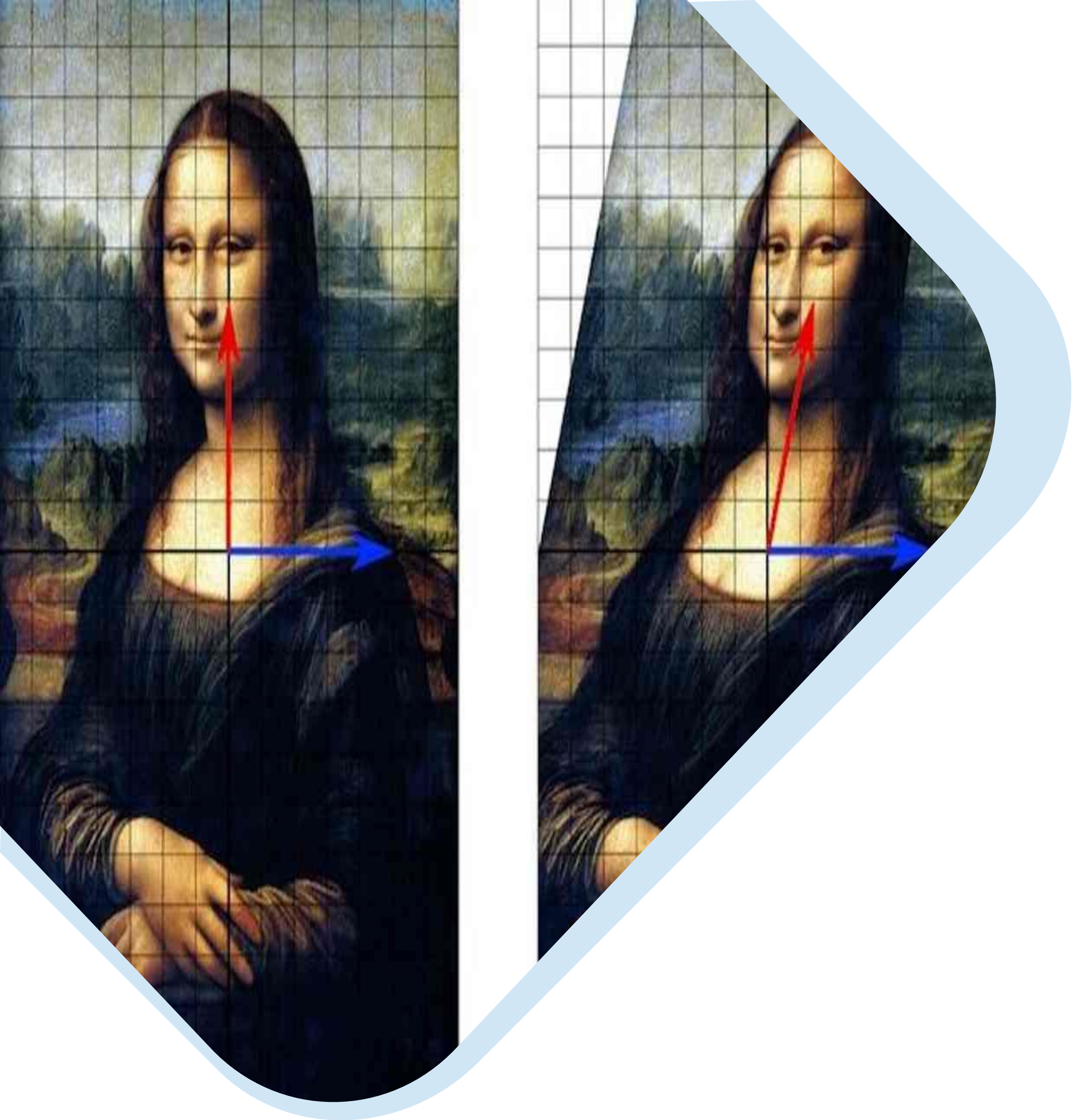
图形几何变换

Transformation I

华中科技大学
何云峰

CONTENTS



PART 01

二维图形变换

01 二维图形变换

二维图形变换

- 基本几何变换
- 复合变换
- 变换的性质
- 图形变换的计算

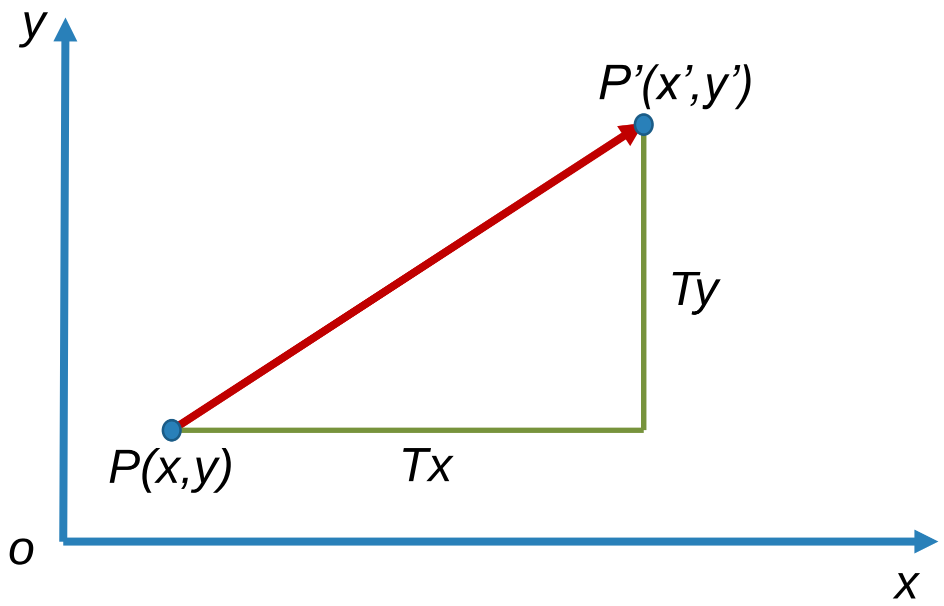
01 基本几何变换

- 图形的几何变换是指对图形的几何信息经过平移、比例、旋转等变换后产生新的图形，是图形在方向、尺寸和形状方面的变换
- 基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换

01 基本几何变换

平移变换

- 平移是指将p点沿直线路径从一个坐标位置移到另一个坐标位置的重定位过程



$$x' = x + T_x$$

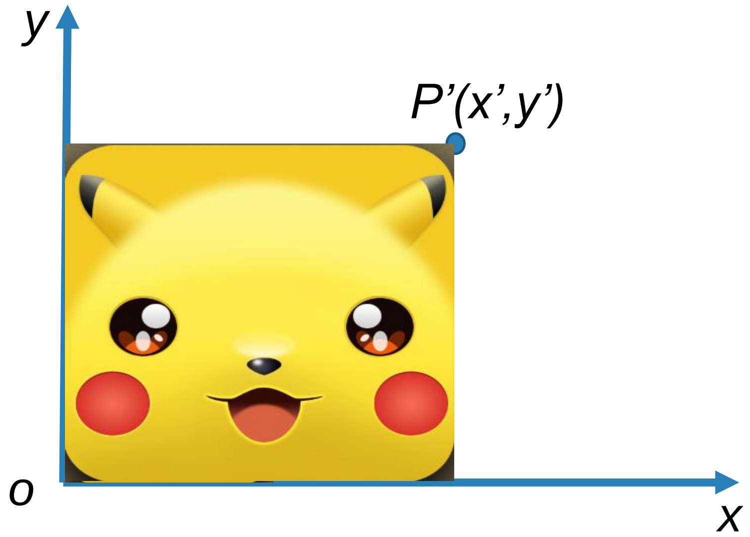
$$y' = y + T_y$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$$

01 基本几何变换

比例变换

- 比例变换是指对p点相对于坐标原点沿x方向放缩S_x倍，沿y方向放缩S_y倍。其中S_x和S_y称为比例系数



Sx=2，Sy=1.5

$$x' = S_x \cdot x$$

$$y' = S_y \cdot y$$

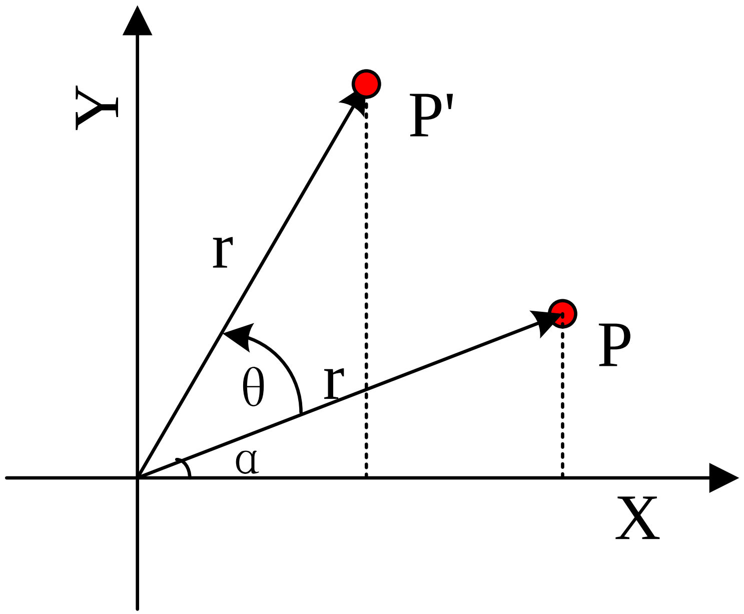
$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

01

基本几何变换

旋转

- 二维旋转是指将p点绕坐标原点转动某个角度（逆时针为正，顺时针为负）得到新的点p'的重定位过程



$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\sin\alpha$$

$$x' = r\cos(\alpha+\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\alpha+\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

01 基本几何变换

- 包含平移、比例和旋转的变换是非线性的

$$P' = P + T$$

$$P' = P \cdot S$$

$$P' = P \cdot R$$

$$\longrightarrow \quad P' = P \cdot T_1 + T_2$$

01

基本几何变换

规范化齐次坐标

- 齐次坐标表示：用n+1维向量表示一个n维向量

$$(x, y) \Leftarrow (xh, yh, h) \qquad h \neq 0$$

- 规范化齐次坐标表示就是h=1的齐次坐标表示

$$(x, y) \Leftarrow (x, y, 1)$$

01 基本几何变换

平移

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

01 基本几何变换

比例

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

01 基本几何变换

整体比例

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

01 基本几何变换

旋转

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

01 基本几何变换

二维变换矩阵

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$$

$$x' = \frac{ax + cy + l}{px + qy + s} \qquad y' = \frac{bx + dy + m}{px + qy + s}$$

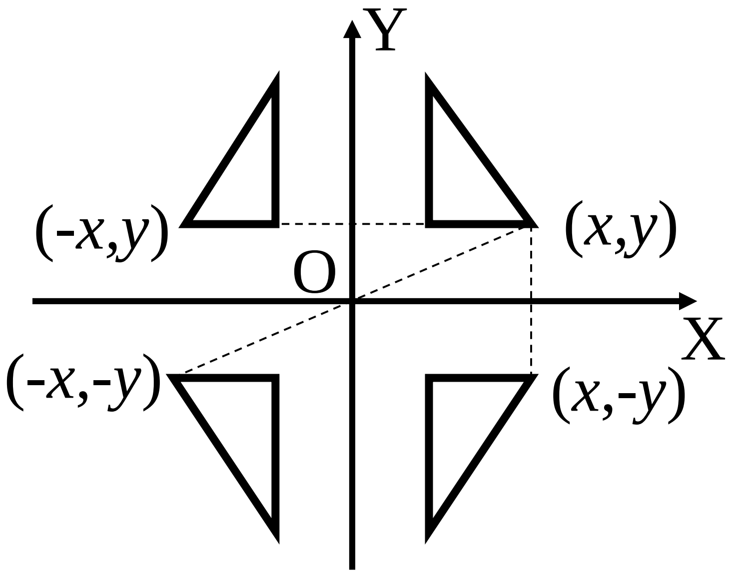
01 基本几何变换

对称变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

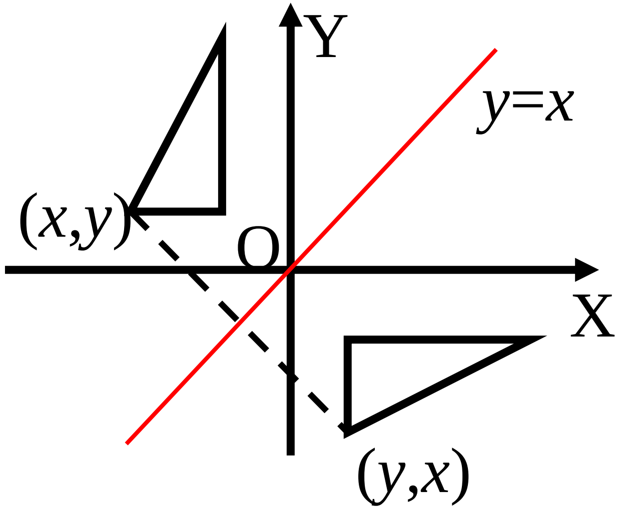
$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



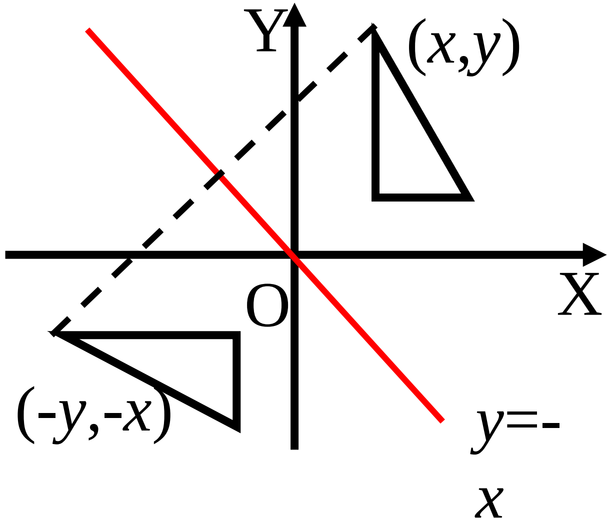
01 基本几何变换

对称变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



01 基本几何变换

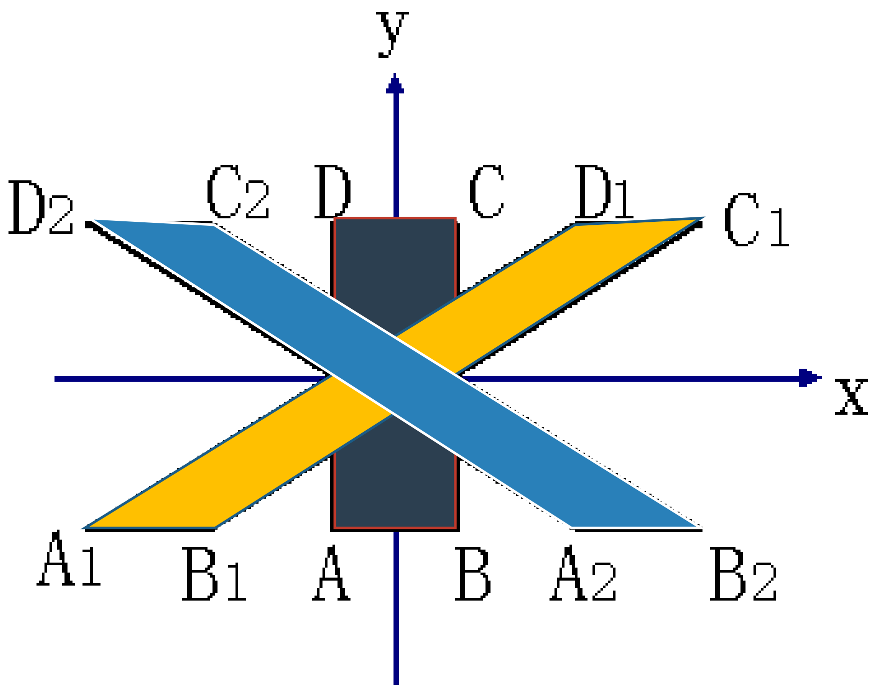
错切变换

- 将一个坐标的倍数添加到另一个坐标上
- 沿x轴的错切

$$x' = x + cy$$

$$y' = y$$

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ c & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



01 基本几何变换

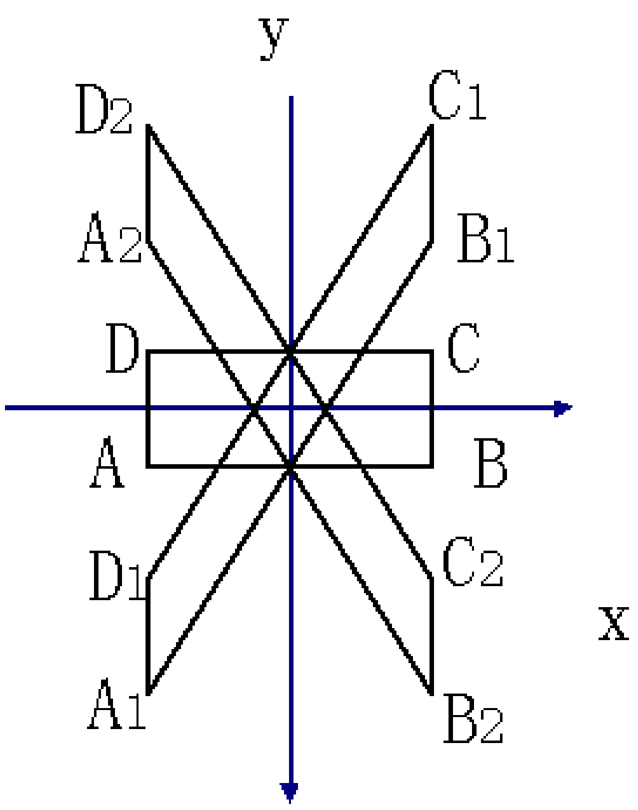
错切变换

- 沿y轴的错切

$$T=\begin{bmatrix}1 & b & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 沿x和y的错切

$$T=\begin{bmatrix}1 & b & 0\\c & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



二维图形变换

- 基本几何变换
- **复合变换**
- 变换的性质
- 图形变换的计算

01 复合变换

复合变换

- 图形作一次以上的几何变换，变换结果是每次变换矩阵的乘积
- 任何一复杂的几何变换都可以看作基本几何变换的组合形式
- 复合变换具有形式

$$P' = P \cdot T = P \cdot (T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n)$$

$$= P \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdots T_n \qquad (n > 1)$$

