せよ．

(1)　$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2)　$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

コーヒーブレイク

アキレスと亀　歩くのが遅い亀と走るのが速いアキレスが，どちらが先にゴールに着くか競走することになった．遅い亀にはハンデを与えて，アキレスよりもゴールに近い A 地点から出発することにして，同時にスタートするものとする．

アキレスが A 地点に到達すると，亀はその時間の分だけ歩いてゴールに近い B 地点に到達する．次に，アキレスが B 地点に到達したとき，亀はその時間の分だけ歩いて，さらにゴールに近い C 地点に到達する．このことを繰り返していくと，アキレスはいつまでも亀を追い越すことはできない．

これは，ゼノン（古代ギリシャの哲学者）のパラドックスと呼ばれるものである．パラドックスは，正しそうに見える前提と推論から，受け入れがたい結論が得られることをいう．

練習問題 1

[1] 次の条件を満たす等差数列の一般項 a_n を求めよ．

(1) 初項が -5，第 5 項が 11　　(2) 第 3 項が 1，第 7 項が 2

(3) 第 6 項が -5，初項から第 6 項までの和が 15

[2] 初項が 98，公差が -4 の等差数列の，初項から第 n 項までの和を S_n とする．S_n が最大となる n の値を求めよ．

[3] 等比数列 $1, -2, 4, -8, \ldots$ について，次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．　　(2) 第 10 項 a_{10} を求めよ．

(3) -2048 は第何項か．

[4] 次の条件を満たす等比数列の一般項 a_n を求めよ．ただし，公比 r は実数とする．

(1) 第 4 項が 1，第 7 項が 8　　(2) 初項が 4，第 3 項が 1

(3) 初項が 2，初項から第 3 項までの和が 14

[5] 次の和を総和の記号 $\sum$ を用いて表し，その和を求めよ．

(1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+9\cdot 10$

(2) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+8\cdot 9\cdot 10$

[6] 展開公式 $(k+1)^4=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，次の公式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

[7] $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k(k+2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{1}{k(k+2)}$ を部分分数に分解せよ．　　(2) 和 S を求めよ．

[8] 数列 $\{a_n\}$ が，次の条件を満たすとき，第 5 項 a_5，第 6 項 a_6 を求めよ．

(1) $a_1=2,\ a_{n+1}=-2a_n+4$

(2) $a_1=1,\ a_2=\dfrac{\pi}{4},\ a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$

[9] 数学的帰納法によって，次の和の公式 1.5(3) が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 数列の極限

2.1 数列の極限

数列の極限値　項が無限に続く数列を**無限数列**という．n が限りなく大きくなるとき，無限数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n の変化の様子を調べる．

例 2.1　(1)　$a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，

$$a_{10} = \frac{1}{10} = 0.1, \quad a_{100} = \frac{1}{100} = 0.01, \quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0.001, \quad \cdots$$

となって，n が限りなく大きくなるとき，a_n は限りなく 0 に近づいていく．

(2)　$a_n = \dfrac{n+1}{n}$ のとき，

$$a_{10} = \frac{11}{10} = 1.1, \quad a_{100} = \frac{101}{100} = 1.01, \quad a_{1000} = \frac{1001}{1000} = 1.001, \quad \cdots$$

となって，n が限りなく大きくなるとき，a_n は限りなく 1 に近づいていく．

n が限りなく大きくなることを $n \to \infty$ と表す．∞ は**無限大**と読む．一般に，$n \to \infty$ のとき，a_n がある一定の値 α に限りなく近づいていくならば，数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$$

と表す．このとき，α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という．

$a_n = c$（c は定数）のとき，数列 $\{a_n\}$ の極限値は c とする．

例 2.2　例 2.1(1) は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

と表される．一般に，a_n が分数で表されているとき，a_n の分子が一定で，分母の絶対値だけが限りなく大きくなっていくならば，a_n は限りなく 0 に近づいていく．

数列の極限値は，次の性質をもつ．

2.1　数列の極限値の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，次のことが成り立つ．

(1)　$\lim_{n\to\infty} c\,a_n = c\alpha$　　(c は定数)

(2)　$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$　　(複号同順)

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4)　$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　($b_n \neq 0$，$\beta \neq 0$)

