本日(第4回目)の目標 (教科書p20〜22)

空間内の直線の3つの表し方を理解する:

- ベクトル方程式,
- 媒介変数表示,
- 媒介変数を消去した方程式(陰関数表示)

(直線の方向ベクトルの全ての成分≠0の場合)

＋ (プラス(座標平面ではない))

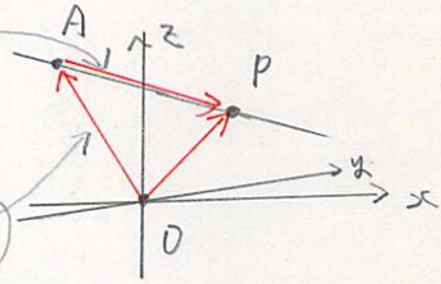
直線の方向ベクトルのいずれかの成分が0の場合の直線の3つの表し方を理解する.

定理（空間内の方向ベクトルによる直線の3つの表し方）

l：空間上の点 $A(a_1, a_2, a_3)$ を通り，
方向ベクトルが $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (\neq \vec{0})$ の直線

$P(x, y, z)$：l 上の点
とする．l は $P(x, y, z)$ を用いて次の3つのいずれかで
表せる：

$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$



(1) ベクトル方程式

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$(\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$，$\vec{p}$：$P$ の位置ベクトル，
$\vec{a}$：A の位置ベクトル$)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(2) 媒介変数表示

$$\begin{cases} x = a_1 + t v_1 \\ y = a_2 + t v_2 \\ z = a_3 + t v_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(3) 媒介変数を消去した方程式（陰関数表示）
$v_1, v_2, v_3 \neq 0$ とする．

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

∵）証明は"平面のとき"と同じ．//

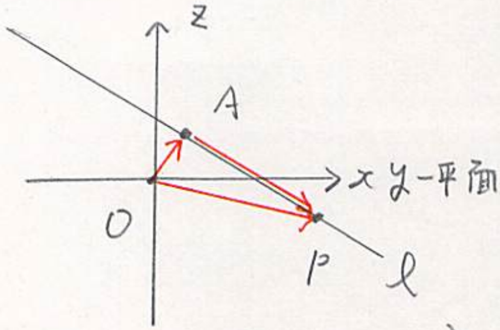
例 18

ℓ : 点 A $(1, -2, 3)$ を通り、方向ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \boxed{-6} \end{pmatrix}$

の直線

$P(x, y, z)$: ℓ 上の点

について、ℓ のベクトル方程式、媒介変数表示、媒介変数を消去した方程式により表してみよう。
(陰関数表示)



解

べ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \underbrace{t\boxed{\vec{v}}}_{}$ $(t \in \mathbb{R})$

$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

$\left(\begin{array}{l} \vec{p} = \vec{a} + t\vec{v} \\ \vec{p} : \text{点}P\text{の位置ベクトル}, \quad \vec{a} : \text{点}A\text{の位置ベクトル} \end{array} \right)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \boxed{-6} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

媒

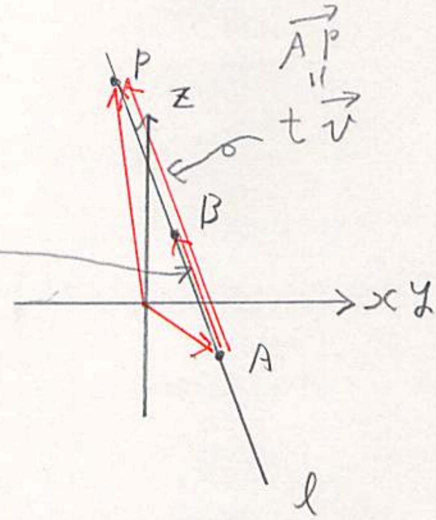
$$\begin{cases} x = 1 + \boxed{4}t \\ y = -2 + \boxed{5}t \\ z = 3 - \boxed{6}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

陰

$$\frac{x-1}{\boxed{4}} = \frac{y-(-2)}{\boxed{5}} = \frac{z-3}{\boxed{-6}}$$

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{-6}$$

例19　2点 A(1, 2, −3), B(0, 1, 2) を通る直線 l を3つの表し方で表してみよう.