01 复合变换

复合变换

$$R=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & tg\theta & 0\\ -tg\theta & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

01 复合变换

- 相对任意参考点的变换
  - 平移
  - 针对原点进行二维几何变换
  - 反平移

相对任意参考点的变换

- 实例：相对点(x_F,y_F)的旋转变换

$$T_{RF}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-x_F&-y_F&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_F&y_F&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\x_F-x_F\cos\theta+y_F\sin\theta&y_F-y_F\cos\theta-x_F\sin\theta&1\end{bmatrix}$$

01 复合变换

- 相对任意方向（向量）的变换
  - 旋转变换
  - 针对坐标轴进行二维几何变换
  - 反向旋转

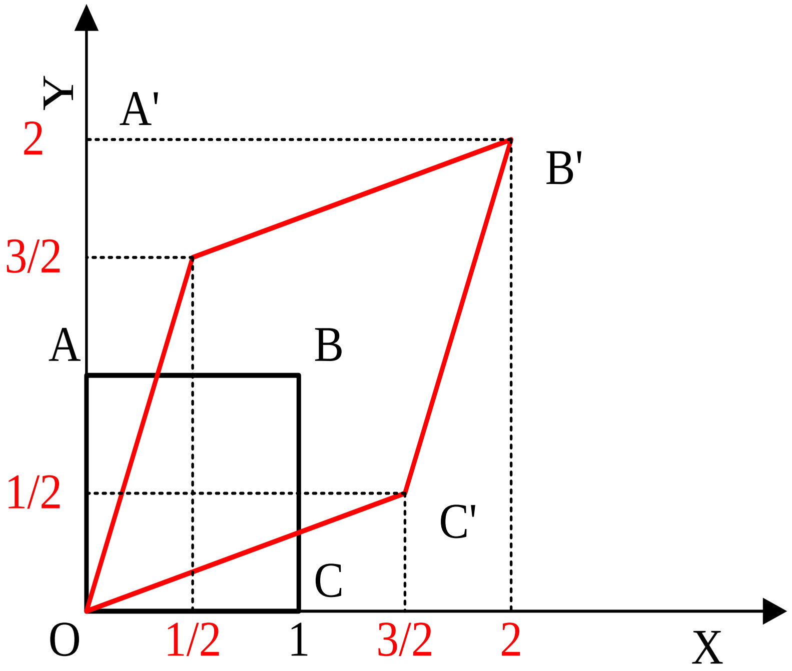
复合变换

相对任意方向（向量）的变换

- 例子：将正方形ABCO各点沿下图所示的(0,0)→(1,1)方向进行拉伸，结果为如图所示的，写出其变换矩阵和变换过程

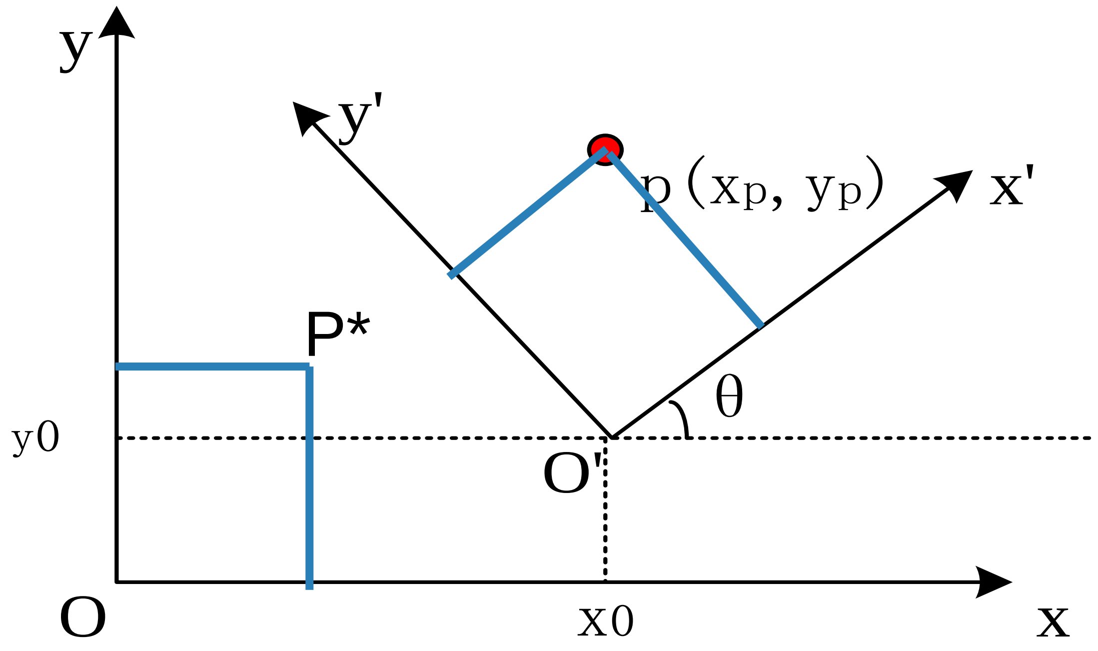
$$T=\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & \sin(-45^\circ) & 0\\ -\sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}S_x & 0 & 0\\ 0 & S_y & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b & p\\ c & d & q\\ l & m & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/2 & 3/2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$



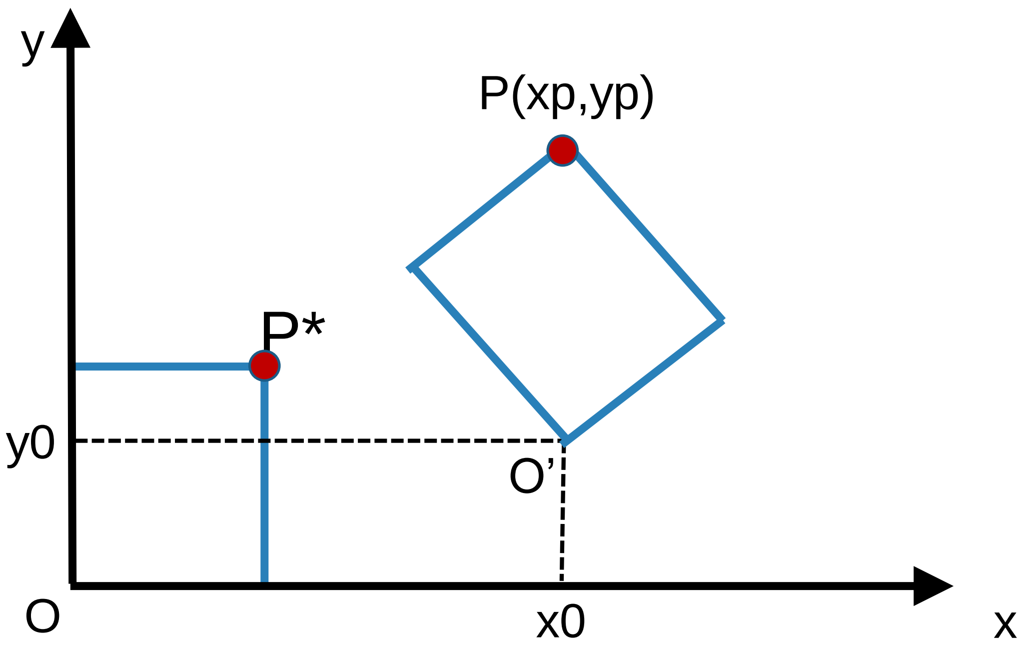
01 复合变换

坐标系之间的变换



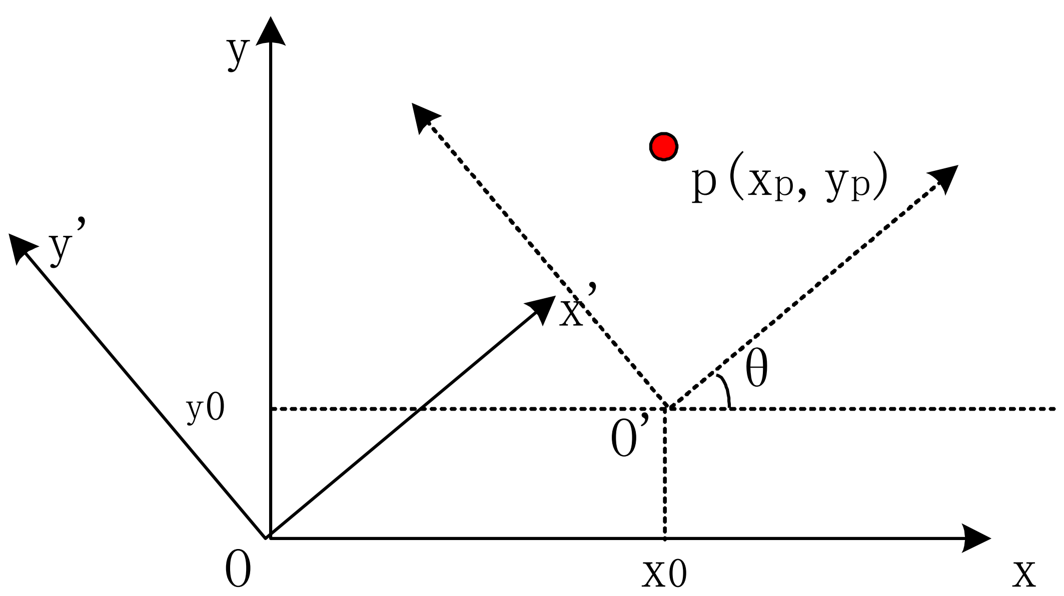
01 复合变换

坐标系之间的变换

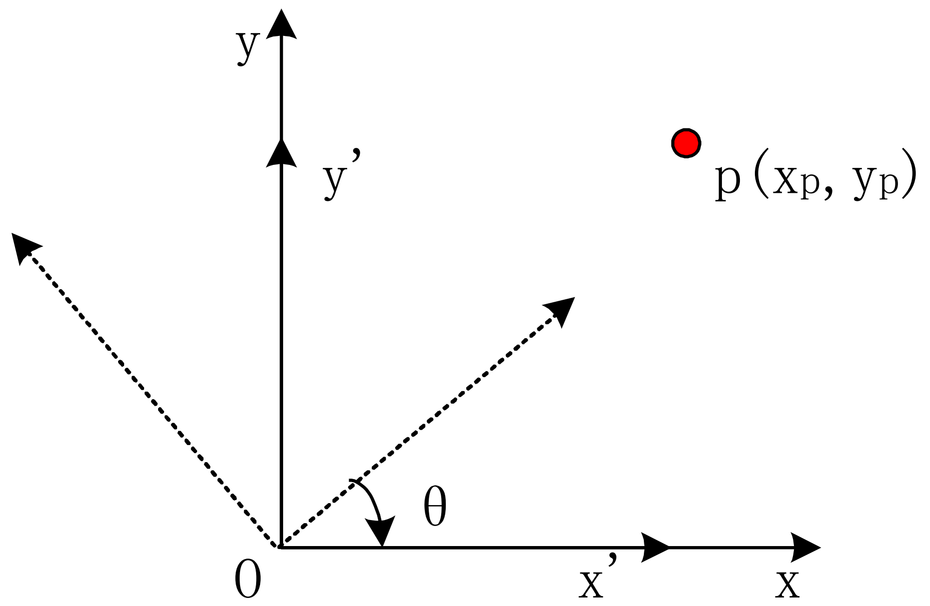


01 复合变换

坐标系之间的变换



(a)将x’y’坐标系的原点平移到xy坐标系的原点



(b)将x’轴旋转到x轴上

01

复合变换

坐标系之间的变换

$$p' = \begin{bmatrix} x'_p & y'_p & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & 1 \end{bmatrix} \cdot T$$

$$= p \cdot T = p \cdot T_t \cdot T_R$$

$$T = T_t \cdot T_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二维图形变换

- 基本几何变换
- 复合变换
- **变换的性质**
- 图形变换的计算

01 变换的性质

- 二维仿射变换是具有如下形式的二维坐标变换

$$\begin{cases} x' = ax + by + m \\ y' = cx + dy + n \end{cases}$$

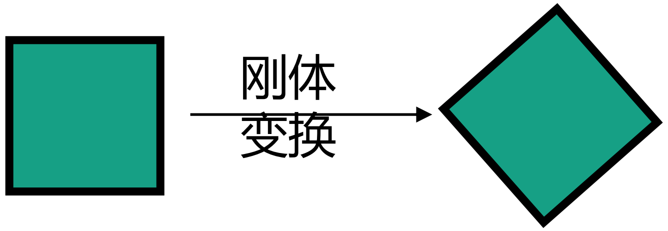
- 平移、比例、旋转、错切和反射等变换均是二维仿射变换的特例，反过来，任何常用的二维仿射变换总可以表示为这五种变换的复合

01 变换的性质

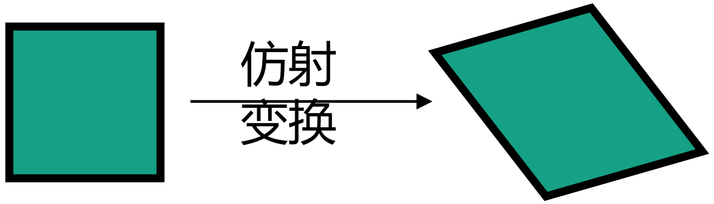
- 仅包含旋转、平移和反射的仿射变换维持角度和长度的不变性
- 比例变换可改变图形的大小和形状
- 错切变换引起图形角度关系的改变，甚至导致图形发生畸变

01 变换的性质

- 刚体变换
  - 物体的形状没有变化，位置和方位有变化
  - 可以分解为：平移和旋转的组合



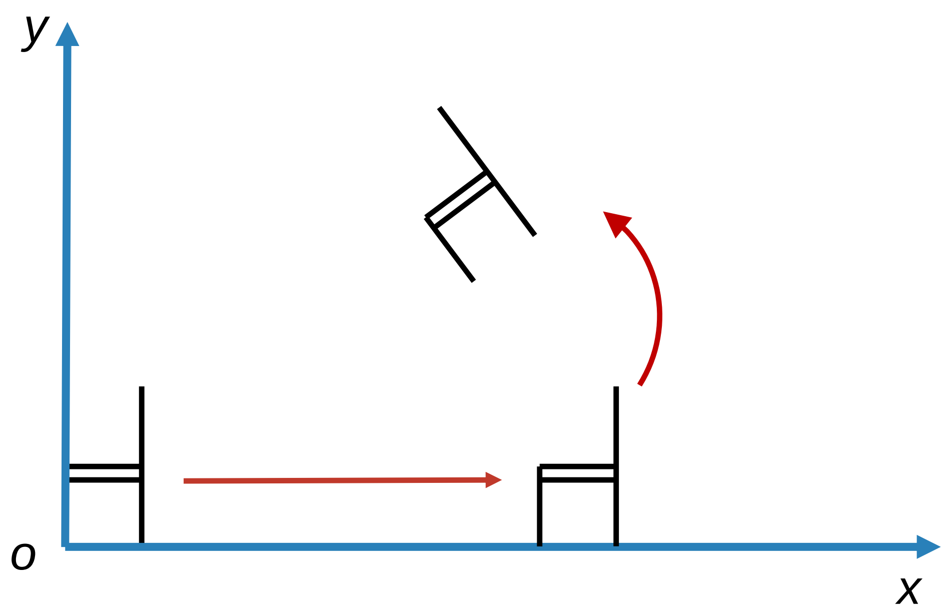
- 仿射变换
  - 可以分解为平移、旋转和放缩的组合
  - 保持点的共线性、长度的比例
  - 平行线