(1)，(2) が成り立つから，数列の極限値も線形性をもつ．

例題 2.1　**数列の極限値**

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2+1}$ を求めよ．

解　分子，分母を分母の最大次数の項 n^2 で割る．$\dfrac{1}{n} \to 0$，$\dfrac{1}{n^2} \to 0\ (n \to \infty)$ であることを用いると，極限値は次のようになる．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \frac{2+3\cdot 0+0}{1+0} = 2$$

問 2.1　次の極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{4n-2}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{3-2n}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n}{3n^3+4n^2}$

数列の発散　数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は発散するという．

n が限りなく大きくなるとき，a_n の値が限りなく大きくなるならば，数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**，または **∞ に発散する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

と表す．また，n が限りなく大きくなるとき，十分大きな n に対して $a_n < 0$ でその絶対値が限りなく大きくなるならば，数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**，または **$-\infty$ に発散する**という．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{または} \quad a_n \to -\infty \ (n \to \infty)$$

と表す．発散する数列 $\{a_n\}$ が，正の無限大にも負の無限大にも発散しないときは，**振動する**という．したがって，数列が発散するとき，「正の無限大に発散する」，「負の無限大に発散する」，「振動する」のいずれかになる．

例題 2.2 数列の極限

一般項が次の式で表される数列の収束・発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $n^3 - 5n$　　(2) $\dfrac{3n^2+1}{2n^2+3}$

(3) $\dfrac{-2n^2+5n-3}{n+7}$　　(4) $\sin\dfrac{n\pi}{2}$

解 (1) 最大次数の項 n^3 でくくると，

$$n^3 - 5n = n^3\left(1 - \frac{5}{n^2}\right)$$

となる．$n \to \infty$ のとき $n^3 \to \infty$, $1 - \dfrac{5}{n^2} \to 1$ であるから，与えられた数列は正の無限大に発散する．

(2) 分子，分母を分母の最大次数の項 n^2 で割り，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{2+3\cdot\dfrac{1}{n^2}} = \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

となる．したがって，与えられた数列は収束し，極限値は $\dfrac{3}{2}$ である．

(3) 分子，分母を分母の最大次数の項 n で割り，$n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2+5n-3}{n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n+5-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{7}{n}} = -\infty$$

となる．したがって，負の無限大に発散する．

(4) $n = 1$ から順に代入していくと，

$$1, 0, -1, 0, 1, \ldots$$

と同じ値の並びが繰り返される．この数列は一定の値に収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しないから，振動する．

問2.2 一般項が次の式で表される数列の収束・発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $-2n^2+3n$ (2) $\dfrac{3n-2}{n-5}$ (3) $\cos n\pi$

等比数列の極限　等比数列 $\{r^n\}$ の収束と発散は，公比 r の値によって分類することができる．具体的にいくつかの値で調べてみると，次のようになる．

(1) $r>1$ のとき．たとえば，$r=2$ のときは，$2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$ となり，限りなく大きくなる．すなわち，正の無限大に発散する．

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

(2) $r=1$ のとき．すべての項が 1 であるから，1 に収束する．

(3) $|r|<1$ のとき．たとえば，$r=\dfrac{1}{2}$ のときは，$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$ となり，分子は一定で分母が限りなく大きくなるから，0 に収束する．$r=-\dfrac{1}{2}$ のときも同様に 0 に収束する．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

(4) $r=-1$ のとき．$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ と，-1 と 1 を繰り返すから，振動する．

(5) $r<-1$ のとき．たとえば，$r=-2$ のときは，$-2, 4, -8, \ldots, (-2)^n, \ldots$ となり，$\{r^n\}$ は収束せず，∞ にも $-\infty$ にも発散しないから振動する．

(4) と (5) から，$r \leqq -1$ のときは振動する．

一般に，等比数列の収束と発散は，公比 r の値によって次のように分類することができる．

2.2　等比数列の収束と発散

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r>1 \text{ のとき}) \\ 1 & (r=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|r|<1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$r \leqq -1$ のときは $\{r^n\}$ は振動する

例題 2.3 等比数列の極限

一般項が次の式で表される数列の収束・発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ (2) $(-3)^n$ (3) $\dfrac{5^n+2^n}{5^n-2^n}$

解 公比を r とする．

(1) $|r|=\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ であるから，0 に収束する．

(2) $r=-3\leqq -1$ であるから，振動する．

(3) 分母と分子を 5^n で割る．$\left|\dfrac{2}{5}\right|<1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{5^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}=1 \quad \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0\ (n\to\infty)\right]$$

