L'infinito e oltre
(Da inserire le immagini).

Robert-Georgian, Nițu
nitu.robert.georgian@gmail.com

Alessio, Esposito
alesp.swc.7pz@gmail.com

Emanuele Pio, Ganz
emanuelepioganz@gmail.com

Ultima modifica: December 1, 2020

Contents

1 Introduzione

1.1 Definizione

L'infinito rappresenta qualcosa senza limiti ed è più grande di tutti i numeri reali [1]. Il suo simbolo matematico è ∞ (chiamato *Lemniscata di Bernoulli*).

1.2 Esempi

La figura 1 mostra come esempio l'effetto Droste, che mostra un'immagine dentro se stessa che teoreticamente può andare all'infinito (ma in realtà si ferma ai limiti della risoluzione dell'immagine).
L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e dei numeri reali $\mathbb{Z}$ sono esempi di infiniti (il primo in quanto non ha una fine, il secondo in quanto non ha né inizio né fine).
E' un esempio di infinito anche le cifre dei numeri irrazionali (fra cui i più famosi sono π, e, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$), in quanto non hanno un limite.

Figure 1: L'effetto di Droste

[1] Vedi definizione in inglese qui

2 Storia

Molte culture antiche avevano varie idee sull'infinito. La prima cultura antica di cui abbiamo trovato un possibile concetto di infinito è quella Greca, ma i greci si erano ispirati all'Uroboro egiziano, ed abbiamo trovato inoltre l'infinito anche in altre civiltà antiche.

2.1 Antico Egitto

Figure 2: L'Uroboro da Theodoros Pelecanos

Con l'**Uroboro** gli egizi avevano creato una base del concetto di infinito per moltissime culture del tempo. Secondo treccani, la simbologia originaria dell'uroboro fu quella dell'eternità e del cosmo, ma era anche usata per rappresentare l'avvicendarsi della vita e della morte e, in alchimia, il ripetersi del ciclo che raffina le sostanze attraverso il riscaldamento, l'evaporazione, il raffreddamento e la condensazione. Il termine Uroboro è composto dalle parole greche *oura* (coda) e *boros* (mangiare). La versione egizia rappresentava infatti un serpente che si mangia la coda, ma le varie culture lo cambiarono in due serpenti, un drago, e un drago e un serpente. In antica india, inoltre, si pensa che l'Uroboro si trasformò in Shiva, che rappresenta la dualità della vita e della morte.

2.2 Antica Grecia

Gli antichi greci ed indiani non identificarono l'infinito come concetto matematico, ma come concetto filosofico, identificandolo in cose come l'Assoluto [2], Dio [3], ed i paradossi di Zenone [4].
I primi scritti riguardanti il concetto di infinito risalgono al filosofo greco presocrate **Anassimandro di Mileto** (610–546 a.C.) che creò l'unità di misura *apeiron* [5], la quale indicava la differenza di un corpo da un corpo infinitamente grande illimitato privo di caratteristiche (come caldo o freddo, umido o secco, luminoso o oscuro...). Per i Greci all'inizio l'apeiron fu l'origine del mondo dal caos, ma col tempo divenne un termine peggiorativo. [6]
Aristotele (384-322 a.C.) riteneva l'infinito come un difetto in quanto lo definiva come mancanza di un limite. Inoltre trovò una differenza fra l'**infinito attuale**[7] e l'**infinito potenziale**[8], ritenendo il primo semplicemente impossibile dati i vari paradossi che creava. Ci sono anche alcuni professori che sostengono che i greci nel periodo ellenico erano terrorizzati dal concetto di infinito, e ciò spiegherebbe il motivo per cui **Euclide di Alessandria** (323–283 a.C.) non usò il termine infinito nel suo teorema sui numeri primi. Altri sostengono che Euclide, invece, fosse il primo greco del periodo ellenico ad aver superato la paura dell'infinito col suo teorema.

