לינארית 2 הרצאה מספר 6

אופרטורים לינאריים המשך:

תזכורת: V מרחב מכפלה פנימית: $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

$T^*: V \to V$ נקרא צמוד ל- T אם $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle$ לכל $u,v \in V$.

ראינו כי אם $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, אז לכל $v \in V$ מתקיים $T^*(v) = \sum_{k=1}^{n} \langle v, T(u_k)\rangle u_k$

ראינו כי T^* יחיד בהינתן T.

טענה: אם $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V ו- $[T]_B^B$ מטריצה מייצגת של T ביחס ל- B אזי: $[T^*]_B^B = \left(\overline{[T]_B^B}\right)^T$

דוגמה: $T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ אופרטור לינארי ב- $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$. מצאו את T^*.

פתרון:

הבסיס: $E = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ הינו בסיס אורתונורמלי ב- $\mathbb{C}^2$ ביחס למכפלה סטנדרטית.

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 3 \end{pmatrix} = A \qquad \boxed{A^* = (\bar{A})^T}$$

לכן:

$$[T^*]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 3 \end{pmatrix} = A^*$$

ובניק לה מתקבל:

$$T^*\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

נבדוק כי לכל $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ מתקיים:

$$\left\langle T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 + i z_2 \\ -2i z_1 + 3 z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= (z_1 + i z_2) \cdot \overline{w_1} + (-2i z_1 + 3 z_2) \cdot \overline{w_2}$$

$$= z_1 \overline{w_1} + i z_2 \overline{w_1} - 2i z_1 \overline{w_2} + 3 z_2 \overline{w_2}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 + 2i w_2 \\ -i w_1 + 3 w_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= z_1 \cdot \left(\overline{w_1 + 2i w_2}\right) + z_2 \left(\overline{-i w_1 + 3 w_2}\right)$$

$$= z_1 \cdot \overline{w_1} - 2i z_1 \overline{w_2} + i z_2 \overline{w_1} + 3 z_2 \overline{w_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, T^*\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

דרך שנייה :

$$\langle T(\underline{z}), \underline{w}\rangle = \langle A\underline{z}, \underline{w}\rangle = (A\underline{z})^T \cdot \overline{\underline{w}} = \underline{z}^T \cdot A^T \cdot \overline{\underline{w}}$$

$$\langle \underline{z}, T^*(\underline{w})\rangle = \langle \underline{z}, A^*\underline{w}\rangle = \underline{z}^T \cdot \overline{(A^*\underline{w})} = \underline{z}^T \cdot A^T \cdot \overline{\underline{w}}$$

תכונות של אופרטור צמוד

יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו T ו- S אופרטורים לינאריים ב- V.

1. $(T^*)^* = T$
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$
3. $(\alpha \cdot T)^* = \bar{\alpha} \cdot T^*$ (כאשר $\alpha \in F$ סקלר)
4. $0^* = 0$, $I^* = I$ - צמוד לאופרטור האפס זה הוא עצמו, אופרטור צמוד לאופרטור הזהות זה הוא עצמו.
5. $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$ - הרכבה של אופרטורים.
6. אם T הפיך, אז T^* גם הפיך ומתקיים: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

נוכיח את תכונה 5

לפי הגדרת האופרטור הצמוד: $\langle (T\circ S)^*(u), v\rangle = \langle u, (T\circ S)^{**}(v)\rangle = \langle u, (T\circ S)(v)\rangle$ לכל $u, v \in V$. ①

עובר לצד ימין עם **

כמו כן:

$$\langle (S^*\circ T^*)(u), v\rangle = \langle S^*(T^*(u)), v\rangle = \langle T^*(u), S^{**}(v)\rangle =$$

כאשר S^* עובר לצד ימין נוסיף לו * ולכן הוא נהיה S^{**}

$(S^*(v))^* = S$

$$\langle T^*(u), S(v)\rangle = \langle u, T^{**}(S(v))\rangle = \langle u, (T\circ S)(v)\rangle$$ ②

עובר לצד ימין עם **

הראינו כי $\langle (T\circ S)^*(u), v\rangle = \langle (S^*\circ T^*)(u), v\rangle$

לכל $v \in V$ וגם $u \in V$, לכן $(T\circ S)^*(u) = (S^*\circ T^*)(u)$ לכל $u \in V$ ולכן $(T\circ S)^* = S^* \circ T^*$.

הגדרה:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

T נקרא אופרטור נורמלי אם $T\circ T^* = T^*\circ T$

T נקרא אופרטור אוניטרי אם $T\circ T^* = T^*\circ T = I$ (כלומר $T^* = T^{-1}$) במקרה ממשי (מעל $\mathbb{R}$) T אורתוגונלי.

T נקרא אופרטור הרמיטי, אם $T^* = T$. במקרה ממשי, T נקרא סימטרי.

באופן דומה, בהינתן מטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

A נקראת נורמלית אם $A^* \cdot A = A \cdot A^*$

A נקראת אוניטרית אם $A^* \cdot A = A \cdot A^* = I$ (אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I$, A נקראת אורתוגונלית).

A נקראת הרמיטית אם $A^* = A$ (אם $F = \mathbb{R}$, $A^T = A$ אז A נקראת סימטרית).

