第1回目の目標（教科書 p.1〜8）

ベクトルとその演算法則を理解する.

- 何故 線形代数を学ぶのか?

⟹ 自然現象や社会現象（力学系 (dynamical system)）の未来を調べる上で，現象の基本的なモデル化や解析の基礎となる.
⟹ 行列

⟹ 現象の変化の法則を"直線的な動き"として捉え，非線形解析へとつながっていく.

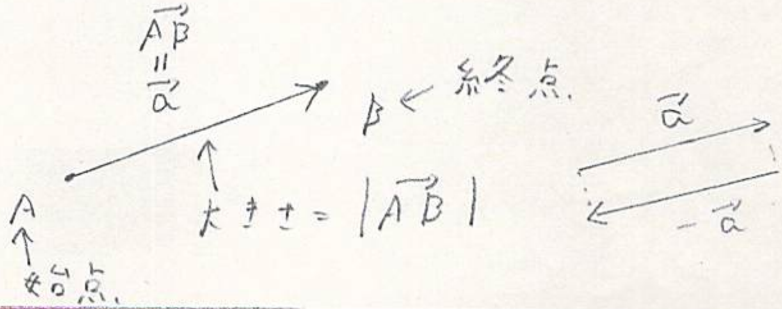
第1章 ベクトル

§1 平面のベクトル

定義（ベクトル, 始点, 終点, ベクトルの大きさ, 逆ベクトル）

A, B：平面上の2点

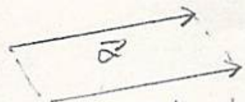
- AからBに向かう矢印を**ベクトル**といい、$\overrightarrow{AB}$（又は $\vec{a}$）で表す
- $\overrightarrow{AB}$において、Aを**始点**、Bを**終点**という
- $\overrightarrow{AB}$を表す矢印の長さを$\overrightarrow{AB}$の**大きさ**といい、$|\overrightarrow{AB}|$と表す
- （$\overrightarrow{AB}$の表す矢印の向きを$\overrightarrow{AB}$の向きという）
- $\vec{a}$と大きさが同じで、向きが逆向きのベクトルを$-\vec{a}$で表す。$\vec{a}$の**逆ベクトル**といい、



定義（ベクトルの相等）

$\vec{a}, \vec{b}$：ベクトル

$\vec{a}=\vec{b} \overset{定義}{\Longleftrightarrow} \underbrace{|\vec{a}|=|\vec{b}|}_{大きさが同じ}$ でかつ（$\vec{a}$の向き）＝（$\vec{b}$の向き）

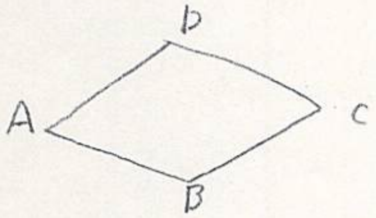


（即ち、平行移動して一致するベクトルは同じものと考える）

定義（単位ベクトル）

大きさが1のベクトルを**単位ベクトル**という。

例1



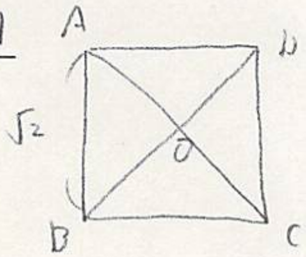
ABCD：一辺の長さが1のひし形

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DA}|=1$

$\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$

問1



(1) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$

$|\overrightarrow{OC}|=1$

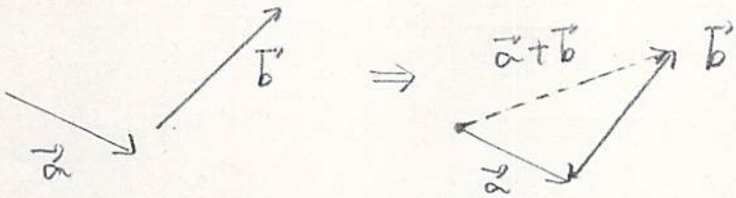
1辺の長さが$\sqrt{2}$の正方形について$|\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{OC}|$を求めてみる。

1.2 ベクトルの演算

定義 (ベクトルの加法, 減法, 実数倍)