[2] **Assoluto**: Termine filosofico usato per l'essere più supremo

[3] **Dio**: il creatore secondo le religioni monoteiste

[4] **Paradossi di Zenone**: sono un gruppo di problemi filosofici scritti dal filosofo greco Zenone di Elea

[5] Il termine **apeiron** significa *senza limite*, *indefinito* e probabilmente si può tradurre in *infinito*

[6] fonte: questo documento

[7] l'infinito che non ha né inizio né fine, come ad esempio l'insieme di tutti i numeri reali

[8] chiamato anche *infinito privato*, è l'infinito composto dalla successione finita, sempre e comunque incrementabile, e dunque 'privata' della sua terminazione

2.3 Antica India

In India il matematico jaino[9] **Surya Prajnapti** (circa 4-3 secolo a.C.) classificò tutti i numeri in tre insiemi, che avevano tre sottogruppi:

- contabili
  - i numeri più piccoli
  - i numeri intermedi
  - i numeri più grandi
- innumerevoli
  - quasi innumerevoli
  - veramente innumerevoli
  - innumerevolmente innumerevoli
- infiniti
  - quasi infiniti
  - veramente infiniti
  - infinitivamente infiniti

Purtroppo non si hanno altre informazioni né su Surya Prajnapti né sui matematici jaini di quel periodo oltre al fatto che erano abilissimi matematici.

2.4 Cina - Periodo Han

I cinesi furono il primo popolo a risolvere un sistema di equazioni con due incognite nel libro cinese *Il libro dei calcoli*[10] (circa 202-186 a.C.), il che dimostra che i cinesi erano molto abili in matematica. Nel libro *Arte Matematica*, invece, insegna nel capitolo 8 a risolvere **equazioni infinite** con **incognite infinite**, che molti storici riconoscono come la prima forma di **algebra lineare**.

2.5 Tardo Medioevo

Durante il tardo medioevo ci sono stati importanti matematici come Leonardo di Pisa, chiamato anche Fibonacci.
Il matematico francese sottovalutato **René Descartes**, oltre ad essere stato forse il primo ad aver usato il primo grafico tempo-velocità-distanza, è stato il primo a utilizzare esponenti frazionari, e ha lavorato anche su serie infinite, essendo il primo a dimostrare che la serie armonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}...$ è un infinito divergente (cioè non tendente a un limite, diverso dall'infinito).

[9] **Jainismo**: religione nata nello stesso periodo del buddismo
[10] fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Chinese_mathematics

2.6 Nel Seicento

Il matematico e ingegnere francese Girard Desargues è considerato uno dei fondatori del campo della geometria proiettiva, successivamente sviluppato ulteriormente da Jean Victor Poncelet e Gaspard Monge. La geometria proiettiva considera ciò che accade alle forme quando vengono proiettate su un piano non parallelo. Ad esempio, un cerchio può essere proiettato in un'ellisse o un'iperbole, e quindi queste curve possono essere considerate tutte equivalenti nella geometria proiettiva. In particolare, Desargues ha sviluppato il concetto cardine del "punto all'infinito" dove i paralleli si incontrano effettivamente. Il suo teorema prospettico afferma che, quando due triangoli sono in prospettiva, i loro lati corrispondenti si incontrano in punti sulla stessa linea collineare.

Newton e, indipendentemente, il filosofo e matematico tedesco Gottfried Leibniz, rivoluzionarono completamente la matematica (per non parlare della fisica, dell'ingegneria, dell'economia e della scienza in generale) con lo sviluppo del calcolo infinitesimale, con le sue due operazioni principali, differenziazione e integrazione. Newton probabilmente sviluppò il suo lavoro prima di Leibniz, ma Leibniz pubblicò il suo primo, portando a una disputa estesa e rancorosa. Qualunque sia la verità dietro le varie affermazioni, tuttavia, è la notazione del calcolo di Leibniz che è quella ancora in uso oggi, e il calcolo di qualche tipo è ampiamente utilizzato in tutto, dall'ingegneria all'economia, dalla medicina all'astronomia.

Tuttavia, il merito dovrebbe essere dato anche ad alcuni matematici dell'inizio del XVII secolo il cui lavoro anticipò in parte e in una certa misura aprì la strada allo sviluppo del calcolo infinitesimale. Già nel 1630, il matematico italiano Bonaventura Cavalieri sviluppò un approccio geometrico al calcolo noto come principio di Cavalieri, o il "metodo degli indivisibili". Anche l'inglese John Wallis, che ha sistematizzato ed esteso i metodi di analisi di Descartes e Cavalieri, ha dato un contributo significativo allo sviluppo del calcolo, oltre a dare origine all'idea della retta numerica, introducendo il simbolo ∞ per infinito e il termine "continua frazione ", ed estendendo la notazione standard per i poteri per includere numeri interi negativi e numeri razionali. L'insegnante di Newton Isaac Barrow è solitamente accreditato della scoperta (o almeno del primo rigoroso statrement) del teorema fondamentale del calcolo, che essenzialmente ha mostrato che l'integrazione e la differenziazione sono operazioni inverse, e ha anche fatto traduzioni complete di Euclide in latino e Inglese.