である．よって，1 に収束する．

問 2.3 次の等比数列の収束・発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $1,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{27}{8},\ \dots$ (2) $2,\ -1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{4},\ \dots$ (3) $1,\ -\sqrt{2},\ 2,\ -2\sqrt{2},\ \dots$

問 2.4 一般項が次の式で表される数列の収束・発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $\dfrac{2^n-1}{2^n}$ (2) $\dfrac{3^n-2^n}{4^n+2^n}$ (3) $\dfrac{2^n-5^n}{3^n-2^n}$

2.2 級数とその和

級数の収束と発散 数列 $\{a_n\}$ の項を形式的に限りなく加えたもの

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

を**無限級数**，または単に**級数**といい，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ と表す．また，a_1 から a_n までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を，この級数の第 n **部分和**という．部分和の作る数列 $\{S_n\}$ がある値 S に収束するとき，すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ であるとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に**収束する**という．このとき，S を**級数の和**といい，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と表す．数列 $\{S_n\}$ が発散するときには，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**発散する**という．

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が S に収束するとき，その第 n 部分和 S_n が S に収束するから，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

が成り立つ．つまり，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．この対偶をとると，次が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Longrightarrow \text{級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する}$$

note　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散することがある．たとえば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるが $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することが知られている．

例題 2.4　**級数の収束と発散**

次の級数の収束・発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ．

(1)　$\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{n}{n+1} + \cdots$

(2)　$\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots$

解 (1) 一般項 a_n の分子・分母を n で割ると，$a_n = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1\ (n \to \infty)$

となる．$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ であるから，与えられた級数は発散する．

(2) 部分分数分解 $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ を用いると，部分和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

である．したがって，この級数は収束し，その和は 1 である．すなわち，次が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1$$

問2.5 次の級数の収束・発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

等比級数 初項 a，公比 r の等比数列が作る級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を**無限等比級数**，または単に**等比級数**という．a，r をそれぞれ等比級数の初項，公比という．

例 2.3 初項が $\dfrac{1}{2}$，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列が作る級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の収束と発散について調べる．第 n 部分和 S_n は，初項が $\dfrac{1}{2}$，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから，等比数列の和の公式によって

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

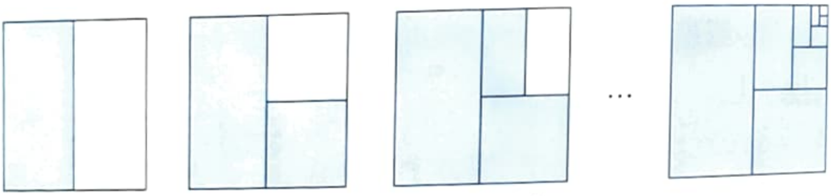
となる．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} = 1$$

が成り立つ．よって，与えられた級数は収束して，その和は 1 である．すな
ち，次が成り立つ．

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

note　1 辺の長さが 1 の正方形を図のように塗りつぶしていくと，その塗りつぶされた部分の面積の和が例 2.3 の級数の部分和であり，この値は正方形の面積 1 に限りなく近づいていく．したがって，この級数は 1 に収束する．



$\frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$　　$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$　　…　　1 に収束する

等比級数の収束と発散　$a \neq 0$ のとき，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の収束と発散について調べる．第 n 部分和を S_n とすると，

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

である．$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

となる．$r=1$ のときは，$S_n = na$ であるから発散する．$r>1$ または $r \leqq -1$ のときは，r^n が発散するから S_n も発散する．

以上のことから，等比級数の収束と発散について，次のことが成り立つ．

2.3 等比級数の収束と発散

初項 a $(a \neq 0)$，公比 r の等比級数は，$|r| < 1$ のときに限って収束し，その和は次のようになる．

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

$|r| \geqq 1$ のとき，等比級数は発散する．

例題 2.5 等比級数の収束と発散

次の等比級数の収束・発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ．

(1) $2 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} + \cdots + \dfrac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

(2) $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-2)^{n-1} + \cdots$

解 (1) 与えられた級数は，初項が 2，公比が $\dfrac{1}{3}$ の等比級数である．$\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ であるからこの級数は収束し，その和は次のようになる．

$$S = \frac{2}{1-\dfrac{1}{3}} = 3$$

(2) 公比は -2 であり，$|-2| \geqq 1$ だから，この級数は発散する．

問2.6 次の等比級数の収束・発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ．

(1) $9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots$　(2) $5 - \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{5}{8} + \cdots$

(3) $1 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{8} + \cdots$

等比級数と循環小数

循環小数は既約分数で表すことができる．

例 2.4 循環小数 $0.\dot{7} = 0.77777\cdots$ は，

$$0.77777\cdots = 0.7 + 0.07 + 0.007 + \cdots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots$$

となるから，初項 $\dfrac{7}{10}$，公比 $\dfrac{1}{10}$ の等比級数である．したがって，次が得られる．

$$0.\dot{7} = \frac{\dfrac{7}{10}}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{7}{10-1} = \frac{7}{9}$$

問2.7　次の循環小数を既約分数で表せ.