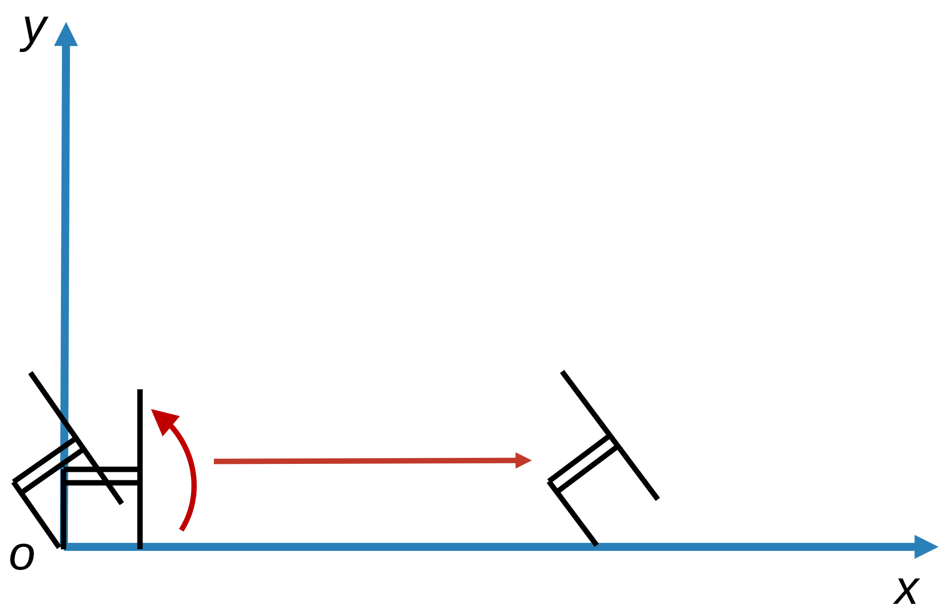
01

变换的性质

二维变换不具备交换性



先平移，再旋转



先旋转，再平移

二维图形变换

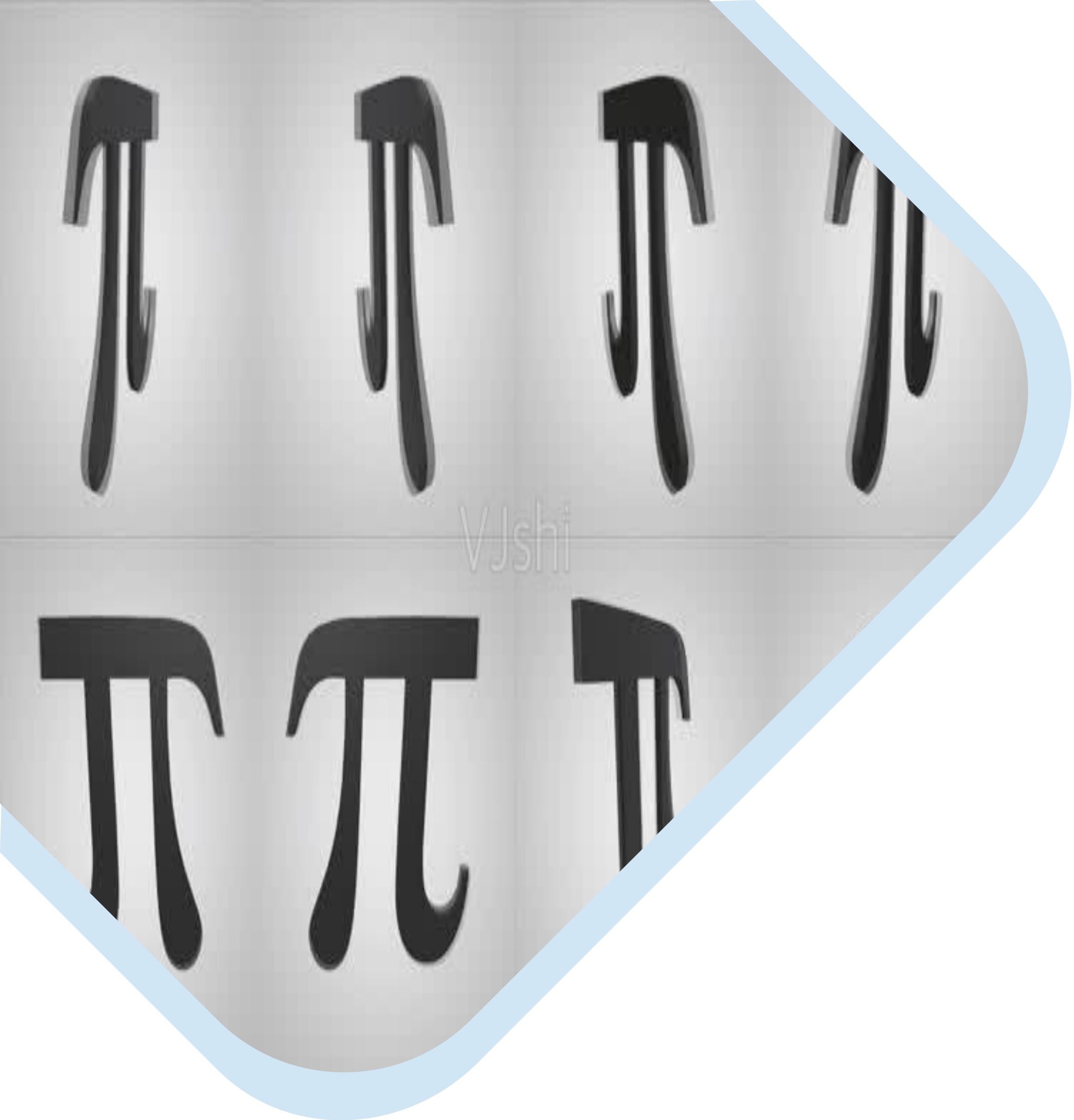
- 基本几何变换
- 复合变换
- 变换的性质
- **图形变换的计算**

01 图形变换的计算

二维图形变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n' & y_n' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & r \end{bmatrix}$$



PART 02

三维图形变换

02

三维图形变换

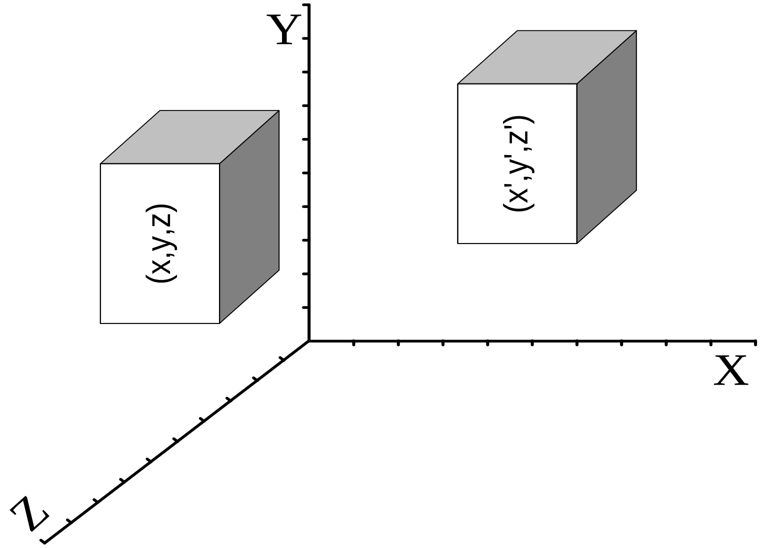
- 三维基本几何变换都是相对于坐标原点和坐标轴进行的几何变换。
- 假设三维形体变换前一点为p(x,y,z)，变换后为p'(x',y',z')

$$p' = [x' \quad y' \quad z' \quad 1] = p \cdot T_{3D} = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ h & i & j & r \\ \hline l & m & n & s \end{array}\right]$$

02 三维图形变换

平移

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{bmatrix}$$



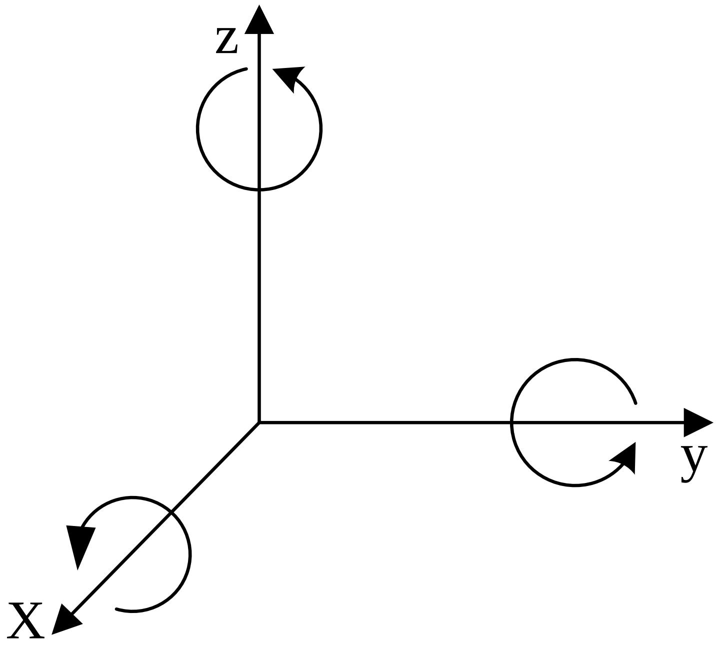
比例

$$T_s = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

旋转

绕Z轴旋转

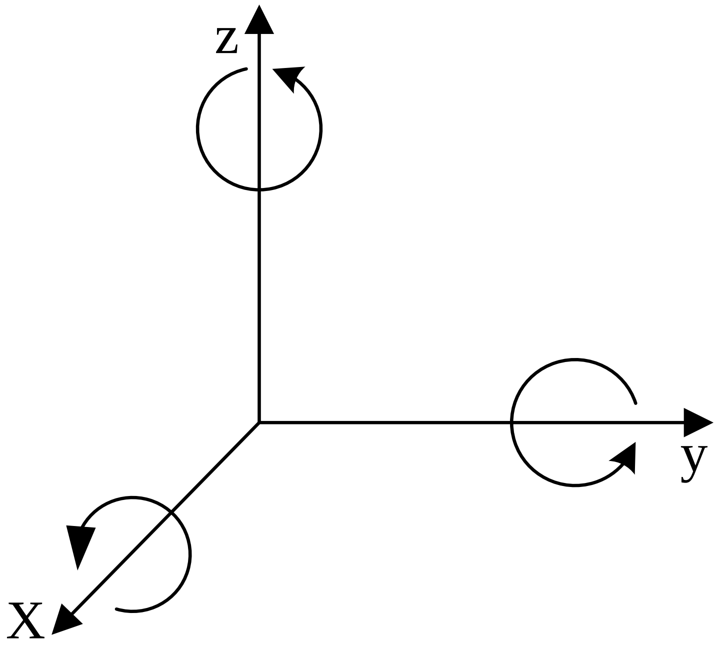
$$T_{RZ}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



旋转

绕X轴旋转

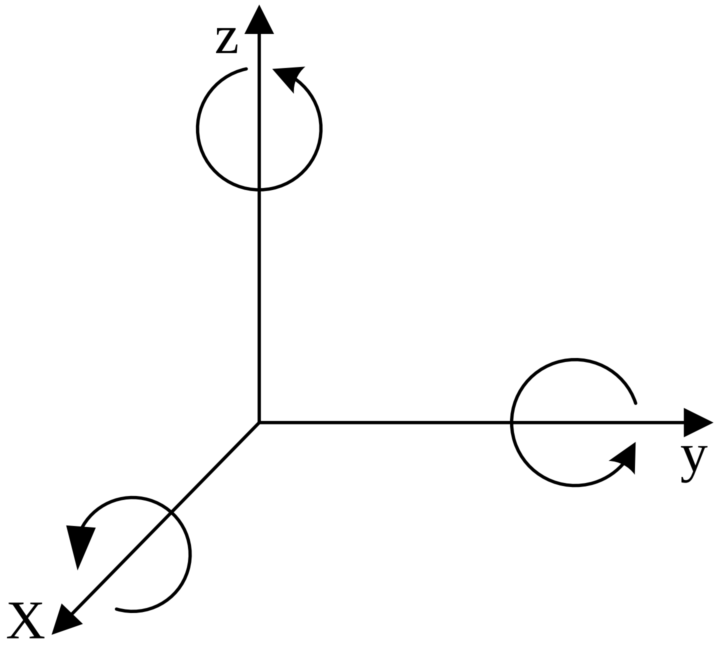
$$T_{RX}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



旋转

- 绕Y轴旋转

$$T_{RY} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



对称

$$T_{Fxy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad T_{Fxy}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

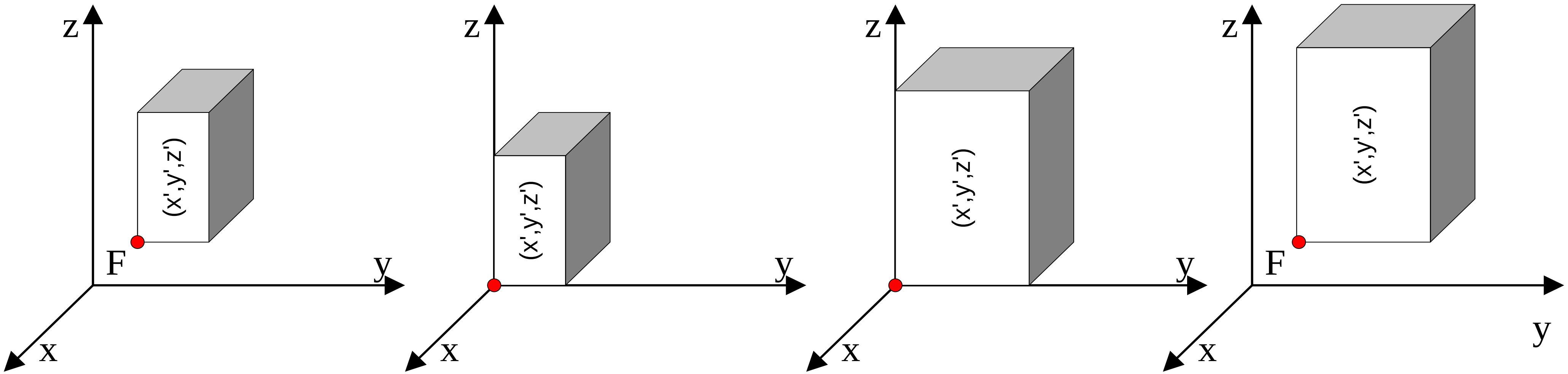
错切

$$T_{SH}=\begin{bmatrix}1 & b & c & 0\\ d & 1 & f & 0\\ g & h & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

02 三维图形变换

- 相对于参考点$F(x_f,y_f,z_f)$作比例、对称等变换
  - 将参考点F移至坐标原点；
  - 针对原点进行三维几何变换；
  - 进行反平移。

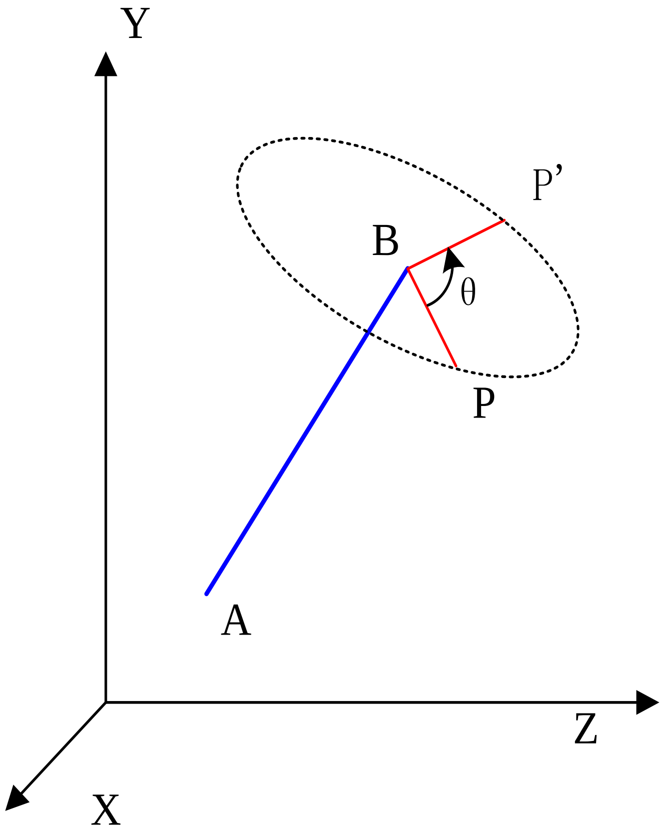
相对于F(xf,yf,zf)点进行比例变换



(a)原图 (b)移至坐标原点 (c)基本比例变换 (d)移回F点原来位置

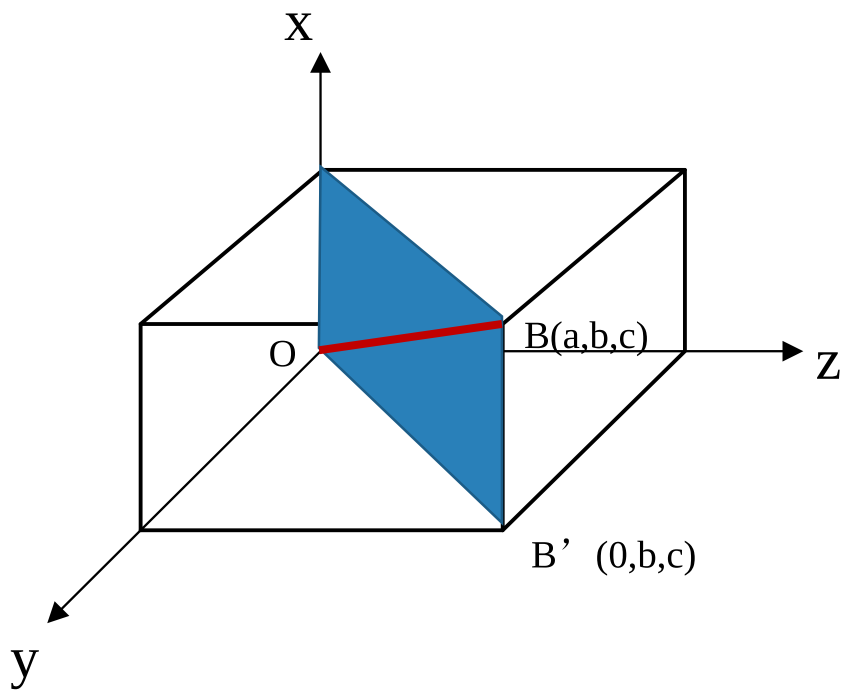
绕任意轴的旋转

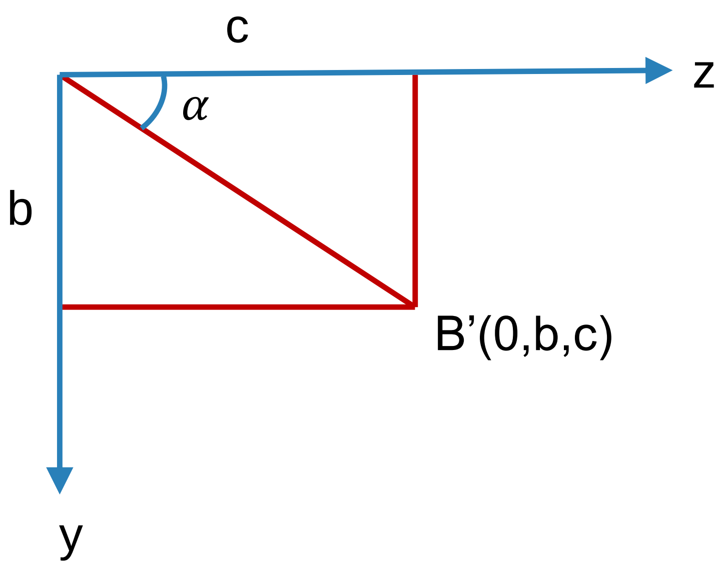
$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot T_{RAB}$$



