

A1-可计算性

DDL: 2024/3/17 23:59

1. $\hat{K} = \{\#M : \text{图灵机 } M \text{ 对于所有输入停机}\}$ ^{1 2}. 证明 \hat{K} 不可判定.

注: 本题只能选择以下的方法证明 ^{3 4}:

- (a) 自我指涉
- (b) 对角线构造
- (c) m -规约

不能使用莱斯定理(Rice's Theorem). ⁵

2. 试说明下述两个集合是否可判定 ^{6 7 8}

- (a) $C = \{\#M : M \text{ 是一个全常数函数}\}$
- (b) $T = \{\#M : M \text{ 是一个全函数}\}$

1. $A = \{a : p(a)\}$ 的意思是, A 是一个集合且 $p(a) = \text{True} \rightarrow a \in A$. 此处的 $p(a)$ 为谓词命题(predicate proposition).

大家可能对 $\{a : p(a)\}$ 这种集合的表示形式不太熟悉, 但是这种表示与大家更加熟悉的 $\{a | p(a)\}$ 表达形式是一个意思的. ⁹

2. $\#M$ 表示图灵机 M 的编码. 记全体图灵机的集合为 \mathcal{M} , 则图灵机编码可以视为一个函数 $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}$, 使得 $\forall M \in \mathcal{M}, f(M) = \#M$. ¹⁰

3. 你可以选择一个或者多个方法, 但是我们不保证任意一种选择都能做得出来 😊, 你需要考虑一下什么方法会比较合适. ¹¹

4. 由于图灵机和大家写的C程序在表达能力上是等价的(为什么? 😊), 所以这道题也可以从C程序的角度去思考(而且这样思考会更加简单), 不妨尝试一下 😊 ¹²

5. 能使用莱斯定理的话, 那这题就太简单了 😊 ¹³

6. 全函数(total function): 如果函数 $f : A \rightarrow B$ 对于任意 $x \in A$, $f(x)$ 都有定义, 那么称 f 为 total function. 大家在离散数学里学到的 function 都是 total function.

与 total function 相对应的是 partial function, 例如对于函数 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$. f 是 partial function, 因为 $f(0)$ 没有定义, 但是 $0 \in \mathbb{N}$. ¹⁴

7. 常数函数(constant function): 即形如 $\forall x \in \text{dom}(f), f(x) = c$ 的函数 (c 为常数). ¹⁵

8. 此处考虑的函数均为一维数论函数. 一维数论函数的集合为 $\{f | f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ ¹⁶