מכפלות פנימיות המשך :

③ ב- $\mathbb{R}^2$ מ"ו נגדיר פעולה :

$$\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \underline{x}^T\cdot \overbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}}^{A}\cdot \underline{y}$$

נבדוק האם הפעולה היא מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

א)

$$\langle \underline{y},\underline{x}\rangle = \underline{y}^T\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}}_{\text{סימטרית}}\cdot \underline{x} = \left(\underline{y}^T\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\underline{x}\right)^T = \underline{x}^T\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^T\cdot\underline{y} = \underline{x}^T\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\underline{y} = \langle \underline{x},\underline{y}\rangle$$

ב)

$$\langle \alpha\underline{x},\underline{y}\rangle = (\alpha\underline{x})^T\cdot A\cdot\underline{y} = \alpha\cdot\underline{x}^T\cdot A\cdot\underline{y} = \alpha\cdot\langle\underline{x},\underline{y}\rangle$$

ג)

$$\langle \underline{x}+\underline{y},\underline{z}\rangle = (\underline{x}+\underline{y})^T\cdot A\cdot\underline{z} = (\underline{x}^T+\underline{y}^T)\cdot A\cdot\underline{z} = \underline{x}^T\cdot A\cdot\underline{z}+\underline{y}^T\cdot A\cdot\underline{z} = \langle\underline{x},\underline{z}\rangle+\langle\underline{y}+\underline{z}\rangle$$

ד)

$$\langle \underline{x},\underline{x}\rangle = \underline{x}^T\cdot A\cdot\underline{x} = (x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = (x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix} = 2x_1^2+x_1x_2+x_2x_1+x_2^2$$

$$= 2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 = x_1^2+\underbrace{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}_{\text{כפל מקוצר}} = \underbrace{x_1^2}_{>0}+\underbrace{(x_1+x_2)^2}_{>0} > 0$$

הביטוי שווה ל- 0 אם ורק אם $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1=0\end{cases}$ כלומר $x_1=x_2=0$, משמע $\underline{x}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

לכן הפעולה הנתונה היא מכפלה פנימית (לא סטנדרטית) ב- $\mathbb{R}^2$.

הערה : כפל מטריצה סימטרית ממשית בעלת ערכים עצמיים חיוביים נקבל מכפלה פנימית.

④ במ"ו $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ נגדיר את הפעולה הבאה :

$$\langle A,B\rangle = tr(A^T\cdot B)$$

נבדוק האם היא מכפלה פנימית.

א)

$$\langle B,A\rangle = tr(B^T\cdot A) = tr\left((B^T\cdot A)^T\right) = tr\left(A^T\cdot(B^T)^T\right) = tr(A^T\cdot B) = \langle A,B\rangle$$

האלכסון נשאר זהה

ב)

$$\langle \alpha A,B\rangle = tr\left((\alpha A)^T\cdot B\right) = tr(\alpha\cdot A^T\cdot B) = \alpha\cdot tr(A^T\cdot B) = \alpha\langle A,B\rangle$$

ג)

ד)

$$\langle A,A\rangle = tr(A^T\cdot A) = tr\left(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}\\a_{12}&a_{22}\\a_{13}&a_{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\right) = tr\left(\begin{pmatrix}a_{11}^2+a_{21}^2&*&*\\ *&a_{12}^2+a_{22}^2&*\\ *&*&a_{13}^2+a_{23}^2\end{pmatrix}\right)$$

$$= a_{11}^2+a_{21}^2+a_{12}^2+a_{22}^2+a_{13}^2+a_{23}^2 \geq 0$$

שוויון ל-0 מתקיים, אם ורק אם $a_{11}=a_{21}=a_{12}=a_{22}=a_{13}=a_{31}=0$

כלומר כל איברי המטריצה A הינם אפסים, משמע $A=0$ (מטריצת אפסים). לכן הפעולה הזאת היא מכפלה פנימית.

נורמה

הגדרה:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. לכל וקטור $v\in V$ ונתאים מספר מ-$\mathbb{F}$ שנקרא נורמה של v באופן הבא:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

למשל: ב-$\mathbb{R}^2$ עם מכפלה סטנדרטית $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \underline{x}^T\cdot\underline{y}$

$$\|x\| = \sqrt{\langle \underline{x},\underline{x}\rangle} = \sqrt{\underline{x}^T\cdot\underline{x}} = \sqrt{(x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

נורמה היא הכללה של מושג אורך למרחבים לא גיאומטריים.