02 三维图形变换

绕任意轴的旋转



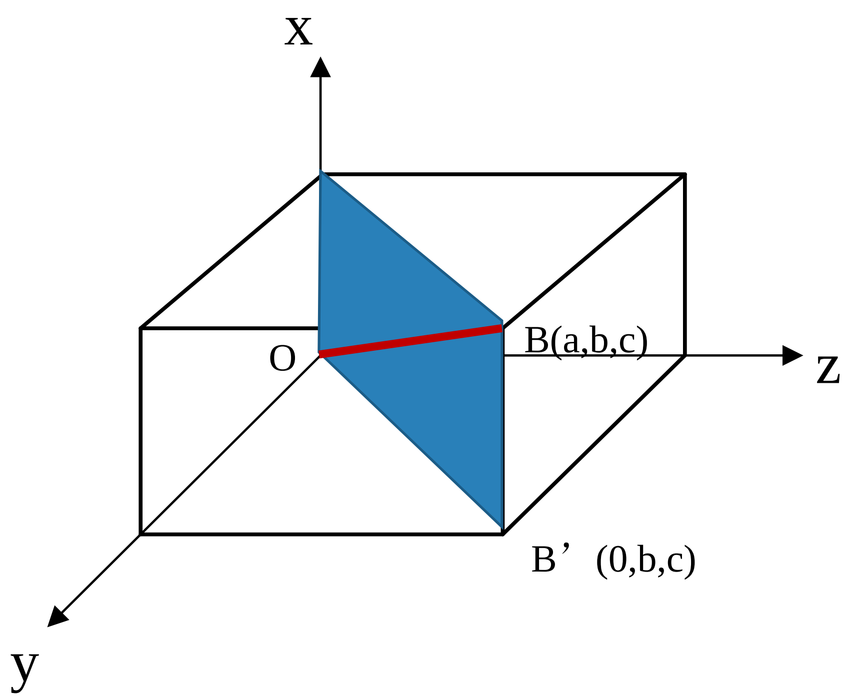


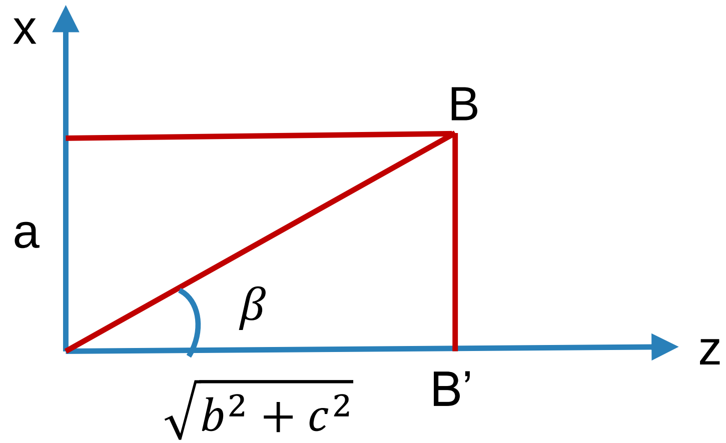
$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

02 三维图形变换

绕任意轴的旋转





$$cos\beta = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

绕任意轴的旋转

- 将坐标原点平移到A点

$$T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_A & -y_A & -z_A & 1 \end{bmatrix}$$

02

三维图形变换

绕任意轴的旋转

- 将坐标原点平移到A点
- 将O'BB'绕x'轴逆时针旋转α角，则O'B旋转到x'o'z'平面上

$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

02

三维图形变换

绕任意轴的旋转

- 将坐标原点平移到A点
- 将O'BB'绕x'轴逆时针旋转α角，则O'B旋转到x'o'z'平面上
- 将O'B绕y'轴顺时针旋转β角，则O'B旋转到z'轴上

$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & -\sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

02

三维图形变换

绕任意轴的旋转

- 将坐标原点平移到A点
- 将O'BB'绕x'轴逆时针旋转α角，则O'B旋转到x'o'z'平面上
- 将O'B绕y'轴顺时针旋转β角，则O'B旋转到z'轴上
- 绕AB轴的旋转此时转换为绕z轴的旋转；
- 最后，求T_{tA}，T_{Rx}，T_{Ry}的逆变换，回到AB原来的位置

$$T = T_A \cdot T_{Rx} \cdot T_{Ry} \cdot T_R \cdot T_{Ry}^{-1} \cdot T_{Rx}^{-1} \cdot T_A^{-1}$$

02 三维图形变换

- 针对任意方向轴的变换
  - 使任意方向轴的起点与坐标原点重合，此时进行平移变换
  - 使方向轴与某一坐标轴重合，此时需进行旋转变换，且旋转变换可能不止一次
  - 针对该坐标轴完成变换
  - 用逆旋转变换使方向轴回到其原始方向
  - 用逆平移变换使方向轴回到其原始位置。

PART 03

三维旋转

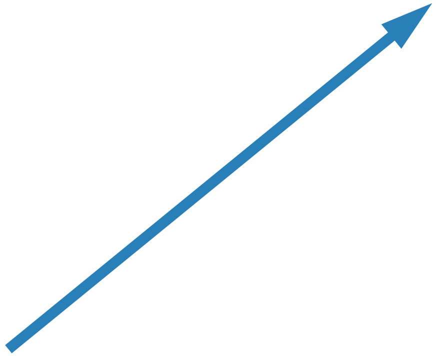
道生一，一生二、二生三、三生万物。

万物负阴而抱阳，冲气以为和。

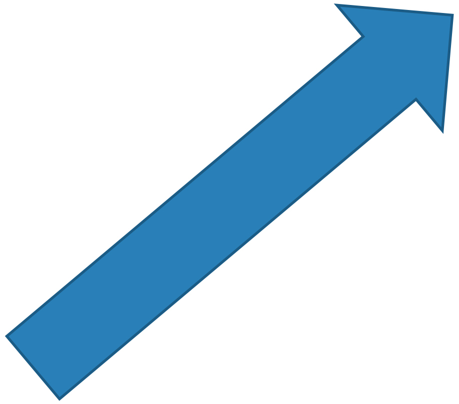
03 三维旋转

三维旋转

- 定向（Orientation）：描述三维中对象的方向
- 定向与方向（矢量）有所区别



矢量：没有厚度或尺寸



定向：沿方向可以翻滚

三维旋转

- 定向（Orientation）：描述三维中对象的方向
- 定向与方向（矢量）有所区别：方向用球坐标的2个角度参数指定，定向至少需要3个数字
- 通过已知的参考方向旋转得到，旋转量称为角位移（Angular Displacement）
- 飞行姿态（attitude）：指代对象定向

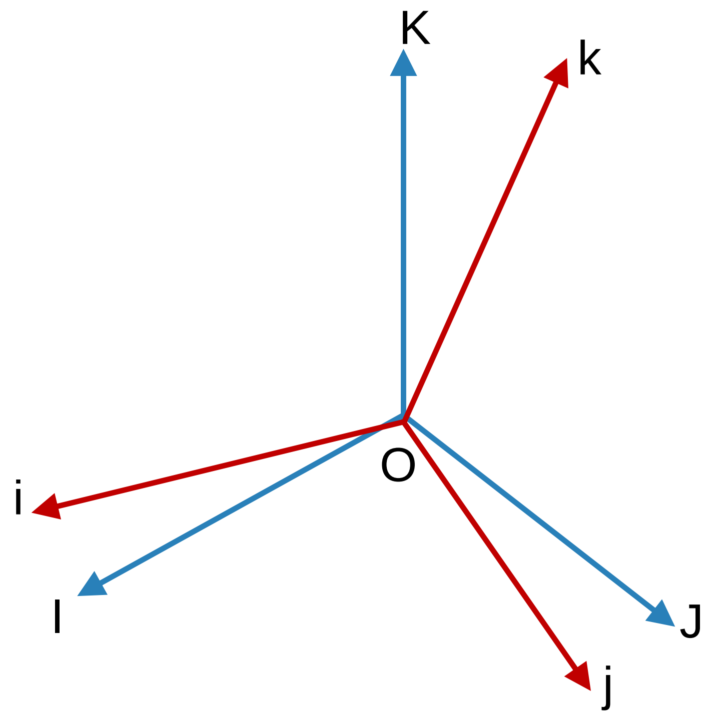
三维旋转

- 矩阵表示
- 轴角表示
- 欧拉角
- 四元数

03 矩阵表示

矩阵表示

- 使用3*3或者4*4的矩阵可以表示三维空间中的旋转
  - 定义一个约定的坐标系
  - 定义一个旋转矩阵

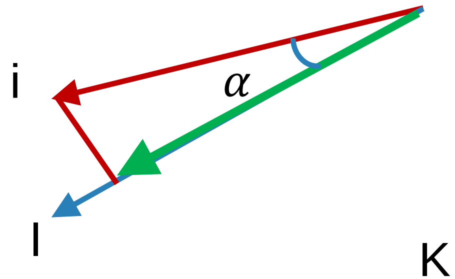


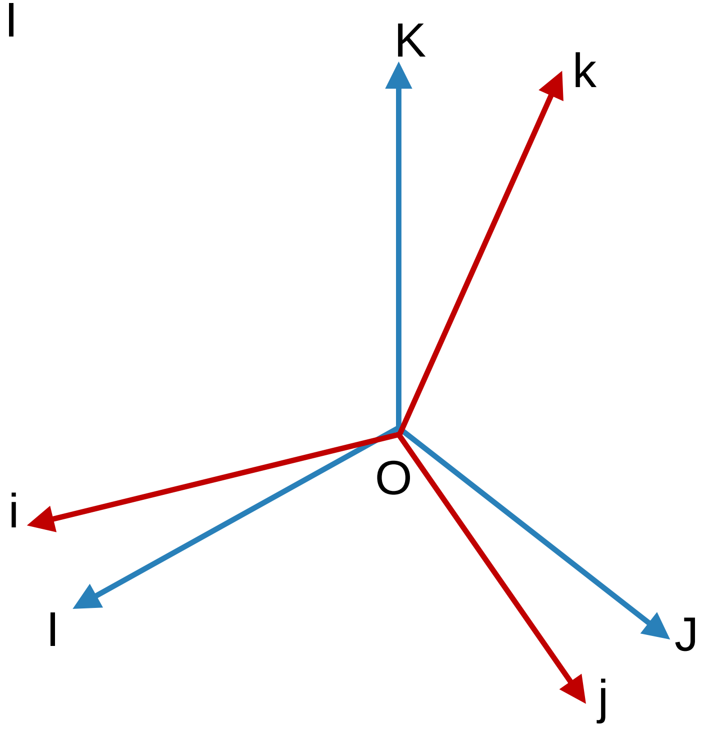
03 矩阵表示

方向余弦矩阵

- 向量i在向量I上的投影长度
- $i_x^G = \cos(I, i) = |I||i|\cos(I, i) = I \cdot i$
- $i^G = \{I \cdot i,\ \mathrm{J} \cdot i,\ K \cdot i\}$

$$[i^G \quad j^G \quad k^G] = \begin{bmatrix} I \cdot i & J \cdot i & K \cdot i \\ I \cdot j & J \cdot j & K \cdot j \\ I \cdot k & J \cdot k & K \cdot k \end{bmatrix}$$





03 矩阵表示

- 优点
  - 图形API使用的格式
  - 多个角位移连接方便
  - 矩阵求逆（反向角位移）：旋转矩阵是正交矩阵，求逆只要转置矩阵即可

03 矩阵表示

缺点

- 占用更多的内存，需要9个数字定义
- 使用不方便，不直观，不是人类自然而然考虑定向的方式
- 矩阵可能出现格式不正确，矩阵虽然使用9个数字，但只有3个是必须的，其余数据满足6个约束（行必须是单位矢量，且相互垂直）
  - 数据采集时的错误
  - 浮点舍入时的错误

03 三维旋转

三维旋转

- 矩阵表示
- **轴角表示**
- 欧拉角
- 四元数

03 轴角表示

- 欧拉旋转定理（Euler’s Rotation Theorem）:任何三维角位移都可以通过围绕一个选定的轴进行一次旋转来完成
- 给定两个方向R1和R2，存在一个轴$\vec{\boldsymbol{n}}$，使得只要通过绕$\vec{\boldsymbol{n}}$进行一次旋转就可以从R1到R2
- 可以证明，这个旋转轴是唯一的

03 轴角表示

- 定义三维空间的一个旋转轴（向量）和旋转角
- 旋转轴称为欧拉轴(Euler axis)，旋转向量称为欧拉向量(Euler vector)
- 旋转向量取单位向量可以减少存储的数据，其中2个参数存储向量，1个参数存储旋转角度

03 轴角表示

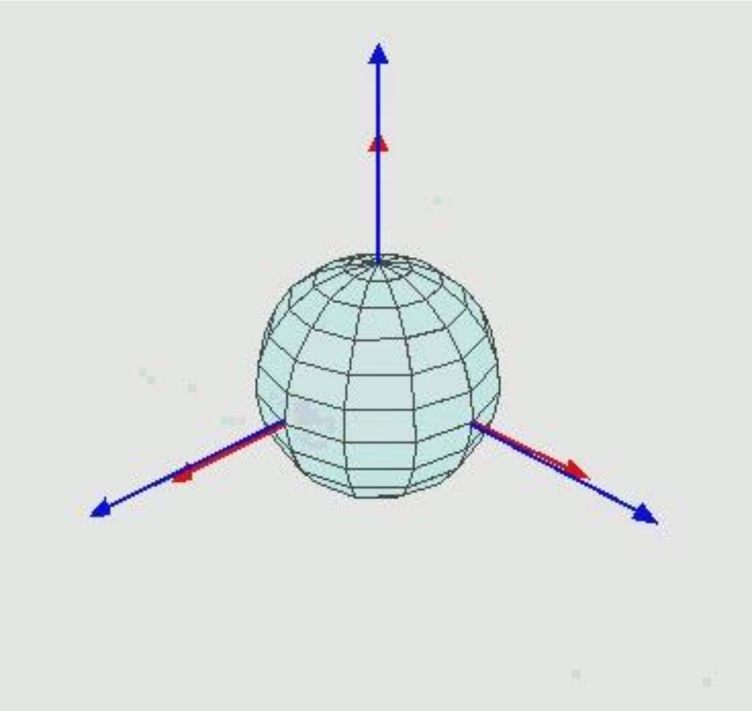
- 优缺点
  - 旋转轴可以是任意向量，定义简单
  - 旋转其实只需要知道一个向量和一个角度，一共4个值的信息
  - 乘法操作时会增加计算量，造成了空间和时间上的一些浪费

三维旋转定义

- 矩阵表示
- 轴角表示
- **欧拉角**
- 四元数

03 欧拉角

- 欧拉角是指在三维空间通过指定与三个旋转轴相关联的三个角度来表示任意方向的方法



03

欧拉角

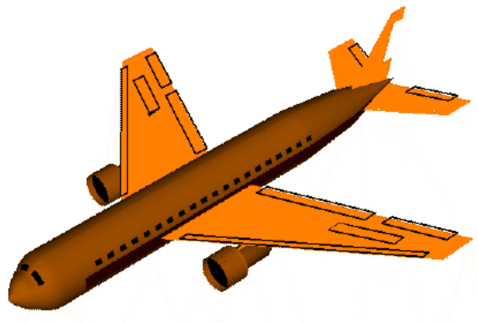
- 欧拉角包括3个旋转，根据这3个旋转来指定一个刚体的朝向
- 三个角度的旋转顺序必须事先确定
- 欧拉角(Euler-angles)方法
  - （x，y，x），（x，z，x），（y，x，y），（y，z，y），（z，x，z），（z，y，z）
  - 绕a轴旋转某角度后，绕新生成的b轴旋转一个角度，最后绕两次旋转以后的a轴再旋转一个角度，以此表示最终的方向

03 欧拉角

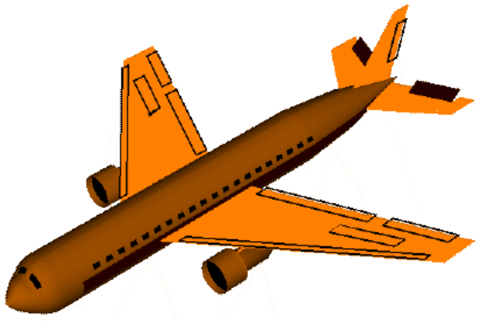
- 欧拉角包括3个旋转，根据这3个旋转来指定一个刚体的朝向
- 三个角度的旋转顺序必须事先确定
- 泰特布莱恩角(Tait-Bryan-angles)方法
  - （x，y，z），（x，z，y），（y，x，z），（y，z，x），（z，x，y），（z，y，x）
  - 遍历笛卡尔坐标系的三轴

03 欧拉角

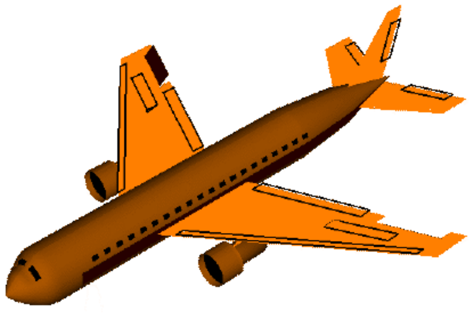
- 最常见的是Yaw-Pitch-Roll角，3个旋转分别绕y轴，x轴和z轴，分别称为航向角（偏航角）Yaw，俯仰角Pitch和滚动角Roll



偏航角Yaw



俯仰角Pitch



滚动角Roll

03 欧拉角

- 优点
  - 三个角度组成，直观，容易理解
  - 使用尽可能最小的表示（3个数字描述）
  - 任何一组3个数字都是有效的

03 欧拉角

- 缺点
  - 欧拉角是不可传递的，旋转的顺序影响旋转的结果，不同的应用又可能使用不同的旋转顺序，旋转顺序无法统一
  - 定向的表示不唯一
    - Yaw-Pitch-Roll：{50，0，0}和{410，0，0}
    - Yaw-Pitch-Roll：{180，45，180}和{-135，0，0}

03 欧拉角

□ 缺点

- 解决方案，使用规范的欧拉角
  - Yaw：(-180°,180°]
  - Pitch：[-90°,90°]
  - Roll：(-180°,180°]

