הרצאה 4 :

תזכורת :

משתנה מקרי X הוא בעצם פונקציה שלוקחת איבר במרחב המדגם ומחזירה מספר ממשי. אנחנו מתמקדים כרגע במשתנים מקריים בדידים - כאלו שהתמונות שלהם, כלומר הערכים שהם מחזירים הם "מבודדים".

למשל, מטילים מטבע 3 פעמים, ו- X הוא מ"מ בדיד שמסמל את מספר העצים שקיבלנו בסך הכל. כך, הערכים האפשריים של X הם $0,1,2,3$. למשל $X(T,H,H)=1$.

לפונקציה $P(X=k)$ אנו קוראים פונקצ"ית הסתברות או פונקצ"ית התפלגות. אפשר לרשום אותה באמצעות טבלה. למשל בדוגמה שלנו:

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

פונקצ"ית ההסתברות מקיימת את התכונות שאנו חושבים שהיא מקיימת: $\sum P(X=k)=1$ או $P(X=k)\geq 0$.

כעת, התוחלת של מ"מ X מוגדרת באופן הבא:

$$E(X)=\sum kP(X=k)$$

כלומר הסכום של ערך כפול ההסתברות שהמ"מ שווה לערך הזה.

למשל בדוגמה שלנו:

$$E(X)=\sum kP(X=k)=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+3\cdot P(X=3)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$$

כלומר התוחלת, במובן מסוים היא ממוצע משוקלל, כאשר המשקל של כל ערך היא ההסתברות שהוא יתרחש.

תכונות של תוחלת

1. התוחלת של מספר קבוע שווה למספר קבוע: $E(a)=a$.
2. התוחלת היא לינארית - אם a,b פרמטרים, אז: $E(aX+b)=aE(X)+b$
3. אם X,Y מ"מ אז: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
4. אם X,Y מ"מ <u>בלתי תלויים</u> אז: $E(XY)=E(X)E(Y)$

נוכיח לדוגמה את 3 :

הרעיון מאחורי ההוכחה: בפשטות, התוחלת היא סכום, מה זה משנה אם מחברים את כל ערכי ה- X ואז את כל ערכי ה- Y או שמחברים אותם "בזוגות" - ערך אחד של X ועוד ערך אחד של Y, ערך שני של X ועוד ערך שני של Y וכו'... בשורה התחתונה מדובר באותו הסכום.

בשביל ההוכחה הפורמלית, נניח שהערכים ש- X יכול לקבל הם x_i והערכים ש- Y יכול לקבל הם y_j. כמו כן נסמן $P(X=x_i)=P_i$ ונסמן $P(Y=y_j)=P_j$ ובנוסף נסמן $P(X+Y=x_i+y_j)=P_{ij}$. כעת:

$$E(X+Y)=\sum_{i,j}(x_i+y_j)P_{ij}=\sum_{i,j}x_iP_{ij}+\sum_{i,j}y_jP_{ij}$$

בכל סכום כזה שני אינדקסים - גם i וגם j - לכן בפועל אפשר לרשום את הסכום כשני סכומים, אחד שרץ על i ושני שרץ על j: בסכום הראשון:

$$\sum_{i,j}x_iP_{ij}=\sum_i\sum_j x_iP_{ij}=\sum_i x_i\sum_j P_{ij}$$

מכיוון שבסכום $\sum_j$ הערך x_i קבוע אפשר להוציא אותו מהסכום. כעת למה שווה הסכום $\sum_j P_{ij}$? זה הסכום של כל ההסתברויות שבהן $X=x_i$ כי ה- i קבוע ורצים על כל האפשרויות של Y. כלומר זו ההסתברות של $X=x_i$ כאשר $Y=y_1$ ועוד ההסתברות של $X=x_i$ כאשר $Y=y_2$ וכו'... וזו בסך ההסתברות של $X=x_i$,

