בעיה הרצאה מספר 3

תרגיל: לכל $n>0$ מתקיים:

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 2\cdot a_{n-1} + 1$$

מצא נוסחא כללית ל- a_n.

ננסה צ׳ "ניחוש":

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2\cdot 1 + 1 = 3 \qquad 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2\cdot 3 + 1 = 7 \qquad 2^3 - 1$$

$$a_4 = 2\cdot 7 + 1 = 15 \qquad 2^4 - 1$$

טענה: $a_n = 2^n - 1$

נוכיח את נכונות הטענה באינדוקציה.

בסיס: $n=1$: $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ ✓

צעד: נראה שנכונות הטענה עבור $n-1$ גוררת נכונות עבור n.

הנחת האינדוקציה: $a_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ ← הנחת אינדוקציה

$$a_n = 2\cdot a_{n-1} + 1$$

$$a_n = 2\cdot(2^{n-1} - 1) + 1$$

$$a_n = 2\cdot 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

לכן, הוכחנו כי אם הטענה נכונה עבור $n-1$, הטענה נכונה גם עבור n.

תרגיל:

$$f(1) = 2$$

$$f(n) = f(n-1) + 2n$$

ננסה לנחש מהו $f(n)$ כמשוואת n.

$$f(2) = f(1) + 2\cdot 2 = 2+4 = 6$$

$$f(3) = f(2) + 2\cdot 3 = 6+6 = 12$$

$$f(4) = f(3) + 2\cdot 4 = 12+8 = 20$$

$$\Downarrow$$

טענה: $f(n) = n\cdot(n+1)$

נוכיח את נכונות הטענה באינדוקציה.

בסיס: $n=1$: $f(1) = 1\cdot 2 = 2$ ✓

צעד: נראה שנכונות הטענה עבור $n-1$ גוררת את נכונות הטענה עבור n.

הנחה: $f(n-1) = (n-1)\cdot n$

$$\Downarrow$$

$$f(n) = f(n-1) + 2n$$

$$f(n) = n(n-1) + 2n$$

$$f(n) = n^2 + n$$

$$f(n) = n(n+1)$$

ולכן הטענה נכונה לכל $n \geq 1$.

תרגיל :

$n \geq 0$

$$f(0) = 1$$
$$f(n) = n \cdot f(n-1)$$

$$f(1) = 1 \cdot f(0) = 1$$
$$f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 = 6$$
$$f(4) = 4 \cdot f(3) = 4 \cdot 6 = 24$$

$$\downarrow$$

$$f(n) = n \cdot f(n-1) = n \cdot \left((n-1) \cdot f(n-2)\right)$$
$$= n \cdot (n-1) \left((n-2) \cdot f(n-3)\right)$$
$$= n \cdot (n-1)(n-2) \left((n-3) \cdot f(n-4)\right)$$
$$= n(n-1)(n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \underbrace{f(0)}_{1} = n!$$

לכן הטענה היא $f(n) = n!$

נוכיח באינדוקציה :

בסיס : $n=0$: $f(0) = 0! = 1$ ✓

נראה שנכונות הטענה עבור $n-1$ גוררת נכונות עבור n.

הנחת האינדוקציה : $f(n-1) = (n-1)!$

צעד:

$$f(n) = n \cdot f(n-1)$$
$$f(n) = n \cdot (n-1)!$$
$$f(n) = n! \quad ✓$$

תרגיל :

$n \geq 0$

$$f(0) = 1$$
$$f(n) = f(n-1) + n$$

$$\Downarrow$$

$$f(1) = f(0) + n = 1 + 1 = 2$$
$$f(2) = f(1) + n = 2 + 2 = 4$$
$$f(3) = f(2) + n = 4 + 3 = 7$$
$$f(4) = f(3) + n = 7 + 4 = 11$$

$$\Downarrow$$

$$f(n) = f(n-1) + n = f(n-2) + n-1 + n$$
$$= \boxed{f(n-3)} + (n-2) + (n-1) + n$$
$$= f(n-4) + (n-3) + (n-2) + (n+1) + n$$
$$\vdots$$
$$= \underbrace{f(n-n)}_{0} + \underbrace{(n-n+1)}_{1} + \underbrace{(n-n+2)}_{2} + \ldots + (n-1) + n$$
$$= 1 + 1 + \overbrace{2 + 3 + \ldots + n}^{\text{סדרה חשבונית}} = 1 + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{2+n+n^2}{2}$$

בסיס: $n=1$

$$f(1)=f(0)+1=1+1=2=\frac{2+1+1}{2}=2 \checkmark$$

הנחה: נניח כי מתקיים נכונות הטענה עבור $n-1$ כלומר:

הנחת אינדוקציה $\longrightarrow$ $$f(n-1)=1+\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}=1+\frac{n(n-1)}{2}$$

נוכיח נכונה עבור n:

לפי נוסחה נתונה $\longrightarrow$ $$f(n)=\overbrace{f(n-1)}^{\text{הנחה}}+n$$

$$f(n)=1+\frac{n(n-1)}{2}+n$$

$$f(n)=\frac{2+n(n-1)+2n}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}=\frac{2+n+n^2}{2} \checkmark$$

לכן הטענה נכונה לכל $n\geq 0$.