解

$\vec{v}$: l の方向ベクトル

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$P(x, y, z)$: l 上の点

ベ　$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

媒　$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

陰　$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-(-3)}{5}$$

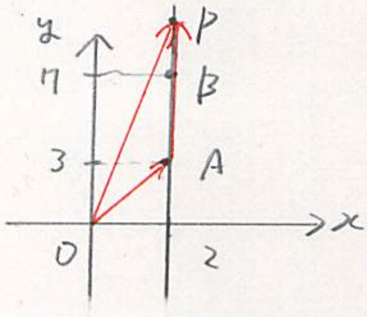
$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{5}$$

//

例20　次の直線 l を3つの表し方で表してみよう。
（方向ベクトルのいずれかの成分が 0 の場合）

(1)　l は2点 $A(2,3)$，$B(2,7)$ を通る

解



l の方向ベクトル $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$P(x, y)$：l 上の点

べ　$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$　$(t \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

媒　$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \end{cases}$　$(t \in \mathbb{R})$

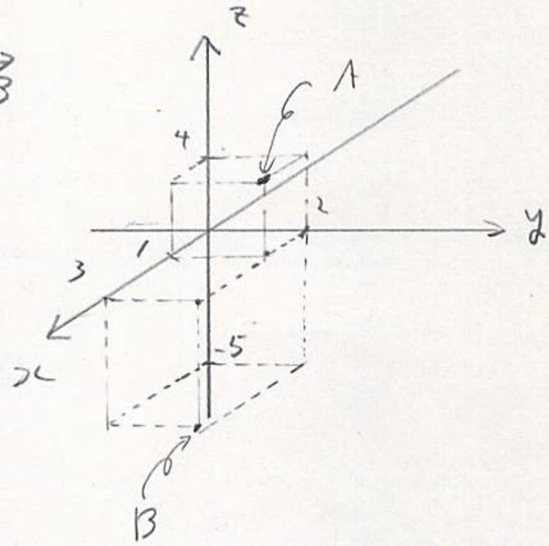
陰　$x = 2$

//

(2) l は点 A $(1, 2, 4)$, B $(3, 2, -5)$ を通る.

解

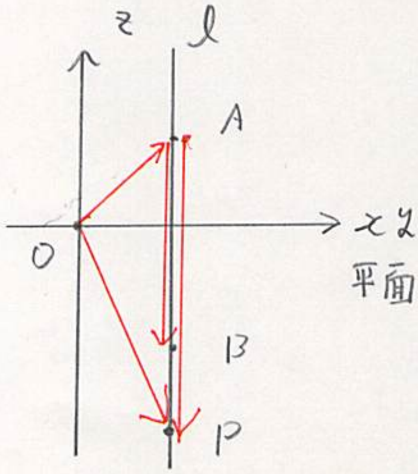
l の方向ベクトル $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$



$P(x, y, z)$: l 上の点

ベ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

媒
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 4 - 9t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

陰 $y = 2$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z-4}{-9}$$

//

第7回目の目標（教科書P.23）

練習問題1の6を理解する.