לפי נוסחת ההסתברות השלמה, לכן:

$$\sum_{i,j} x_i p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i) = E(X)$$

באופן דומה נסתכל על הסכום השני:

$$\sum_{i,j} y_j p_{ij} = \sum_j \sum_i y_j p_{ij} = \sum_j y_j \sum_i p_{ij} = \sum_j y_j \cdot P(Y=y_i) = E(Y)$$

$$\Downarrow$$

$$E(X+Y) = \sum_{i,j} (x_i+y_j) p_{ij} = \sum_{i,j} x_i p_{ij} + \sum_{i,j} y_j p_{ij} = E(X)+E(Y)$$

משתנה מקרי סימטרי

יהי X מ"מ. X נקרא סימטרי סביב 0 אם: $P(X\ge k)=P(X\le -k)$ לכל k.

באופן כללי, X נקרא סימטרי סביב a אם: $P(X\ge a+k)=P(X\le a-k)$ לכל k.

טענה: אם X מ"מ סימטרי סביב a אז $E(X)=a$.

המשמעות היא שכאשר ההתפלגות סימטרית סביב a, כלומר a הוא ערך שנמצא באמצע אז גם הממוצע הוא a.

הוכחה:

נסמן: $Y=X-a$. כך לפי תכונות התוחלת:

$$E(Y)=E(X-a)=E(X)-E(a)=E(X)-a$$

אם כן, כדי להוכיח ש: $E(X)=a$ נוכיח ש $E(Y)=0$ ואז נקבל $0=E(X)-a$ כלומר $E(X)=a$.

כלומר נותר לנו להוכיח ש- $E(Y)=0$.

מכיוון ש- Y הוא הזזה של X ב- a, אנחנו מקבלים שאם Y הוא מ"מ סימטרי אז סביב 0. במשתנה סימטרי סביב 0 מתקיים $P(Y=k)=P(Y=-k)$. כעת נחשב את התוחלת $E(Y)$:

$$E(Y)=\sum m\cdot P(Y=m)$$

ואת הסכום הזה ניתן לחלק לשניים - לכל הערכים החיוביים וכל הערכים השליליים, כלומר נקבל:

$$E(Y)=\sum m\cdot P(Y=m) = \sum kP(Y=k)+\sum -kP(Y=-k) \underset{\text{נוציא מינוס החוצה}}{=} \underbrace{\sum kP(Y=k)-\sum kP(Y=-k)}_{\text{מתקיים } P(Y=k)=P(Y=-k) \text{ בגלל ש- Y מ"מ סימטרי}} = 0$$

כעת $E(Y)=0$ ולכן נקבל $0=E(X)-a$ כלומר $E(X)=a$.

כלומר הוכחנו שאם X מ"מ סימטרי סביב a אז $E(X)=a$.

דוגמה:

מטילים שתי קוביות סטנדרטיות. נסמן ב- X את סכום התוצאות של שתי הקוביות.

ראשית, הערכים האפשריים של X הם $2,3,4,\dots,12$ (סכום התוצאות המינימלי הוא 2, מתקבל כאשר התוצאות הן 1,1 וסכום התוצאות המקסימלי הוא 12, מתקבל כאשר התוצאות הן 6,6).

שני נחשב את ההסתברויות. יש לנו 36 תוצאות אפשריות, ונחשב את ההסתברויות בהתאם.

$$P(X=2) = \frac{|\{(1,1)\}|}{36} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=3) = \frac{|\{(1,2),(2,1)\}|}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=4) = \frac{|\{(2,2),(3,1),(1,3)\}|}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=5) = \frac{|\{(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}|}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(X=6) = \frac{|\{(3,3),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2)\}|}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=7) = \frac{|\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}|}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P(X=8) = \frac{|\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}|}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=9) = \frac{|\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}|}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(X=10) = \frac{|\{(5,5),(6,4),(4,6)\}|}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=11) = \frac{|\{(5,6),(6,5)\}|}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=12) = \frac{|\{(6,6)\}|}{36} = \frac{1}{36}$$

זהו משתנה סימטרי סביב הערך 7. לכן ניתן להגיע בקלות ש- $E(X)=7$.