03 欧拉角

- 缺点
  - 插值
    - 用于角色动画和摄像机的控制
    - 希望在两个定向之间进行插值

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$$

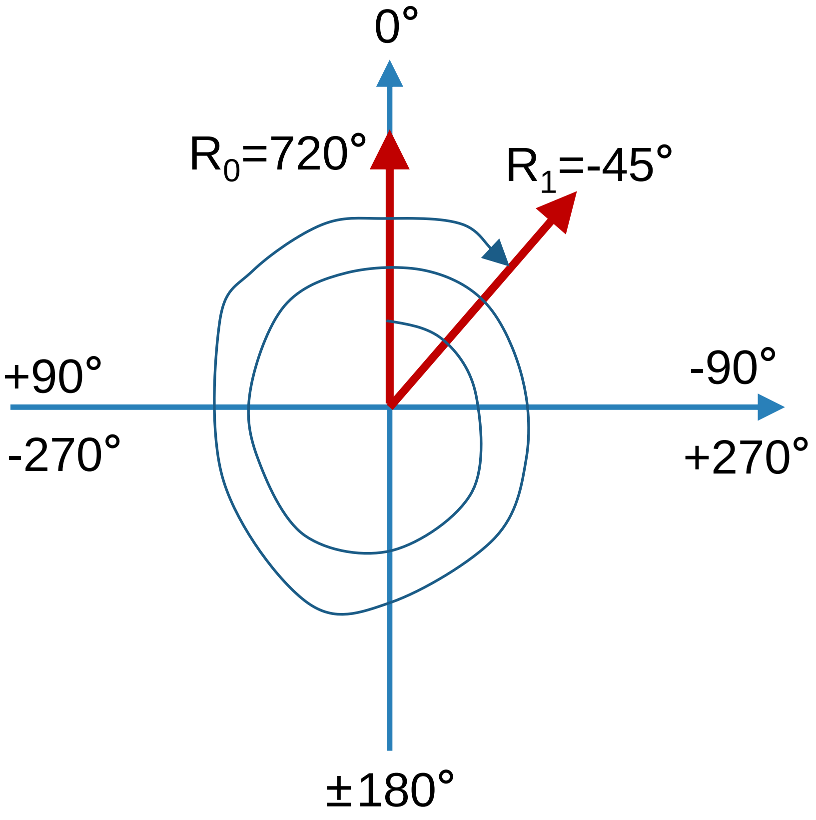
$$\theta_t = \theta_0 + t\Delta\theta$$

    - 将标准的线性插值公式应用于每个角度

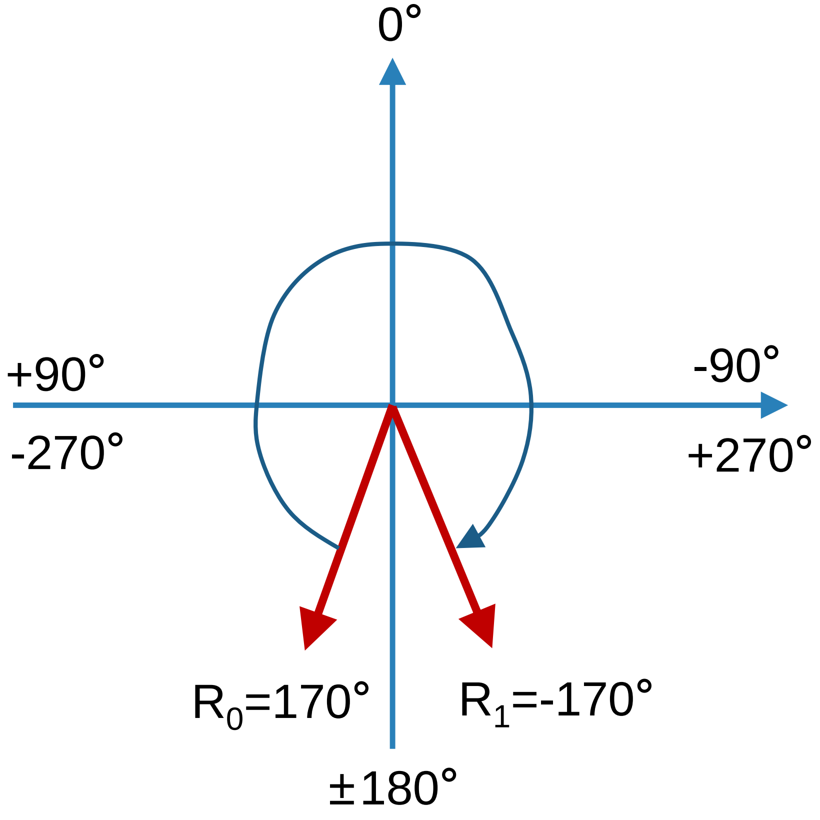
03 欧拉角

□ 缺点

■ 插值问题



没有规范化的角度插值



规范化的角度插值

03 欧拉角

缺点

- 插值问题的解决：对角度差进行限制

$$wrapPi(x) = x - 360 \times \lfloor (x + 180)/360 \rfloor$$

$$\Delta\theta = wrapPi(\theta_1 - \theta_0)$$

$$\theta_t = \theta_0 + t\Delta\theta$$

03 欧拉角

缺点

- 可能造成万向节死锁（Gimbal Lock）

03 欧拉角

万向节

陕西博物院十八件镇馆之宝之一：葡萄花鸟纹银香囊

03 欧拉角

- 万向节死锁
  - https://v.qq.com/x/cover/e055516g79w/e055516g79w.html

03

欧拉角

03 欧拉角

- 万向节死锁
  - 万向节死锁的根源在于欧拉角的定义方式，定向的参数空间具有不连续性
  - 万向节死锁的结果，会导致旋转不自然：定向的微小变换可能导致各个角度很大的变化，插值时会产生怪异的路径
  - 要规避万向节死锁，限制旋转的角度

03 三维旋转

□ 三维旋转定义

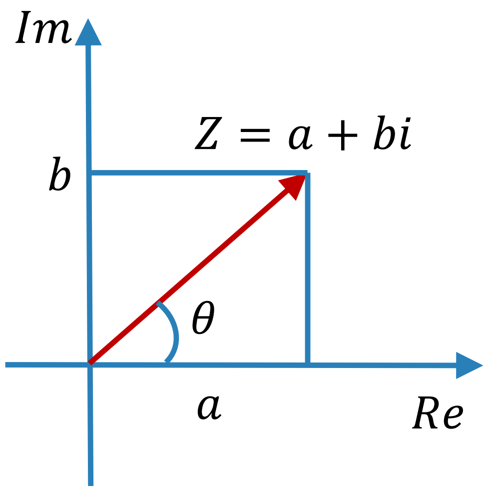
- 矩阵表示
- 轴角表示
- 欧拉角
- **四元数**

03 四元数

复数与旋转

复数表示

$$\boldsymbol{Z = a + bi} \qquad (\boldsymbol{i^2 = -1})$$



复数的乘法

$$\boldsymbol{Z_1 Z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i}$$

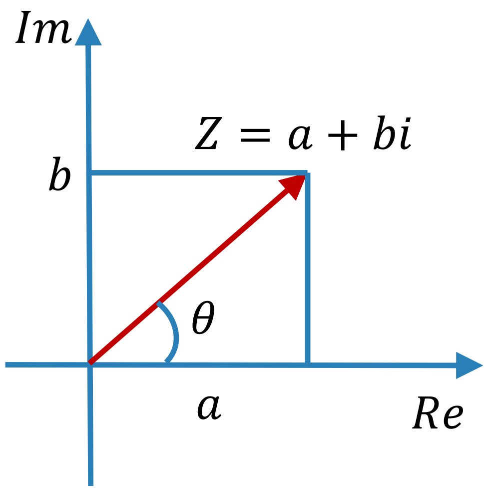
$$\boldsymbol{= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}$$

03 四元数

复数与旋转

复数表示

$$Z = a + bi \qquad (i^2 = -1)$$



复数的乘法

$$Z_1 Z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

03 四元数

复数与旋转

- 如果$\sqrt{a^2+b^2}=1$

$$Z=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$Z=cos\theta+isin\theta$$

- 二维旋转表示

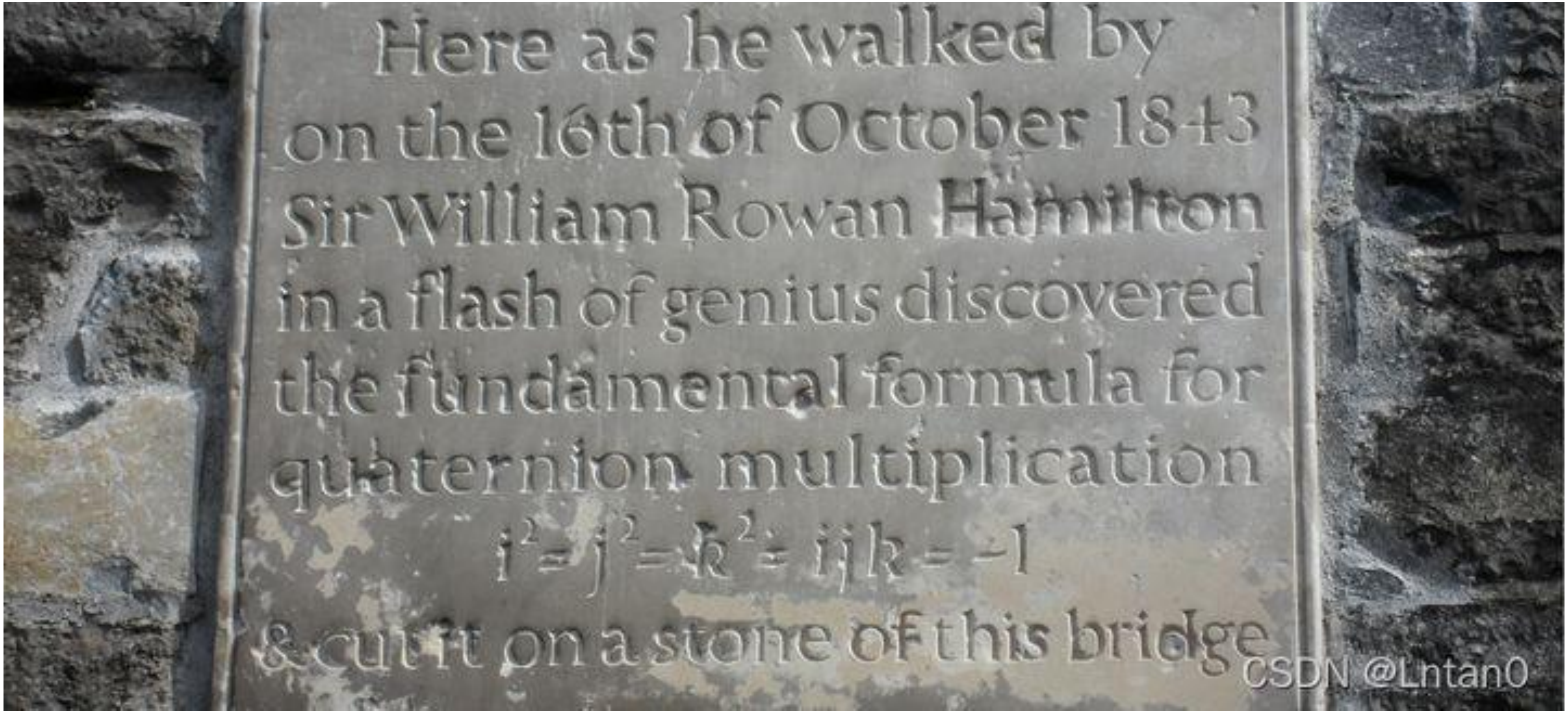
$$V'=ZV=(cos\theta+isin\theta)V$$

03 四元数

四元数

- 英国/爱尔兰数学家、物理学家、力学家William Rowan Hamilton (1805-1865)于1843年发明的一个纯粹数学概念
- 我们能够对三元数组（triplet，可以理解为三维向量）做乘法运算么?
  - 运算产生的结果也要是三维向量
  - 存在一个元运算，任何三维向量进行元运算的结果就是其本身
  - 对于任何一个运算，都存在一个逆运算，这两个运算的积是元运算
  - 运算满足结合律

四元数


Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
i² = j² = k² = ijk = −1
& cut it on a stone of this bridge
CSDN @Lntan0

03 四元数

四元数的定义

- 一个有固定点的刚体绕通过该点的某个轴转过特定的角度可以达到任何姿态
- 旋转轴

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \cos\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{i} + \cos\beta\cdot\boldsymbol{j} + \cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$$

- 定义四元数

$$\boldsymbol{q} = \cos\theta/2 + \sin\theta/2\cdot\vec{\boldsymbol{n}}$$

03 四元数

□ 四元数的定义

- 四元数的表示

$$\boldsymbol{q} = \cos\theta/2 + \sin\theta/2\cos\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{i} + \sin\theta/2\cos\beta\cdot\boldsymbol{j} + \sin\theta/2\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj} + \boldsymbol{zk}$$

- $\boldsymbol{w}$： 标量部分
- $\boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj} + \boldsymbol{zk}$：向量部分

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{w}, \vec{\boldsymbol{v}}]$$

四元数的运算

- 四元数的负数

$$-\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{z}\boldsymbol{k}$$

$$-\boldsymbol{q} = -\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}$$

$$-\boldsymbol{q} = \cos\frac{360° + \theta}{2} + \sin\frac{360° + \theta}{2}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}$$

- 任何一个角位移都可以用两个四元数描述

四元数的运算

- 四元数的加法

$$\boldsymbol{q1} + \boldsymbol{q2} = (\boldsymbol{w1} + \boldsymbol{w2}) + (\boldsymbol{x1} + \boldsymbol{x2})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{y1} + \boldsymbol{y2})\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{z1} + \boldsymbol{z2})\boldsymbol{k}$$

- 四元数的大小

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{\boldsymbol{w}^2 + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2}$$

- 单位四元数

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\boldsymbol{2}} + \left(\sin\frac{\theta}{2}\|\vec{\boldsymbol{n}}\|\right)^{\boldsymbol{2}}} = 1$$

03 四元数

□ 四元数的运算

■ 四元数的共轭

$$q^* = (w + ix + jy + kz)^*$$
$$= (w - ix - jy - kz)$$

$$q^* = [w, \vec{v}]^* = [w, -\vec{v}]$$

■ 四元数的逆

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$$

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

对于单位四元数$q^*=q^{-1}$

03 四元数

四元数的运算

- 四元数的乘法

$$\begin{bmatrix} w1 & -x1 & -y1 & -z1 \\ x1 & w1 & -z1 & y1 \\ y1 & z1 & w1 & -x1 \\ z1 & -y1 & x1 & w1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w2 \\ x2 \\ y2 \\ z2 \end{bmatrix}$$

$$q1q2 = \left(w1, \overrightarrow{v1}\right)\left(w2, \overrightarrow{v2}\right)$$

$$= \left(w1w2 - \overrightarrow{v1}\,\overrightarrow{v2}, \overrightarrow{v1} \times \overrightarrow{v2} + w1\overrightarrow{v2} + w2\overrightarrow{v1}\right)$$

$$= (w1w2 - x1x2 - y1y2 - z1z2) +$$

$$(w1x2 + x1w2 + y1z2 - z1y2)i +$$

$$(w1y2 - x1z2 + y1w2 + z1x2)j +$$

$$(w1z2 + x1y2 - y1x2 + z1w2)k$$

四元数的运算

四元数的性质

$$(q1q2)^* = q2^* q1^*$$

$$(q1q2)^{-1} = q2^{-1} \cdot q1^{-1}$$

结合律

$$(q1 + q2) + q3 = q1 + (q2 + q3)$$

$$(q1q2)\,q3 = q1\,(q2q3)$$

不符合交换律

$$q1q2 \neq q2q1$$

03 四元数

四元数表示旋转

- 给定一个点p，再给定一个旋转的单位四元素q[qw, qx, qy, qz]，让点p旋转

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{0}, (\boldsymbol{px}, \boldsymbol{py}, \boldsymbol{pz}))$$

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{qPq^{-1}} = \boldsymbol{qPq^{*}}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qw^2 + qx^2 - qy^2 - qz^2 & 2qxqy - 2qwqz & 2qxqz + 2qwqy \\ 0 & 2qxqy + 2qwqz & qw^2 - qx^2 + qy^2 - qz^2 & 2qyqz - 2qwqx \\ 0 & 2qxqz - 2qwqy & 2qyqz + 2qwqx & qw^2 - qx^2 - qy^2 + qz^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ px \\ py \\ pz \end{bmatrix}$$

四元数表示旋转

- 三次旋转可以变为

$$V' = q_3(q_2(q_1 V q_1{}^{-1})q_2{}^{-1})q_3{}^{-1}$$

$$V' = q_3 q_2 q_1 V q_1{}^{-1} q_2{}^{-1} q_3{}^{-1}$$

$$V' = (q_3 q_2 q_1) V q_1{}^{*} q_2{}^{*} q_3{}^{*} = (q_3 q_2 q_1) V (q_3 q_2 q_1)^{*}$$

03 四元数

□ 四元数表示旋转

- 例：把点P(1, 0, 1)绕旋转轴u = (0, 1, 0)旋转90°，求旋转后的顶点坐标q

$$\boldsymbol{p} = [\mathbf{0}, (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})]$$

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{cos}45°, \boldsymbol{sin}45°(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})]$$

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}^{*} = [\boldsymbol{cos}45°, \boldsymbol{sin}45°(\mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})]$$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{qpq}^{-1}$$

四元数表示旋转

- 把点P(1, 0, 1)绕旋转轴u = (0, 1, 0)旋转90°，求旋转后的顶点坐标q

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & qw^2 + qx^2 - qy^2 - qz^2 & 2qxqy - 2qwqz & 2qxqz + 2qwqy \\ 0 & 2qxqy + 2qwqz & qw^2 - qx^2 + qy^2 - qz^2 & 2qyqz - 2qwqx \\ 0 & 2qxqz - 2qwqy & 2qyqz + 2qwqx & qw^2 - qx^2 - qy^2 + qz^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ px \\ py \\ pz \end{bmatrix}$$