דוגמה: יהי V מ"ו של פונקציות גזירות פעמיים בקטע $[-\pi,\pi]$ רק ש- $f(\pm\pi)=0$ לכל $f\in V$.
ב- V נתונה מכפלה פנימית:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

נתבונן באופרטור לינארי $T:V\to V$ הנתון ע"י $T(f(x)) = f''(x)$
מתקיים:

$$\langle T(f),g\rangle = \langle f'',g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u=g & v'=f'' \\ u'=g' & v=f' \end{matrix} \right|_{\text{אינטגרציה בחלקים}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{g(x)\cdot f'(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g'(x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g'(x)\,dx$$

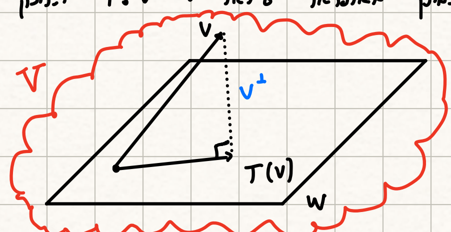
$$\langle f,T(g)\rangle = \langle f,g''\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g''(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u=f & v'=g'' \\ u'=f' & v=g' \end{matrix} \right|_{\text{אינטגרציה בחלקים}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\underbrace{f(x)}_{0}g'(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g''(x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g''(x)\,dx$$

סה"כ קיבלנו: $\langle T(f),g\rangle = \langle f,T(g)\rangle$ לכל $f,g\in V$ כלומר $T^*=T$ ולכן T הרמיטי (סימטרי).

דוגמה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ויהי W תת מרחב וקטורי של V. נתבונן באופרטור לינארי $T:V\to V$ הנתון ע"י $T(v)=\pi_W(v)$ - ההיטל של v על W



נבדוק כי T הוא אופרטור הרמיטי.
מתקיים:

$$\langle T(u),v\rangle = \langle \pi_W(u),v\rangle = \langle \pi_W(u),\pi_W(v)+v^\perp\rangle$$

$$= \langle \pi_W(u),\pi_W(v)\rangle + \underbrace{\langle \pi_W(u),v^\perp\rangle}_{0\ \text{אורתוגונלים}} = \langle \pi_W(u),\pi_W(v)\rangle$$

$$\langle u,T(v)\rangle = \langle u,\pi_W(v)\rangle = \langle \pi_W(u)+u^\perp,\pi_W(v)\rangle$$

$$= \langle \pi_W(u),\pi_W(v)\rangle + \underbrace{\langle u^\perp,\pi_W(v)\rangle}_{0\ \text{אורתוגונלים}} = \langle \pi_W(u),\pi_W(v)\rangle$$

קיבלנו: $\langle T(u),v\rangle = \langle u,T(v)\rangle$ ולכן $T=T^*$. נסיק: מכפלת אחד הוקטורים כפול ההיטל של וקטור השני שווה למכפלת ההיטלים שלהם.

טענה: יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי במרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$
אם $\langle T(v),v\rangle = 0$ לכל $v\in V$, אז $T=0$.

הוכחה:

לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$$0=\langle T(u+v),u+v\rangle = \langle T(u)+T(v),u+v\rangle$$

$$=\underbrace{\langle T(u),u\rangle}_{0}+\langle T(u),v\rangle+\langle T(v),u\rangle+\underbrace{\langle T(v),v\rangle}_{0}$$

$$0=\langle T(u),v\rangle+\langle T(v),u\rangle \quad ①$$

נציב iv במקום וקטור v ונקבל:

$$0=\langle T(u),iv\rangle+\langle T(iv),u\rangle$$

$$0=-i\langle T(u),v\rangle+i\langle T(v),u\rangle$$

$$0=i\left(-\langle T(u),v\rangle+\langle T(v),u\rangle\right) \quad ②$$

משוואות ① ו- ② ביחד גוררים כי $\langle T(u),v\rangle=0$ לכל $u,v\in V$ (וגם $\langle T(u),u\rangle=0$).
מכאן $T(u)=0$ לכל $u\in V$ ולכן $T=0$ כלומר T אופרטור האפס.

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.
T הרמיטי אם ורק אם לכל $v\in V$ מתקיים $\langle T(v),v\rangle\in\mathbb{R}$

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח כי T הרמיטי, ונראה כי $\langle T(v),v\rangle\in\mathbb{R}$.

$$\langle T(v),v\rangle=\langle v,T^*(v)\rangle = \langle v,T(v)\rangle = \overline{\langle T(v),v\rangle}$$

נעביר לצד שני ונוסיף *

T הרמיטי ולכן לא צ״ך לרשום *

תכונה מספר 1 של מכפלה פנימית

קיבלנו כי מספר שווה לצמוד מרוכב שלו, כלומר המספר $\langle T(v),v\rangle\in\mathbb{R}$ (המספר ח״ב להיות ממשי)

כיוון שני - נניח כי $\langle T(v),v\rangle\in\mathbb{R}$ לכל $v\in V$. נראה כי $T=T^*$ (כלומר T הרמיטי)
לכל $v\in V$ מתקיים

$$\langle (T-T^*)(v),v\rangle=\langle T(v),v\rangle-\langle T^*(v),v\rangle$$

$$=\langle T(v),v\rangle-\langle v,T^{**}(v)\rangle$$

$$=\langle T(v),v\rangle-\langle v,T(v)\rangle$$

$$=\langle T(v),v\rangle-\underbrace{\overline{\langle T(v),v\rangle}}_{\in\mathbb{R}}$$

לכן צמוד מיותר

$$=\langle T(v),v\rangle-\langle T(v),v\rangle=0$$

הראנו שלכל $v\in V$ מתקיים $\langle (T-T^*)(v), v\rangle = 0$. כעת לפי המשפט $\langle T(v),v\rangle=0$ לכל $v\in V$, אז $T=0$

לכן $T-T^*=0$ כלומר $T=T^*$.

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.

הטענות הבאות שקולות:

(1) T - אופרטור אוניטרי

(2) לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle T(u),T(v)\rangle = \langle u,v\rangle$

(3) לכל $v\in V$: $\|T(v)\| = \|v\|$