שונות

אנחנו רוצים לבדוק עד כמה הערכים "מפוזרים". בפשטות, אפשר לבדוק עד כמה הערכים רחוקים מהממוצע. גם ברמת הסכום $\sum |E(X)-k|$, כלומר סך כל המרחקים של ערכים מהממוצע, וגם ברמת המרחק הממוצע כלומר $E(|E(X)-k|)$. מסיבות כאלו ואחרות, השונות לא עושה בדיוק את ממוצע המרחקים מהתוחלת, אלא היא עושה את ממוצע המרחקים האלה בריבוע.

יהי X משתנה מקרי. השונות של X מסומנת $V(X)$ ומוגדרת כך:

$$V(X) = E\left(\left(E(X)-X\right)^2\right)$$

אפשר להוכיח שמתקיים $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ כאשר: $E(X^2) = \sum k^2 P(X=k)$

דוגמה:

נחשב למשל את השונות של המשתנה המקרי X שמסמל את מספר העצים שיצאו בהטלת מטבע 3 פעמים.

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

נזכיר שהתוחלת של X יצאה לנו $\frac{3}{2}$ לפי החישוב הבא:

$$E(X) = \sum k P(X=k) = 0\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=1) + 2\cdot P(X=2) + 3\cdot P(X=3) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

כעת נחשב את $V(X)$. כדי לעשות זאת, ראשית, נצטרך לחשב את $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum k^2 P(X=k) = 0^2\cdot P(X=0) + 1^2\cdot P(X=1) + 2^2\cdot P(X=2) + 3^2\cdot P(X=3)$$

$$= 0^2\cdot\frac{1}{8} + 1^2\cdot\frac{3}{8} + 2^2\cdot\frac{3}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} = 3$$

כעת:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

הערה:

בניגוד לתוחלת שאומרת ברמה האינטואיטיבית משהו די ברור, המשמעות של המספר עצמו שמתקבל בשונות פחות ברורה. בכל זאת, ככל שהשונות גבוהה יותר פירוש הדבר שהערכים מפוזרים יותר (סביב התוחלת).

הגדרה:

סטיית התקן של משתנה מקרי X מסומנת $\sigma(X)$ (האות סיגמה קטנה) והיא השורש של השונות $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

הוכחת נוסחת העבודה של שונות:

ההגדרה של שונות היא זו: $V(X)=E\left(\left(E(X)-X\right)^2\right)$, ואמרנו שבפועל נעבוד עם הנוסחה הבאה: $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$

נוכיח שהנוסחה אכן נכונה:

$$V(X)=E\left(\left(E(X)-X\right)^2\right) \underset{\text{פתיחת כפל מקוצר}}{=} E\left(\left(E(X)\right)^2-2XE(X)+X^2\right) \underset{\text{לינאריות של תוחלת}}{=}$$

לפי תכונות התוחלת:

$$= E\left(\left(E(X)\right)^2-2XE(X)+X^2\right) = E\left(\left(E(X)\right)^2\right)-2E\left(XE(X)\right)+E\left(X^2\right)$$

נזכור ש- $E(X)$ זה בעצם מספר - התוחלת של X. כדי שנראה זאת בבירור נסמן $E(X)=a$ ונשתמש בתכונות תוחלת.

$$= E\left(\left(E(X)\right)^2\right)-2E\left(XE(X)\right)+E\left(X^2\right) = E(a^2)-2E(aX)+E(X^2) = a^2-2aE(X)+E(X^2)$$

שוב קיבלנו במשוואה $a^2-2aE(X)+E(X^2)$ את $E(X)$ שכבר קראנו לו a, נציב a במקומו:

$$= a^2-2aE(X)+E(X^2) = a^2-2a\cdot a+E(X^2) = E(X^2)-a^2$$

כעת נציב במקום a את $E(X)$:

$$= E(X^2)-a^2 = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

וסך הכל קיבלנו $V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$. כנדרש.

