本日（第5回目）の目標（教科書P.23）

1. 前期中間試験までの内容の振り返り
（練習問題1：大問1～6）

2. ベクトルの線形独立性（2つの平行でないベクトルが満たす性質）
（問題集：例題1.3）

練習問題1

3′ 3点 A(1, −5, 2), B(3, −4, −1), C(0, −1, 4) について, 次を求めてみよう.

(1) $\overrightarrow{AB}$

解 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. //$$

(2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

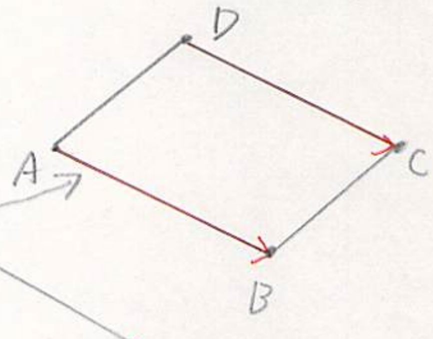
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} //$$

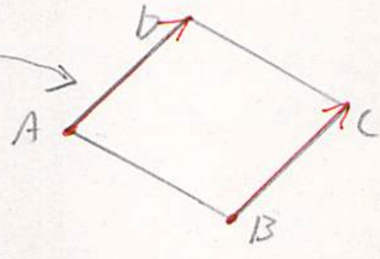
(3) 四角形ABCDが平行四辺形となるような点D

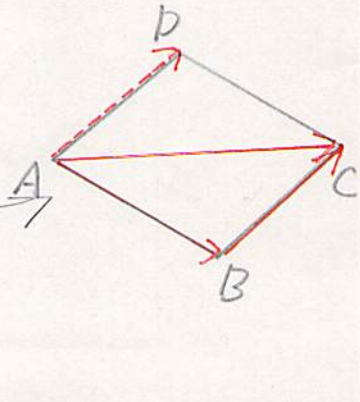
解 $D(x_1, x_2, x_3)$ とする

四角形ABCDが平行四辺形

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \text{又は} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ \text{又は} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{= \overrightarrow{AD}} \end{cases}$$







ここでは

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

を用いる. (他のどの1つを用いても良い).

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x_1 \\ -1-x_2 \\ 4-x_3 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -1-x_2 \\ 4-x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2 = -x_1 \\ -1 = -1-x_2 \\ -3 = 4-x_3 \end{cases}$$

これらを解くと $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$

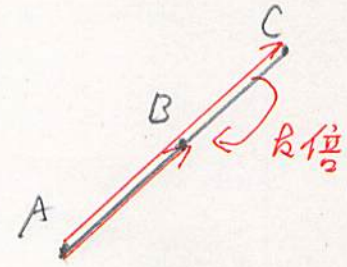
$\therefore$ D $(-2, 0, 7)$. //

練習問題1

点 A、B、C が同一直線上にある

$\iff$ $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

と表せる（$k\,(\neq 0)$ はある数）



5′ 3点 A（−1, 3, 2），B（−2, y, 8），（x, 0, −2）が同一直線上にあるような x, y の値を求めてみよう．

解

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y-3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

A, B, C が同一直線上にある

$\iff$ $k \neq 0$ を用いて次の様にかける：

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ y-3 \\ 6 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x+1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ y-3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x+1) \\ -3k \\ -4k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 = k(x+1) \\ y-3 = -3k \\ 6 = -4k \end{cases}$$

$k = -\dfrac{3}{2}$,

$x = -\dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{15}{2}$ //

問題集

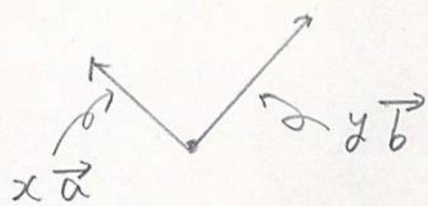
例題 1.3

$\vec{a}, \vec{b} (\neq \vec{0})$: $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$

$\Rightarrow$ (1) $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ となる x, y は

$$x = y = 0$$

のみである。



(2) $x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$ となる x, x', y, y' は

$$x = x' \text{ かつ } y = y'$$

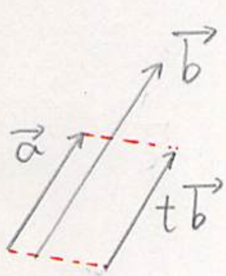
を満たす。

注意　2つの平行でないベクトルは線形独立 又は 1次独立 とよばれる。

上の例題において $\vec{a} \parallel \vec{b}$ の場合は (1) の x と y は $x = y = 0$ 以外にも存在する：

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = t\vec{b}$ （$t(\neq 0)$ はある数）

$\vec{a} - t\vec{b} = \vec{0}$



解 (1) $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$

$x \neq 0$ として矛盾を導く（背理法）

$x \neq 0$ とすると

$$x\vec{a} = -y\vec{b}$$

$$\vec{a} = -\frac{y}{x}\vec{b}$$

$$\iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

これは $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ に矛盾する．

従って　$x = 0$．

このとき　$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$　は

$$y\vec{b} = \vec{0}$$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ であるので $y = 0$ //

(2) (1)を用いる．

$$x\vec{a}+y\vec{b} = x'\vec{a}+y'\vec{b}$$

$$(x-x')\vec{a}+(y-y')\vec{b}=\vec{0}$$

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であるから (1) より

$$x-x'=0, \quad y-y'=0$$

$$\therefore\ x = x', \quad y = y'. \ //$$