2.7 Nell'Ottocento

Lo studio di Joseph Fourier, all'inizio del XIX secolo, sulle somme infinite in cui i termini sono funzioni trigonometriche, rappresentò un altro importante progresso nell'analisi matematica. Le funzioni periodiche che possono essere espresse come la somma di una serie infinita di seno e coseno sono conosciute oggi come serie di Fourier, e sono ancora potenti strumenti nella matematica pura e applicata. Anche Fourier (seguendo Leibniz, Euler, Lagrange e altri) ha contribuito a definire esattamente cosa si intende per funzione, sebbene la definizione che si trova oggi nei testi - definendola in termini di corrispondenza tra elementi del dominio e della gamma - sia di solito attribuito al matematico tedesco del XIX secolo Peter Dirichlet.

Along with Riemann and, particularly, the Frenchman Augustin-Louis Cauchy, Weierstrass completely reformulated calculus in an even more rigorous fashion, leading to the development of mathematical analysis, a branch of pure mathematics largely concerned with the notion of limits (whether it be the limit of a sequence or the limit of a function) and with the theories of differentiation, integration, infinite series and analytic functions. In 1845, Cauchy also proved Cauchy's theorem, a fundamental theorem of group theory, which he discovered while examining permutation groups. Carl Jacobi also made important contributions to analysis, determinants and matrices, and especially his theory of periodic functions and elliptic functions and their relation to the elliptic theta function.

Alla fine del XIX secolo, Georg Cantor stabilì le prime basi della teoria degli insiemi, che consentì il trattamento rigoroso della nozione di infinito e che da allora è diventata il linguaggio comune di quasi tutta la matematica. Di fronte alla feroce resistenza della maggior parte dei suoi contemporanei e alla sua battaglia contro la malattia mentale, Cantor esplorò nuovi mondi matematici in cui c'erano molti infiniti diversi, alcuni dei quali più grandi di altri.

Il lavoro di Cantor sulla teoria degli insiemi è stato esteso da un altro tedesco, Richard Dedekind, che ha definito concetti come insiemi simili e insiemi infiniti.

2.8 Nel Novecento

Paul Cohen era un immigrato ebreo di seconda generazione che ha seguito il sogno americano per fama e successo. Il suo lavoro ha scosso il mondo matematico negli anni '60, quando ha dimostrato che l'ipotesi del continuo di Cantor sulle possibili dimensioni di insiemi infiniti (uno dei 23 problemi originali di Hilbert) poteva essere sia vera che non vera, e che c'erano effettivamente due completamente separati ma validi mondi matematici, uno in cui l'ipotesi del continuo era vera e uno in cui non lo era. A partire da questo risultato, tutte le moderne dimostrazioni matematiche devono inserire un'istruzione che dichiari se il risultato dipende o meno dall'ipotesi del continuo.

3 Origini del segno ∞

Il simbolo ∞ si legge Lemniscata, che deriva dal latino *lemniscus* (in italiano, *papillon*).

3.1 Prime forme

Il primo simbolo usato e' stato l'uroboro - che, come definito prima, puo' essere rappresentato in maniera differente come con il serpente, due serpenti o un dragone che si morde la coda.

3.2 Croce di San Bonifacio

La croce di San Bonifacio (672-754 d.C.) ha la forma dell'infinito, che simboleggia l'amore di Dio, che non ha ne' inizio ne' fine.

3.3 Origini del segno moderno

Nonostante il simbolo ∞ sia stato trovato sulla croce di San Bonifacio, l'origine è attribuita a **John Wallis**, che pero' non spiego' come mai l'origine della forma moderna. Ci sono infatti moltissime teorie riconosciute sull'origine del segno, ognuna differente dall'altra. Ne elenco le piu' credibili.

3.3.1 Deriva dalla lettera greca ω

Secondo questa teoria, il simbolo deriverebbe dalla lettera greca ω.

3.3.2 Deriva dal mille romano (M / $\subset | \supset \rightarrow \infty$)

Secondo questa teoria, il simbolo deriverebbe dal mille romano, scritto con M, che sifnifica anche "incontabili", oppure da $\subset | \supset$ (oppure talvolta scritto come $\subset\supset$), che ha lo stesso significato.

4 Paradossi sull'infinito

4.1 Paradossi di Zenone

I paradossi di Zenone elencati in realtà non riguardano direttamenti l'infinito, ma vari argomenti come l'impossibilità del moto e della molteplicità. Di seguito vengono riportati il testo dei paradossi e il loro legame con il concetto di infinito e una loro soluzione con le conoscenze e gli strumenti di oggi.