תכונות של שונות

1. אם a קבוע אז $V(a)=0$.
2. אם X משתנה מקרי ו- a,b פרמטרים אז: $V(aX+b)=a^2V(X)$
3. אם X,Y משתנים מקריים <u>בלתי תלויים</u>, אז: $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

הוכחה:

2. נוכיח את תכונה מספר 2. אם כן:

$$V(aX+b)=E\left((aX+b)^2\right)-\left(E(aX+b)\right)^2 = E\left(a^2X^2+2abX+b^2\right)-\left(E(aX+b)\right)^2$$

לפי תכונות התוחלת:

$$= a^2E(X^2)+2abE(X)+E(b^2)-\left(aE(X)+b\right)^2$$

מכיוון שהתוחלת של מספר קבוע שווה למספר קבוע, במקרה זה $E(b^2)=b^2$.

$$= a^2E(X^2)+2abE(X)+b^2-\left(a^2\left(E(X)\right)^2+2abE(X)+b^2\right)$$

$$= a^2E(X^2)+\cancel{2abE(X)}+\cancel{b^2}-a^2\left(E(X)\right)^2-\cancel{2abE(X)}-\cancel{b^2}$$

$$= a^2E(X^2)-a^2\left(E(X)\right)^2 = a^2\left(E(X^2)-\left(E(X)\right)^2\right) = a^2V(X)$$

דוגמה:

נתבונן במ״מ X מהדוגמאות הקודמות - מספר העצים בהטלת מטבע 3 פעמים. כפי שראינו $E(X)=\frac{3}{2}, V(X)=\frac{3}{4}$.
נניח שאנחנו משחקים את המשחק הבא- מכפילים את מספר העצים שקיבלנו ב-2 ומורידים 3, וזה הוא סכום הזכייה שלנו (אם הוא שלילי, אנחנו מפסידים). מה הן התוחלת והשונות של סכום הזכייה?

פתרון:

סכום הזכייה הינו $2X-3$. זהו שינוי לינארי, ולכן אפשר להשתמש בתכונות המתאימות של תוחלת ושל שונות.

$$E(2X-3)=2E(X)-3=2\cdot\frac{3}{2}-3=0$$

$$V(2X-3)=2^2V(X)=4\cdot\frac{3}{4}=3$$

הערה:

בהינתן מ״מ X עם תוחלת μ (האות היוונית מיו) וסטיית תקן σ, המשתנה Z המוגדר ע״י $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ נקרא משתנה מתוקנן והפעולה של לחסר את התוחלת ולחלק בסטיית התקן (שהיא השונות בריבוע) נקראת תקנון. תקנון היא פעולה שימושית בהרבה מקרים, מכיוון שמצד אחד היא מהווה שינוי לינארי ומצד שני היא נותנת לנו תוחלת שהיא 0 ושונות שהיא 1.

$$E(Z)=E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\frac{1}{\sigma}\left(E(X)-\mu\right)=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0$$

$$V(Z)=V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}V(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$$

דוגמה (הפקיד הרשלן)

פקיד מקבל בכל יום 3 מכתבים, והוא צריך להכניס כל מכתב למעטפה שלו.
הפקיד מכניס את המכתבים למעטפות באופן אקראי. נסמן ב-X את מספר המכתבים שהפקיד הכניס למעטפה הנכונה.

(א) נמצא את התוחלת ואת השונות של X.