(1) $0.\dot{9} = 0.999\cdots$　(2) $0.\dot{9}\dot{5} = 0.9595\cdots$　(3) $0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123123\cdots$

級数の和の性質　級数の和は，次の線形性をもつ.

2.4　級数の和の線形性

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ (c は定数)，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ も収束して，次のことが成り立つ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$　　(複号同順)

例2.5　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^n}$ の収束・発散を調べる.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

であり，$\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ であるから，等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ は収束する．したがって，級数の和の線形性から与えられた級数も収束し，その和は次のようになる.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^n}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{-1}{3+1} + \frac{2}{3-2} = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

問2.8　次の級数の収束・発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{10^{n-1}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^n}{4^n}$

コーヒーブレイク

級数の和 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することは，次のようなことからわかる．

この級数を，1 個，2 個，4 個と 2^k 個ずつにまとめて計算してみると，下記のようになり，正の無限大に発散する．

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\to\infty\end{aligned}$$

では，分母を 2 乗した $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ はどうなるだろうか．例題 2.4(2) を利用すると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\\ &< 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=2\end{aligned}$$

となる．この級数の部分和は正の数を加え続けるので単調に増加するが，上の不等式から 2 を超えることはない．この級数は，$\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束することが知られている．

練習問題 2

[1] 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{4n^2-1}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{(3n-2)(2n+5)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{1+2+3+\cdots+n}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_2(8n-3)-\log_2(n+1)\}$

[2] 次の数列の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{2^{n+1}-3^{n-1}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

[3] 次の級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$

[4] 次の等比級数の収束・発散を調べ，収束するときにはその和を求めよ．

(1) $1+3+9+27+\cdots$　　(2) $5+1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\cdots$

(3) $2+0.6+0.18+0.054+\cdots$　　(4) $1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)^2+\cdots$

[5] 等比級数 $1-2x+4x^2-8x^3+\cdots$ が収束するような x の値の範囲を求め，そのときの和を求めよ．

[6] 次の級数の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}0.3^n$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-3^n}{5^n}$

[7] 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ の和を求めよ．

3 関数とその極限

3.1 合成関数と逆関数

合成関数　関数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ が与えられているとする．$u = g(x)$ の値域が $y = f(u)$ の定義域に含まれているとき，関数 $y = f(g(x))$ を $y = f(u)$ と $u = g(x)$ の**合成関数**という．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dr, "y = f(u)"] & \\ x \arrow[ur, "u = g(x)"] \arrow[rr, "y = f(g(x))"'] & & y \end{tikzcd}$$

例 3.1　(1)　$y = u^3$ と $u = x^2 + 1$ の合成関数は，$y = (x^2 + 1)^3$ である．

(2)　$y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ は，$y = \sqrt[3]{u}$ と $u = x^2 + 1$ の合成関数である．

問 3.1　次の関数はどのような関数の合成関数となっているか．

(1)　$y = 2^{3x+2}$　　(2)　$y = \dfrac{1}{3x + 5}$

一般に，2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して，$f(g(x))$ と $g(f(x))$ は異なる．

例 3.2　$f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 1$ とするとき，$f(g(x)) = (x^2 + 1)^3$ であり，$g(f(x)) = (x^3)^2 + 1 = x^6 + 1$ である．

問 3.2　$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$ のとき，$f(g(x))$, $g(f(x))$ を求めよ．

逆関数　ある区間で定義された単調増加または単調減少な関数 $y = f(x)$ は，y の値を定めると x の値がただ 1 つ定まる．この x を

$$x = f^{-1}(y)$$

と表し，$y = f(x)$ の**逆関数**という．通常は，関数は独立変数を x，従属変数を y とするから，x と y を交換した $y = f^{-1}(x)$ を $y = f(x)$ の逆関数とすることが多い．x と y を交換したから，$y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ について対称である．