לינארית 2 הרצאה 8

תזכורת :

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ו- $T:V\to V$ אופרטור נורמלי $(T^*\circ T = T\circ T^*)$, אז קיים בסיס אורתונורמלי של V המורכב מוקטורים עצמיים של T.

מסקנה : בסימונים הנ"ל T לכסין.

הגדרה : יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. T נקרא לכסין אוניטרית אם קיים בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית.

נשים לב כי אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ו- $T:V\longrightarrow V$ אופרטור נורמלי :
אז יש בסיס אורתונורמלי המורכב מוקטורים עצמיים של T.
ביחס לבסיס הזה המטריצה המייצגת של T אלכסונית.
לכן T לכסין אוניטרית.

נניח כי T לכסין אוניטרית. יהי B בסיס אורתונורמלי של V כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית :

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

מכאן :

$$\left([T]_B^B\right)^* = \begin{pmatrix} \overline{d_1} & & & \\ & \overline{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{d_n} \end{pmatrix}$$

מתקיים : $[T]_B^B\cdot\left([T]_B^B\right)^* = \left([T]_B^B\right)^*\cdot[T]_B^B$ כי המטריצות אלכסוניות. לכן T נורמלי.

לסיכום : במרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$ אופרטור לינארי $T:V\to V$ נורמלי, אם ורק אם T לכסין אוניטרית.

הערה : מטריצה ריבועית A נקראת לכסינה אוניטרית, אם קיימת מטריצה אוניטרית P ומטריצה אלכסונית D כך ש:

$$A = P\cdot D\cdot P^* \qquad \left(P^* = P^{-1} :\text{אוניטרית כלומר}\right)$$

במקרה ש- A ממשית ריבועית, A נקראת לכסינה אורתוגונלית מעל $\mathbb{R}$ אם קיימת מטריצה אורתוגונלית ממשית P וקיימת מטריצה אלכסונית ממשית D, כך ש- :

$$A = P\cdot D\cdot P^T \qquad \left(P^T = P^{-1} :\text{אורתוגונלית כלומר}\right)$$

משפט : תהי A מטריצה ריבועית ממשית.
A לכסינה אורתוגונלית מעל $\mathbb{R}$ $\iff$ A סימטרית.

דוגמאות :

תהי A מטריצה $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. מצאו P ממשית ו- D אלכסונית, כך ש- $A=P\cdot D\cdot P^T$ (כלומר למצוא לכסון אורתוגונלי)

פתרון :

ערכים עצמיים :

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}\underset{C_1\to C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}4-\lambda&1&1\\4-\lambda&2-\lambda&1\\4-\lambda&1&2-\lambda\end{vmatrix}\underset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1}}{=}\begin{vmatrix}4-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)^2=0$$

לכן הערכים העצמיים הם:

$\lambda=4$ ריבוי אלגברי 1 , ריבוי גאומטרי 1.

$\lambda=1$ ריבוי אלגברי 2 , ריבוי גאומטרי 2.

נמצא את הוקטורים העצמיים :

עבור $\lambda=1$:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{דירוג}}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow x=-y-z\ \Bigg\}\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

וקטורים עצמיים : $\overset{v_1}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}},\ \overset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$, $V_{\lambda=1}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

עבור $\lambda=4$:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{דירוג}}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}\Rightarrow\begin{matrix}x=z\\y=z\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

לכן וקטורים עצמיים $\overset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$ $V_{\lambda=4}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

מתקיים הלכסון הרגיל של A כלומר:

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}}_{P}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}}_{D}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

זהו לכסון רגיל של A. P במקרה זה לא אורתוגונלית.

נמצא בסיס אורתונורמלי המורכב מוקטורים עצמיים של A.

נבצע תהליך גרם שמידט על הבסיס של $V_{\lambda=1}$.

$$u_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2=v_2-\langle v_2,u_1\rangle\cdot u_1$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-1\cdot\frac12\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

מותר להכפיל ב-2 וקטור שלא נורמל

$$u_2=\frac{1}{\sqrt6}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad\Bigg\}\quad\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של $V_{\lambda=1}$

כמו כן $\left\{\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $V_{\lambda=4}$.

לכן:

$B=\left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A:

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}-1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 & 1/\sqrt3\\ 1/\sqrt2 & -1/\sqrt6 & 1/\sqrt3\\ 0 & 2/\sqrt6 & 1/\sqrt3\end{pmatrix}}_{P}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}}_{D}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0\\ -1/\sqrt6 & -1/\sqrt6 & 2/\sqrt6\\ 1/\sqrt3 & 1/\sqrt3 & 1/\sqrt3\end{pmatrix}}_{P^T}\quad (P^T=P^{-1})$$

ניתן להציג

② נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}i&3\\a&i\end{pmatrix}$ כאשר $a\in\mathbb{C}$.

(א) מצאו את כל ערכי a כך שעבורם A נורמלית.

(ב) האם קיים ערך a, כך ש-A אוניטרית?

(ג) עבור a ממשי שלילי מסעיף א' מצאו מטריצה אוניטרית Q כך ש- $A=Q\cdot D\cdot Q^*$ (D אלכסונית).