הגדרה: וקטור v בעל $\|v\|=1$ נקרא וקטור יחידה ולפעמים מסמנים $\hat{v}$.

תכונה: לכל $v\in V$ מתקיים $\frac{1}{\|v\|}\cdot v$ הינו וקטור יחידה.

כלומר צריך להוכיח כי $\left\langle \frac{1}{\|v\|}\cdot v, \frac{1}{\|v\|}\cdot v\right\rangle = 1$

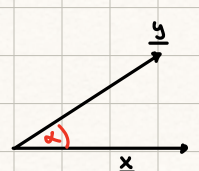
$$\left\langle \frac{1}{\|v\|}\cdot v, \frac{1}{\|v\|}\cdot v\right\rangle = \frac{1}{\|v\|}\cdot\overline{\frac{1}{\|v\|}}\langle v,v\rangle = \quad \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}\ /()^2 \quad = \|v\|^2 = \langle v,v\rangle$$

$$\frac{1}{\|v\|}\cdot\overline{\frac{1}{\|v\|}} = \frac{1}{\|v\|}\cdot\frac{1}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\|v\|}\right)^2$$

$$\frac{1}{\|v\|^2}\|v\|^2 = 1$$

הערה: ב-$\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}^3$ יש 2 דרכים לחשב מכפלה פנימית סטנדרטית של וקטורים:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$



דרך א': $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \underline{x}^T\cdot\underline{y} = x_1y_1+x_2y_2$

דרך ב':

$$\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos(\alpha)$$

מכאן ניתן לחשב את הזווית בין הוקטורים:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \underline{x},\underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|}$$

דוגמה: נתון הוקטורים $\underline{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad \underline{y}=\begin{pmatrix}3-\sqrt3\\3\sqrt3+1\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \underline{x},\underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|} = \frac{(9-3\sqrt3)+(3\sqrt3+1)}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{(3-\sqrt3)^2+(3\sqrt3+1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{9-6\sqrt3+3+27+6\sqrt3+1}} = \frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

באופן דומה ניתן להגדיר זווית בין כל זוג וקטורים שונים מ-0 במרחב מכפלה פנימית V כלשהו.

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|\cdot\|u\|}$$

דוגמה: במ"ו של $\mathbb{R}_2[x]$ נתונה מכפלה פנימית:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1)$$

נחשב את הזווית בין הפולינומים $p(x) = x^2+2x-1$ ו- $q(x) = -x^2+1$

$$\langle p(x), q(x)\rangle = -2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 = -1$$

$$\|p(x)\| = \sqrt{\langle p(x), p(x)\rangle} = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2} = 3$$

$$\|q(x)\| = \sqrt{\langle q(x), q(x)\rangle} = \sqrt{(0)^2+1^2+0^2} = 1$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-1}{3\cdot 1} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \alpha = 1.91 \text{ (רדיאנים)}$$

הגדרה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v, u \in V$.
v ו- u נקראים אורתוגונליים ביחס למכפלה הפנימית הנתונה אם $\langle v, u\rangle = 0$

הערה: המושג של אורתוגונליות מכליל את המושג של "מאונך".
סימון לוקטורים אורתוגונליים - $v \perp u$.

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ וקטורים שונים מ- θ אורתוגונליים בזוגות (v_i אורתוגונליים ל- v_j לכל $i \neq j$) אז $v_1, v_2, \dots, v_k$ בת"ל.

הוכחה:
נתבונן בשוויון $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \theta$
נבצע מכפלה פנימית לאגפים עם וקטור v_1:

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k, v_1\rangle = \langle 0, v_1\rangle$$

$$\alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{>0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_1\rangle}_{0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_k, v_1\rangle}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

בגלל ש- v_2, v_1 אורתוגונליים

בגלל ש- v_k, v_1 אורתוגונליים.