תרגיל:

$$f(1)=0 \qquad n\geq 1$$
$$f(n)=f(n-1)+\log_2 n$$

שיטת ההצבה:

$$f(n)=f(n-1)+\log_2 n$$
$$=f(n-2)+\log_2(n-1)+\log_2 n$$
$$=f(n-3)+\log_2(n-2)+\log_2(n-1)+\log_2 n$$
$$=f(n-4)+\log_2(n-3)+\log_2(n-2)+\log_2(n-1)+\log_2 n$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{f(n-n+1)}_{f(1)}+\log_2(2)+\log_2(3)+\ldots\ldots\log_2(n)$$
$$=0+\log_2(2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\ldots n)=\log_2(n!)$$

נוכיח את הטענה $f(n)=\log_2(n!)$

הוכחה: בסיס: $n=1$

$$f(1)=0=\log_2(1)=0 \checkmark \quad (2^0=1)$$

הנחה: נניח כי הטענה נכונה עבור $n-1$ כלומר:

הנחה $\longleftarrow$ $$f(n-1)=\log_2((n-1)!)$$

$$f(n)=f(n-1)+\log_2 n$$
$$f(n)=\log_2((n-1)!)+\log_2 n$$
$$f(n)=\log_2((n-1)!\cdot n)=\log_2(n!) \checkmark$$

תרגיל:

$n>0$

$$f(1)=1$$

$$f(n)=2f(n-1)+1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2f(n-1)+1 \\
&= 2\cdot\big(2\cdot f(n-2)+1\big)+1 \\
&= 2\cdot 2\cdot f(n-2)+2+1 \\
&= 2\cdot 2\cdot\big(2\cdot f(n-3)+1\big)+2+1 \\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(n-3)+4+2+1 \\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot\big(2f(n-4)+1\big)+4+2+1 \\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(n-4)+8+4+2+1
\end{aligned}$$

$\vdots$ k ביצות

$$2^k f(n-k)+2^{k-1}+2^{k-2}+\dots+2^0$$

מתי: $n-k=1$? כאשר $k=n-1$:

$$f(n)=2^{n-1}\cdot\underbrace{f(1)}_{1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\dots+2^0$$

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n-1}2^i=2^n-1 \Leftarrow$$ סכום סדרה הנדסית

תשובה: $f(n)=2^n-1$

הוכחה:

תרגיל :

לכל $n > 0$ $\quad f(0) = 3$

$$f(n) = f(n-2) + n$$

$$\Downarrow$$

$$f(n) = f(n-2) + n$$

$$= f(n-4) + n-2 + n$$

$$= f(n-6) + (n-4) + (n-2) + n$$

$$= f(n-8) + (n-6) + (n-4) + (n-2) + n$$

$\vdots$ k פעמים

$$f(n-2k) + (n-2k+2) + (n-2k+4) + \dots + (n-2) + n$$

נגיע ל-0 כאשר $n-2k=0$ כלומר $k = \frac{n}{2}$:

$$\underbrace{f(0)}_{3} + (2) + (4) + \dots n$$

$$3 + \underbrace{2+4+6+8+\dots n}_{\text{סכום סדרה חשבונית}}$$

$$= 3 + \frac{(2+n)\frac{n}{2}}{2} \Rightarrow f(n) = 3 + \frac{(2+n)\frac{n}{2}}{2}$$

נוכיח את הטענה : $f(n) = 3 + \frac{(2+n)\frac{n}{2}}{2}$ באינדוקציה.

תרגיל:

$f(1) = 1 \qquad n \geq 1$

$f(n) = 2f(n-1)$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2f(n-1) \\
&= 2\cdot\left(2\cdot f(n-2)\right) = 2\cdot 2\cdot f(n-2) \\
&= 2\cdot 2\cdot\left(2\cdot f(n-3)\right) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(n-3) \\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot\left(2f(n-4)\right) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot f(n-4) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

k פעמים

$$f(n) = 2^k \cdot f(n-k)$$

עבור $n-k=1$ כלומר $k=n-1$. נקבל:

$$f(n) = 2^{n-1}\cdot f(1)$$

$$f(n) = 2^{n-1}$$