四元数插值

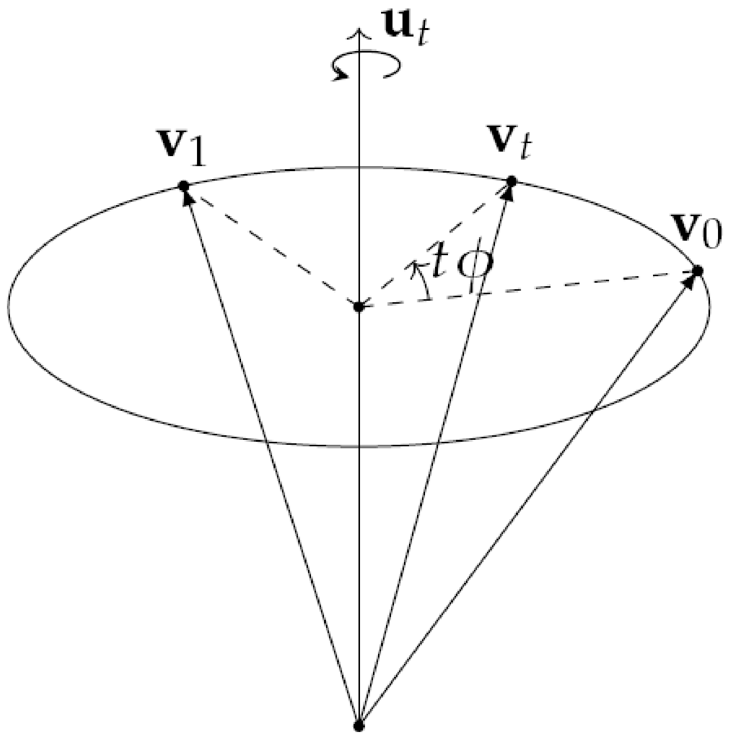
- 假设有两个旋转变换$q0$和$q1$，希望找出一些中间变换qt，让初始变换$q0$能够平滑地过渡到最终变换$q1$
- $t \in [0, 1]$

$$\Delta q q0 = q1$$

$$\Delta q q0 q0^{-1} = q1 q0^{-1}$$

$$\Delta q = q1 q0^{-1} = q1 q0^{*}$$

$$qt = (q1 q0^{*})^{t}\, q0$$



四元数插值

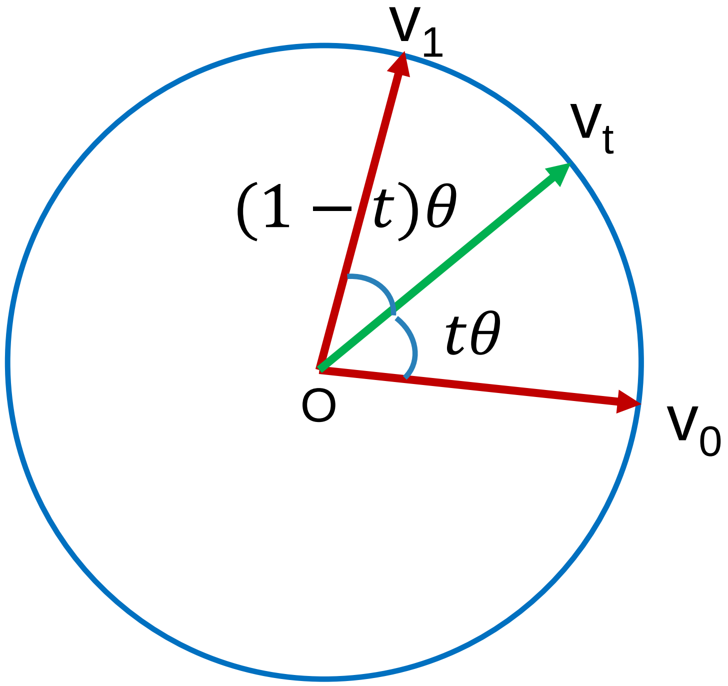
- 球面线性插值(Spherical Linear Interpolation，Slerp)

$$\boldsymbol{Vt} = \boldsymbol{\alpha V0} + \boldsymbol{\beta V1}$$

$$\boldsymbol{V0} \cdot \boldsymbol{Vt} = \boldsymbol{V0} \cdot (\boldsymbol{\alpha V0} + \boldsymbol{\beta V1})$$

$$= \boldsymbol{\alpha V0} \cdot \boldsymbol{V0} + \boldsymbol{\beta V0} \cdot \boldsymbol{V1}$$

$$\boldsymbol{cos(t\theta)} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta cos(\theta)}$$



四元数插值

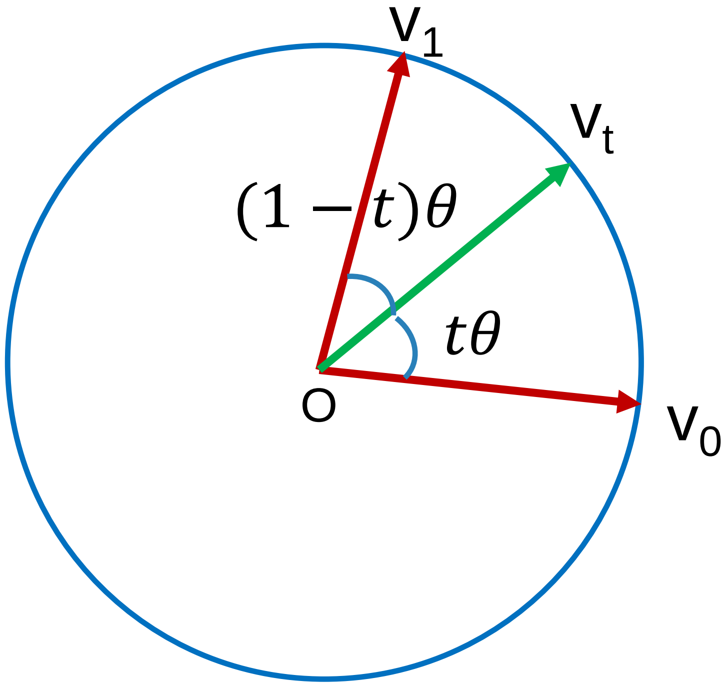
- 球面线性插值(Spherical Linear Interpolation，Slerp)

$$\boldsymbol{Vt = \alpha V0 + \beta V1}$$

$$\boldsymbol{V1 \cdot Vt = V1 \cdot (\alpha V0 + \beta V1)}$$

$$\boldsymbol{= \alpha V1 \cdot V0 + \beta V1 \cdot V1}$$

$$\boldsymbol{cos((1-t)\theta) = \alpha cos(\theta) + \beta}$$



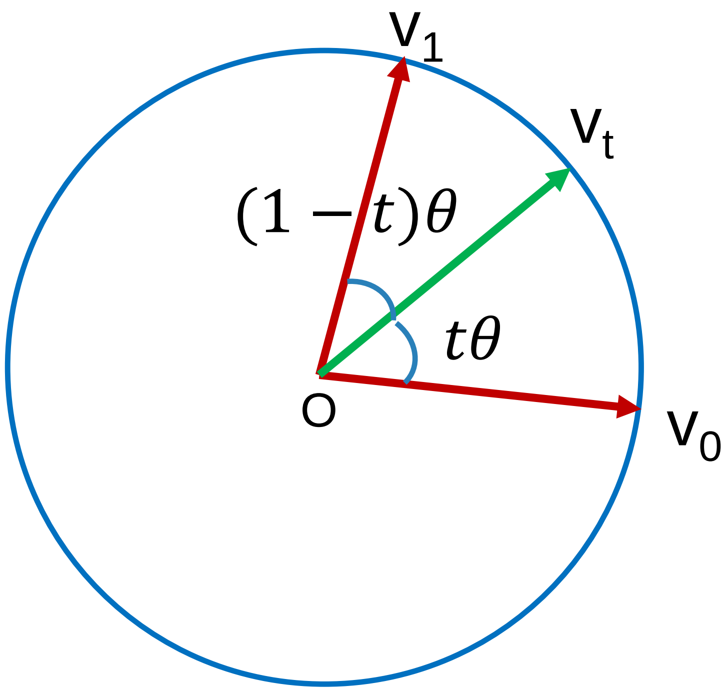
□ 四元数插值

■ 球面线性插值(Spherical Linear Interpolation，Slerp)

$$\begin{cases} \cos(t\theta) = \alpha + \beta\cos(\theta) \\ \cos((1-t)\theta) = \alpha\cos(\theta) + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} \\ \beta = \dfrac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} \end{cases}$$

$$Vt = \alpha V0 + \beta V1$$



四元数插值

- 球面线性插值(Spherical Linear Interpolation，Slerp)

$$qt = Slerp(q0, q1, t)$$

$$= \frac{sin((1-t)\theta)}{sin\theta} q0 + \frac{sin(t\theta)}{sin\theta} q1$$

03

四元数

- 优点
  - 存储空间小，计算效率高
  - 四元旋转不存在万向节锁问题
- 缺点
  - 四元数的数字表示不直观
  - 单个四元数不能表示在任何方向上超过180度的旋转

03

四元数

欧拉角表示到四元数

- 给定一个欧拉旋转(α,β,γ)（即分别绕x轴、y轴和z轴旋转X、Y、Z度）对应的四元数为

$$q = w + ix + jy + kz$$

$$x = sin(\beta/2)sin(\gamma/2)cos(\alpha/2) + cos(\beta/2)cos(\gamma/2)sin(\alpha/2)$$

$$y = sin(\beta/2)cos(\gamma/2)cos(\alpha/2) + cos(\beta/2)sin(\gamma/2)sin(\alpha/2)$$

$$z = cos(\beta/2)sin(\gamma/2)cos(\alpha/2) - sin(\beta/2)cos(\gamma/2)sin(\alpha/2)$$

$$w = cos(\beta/2)cos(\gamma/2)cos(\alpha/2) - sin(\beta/2)sin(\gamma/2)sin(\alpha/2)$$

□ 四元数到欧拉角表示

- 给定一个四元数，对应的欧拉旋转$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$（即分别绕x轴、y轴和z轴旋转$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$度）为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\arctan2\left(\frac{2(wx+yz)}{1-2(x^2+y^2)}\right)\\\arcsin(2(wy-zx))\\\arctan2\left(\frac{2(wz+xy)}{1-2(y^2+z^2)}\right)\end{bmatrix}$$

PART 04

三维投影变换

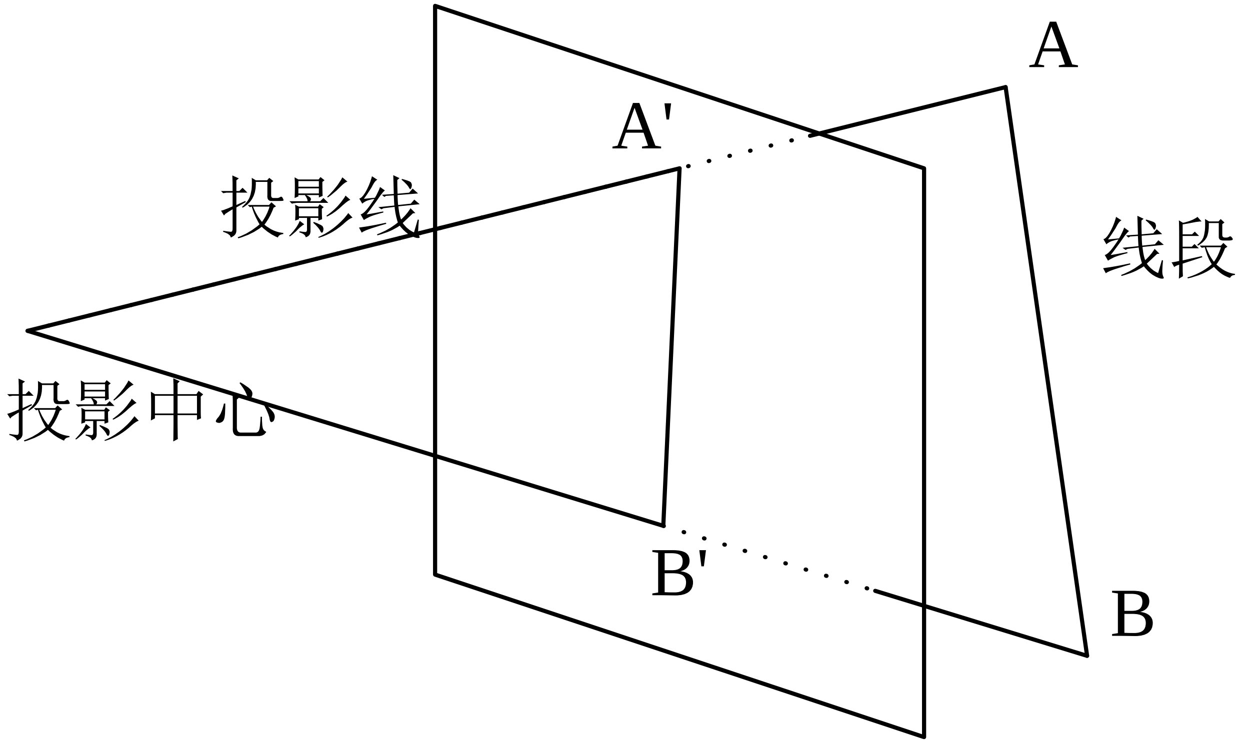
04

三维投影

- 投影变换就是把三维立体（或物体）投射到投影面上得到二维平面图形的过程
- 平面几何投影主要指平行投影、透视投影以及通过这些投影变换而得到的三维立体的常用平面图形：三视图、轴测图

04 三维投影

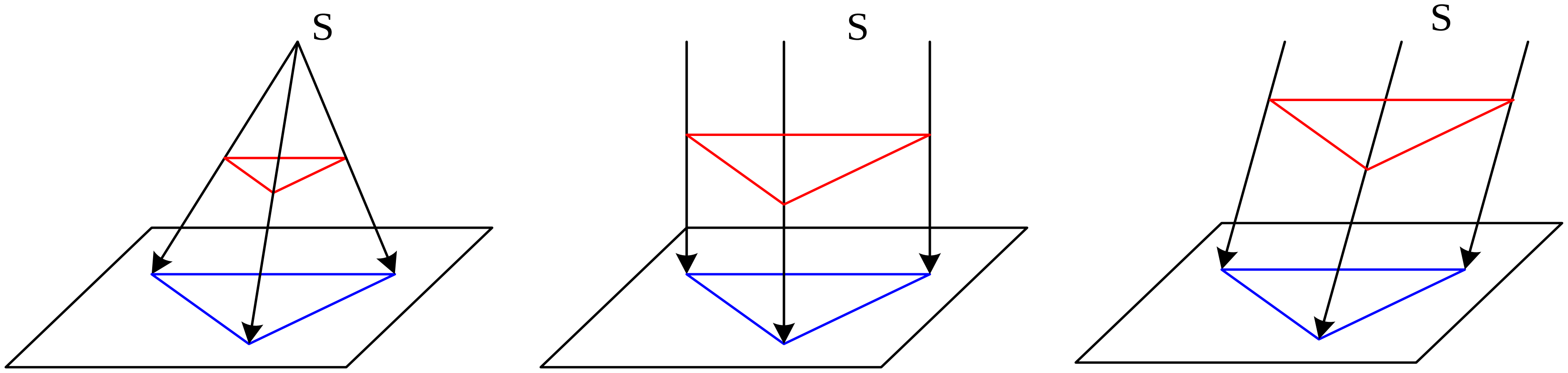
- 投影三要素：投影中心、投影面、投影线



04 三维投影

平面几何投影的分类

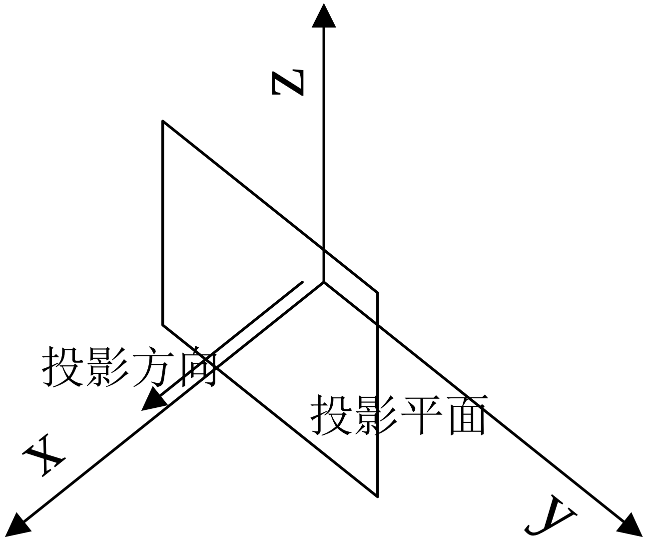
- 透视投影的投影中心到投影面之间的距离是有限的
- 平行投影的投影中心到投影面之间的距离是无限的
- 平行投影可分成两类：正投影和斜投影