4.1.1 Lo stadio (o la dicotomia)

"*Non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima aver raggiunto la metà di esso, ma prima di raggiungerla si dovrà raggiungere la metà della metà e così via senza quindi mai riuscire nemmeno ad iniziare la corsa.*"

4.1.2 Achille e la tartaruga

"*Se Achille (detto "piè veloce") venisse sfidato da una tartaruga nella corsa e concedesse alla tartaruga un piede di vantaggio, egli non riuscirebbe mai a raggiungerla, dato che Achille dovrebbe prima raggiungere la posizione occupata precedentemente dalla tartaruga che, nel frattempo, sarà avanzata raggiungendo una nuova posizione che la farà essere ancora in vantaggio; quando poi Achille raggiungerà quella posizione nuovamente la tartaruga sarà avanzata precedendolo ancora. Questo stesso discorso si può ripetere per tutte le posizioni successivamente occupate dalla tartaruga e così la distanza tra Achille e la lenta tartaruga pur riducendosi verso l'infinitamente piccolo non arriverà mai ad essere pari a zero.*"
Questo è il paradosso di Zenone più noto che ci fa capire che gli antichi greci avevano già un concetto di infinito.

4.1.3 La freccia

"*La freccia, che appare in movimento, in realtà, è immobile. In ogni istante difatti essa occuperà solo uno spazio che è pari a quello della sua lunghezza; e poiché il tempo in cui la freccia si muove è fatto di singoli istanti, essa sarà immobile in ognuno di essi.*"

4.2 Paradosso di Borel

"*E' sempre possibile comporre una qualsiasi opera letteraria digitando casualmente le lettere di una tastiera*".
Questo paradosso è conosciuto anche come **Teorema delle scimmie** in quanto una scimmia è in grado di scrivere un testo di senso compiuto premendo casualmente tasti sulla tastiera (dato infinito tempo, una scimmia scriverà l'intera Divina Commedia digitando tasti a caso).