מה הם הערכים האפשריים של X? אם נניח שהמעטפה הראשונה היא א׳, השנייה היא ב׳, והשלישית היא ג׳, יש לנו !3 דרכים להכניס את המכתבים למעטפות:

א׳, ב׳, ג׳ - כל מכתב נכנס למעטפה שלו, ולכן $X=3$
א׳, ג׳, ב׳ - מכתב א׳ נכנס למעטפה שלו, מכתב ב׳ נכנס למעטפה ג׳ ומכתב ג׳ נכנס למעטפה ב׳ - לכן $X=1$.
ב׳, א׳, ג׳ - מכתב א׳ נכנס למעטפה ב׳, מכתב ב׳ נכנס למעטפה א׳, ומכתב ג׳ נכנס למעטפה שלו - לכן $X=1$.
ג׳, ב׳, א׳ - מכתב א׳ נכנס למעטפה ג׳, מכתב ב׳ נכנס למעטפה שלו, ומכתב ג׳ נכנס למעטפה א׳ - לכן $X=1$.
ב׳, ג׳, א׳ - אף מכתב לא נכנס למעטפה שלו - $X=0$
ג׳, א׳, ב׳ - אף מכתב לא נכנס למעטפה שלו - $X=0$

נקבל את הטבלה הבאה:

X	0	1	3
P	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

נחשב את התוחלת :

$$E(X) = \sum k\cdot P(X=k) = 0\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=1) + 3\cdot P(X=3)$$

$$= 0\cdot \frac{2}{6} + 1\cdot \frac{3}{6} \cdot 3\cdot \frac{1}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad E(X) = 1$$

בשביל השונות, חוץ מהתוחלת $E(X)$ שכבר חישבנו, אנו זקוקים ל- $E(X^2)$

$$E(X^2) = \sum k^2 P(X=k) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) + 3^2 P(X=3)$$

$$= 0^2\cdot \frac{2}{6} + 1^2\cdot \frac{3}{6} + 3^2\cdot \frac{1}{6} = 2 \quad \Rightarrow \quad E(X^2) = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1^2 \Rightarrow V(X) = 1$$

(ב) כעת, נניח שהפקיד מקבל 3 ש"ח על כל מכתב שהכניס למעטפה הנכונה והוא נקנס ב- 1 ש"ח על כל מכתב שהכניס למעטפה לא נכונה. נחשב את התוחלת והשונות של הרווח של הפקיד.

אם נסמן ב- Y את הרווח, ננסה לבטא את Y באמצעות X.

כאמור, X הוא מ"מ שמתאר את מספר המכתבים שהוכנסו למעטפה הנכונה, מכיוון שיש בסך הכל 3 מכתבים, מספר המכתבים שהוכנסו למעטפה הלא נכונה הוא $3-X$. כעת נבנה את Y :

$$Y = 3\cdot X - 1\cdot(3-X) = 4X - 3$$

זהו שינוי לינארי ולכן :

$$E(Y) = E(4X-3) = 4E(X) - 3 = 4\cdot 1 - 3 = 1$$

$$V(Y) = V(4X-3) = 4^2 V(X) = 16\cdot 1 = 16$$

מומנט :

כפי שראינו התוחלת היא $E(X)$ ובחישוב השונות אנו משתמשים ב- $E(X^2)$.
באופן כללי, $E(X^n)$ נקרא המומנט ה- n של המשתנה המקרי X. לפי הגדרה :

$$E(X^n) = \sum k^n P(X=k)$$

כמו המומנטים הראשון והשני, גם לשאר המומנטים יש חשיבות והם יודעים לספק לנו ידע על המשתנה המקרי.
באמצעות המומנט השלישי, אפשר לתאר את הצידוד - עד כמה הערכים גבוהים או קטנים מהממוצע, צידוד גבוה פירושו שרוב הערכים גבוהים מהממוצע.
באמצעות המומנט הרביעי אפשר לתאר את הגבנוניות - איך נראות החריגות מהממוצע, גבנוניות גבוהה פירושה שיש מספר קטן יחסית של ערכים שרחוקים הרבה מהממוצע, בעוד שגבנוניות נמוכה פירושה שיש הרבה חריגות מהממוצע אבל יחסית קטנות.