$\vec{a}, \vec{b}$: ベクトル , k : 実数

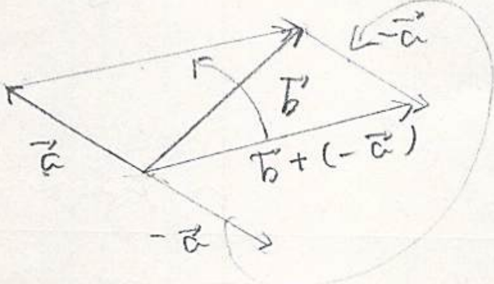
- $\vec{a}+\vec{b} := \left(\right.$ $\vec{a}$の"終点"に$\vec{b}$の"始点"をあわせたときに, $\vec{a}$の始点から$\vec{b}$の終点に向かうベクトル $\left.\right)$



- $k\vec{a} :=$ ($k>0$のとき, 向きが$\vec{a}$と同じで大きさが$|\vec{a}|$のk倍のベクトル
  $k<0$のとき 向きが$\vec{a}$と逆向きで, 大きさが$|\vec{a}|$の$(-k)$倍のベクトル
  $k=0$のとき 大きさが0のベクトル. (これを$\vec{0}$と表す))

特に, $(-1)\cdot\vec{a}$ は $\vec{a}$の逆ベクトルのこと, 即ち, $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$.

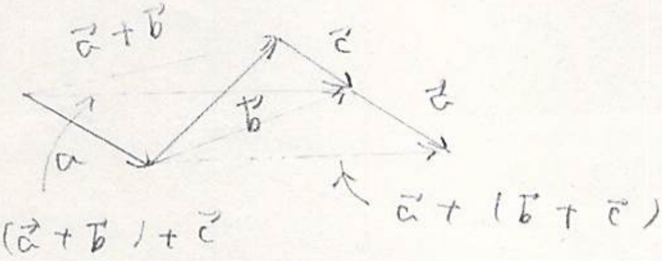
- $\vec{b}-\vec{a} = \vec{b}+(-\vec{a})$

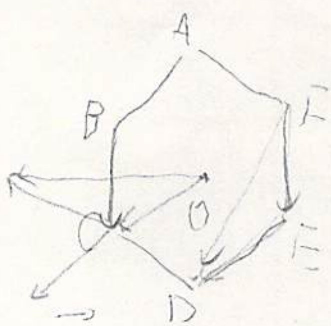


定理 (ベクトルの演算法則1)

(1) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)





定理（ベクトルの演算法則2）

m, n：実数

(3) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

(4) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

(5) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + n\vec{b}$

(6) $|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|$

問2 (1) $2(\vec{a}-3\vec{b}) - 3(\vec{a}-\vec{b})$ を簡単にせよ．

(2) $\vec{a} + (2\vec{b}-\vec{c}) - 2(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$ を簡単にせよ．

問3 $3\vec{a} - (\vec{b}+\vec{x}) = 2\vec{x} - 3\vec{a} + 2\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を求めよ．

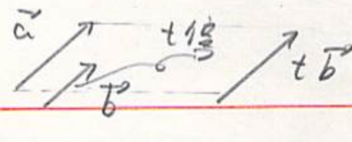
定義（ベクトルの平行）

$\vec{a}, \vec{b}$：$\vec{0}$ でないベクトル

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行（$\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表す）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 或る $t \in \mathbb{R}$：$t \neq 0$ を用いて次の様に表せる：

$$\vec{a} = t\vec{b}$$



例2 $\vec{a}$ と $\frac{1}{2}\vec{a}$ は平行なベクトル．

大きさを2倍したベクトルを考えると $\vec{a}$ と"一致"する．

$$\vec{a} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

問2 の解答

(1) (与式) $= 2\vec{a} - 6\vec{b} - 3\vec{a} + 3\vec{b}$

$= -\vec{a} - 3\vec{b}$.

(2) (与式) $= \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} - 2\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$

$= -\vec{a} + \vec{c}$.

問3 の解答

与式は次の様に変形できる.

$$3\vec{a} - \vec{b} - \vec{x} = 2\vec{x} - 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

[上の2つの等しいベクトルに対して"同じ操作"をしても"操作後"のベクトルは等しい]

⟹ 方程式で扱った"移項"操作ができる

両辺 $+(-2\vec{x})$ $+(-3\vec{a})$ $+\vec{b}$ をすると

$$-3\vec{x} = -6\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}.$$