עץ פורש מינימלי - פתרון

1. הראו שאם כל המשקלות של קשתות גרף הם חיוביים, אזי כל תת- קבוצה של קשתות המחברות את כל הקדקודים ואשר משקלה הכולל הוא מינימלי היא בהכרח עץ. מצאו דוגמה המראה שהמסקנה אינה נובעת אם אנו מרשים שחלק מן המשקולות יהיו אי-חיוביים.

תשובה :

נראה שאם כל המשקלות של קשתות גרף הם חיוביים, אזי כל תת קבוצה של קשתות המחברות את כל הקדקודים ואשר משקלה הכולל מינימלי היא עץ:

נניח בשלילה כי קיימת תת קבוצה $D\subseteq E$ של קשתות כנ"ל (שמשקלה מינימלי) אשר אינה עץ, כלומר – יש בה מעגל (לפחות אחד).

נניח שקשת $e = (u,v)$ כלשהי נמצאת על המעגל .

נוציא את הקשת (u,v) הזאת מהקבוצה D, ונבדוק אלו תנאים הקבוצה $D' = D\setminus\{(u,v)\}$ מקיימת:

- D' מחברת את כל הקדקודים של הגרף:

✓ u, v מחוברים אחד לשני למרות שהוצאנו את (u,v), מכיוון ש- u, v היו נמצאים על מעגל, כלומר – יש דרך מ-v ל-u לא דרך (u,v).

✓ שאר הקדקודים של הגרף עדיין מחוברים על ידי קשתות מ -$D\setminus\{(u,v)\}$, כי לא שינינו בהם כלום.

- D' בעלת משקל קטן יותר מ-D:

✓ נסמן את המשקל של קבוצה A ב- w(A):

לכן נוכל לכתוב : $w(D') = w(D) - w(e') < w(D)$

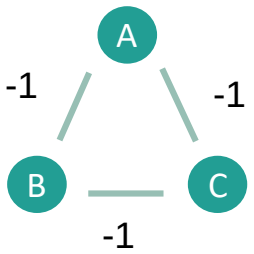
מאחר ומשקלה של e' חיובי, קיבלנו שהמשקל של D' קטן מהמשקל של D, **בסתירה** להנחה ש-D מינימלית.

מ.ש.ל.

אם מרשים שחלק מהמשקולות יהיו אי-חיוביים, אזי יתכן ש- $w(e') \le 0$,

ולכן לא נקבל בהכרח ש- $w(D') < w(D)$, כלומר לא יתחייב ש-D' מינימלית ולכן לא תהיה סתירה.

לדוגמא: משולש בו כל הצלעות בעלות משקל של (-1).



2. יהי G=(V,E) גרף קשיר לא מכוון עם משקולות חיוביים על הקשתות. יהי T_1 עץ פורש מינימלי של G בעל משקל W_1. נוסיף לגרף קשת e שמשקלה w(e). (הקשת e מחברת בין שני קדקודים בגרף).

יהי T_2 עץ פורש מינימלי של הגרף המעודכן, בעל משקל W_2.

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $W_2 \le W_1$

ב. אם $W_2 = W_1$ אז הקשת e נמצאת על מעגל שמשקל כל אחת מהקשתות בו הוא לכל היותר w(e).

<u>תשובה</u> :

<u>נתון</u>:

G=(V,E) גרף קשיר לא מכוון עם משקולות חיוביים על הקשתות

T_1 עפ"מ של G בעל משקל w_1.

מוסיפים לגרף קשת e בעלת משקל w(e) - T_2 עפ"מ של העץ המעודכן, בעל משקל w_2.

א. **$w_2 \le w_1$** :

<u>נוכיח</u> מאחר שהגרף היה קשיר לפני הוספת הקשת e, הרי ש-T_1, שהיה עפ"מ לפני הוספת הקשת e, חיבר את כל הקדקודים ב-G. כלומר, גם לאחר הוספת e, T_1 הוא **<u>עץ פורש</u>** של הגרף המעודכן .

נתון ש-T_2 הוא עץ פורש מינימלי של הגרף המעודכן ולכן לפי הגדרת מינימום נקבל: $w_2 \le w_1$.

מ.ש.ל.

ב. **אם $W_2 = W_1$ אז הקשת e נמצאת על מעגל שמשקל כל אחת מהקשתות בו הוא לכל היותר w(e)**:

<u>נוכיח</u> :

נבחין בין שני מקרים:

1. <u>אם e **לא נמצאת** ב-T_2 :</u>

מאחר ו- e נוספה לגרף שהיה בו עץ פורש T_1 , בהכרח היא מחברת בין קודקודים שהיה ביניהם מסלול כבר קודם – דרך העץ – ולכן היא בהכרח סוגרת מעגל, ששאר קשתותיו שייכות ל – T_1. (כעת יש בין קדקודים אלו מסלול נוסף – דרך e. כלומר – נסגר מעגל).

נסתכל על המעגל שנוצר על ידי העץ עם התוספת של e.

<u>נרצה להוכיח</u> שבמעגל זה כל הקשתות בעלות משקל קטן או שווה ל-e.

נניח בשלילה שיש במעגל זה קשת אחת, e_2, שמשקלה גדול יותר.

לכן נוכל להוציא את e_2 מהעץ הפורש, ולשים במקומה את e.

נקבל עץ פורש בעל משקל קטן יותר, **בסתירה** למינימליות T_2.

2. <u>אם e **נמצאת** ב-T_2:</u>

נשים לב שהיא ודאי לא נמצאת ב-T_1.

ניקח את המסלול ב- T_1 שמחבר בין שני הקצוות של e, נוסיף להן את e בעצמה, ונקבל מעגל.

<u>נרצה להוכיח</u> שבמעגל זה כל הקשתות בעלות משקל קטן או שווה ל-e.

נניח בשלילה שיש במעגל זה קשת אחת, e_2, שמשקלה גדול יותר.

לכן נוכל להוציא את e2 מהעץ הפורש, ולשים במקומה את e.

נקבל עץ פורש בעל משקל קטן יותר מ- T_1, ולכן משקלו קטן יותר גם מ- T_2 (נתון $W_2 = W_1$)

בסתירה למינימליות T_2.

לסיכום, בשני המקרים ניתן למצוא מעגל שלא קיימת עליו קשת שמשקלה גדול ממשקל e, כלומר-

הראינו שניתן למצוא מעגל ש- e נמצאת עליו וכל הקשתות בו בעלות משקל קטן או שווה ל- e.

מ.ש.ל.