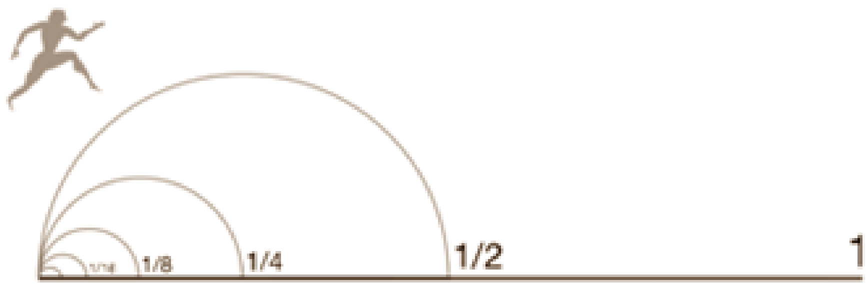

Figure 3: Lo stadio

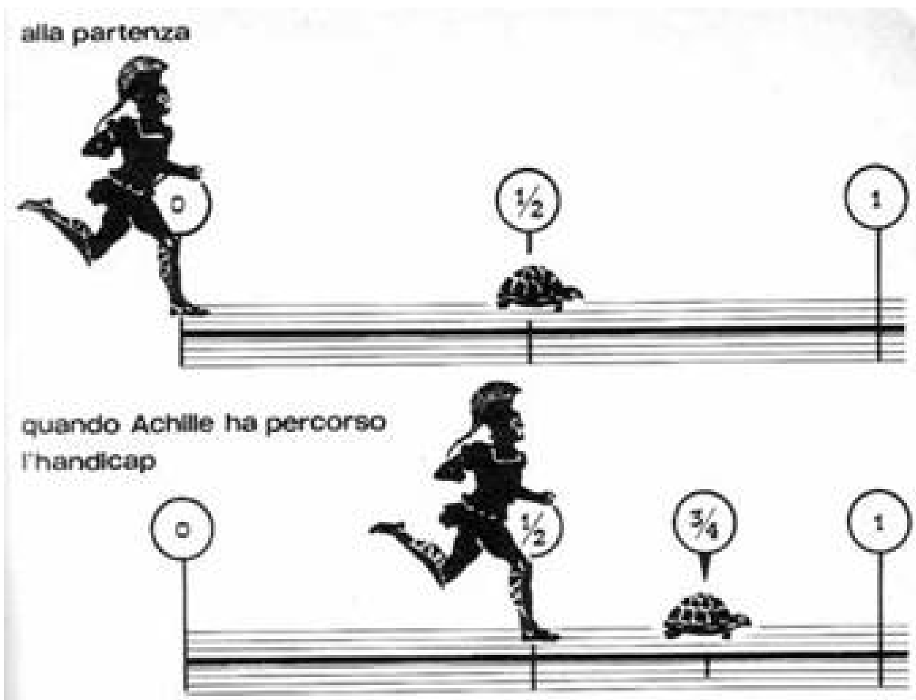

Figure 4: Achille e la tartaruga

5 Cosmologia

La cosmologia è una branca della filosofia che studia la struttura materiale e le leggi che regolano l'universo concepito come un insieme ordinato. La cosmologia si interessa dell'universo in riferimento allo spazio, al tempo e alla materia mentre esclude dalla sua indagine le domande relative all'origine e al fine ultimo del cosmo alle quali cercano di rispondere sia la cosmogonia fisica e sia la teologia. Al termine del medioevo Guglielmo di Ockham vagliava la possibilità di un universo infinito teoria che Niccolò Cusano riprendeva e che veniva ulteriormente approfondita da Giordano Bruno. Il termine cosmologia si ritrova infine nell'idea cosmologica kantiana che considera l'idea del mondo come assoluta totalità una aspirazione metafisica della ragione all'infinito, la cosmologia cioè pretende di studiare il mondo riuscendo a spiegarlo nella sua totalità, cosa impossibile a partire dal fatto che non si può fare esperienza di tutti i fenomeni nella loro totalità, ma solo di alcuni. Pertanto i metafisici, quando tentano di spiegare l'universo, cadono in procedimenti razionali contraddittori con sé stessi. Quando, nel 1917, Albert Einstein applicò la sua nuova teoria della relatività generale al problema della struttura dell'universo, sembrò per la prima volta che esistesse una soluzione fisica coerente e immune dalla minaccia dell'infinito. Lo spazio poteva curvarsi, e questo permetteva all'universo di essere racchiuso in se stesso. Purtroppo presto venne fuori che il modello di Einstein aveva problemi e non si accordava con le osservazioni raccolte dagli astronomi. Le galassie apparivano allontanarsi con una velocità proporzionale alla distanza e ciò fu interpretato come il segno che lo spazio si espandeva, una possibilità contemplata dalla relatività generale che Einstein aveva volutamente escluso. Con il modello del Big Bang possiamo confrontarci con almeno due tipi di infinito: quello della singolarità iniziale e quello dell'estensione potenzialmente infinita di ciò che esiste al di fuori dell'orizzonte osservabile.

6 Uso in materie scientifiche

6.1 Uso in matematica

L'Ipotesi del Continuo, formulata da Cantor nel 1878, è una delle congetture più note della teoria degli insiemi. Il Problema del Continuo, che ad essa è collegato, fu collocato da Hilbert, nel 1900, fra i principali problemi insoluti della matematica. A seguito della dimostrazione di indipendenza dell'Ipotesi del Continuo dagli assiomi della teoria degli insiemi, lo status attuale del problema è controverso. In anni più recenti, la ricerca di una soluzione del Problema del Continuo è stata anche una delle ragioni fondamentali per la ricerca di nuovi assiomi in matematica.
L'ipotesi del continuo afferma che:

Non esiste nessun insieme la cui cardinalità è strettamente compresa fra quella dei numeri interi e quella dei numeri reali.

Matematicamente parlando, dato che la cardinalità degli interi $|Z|$ è $\aleph_0$ e la cardinalità dei numeri reali $|R|$ è $2^{\aleph}_0$, l'ipotesi del continuo afferma:

$A : \aleph_0 < |A| < 2^{\aleph_0}$
Dove $|A|$ indica la cardinalità di A.

Il nome di questa ipotesi deriva dalla retta dei numeri reali, chiamata appunto "il continuo". Vi è anche una generalizzazione dell'ipotesi del continuo, denominata "ipotesi generalizzata del continuo", e che afferma che per ogni cardinale transfinito T.

$A : |T| < |A| < 2^{|T|}$

Gli studi di Gödel e Cohen hanno permesso di stabilire che nella teoria degli insiemi di Zermelo - Fraenkel comprensiva dell'assioma di scelta l'ipotesi del continuo risulta indecidibile.

Per dare una formulazione formale dell'ipotesi, occorre iniziare con una definizione: due insiemi S e T hanno la stessa cardinalità o numero cardinale se esiste una biiezione $S \leftrightarrow T$.