פתרון:

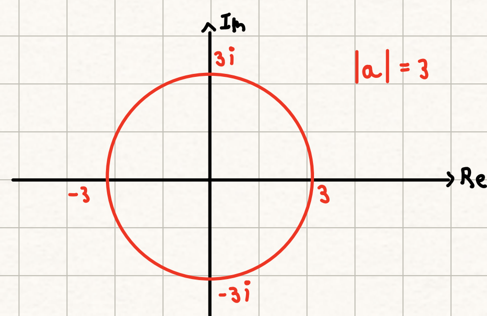
(א)

$$A\cdot A^*=\begin{pmatrix}i&3\\a&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-i&\bar a\\3&-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & i\bar a-3i\\ -ia+3i & |a|^2+1\end{pmatrix}$$

$$A^*\cdot A=\begin{pmatrix}-i&\bar a\\3&-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i&3\\a&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+|a|^2 & -3i+i\bar a\\ 3i-ia & 10\end{pmatrix}$$

נדרוש ש- $A^*A=A*A^*$ וזה קורה אם ורק אם $|a|^2+1=10$, כלומר $|a|=3$.

a נמצא על מעגל ברדיוס 3 ומרכזו בראשית הצירים במישור גאוס



ערך של a מקיים את משוואת המעגל. לכן $|a|=3$. לכן $a=cis\,\alpha$ לכל זווית α.

(ב) לא קיים a כזה כי $A\cdot A^*=\begin{pmatrix}10&\cdot\\\cdot&\cdot\end{pmatrix}\neq I$ (כזכור A אוניטרית אם $A\cdot A^*=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$)

(ג) הערך המתאים מסעיף א' הוא $a=-3$. לכן במקרה זה: $A=\begin{pmatrix}i&3\\-3&i\end{pmatrix}$

נבצע לכסון אוניטרי:

ערכים עצמיים:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}i-\lambda & 3\\ -3 & i-\lambda\end{vmatrix}=(i-\lambda)^2+9=0\Rightarrow -1-2\lambda i+\lambda^2+9=\lambda^2-2\lambda i+8=0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-32}}{2} = \frac{2i \pm 6i}{2} = i \pm 3i \quad \begin{cases} \lambda_1 = 4i \\ \lambda_2 = -2i \end{cases}$$

וקטורים עצמיים עבור $\lambda_1 = 4i$

$$A - \lambda I = A - 4i \cdot I = \begin{pmatrix} -3i & 3 \\ -3 & -3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{} \begin{array}{cc} x & y \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -iy \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

וקטורים עצמיים עבור $\lambda_2 = -2i$

$$A - \lambda I = A - (-2i) I = \begin{pmatrix} 3i & 3 \\ -3 & 3i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ix + y = 0 \\ y = -ix \end{array}\right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

הוקטורים העצמיים שמצאנו $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ הם אורתוגונליים זה לזה במכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ (מכפלה זו היא עם צמוד)

לכן לא צריך גרם שמידט ונותר רק לנרמל אותם. לכן בסיס אורתונורמלי הוא:

$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ בסיס א"נ ל- $\mathbb{C}^2$.

לכן:

$$\begin{pmatrix} i & 3 \\ -3 & i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q^*}$$

פירוק ערך סינגולרי - פירוק SVD

נתונה מטריצה M מסדר $m \times n$ ממשית.

מחפשים מטריצות אורתוגונליות U מסדר $m \times m$, V מסדר $n \times n$, כך ש- $M = U \Sigma \cdot V^T$.

כאשר Σ מטריצה מסדר $m \times n$, כך שכל האיברים שלה מחוץ לאלכסון הראשי שווים ל-0.

איברי האלכסון הראשון נקראים ערכים סינגולריים.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & \lambda_n \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$MM^T = U \cdot \Sigma \cdot V^T (U \cdot \Sigma \cdot V^T)^T = U \cdot \Sigma \cdot \underbrace{V^T \cdot V}_{\substack{I \\ \text{כי מטריצה} \\ \text{אורתוגונלית}}} \cdot \Sigma^T \cdot U^T = U \cdot \underbrace{\Sigma \cdot \Sigma^T}_{\text{אלכסונית}} \cdot U^T$$

עבור $M \cdot M^T$ נעשה לכסון אורתוגונלי (לא מפתיע כי MM^T סימטרית)

כמו כן:

$$M^T M = (U \cdot \Sigma \cdot V^T)^T \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^T) = V \cdot \Sigma^T \cdot \underbrace{U^T \cdot U}_{\substack{I \text{ כי } U \\ \text{מטריצה אורתוגונלית}}} \cdot \Sigma \cdot V^T = V \cdot \underbrace{\Sigma^T \cdot \Sigma}_{\text{אלכסונית}} \cdot V^T$$

מקבלים לכסון אורתוגונלי של $M^T \cdot M$.

דוגמה: נבצע תהליך SVD למטריצה $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

נבצע לכסון אורתוגונלי ל- MM^T.

נמצא ערכים עצמיים:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)^2 - 64 = 0 \quad \left. \right\} \begin{array}{l} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 25 \end{array}$$

וקטורים עצמיים: עבור $\lambda_1 = 9$ וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ עבור $\lambda_2 = 25$ מתקבל וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. לכן לאחר נרמול המטריצה U היא:

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^T = U \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot U^T$$

כעת נבצע לכסון אורתוגונלי ל- $M^T M$:

$$M^T \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

לאחר חישוב של ערכים עצמיים מקבלים: $\lambda = 25, \ \lambda = 9, \ \lambda = 0$

וקטורים עצמיים:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{עבור } \lambda = 25 \text{ נקבל } \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{עבור } \lambda = 9 \text{ נקבל } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{עבור } \lambda = 0 \text{ נקבל } \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

כולם אורתוגונליים

נבנה מטריצה V לאחר נרמול וקטורים:

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$M^T \cdot M = V \cdot \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^T$$

מכאן:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{V^T}$$

שורשים של
ה- Σ של
כל אחת.