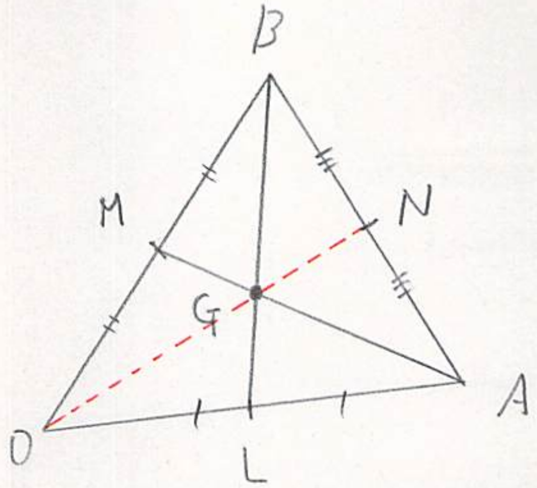
練習問題1

6

$\vec{a} := \overrightarrow{OA}$

$\vec{b} := \overrightarrow{OB}$

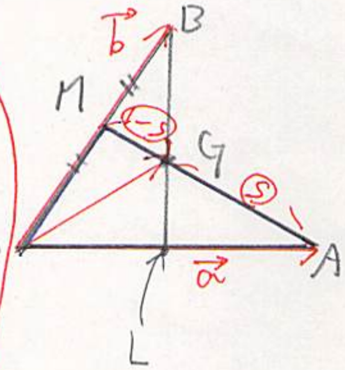
M：OBの中点、
L：OAの中点、
N：ABの中点、



G：△OABの重心という。
(GはBL, AM, ONの交点で BG：GL＝AG：GM
＝OG：GN＝2：1となる)。

OG：GN＝2：1であることをベクトルを用いて見てみよう。 $s, t \in \mathbb{R}$とする。

(1) AG：GM＝$s:(1-s)$として$\overrightarrow{OG}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表してみよう。



解 内分点の位置ベクトルの公式より
($\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{b}$に注意)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{s\,\overrightarrow{OM} + (1-s)\,\overrightarrow{OA}}{(1-s)+s}$$

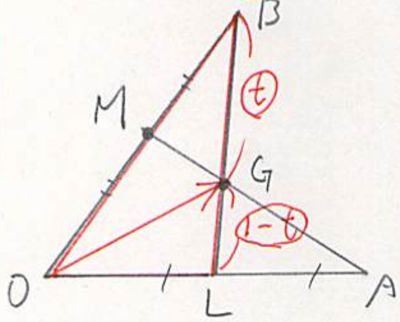
$$= s\cdot\overrightarrow{OM} + (1-s)\,\overrightarrow{OA}$$

$$= s\cdot\frac{1}{2}\vec{b} + (1-s)\,\vec{a}$$

$$= (1-s)\,\vec{a} + \frac{1}{2}s\,\vec{b} \quad \text{——— ①}$$

(2) BG : GL = t : (1−t) として $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表してみよう。

内分点の位置ベクトルの公式



解 $\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$

に注意する。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{t\,\overrightarrow{OL} + (1-t)\overrightarrow{OB}}{t + (1-t)}$$

$$= t \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$$= \frac{1}{2}t\,\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \text{——— ②}$$

//

(3) (1) と (2) から、s と t を求めてみよう。

解 ① と ② より $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから、① と ② の $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数がそれぞれ等しい：

① : $\overrightarrow{OG} = (1-s)\vec{a} + \frac{1}{2}s\,\vec{b}$

② : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}t\cdot\vec{a} + (1-t)\vec{b}$

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ より

$$\begin{cases} 1-s = \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}s = 1-t \end{cases}$$

これらを解くと $s = t = \frac{2}{3}$ //

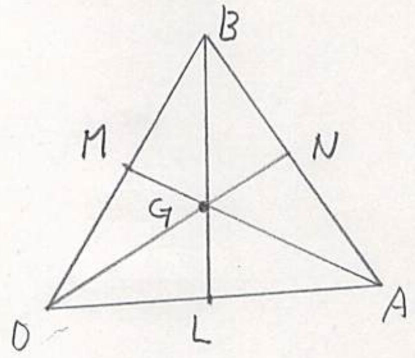
①, ② より

$$\underbrace{(1-s)}_{\text{同じ}}\vec{a} + \frac{1}{2}s\,\vec{b} = \underbrace{\frac{1}{2}t}_{\text{同じ}}\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

同じ

同じ

(4) 点 G は直線 ON 上にあり, OG : GN = 2 : 1 であることを見てみよう.



解

点 G が直線 ON 上にある

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{OG} = k \cdot \overrightarrow{ON}$

と表せる ($k (\neq 0)$ はある数)

N は AB の中点であるから. (AN : NB = 1 : 1)

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{―――― ③}$$

(3) で求めた $s = \frac{2}{3}$ を ① に代入 ($t = \frac{2}{3}$ を ② に代入) すると

$$\overrightarrow{OG} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

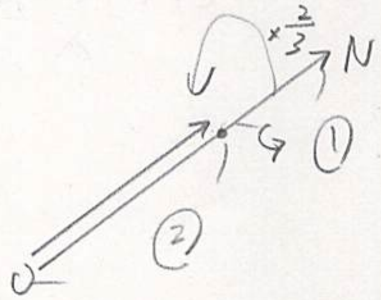
$$= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{―――― ④}$$

③, ④ より

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$$



となり, G は直線 ON 上の点である.

同時に

OG : GN = 2 : 1

も分かった. //