Intuitivamente, questo significa che è possibile "accoppiare" gli elementi di S con quelli di T in modo che ad ogni singolo elemento di S viene associato uno ed un solo elemento di T e viceversa. In termini tecnici, si parla di corrispondenza biunivoca.

Con gli insiemi di dimensione finita, questo non porta a nessun problema: la situazione cambia con gli insiemi infiniti. Già Galileo aveva fatto notare come i quadrati perfetti, anche se sembrano essere molto meno dei numeri interi, si possono ciononostante mettere in corrispondenza biunivoca con questi ultimi: basta usare l'accoppiamento naturale

$$1 \leftrightarrow 1; 2 \leftrightarrow 4; 3 \leftrightarrow 9; 4 \leftrightarrow 16; 5 \leftrightarrow 25; ...; n \leftrightarrow n^2; ...$$

Consideriamo ad esempio l'insieme dei numeri razionali. Si potrebbe ingenuamente pensare che essi siano più degli interi e meno dei reali, invalidando così l'ipotesi del continuo. In realtà, si può dimostrare che i numeri razionali possono essere posti in corrispondenza biunivoca con gli interi, e quindi la cardinalità dell'insieme dei numeri razionali è identica a quella dell'insieme degli interi: sono entrambi insiemi numerabili. D'altro canto, il metodo diagonale di Cantor mostra che gli interi e i reali non hanno la stessa cardinalità, quindi l'ipotesi del continuo ha un senso: in pratica, ogni sottoinsieme del continuo (cioè dell'insieme dei numeri reali) che comprende gli interi ha la medesima cardinalità di questi ultimi, o la medesima cardinalità del continuo stesso.

Se si trovasse un insieme S che rendesse falsa l'ipotesi del continuo, sarebbe impossibile trovare una corrispondenza biunivoca tra S e gli interi: ci sarebbe sempre qualche elemento di S (in realtà un numero infinito) "lasciato fuori". Allo stesso tempo, sarebbe impossibile trovare una corrispondenza biunivoca tra S e i numeri reali; in questo caso saremmo sempre costretti a "lasciare fuori" un numero infinito di numeri reali.
Nel 1940, Kurt Gödel fece un passo in avanti, dimostrando che l'ipotesi del continuo (in breve CH, dall'inglese continuum hypothesis) non può essere dimostrata falsa usando il sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel, neppure con l'aggiunta dell'assioma della scelta. D'altra parte, nel 1963 Paul Cohen dimostrò che CH non può essere neppure dimostrata vera a partire da quegli assiomi. Il risultato complessivo è che CH è indipendente dal sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel e dall'assioma della scelta. Occorre tenere conto che entrambi questi risultati partono dall'assunto che gli assiomi di Zermelo-Fraenkel non siano tra loro contraddittori, cosa che si suppone generalmente essere vera.

Tuttavia ciò non è sorprendente, sapevamo già che un certo insieme di assiomi possono essere ne confermati, ne confutati, ce lo dice il Teorema di incompletezza di Gödel, anche se effettivamente con la CH abbiamo avuto il primo caso di sicurezza totale sul fatto che non ci sia un “si” e un “no”.

6.2 Uso in fisica

Se un giorno trovassimo una applicazione fisica risolvendo questa teoria, bene, ma se così non sarà, risolvendo questa ipotesi dimostreremo che noi, con le nostre piccole menti, dalla vita istantanea in confronto anche solo al nostro pianeta terra, saremo riusciti a creare qualcosa che l'intero universo non è riuscito a darci.

19

6.3 Uso in informatica

6.4 Uso in logica

7 Nella cultura

7.1 Arte

7.2 Filosofia

7.3 Letteratura

7.4 Film

7.5 Videogiochi

7.6 Musica

8 Opinioni personali sull'infinito

Qui entriamo nelle opinioni personali sull'infinito. Che il dibattito abbia inizio.

8.1 Alessio Esposito

Foo

8.2 Emanuele Pio Ganz

Bar

8.3 Robert-Georgian Nițu

Baz

Strumenti inclusi

– visualizzatore di droste

– paradossi di zenone

Fonti

- Infinito - Wikipedia
- Infinito (filosofia) - Wikipedia
- La storia dell'infinito - math.tamu.edu
- Paradossi di Zenone - Wikipedia

Grazie per l'attenzione!

Robert-Georgian Nițu
Alessio Esposito
Emanuele Pio Ganz