第2回目の目標 (教科書 p.4, 8, 9)

(1) 単位ベクトルの構成法

(2) 位置ベクトル (内分点)

を理解する.

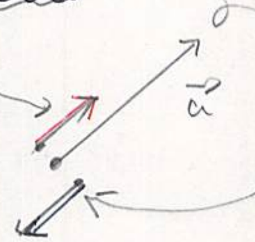
単位ベクトルの作り方

$\vec{a} \neq \vec{0}$：ベクトル　に対して

・$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ は $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル

・$-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ は $\vec{a}$ と逆向きの単位ベクトル

同じ向きで大きさ1



逆向きで大きさ1

例3　$\vec{a}$：ベクトル，$|\vec{a}|=5$ のとき，次を求めよう。

(1) $\vec{a}$ と平行な単位ベクトル

解　$|\vec{a}|$ と平行な単位ベクトル：
- ① $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル
- ② $\vec{a}$ と逆向きの単位ベクトル

① $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \dfrac{1}{5}\vec{a}$.

② $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = -\dfrac{1}{5}\vec{a}$ //

(2) $\vec{a}$ と逆向きで大きさが7のベクトル

解　(求めるベクトル)＝($\vec{a}$ と逆向きの単位ベクトル②の大きさを7倍したベクトル)

$$= 7\cdot\left(\underbrace{-\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}}_{②}\right)$$

$$= 7\left(-\frac{1}{5}\vec{a}\right)$$

$$= -\frac{7}{5}\vec{a}$$ //

点の位置ベクトル

定義（位置ベクトル）

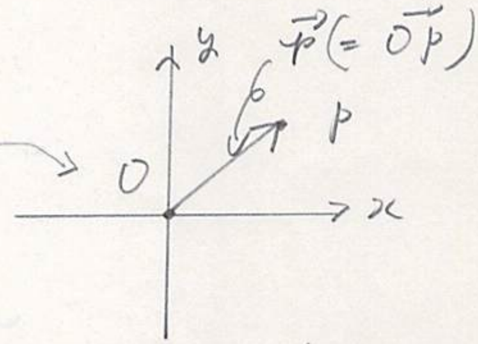
平面や空間に1点 O を定めて，点 O を始点とし，各点 P を終点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$ を，点 O に関する点 P の位置ベクトルといい，$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ と表す．

p の小文字

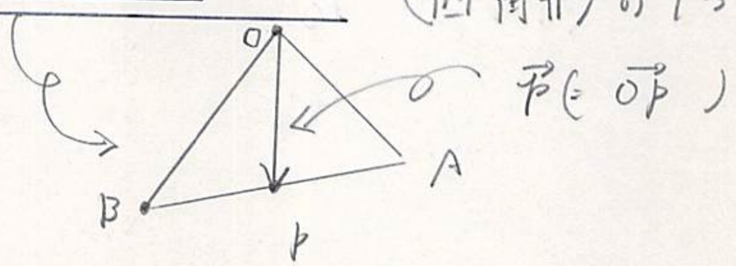
本テキストでは，位置ベクトルは点 O に関するものとする．

点 O のとり方

- 座標を入れる場合．
  点 O は原点とする．



- 座標を入れない場合
  点 O は"指定の点"とする．（例えば，三角形や四角形の1つの頂点）

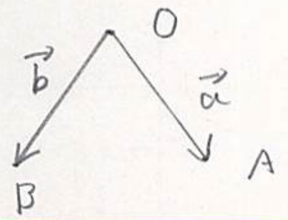


定理（2点を結ぶベクトル）

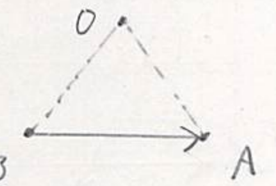
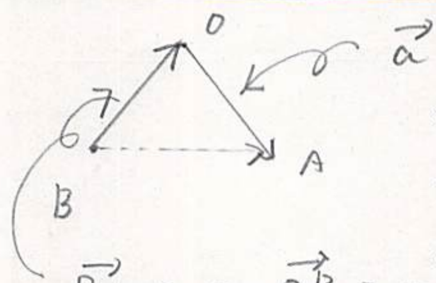
A, B：平面又は空間内の2点

（Oは平面又は空間内の任意の1点として固定する）

$\vec{a}, \vec{b}$：A, Bの位置ベクトル



$$\Longrightarrow \boxed{\underset{(終点)}{\overrightarrow{BA}} = \overrightarrow{OA} - \underset{(始点)}{\overrightarrow{OB}} = \vec{a} - \vec{b}.}$$