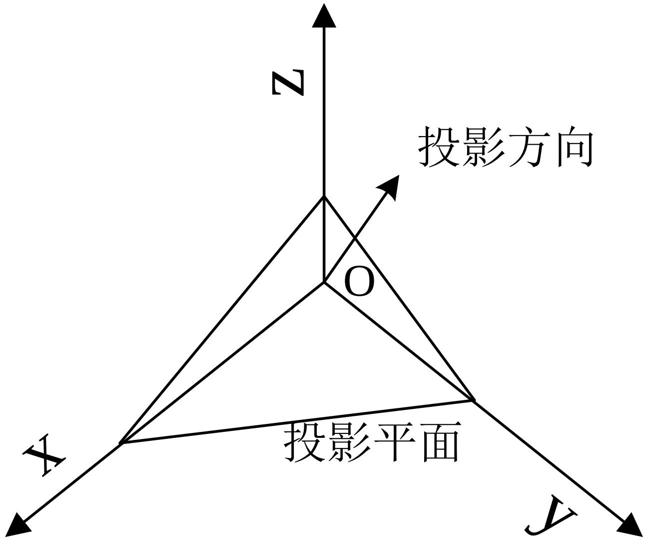
(a)透视投影　(b)正投影　(c)斜投影

04 三维投影

- 正投影可分为三视图和正轴测
  - 三视图：投影面与某一坐标轴垂直
  - 正轴测图：投影面与三个坐标轴均相交



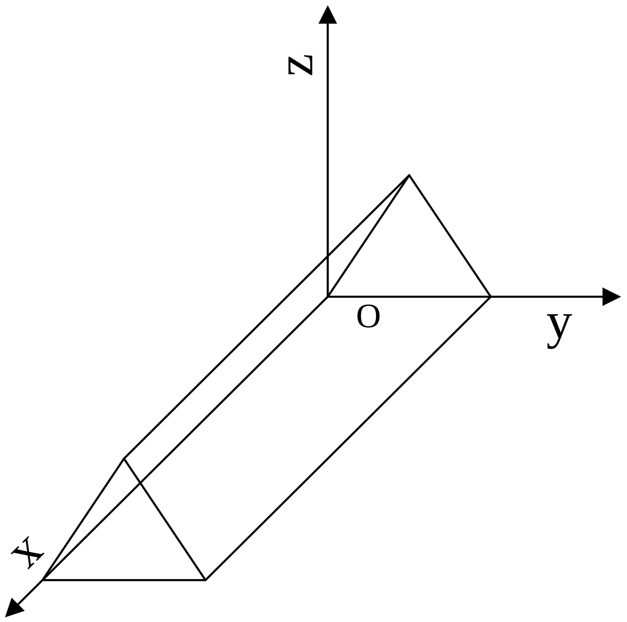
(a)三视图

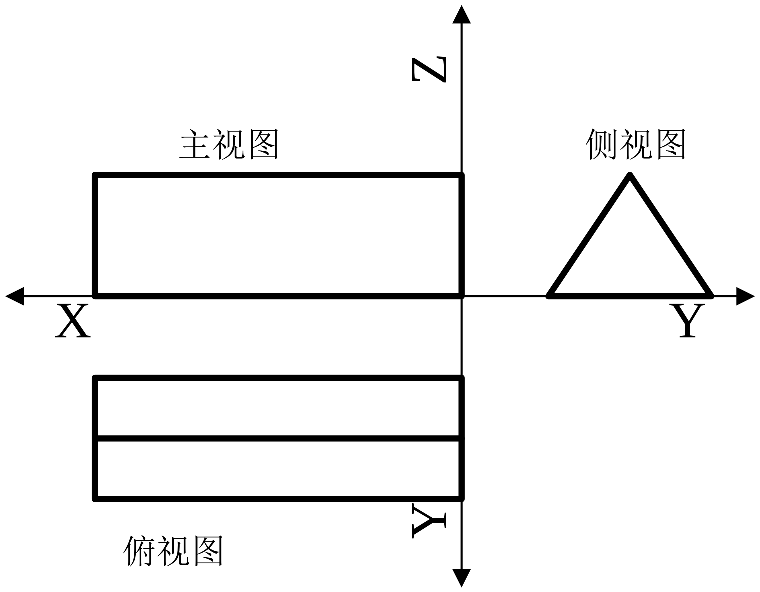


(b)正轴测

04 三维投影

- 三视图包括主视图、侧视图和俯视图三种，投影面分别与X轴、Y轴和Z轴垂直

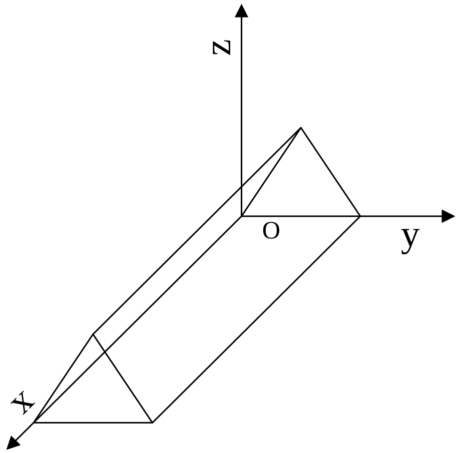


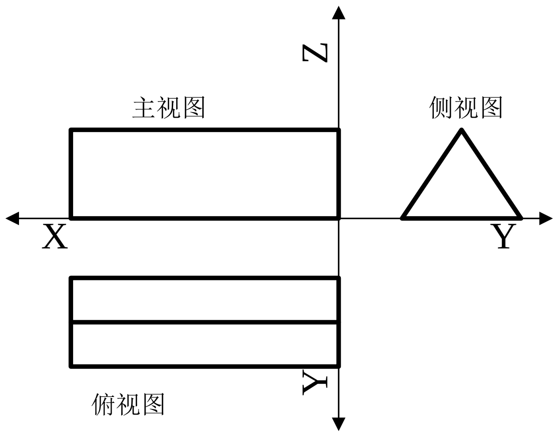


04 三维投影

主视图

$$T_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

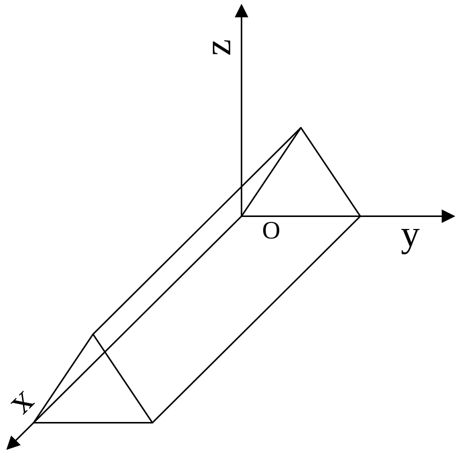


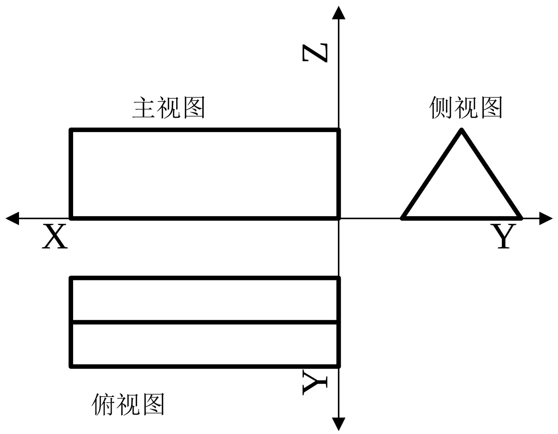


04 三维投影

俯视图

$$T_{xoy}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



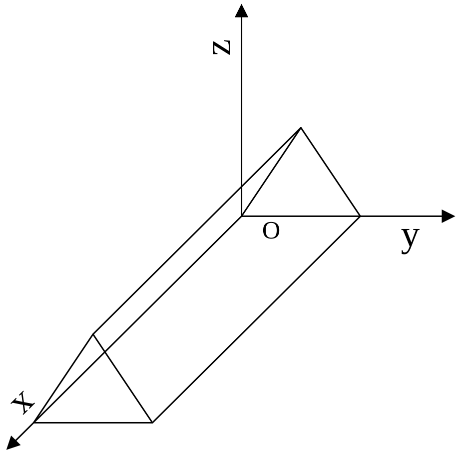


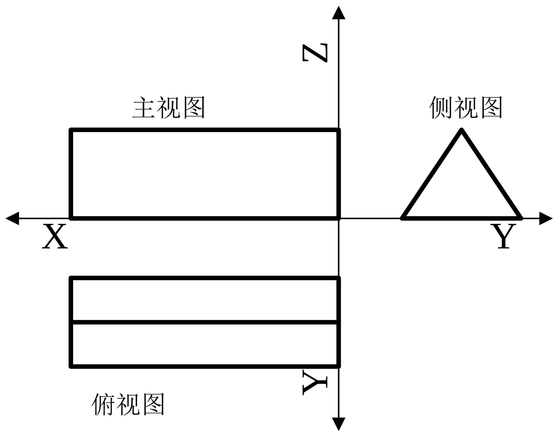
$$T=T_{xoy}\cdot T_{Rx}\cdot T_{tz}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&-z_0&1\end{bmatrix}$$

04 三维投影

侧视图

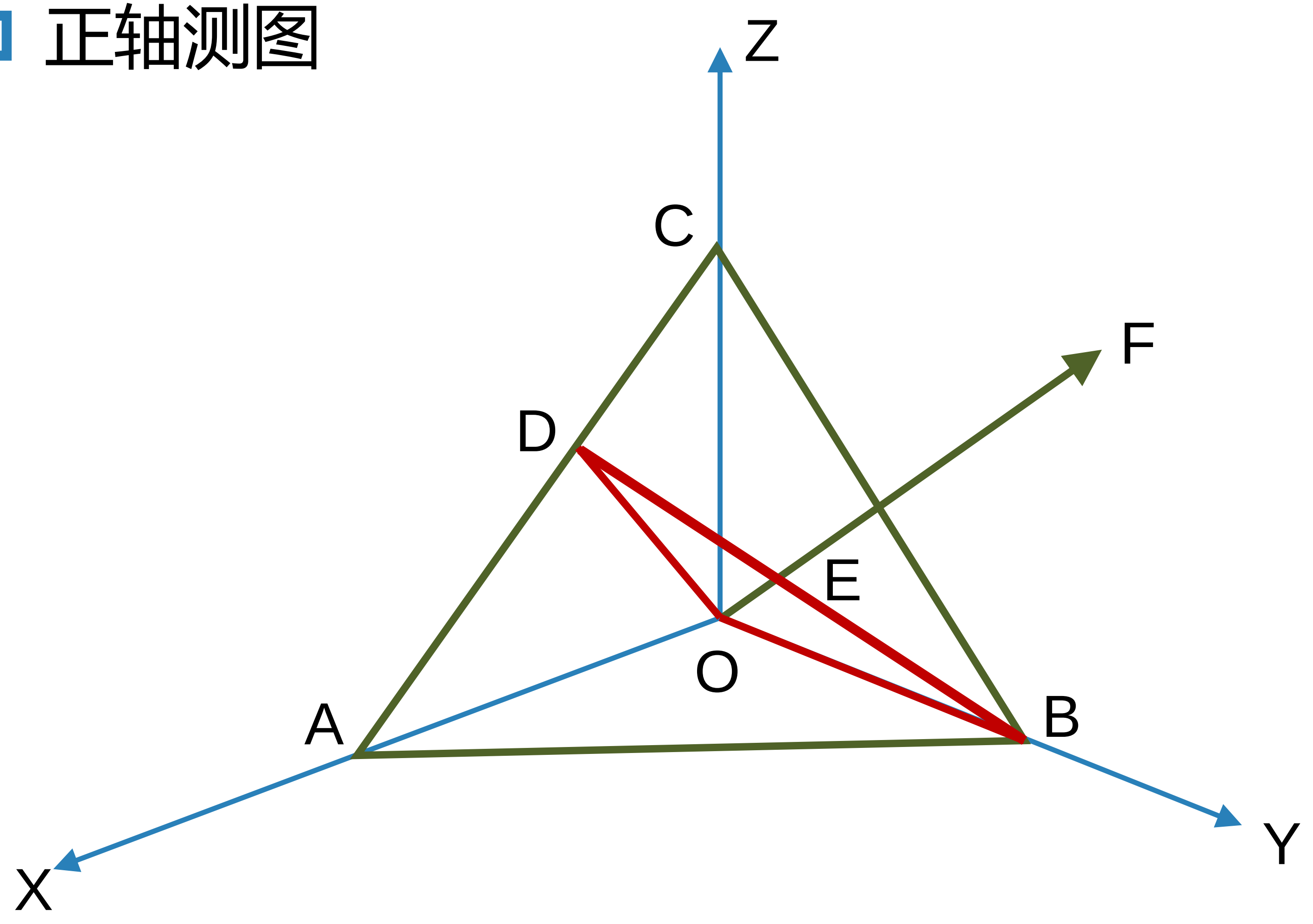
$$T_{yoz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

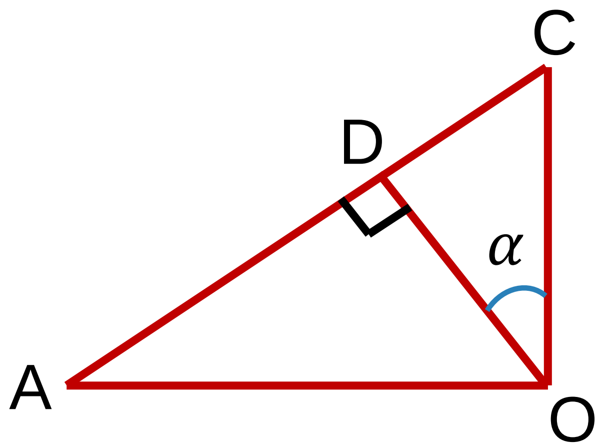


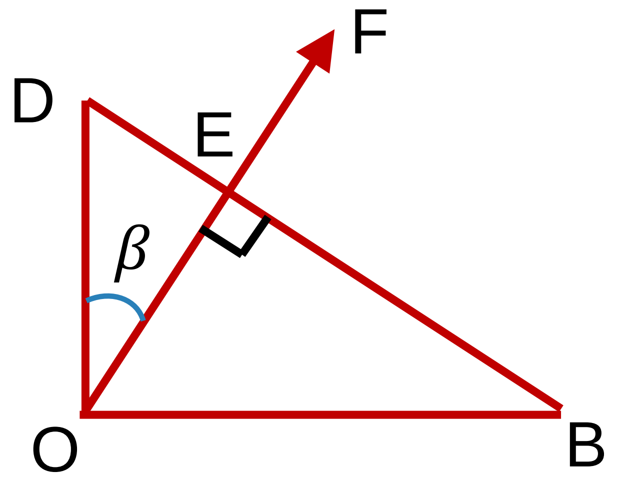


$$T = T_{yoz} \cdot T_{Rz} \cdot T_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正轴测图



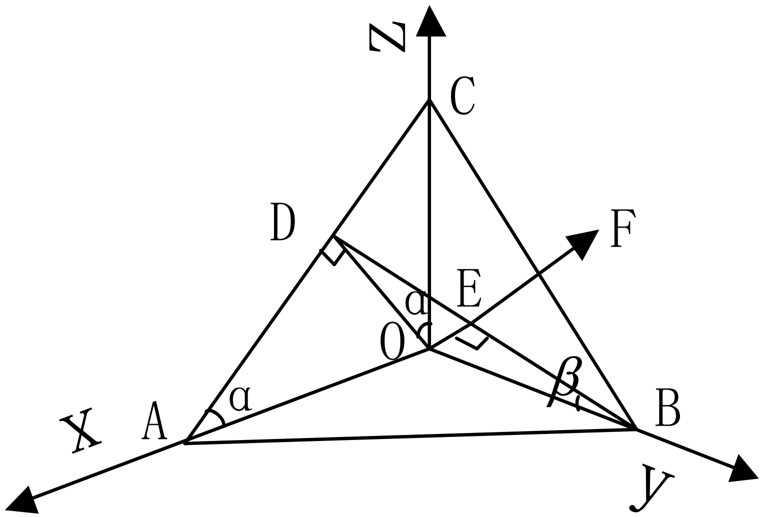




04 三维投影

正轴测图

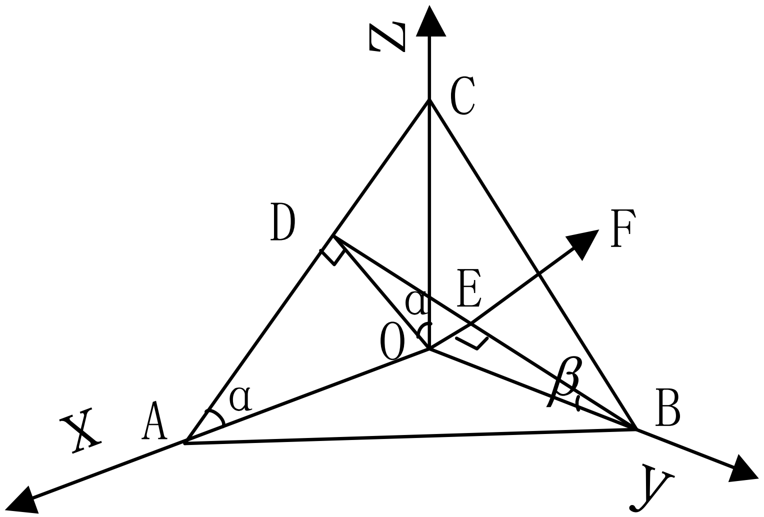
$$T_{Ry}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & 0 & -\sin(-\alpha) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin(-\alpha) & 0 & \cos(-\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



$$T_{Rx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0\\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad T_p=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

正轴测图

$$T = T_{Ry} \cdot T_{Rx} \cdot T_p = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \cdot \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



04

三维投影

特点

- 能同时反映物体的多个面，具有一定的立体效果
- 能使空间任意一组平行线的投影仍然保持平行
- 不能保持三维空间的角度关系
- 沿三个坐标轴的方向均可测量距离，但要注意比例关系

04

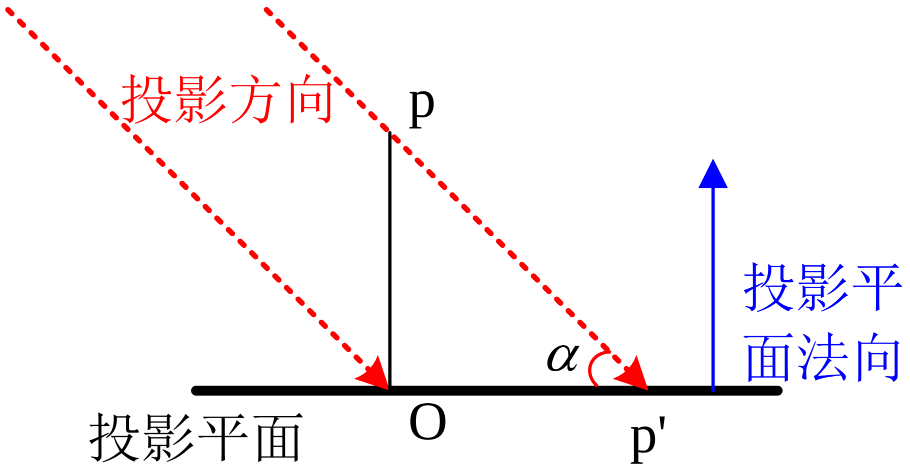
三维投影

斜轴测图

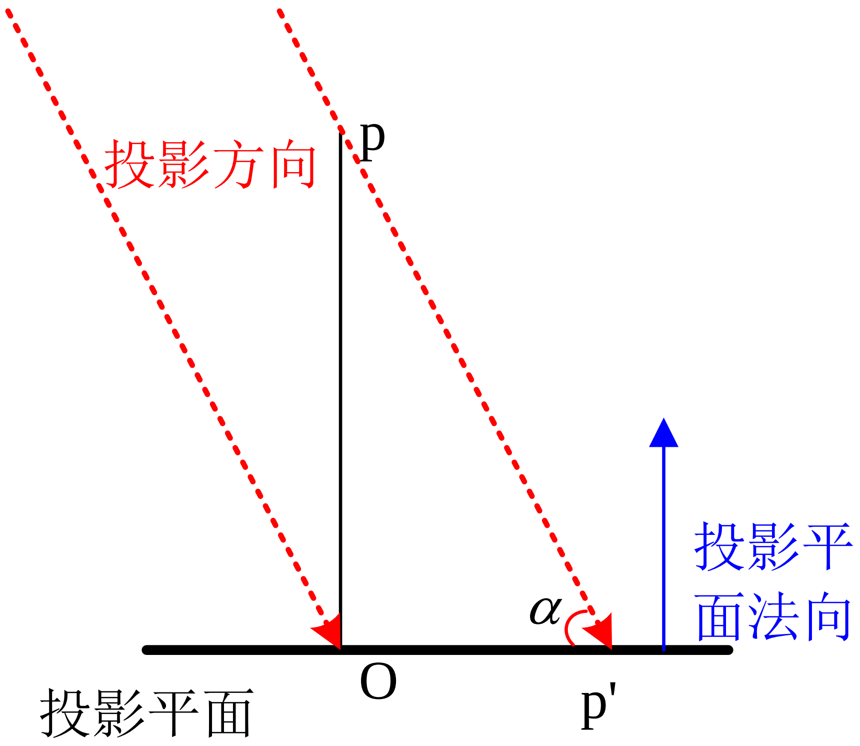
- 斜投影图，即斜轴测图，是将三维形体向一个单一的投影面作平行投影，但投影方向不垂直于投影面所得到的平面图形
- 常选用垂直于某个主轴的投影面，使得平行于投影面的形体表面可以进行距离和角度的测量
- 特点：既可以进行测量又可以同时反映三维形体的多个面，具有立体效果

