

人工智能之机器学习

晚自习：MLE最大似然估计讲解

上海育创网络科技有限公司

主讲人：刘老师(GerryLiu)

课程要求

- 课上课下 “九字” 真言
 - 认真听，**善摘录，勤思考**
 - **多温故，乐实践**，再发散
- 四不原则
 - **不懒散惰性，不迟到早退**
 - **不请假旷课，不拖延作业**
- 一点注意事项
 - 违反 “四不原则”，不推荐就业

课程内容

- MLE最大似然估计作业讲解

MLE最大似然估计作业

最大似然估计MLE案例（作业）

变量 x : 1, 2, 3

变量 x 出现的概率分布:

$$p(1) = 0.5\theta$$

$$p(2) = 0.3 + 0.4\theta$$

$$p(3) = 0.7 - 0.9\theta$$

现在随机产生一组序列(有放回的)，序列是：1 2 2 2 1 2 2 3 1 3

需求：求解 θ 的值。

MLE最大似然估计作业

- 求解思路：当序列出现可能性最大的时候所对应的概率参数应该就是最优的模型参数。因为只有当时这种情况下的时候，当前这个序列才会被最有可能被抽取出来。如果当前序列出现可能性最大的时候，所对应的模型参数不是最有可能的实际模型参数的话；如果实际的模型概率是另外一种可能性的话，那么当前这个序列也就不应该出现。所以说当前序列出现可能性最大的时候所对应的概率参数应该就是最优的模型参数。
- 这个过程就叫做最大似然估计。
 - 序列同时出现的可能性形成的概率函数叫做**似然函数**。
 - 通过让似然函数最大化来估计模型的参数。

MLE最大似然估计作业

- 最大似然估计的步骤：
 - 1. 编写似然函数，一般为所有样本的联合密度函数。
 - 2. 求解对数似然函数。
 - 3. 对数似然函数求导。
 - 4. 解似然函数方程。
- 备注：这个过程只能说是通用形式的，但是不能说所有的都是这样的，就记住一点：反正MLE最大似然估计是求似然函数最大值时候所对应的模型参数。

MLE最大似然估计作业

- 编写似然函数

$$\begin{aligned} L(\theta) &= P(x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_{10} = 3) \\ &= P(x_1 = 1) * P(x_2 = 2) * \dots * P(x_{10} = 3) \\ &= p_1 p_2 \dots p_3 \\ &= p_1^3 p_2^5 p_3^2 \\ \Rightarrow L(\theta) &= (0.5\theta)^3 * (0.3 + 0.4\theta)^5 * (0.7 - 0.9\theta)^2 \end{aligned}$$

MLE最大似然估计作业

- 编写对数似然函数

$$\begin{aligned}l(\theta) &= \ln(L(\theta)) = \ln(p_1^3 p_2^5 p_3^2) \\ &= 3 \ln p_1 + 5 \ln p_2 + 2 \ln p_3\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$l(\theta) = 3 \ln(0.5\theta) + 5 \ln(0.3 + 0.4\theta) + 2 \ln(0.7 - 0.9\theta)$$

MLE最大似然估计作业

- 对数似然函数求导。

$$l(\theta) = 3 \ln(0.5\theta) + 5 \ln(0.3 + 0.4\theta) + 2 \ln(0.7 - 0.9\theta)$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{3 * 0.5}{0.5\theta} + \frac{5 * 0.4}{0.3 + 0.4\theta} + \frac{2 * (-0.9)}{0.7 - 0.9\theta}$$

$$= \frac{3}{\theta} + \frac{20}{3 + 4\theta} - \frac{18}{7 - 9\theta}$$

MLE最大似然估计作业

- 求解似然函数。令导函数等于0，即可求得模型参数的值。

$$\text{令 } \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{3}{\theta} + \frac{20}{3+4\theta} - \frac{18}{7-9\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{\theta} + \frac{20}{3+4\theta} - \frac{18}{7-9\theta} \right) * \theta * (3+4\theta) * (7-9\theta) = 0 * \theta * (3+4\theta) * (7-9\theta)$$

$$\Rightarrow 3 * (3+4\theta) * (7-9\theta) + 20 * \theta * (7-9\theta) - 18 * \theta * (3+4\theta) = 0$$

$$\Rightarrow -360 * \theta^2 + 89 * \theta + 63 = 0$$

$$\Rightarrow \theta \approx \begin{cases} -0.31264 \\ 0.55986 \end{cases}$$

MLE最大似然估计作业

- 又因为概率值必须是大于等于0并且小于等于1的值，而且因为三种情况都出现了，所以单个情况的概率不等于0或者1，从而得到下列式子：

$$\begin{cases} 0 < 0.5\theta < 1 \\ 0 < 0.3 + 0.4\theta < 1 \\ 0 < 0.7 - 0.9\theta < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \theta < 2 \\ -0.75 < \theta < 1.75 \\ -\frac{1}{3} < \theta < \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \theta < \frac{7}{9}$$

MLE最大似然估计作业

- 结合之前的内容，得到最终的 θ 值以及各个类别的概率值分别为：

$$\theta = 0.55986$$

$$p_1 = 0.5\theta = 0.27993$$

$$p_2 = 0.3 + 0.4\theta = 0.523944$$

$$p_3 = 0.7 - 0.9\theta = 0.196126$$

现在随机产生一组序列(有放回的)，序列是：1 2 2 2 1 2 2 3 1 3