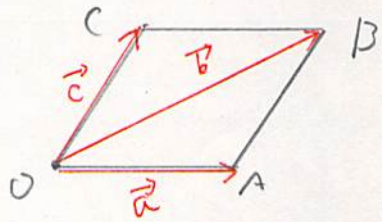
$\overrightarrow{BA} =$  $=$ 

$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$

$= -\vec{b} + \vec{a}$

$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -\vec{b}$

例4 平行四辺形OABCについて、A, B, Cの（Oに関する）位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表してみよう。



(1) $\vec{b}$

解 $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$= \vec{a} + \vec{c}$ //

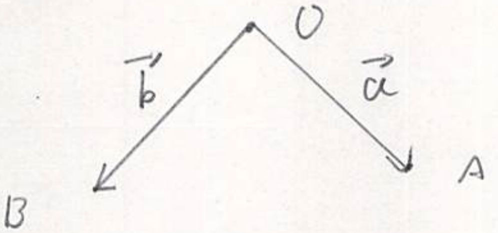
(2) $\overrightarrow{AC}$

解 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= \vec{c} - \vec{a}$. //

定理（内分点の位置ベクトル）

- A, B：平面や空間内の2点，
- $\begin{cases} \vec{a} : \text{A の位置ベクトル}, \\ \vec{b} : \text{B} \quad 〃 \end{cases}$



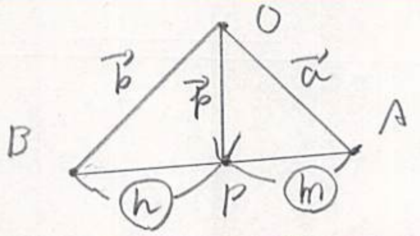
（O は空間内の任意の1点とし，それは固定されているとする．）

$\Longrightarrow$ P：線分 AB を m : n に内分する点 （$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ AP : PB = m : n）

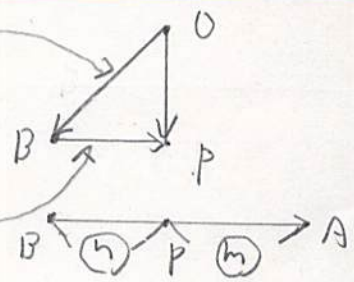
（$m, n \in \mathbb{N}$ （m, n は自然数とする））

の位置ベクトル $\vec{p}\,(=\overrightarrow{OP})$ は

$$\boxed{\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} = \frac{n}{m+n}\vec{a} + \frac{m}{m+n}\vec{b}} \quad \text{—— ①}$$



$\because$） $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$

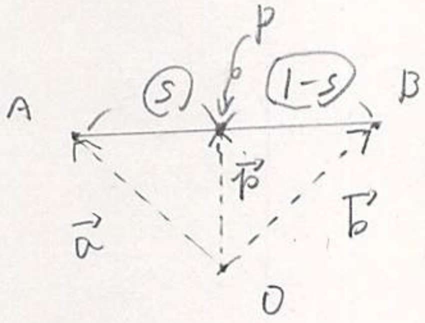


$= \vec{b} + \dfrac{n}{m+n}(\vec{a} - \vec{b})$

$= \dfrac{n}{m+n}\vec{a} + \dfrac{m}{m+n}\vec{b}$. //

注意

線分AB上の任意の点Pは、$0 \leqq s \leqq 1$となるある数sを用いて、ABを$s:(1-s)$に内分する点である。点Pの位置ベクトル$\vec{p}$は



$$\vec{OP} = \frac{(1-s)\vec{OA} + s\vec{OB}}{s+(1-s)}$$

$$\boxed{\vec{p} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}}$$

となる。

注意（中点の位置ベクトル）

線分ABの中点MはA, Bの1:1の内分点。

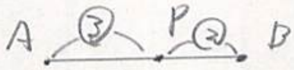
$\Longrightarrow \quad \vec{m} = \dfrac{1\vec{a} + 1\cdot\vec{b}}{1+1} \qquad \left(\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right)$

①で$m=n=1$とした。

例5

2点A, Bの位置ベクトルを$\vec{a}$, $\vec{b}$とするとき、線分ABを次のように内分する点Pの位置ベクトル$\vec{p}$を求めよう。

(1) 3 : 2



解

$$\vec{p} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

$$\left(= \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{5} \right)$$

//