斜轴测图

斜等测和斜二测

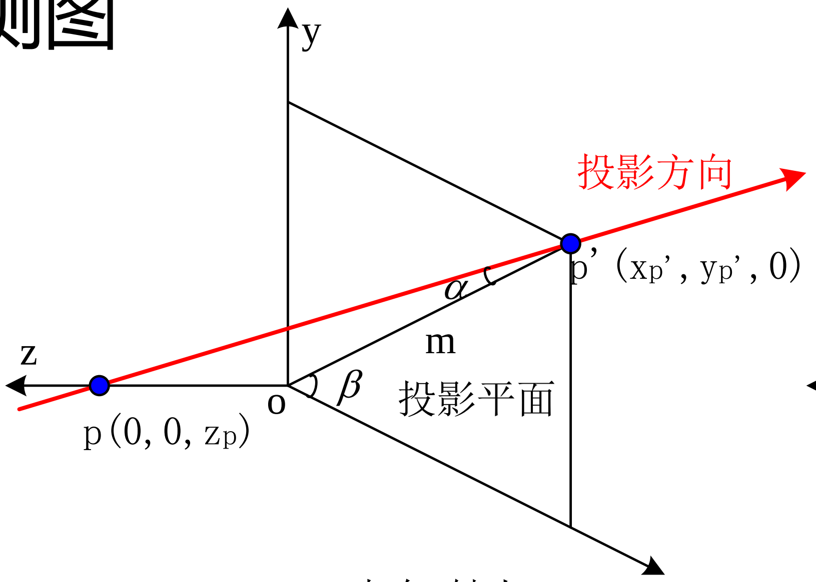


(a)斜等测

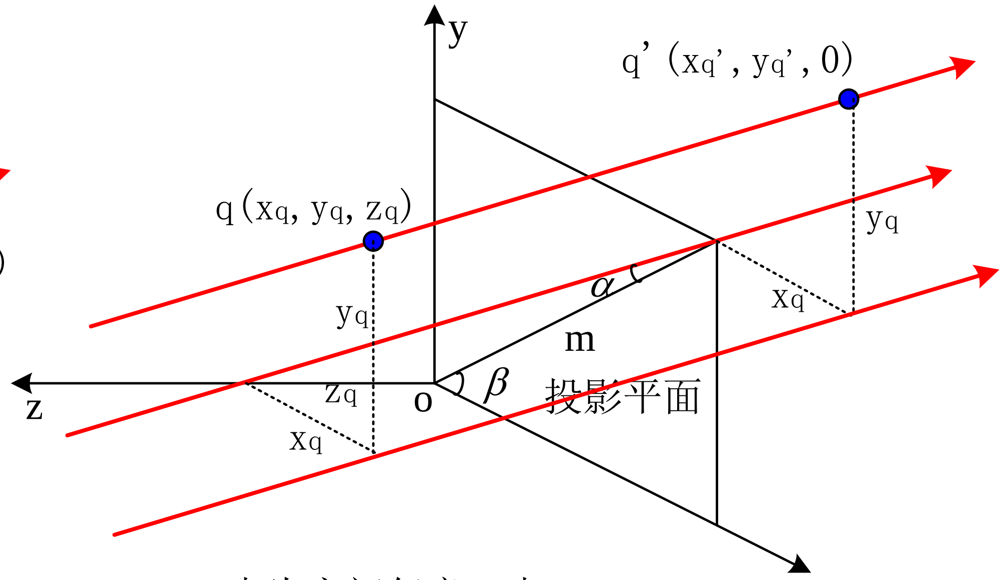


(b)斜二测

斜轴测图



(a)p点在z轴上



(b)q点为空间任意一点

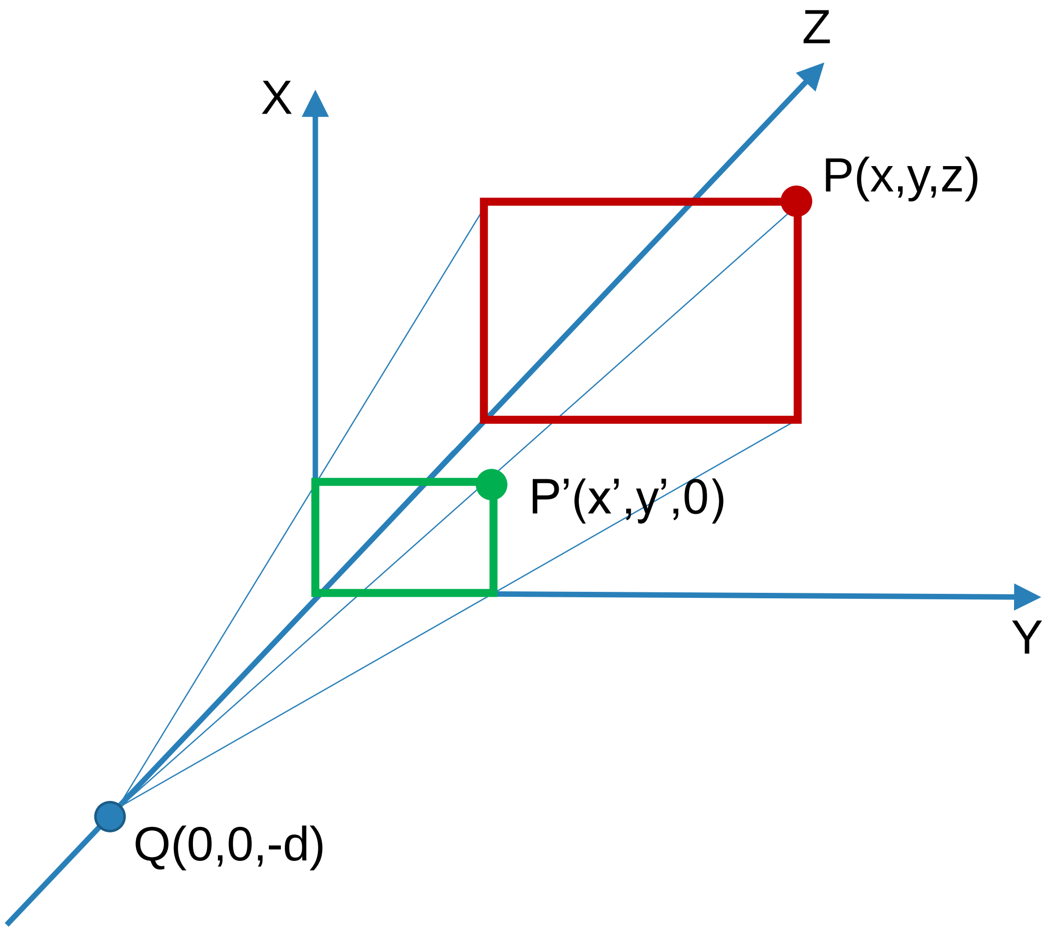
$$x_q' = z_q ctg\alpha \cos\beta + x_q$$

$$y_q' = z_q ctg\alpha \sin\beta + y_q$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ctg\alpha \cos\beta & ctg\alpha \sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

04 三维投影

透视投影



$$x'/x = y'/y = d/(d+z)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

透视投影

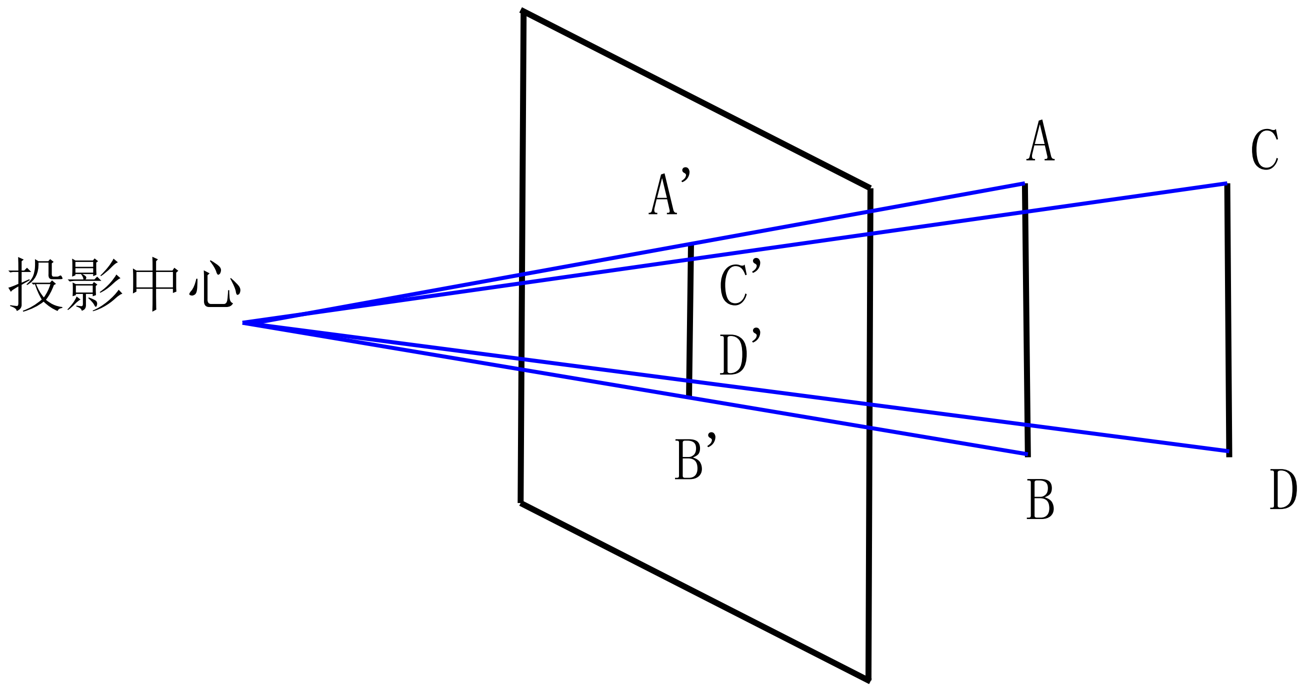
$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

04 三维投影

透视投影

- 透视缩小效应：物体的透视投影的大小与物体到投影中心的Z方向距离成反比



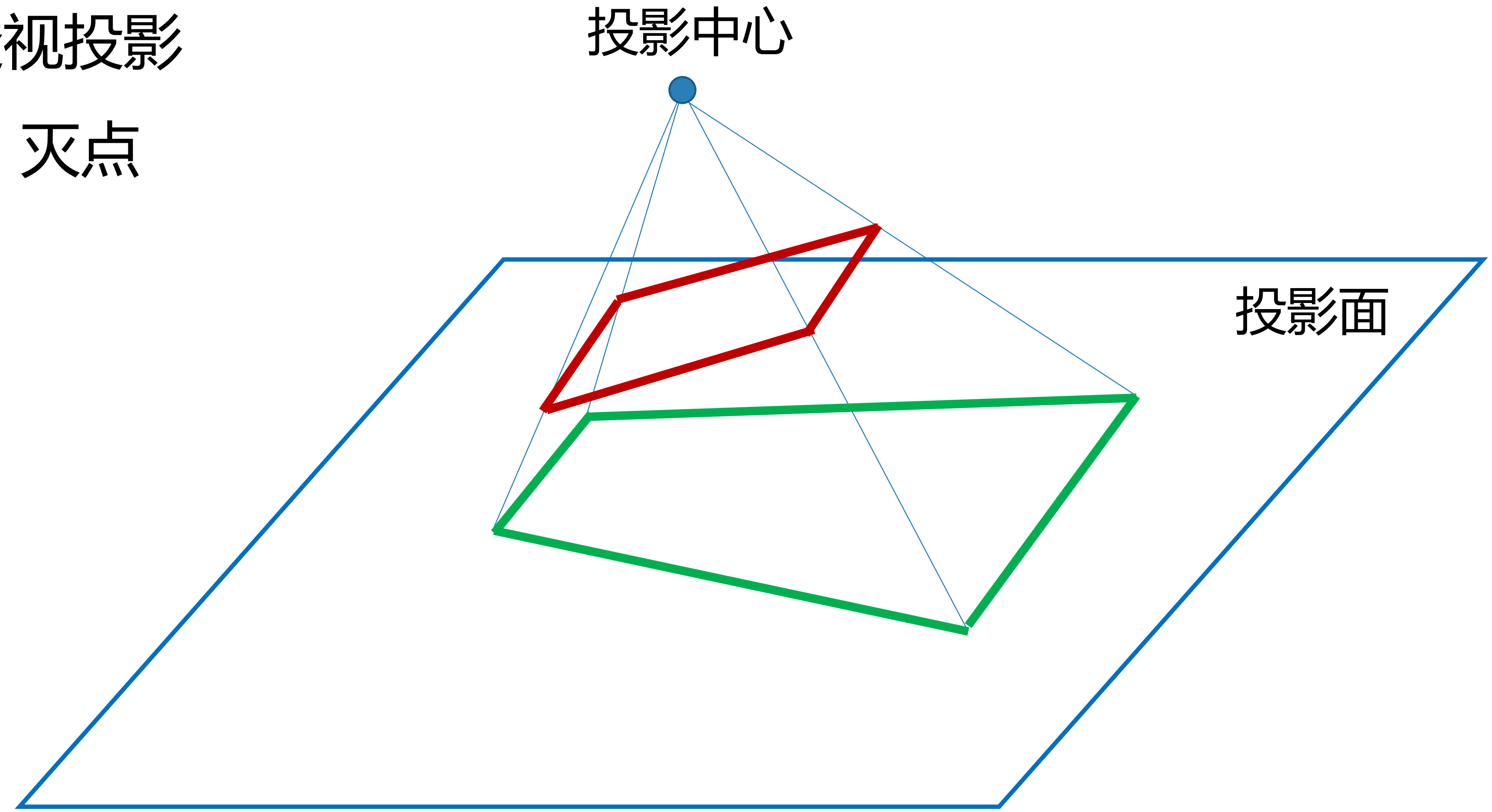
三维投影

透视投影

- 透视投影的深度感更强，更加具有真实感，但透视投影不能够准确反映物体的大小和形状
- 透视投影的大小与物体到投影中心的距离有关
- 一组平行线若平行于投影平面时，它们的透视投影仍然保持平行
- 只有当物体表面平行于投影平面时，该表面上的角度在透视投影中才能被保持

04 三维投影

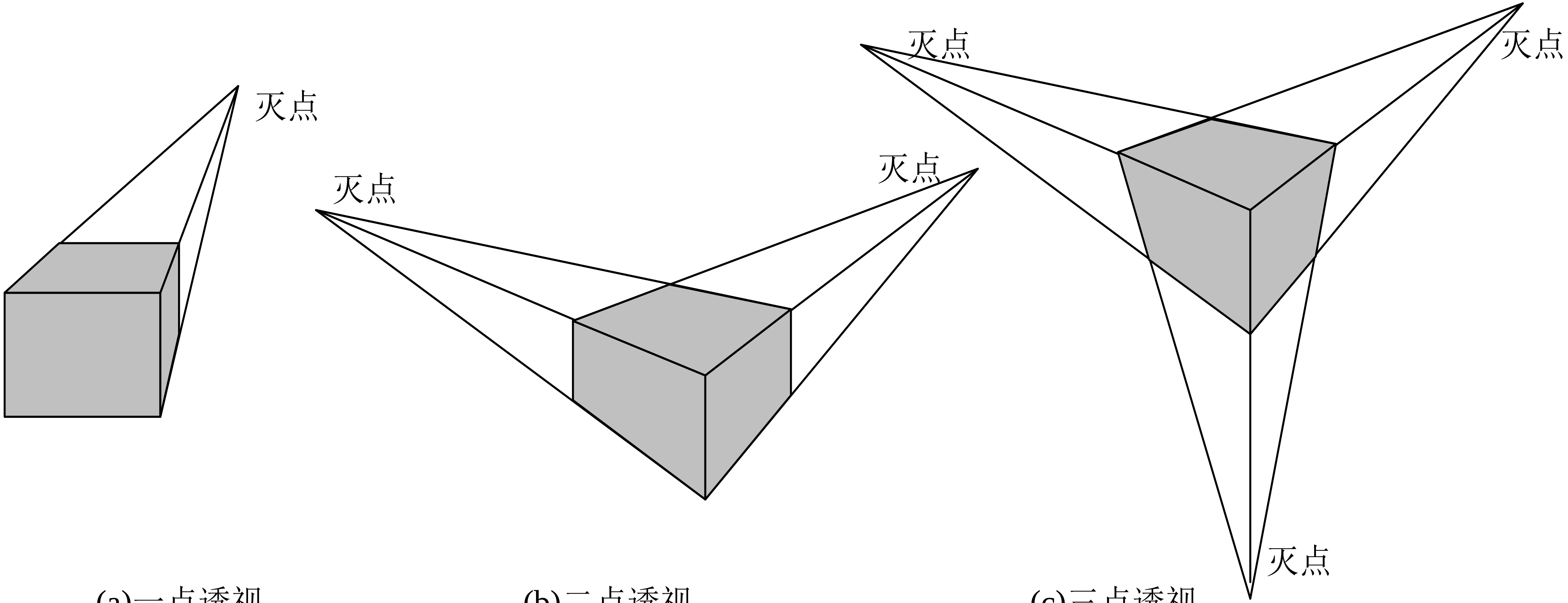
- 透视投影
  - 灭点



透视投影

- 不平行于投影面的平行线的投影会汇聚到一个点，这个点称为灭点(Vanishing Point)
- 坐标轴方向的平行线在投影面上形成的灭点称作主灭点
  - 一点透视有一个主灭点
  - 两点透视有两个主灭点
  - 三点透视有三个主灭点

透视投影



(a)一点透视 (b)二点透视 (c)三点透视

感谢您的观看