באופן דומה אם נכפול ב- v_2 במקום v_1 נקבל $\alpha_2 = 0$ וכו...
זה מוכיח כי השוויון ההתחלתי מתקיים רק כאשר $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_k = 0$
כלומר $v_1, v_2, \dots, v_k$ בת"ל.

הגדרה:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. יהי $B=\{v_1,v_2,\dots v_n\}$ בסיס של V.

בסיס B נקרא אורתוגונלי, אם וקטורים B אורתוגונליים בזוגות

ואם בנוסף נורמה של כל וקטורים ב-B היא 1, הבסיס נקרא אורתונורמלי.

הערה: בהינתן בסיס אורתוגונלי ניתן להפוך אותו לבסיס אורתונורמלי ע"י חלוקת כל וקטור בנורמה שלו.

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל בסיס אורתונורמלי $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$. יהי $v\in V$ אז:

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\langle v,u_1\rangle\\ \langle v,u_2\rangle\\ \vdots\\ \langle v,u_n\rangle\end{pmatrix}$$ - קואורדינטות של v ביחס ל-B

במילים אחרות:
$$v=\overbrace{\langle v,u_1\rangle}^{\alpha_1}\cdot u_1+\overbrace{\langle v,u_2\rangle}^{\alpha_2}\cdot u_2+\dots+\overbrace{\langle v,u_n\rangle}^{\alpha_n}\cdot u_n$$

הוכחה:

מתקיים $$\circledast\quad v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$$

נחפש את $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_n$.

נכפיל את האגפים של $\circledast$ במכפלה פנימית עם u_1:

$$\langle v,u_1\rangle=\langle\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n,u_1\rangle$$

$$\langle v,u_1\rangle=\alpha_1\underbrace{\langle u_1,u_1\rangle}_{\|u_1\|^2=1}+\alpha_2\underbrace{\langle u_2,u_1\rangle}_{\text{0 כי הבסיס אורתונורמלי}}+\dots+\alpha_n\underbrace{\langle u_n,u_1\rangle}_{\text{0 כי הבסיס אורתונורמלי}}$$

קיבלנו שמתקיים: $\langle v,u_1\rangle=\alpha_1$

באופן דומה, אם נכפיל ב-u_2 נקבל $\langle v,u_2\rangle=\alpha_2$ וכו'....

מקבלים $\langle v,u_k\rangle=\alpha_k$ לכל $k=1,\dots,n$.

תרגיל:

ב-$\mathbb{R}^2$ נתונה מכפלה פנימית סטנדרטית. יהי $v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

א) השלימו את v לבסיס אורתוגונלי של $\mathbb{R}^2$.

ב) מצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^2$.

ג) חשבו קואורדינטות של $w=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס מסעיף ב.

פתרון:

א) יהי $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ נבחר x,y כך שמתקיים $\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle=0$

כלומר $x+2y=0$. נבחר למשל: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

הוקטורים $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ מהווים בסיס אורתוגונלי ל-$\mathbb{R}^2$.

ב) ננרמל את הוקטורים של הבסיס שמצאנו :

$$\left\|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

לכן הבסיס האורתונורמלי הוא:

$$B = \Big\{ \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}_{u_2} \Big\}$$

ג)

$$[W]_B = \begin{pmatrix}\langle w,u_1\rangle \\ \langle w,u_2\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

$$\langle w,u_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt5}(1\cdot1+1\cdot2) = \tfrac{3}{\sqrt5}$$

$$\langle w,u_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt5}(1\cdot2+1\cdot(-1)) = \tfrac{1}{\sqrt5}$$

משפט פיתגורס :

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $V_1,V_2,\dots V_k$ וקטורים (שונים מ- Θ) אורתוגונליים בזוגות אז :

$$\|V_1+V_2+\dots+V_k\|^2 = \|V_1\|^2\ \|V_2\|^2+\dots+\|V_k\|^2$$

הוכחה :

מתקיים

$$\|V_1+V_2+\dots+V_k\|^2 = \langle V_1+V_2+\dots+V_k\ ,\ V_1+V_2+\dots+V_k\rangle = \langle V_1,V_1\rangle + \langle V_2,V_2\rangle + \dots + \langle V_k,V_k\rangle =$$

$$= \|V_1\|^2\ \|V_2\|^2+\dots+\|V_k\|^2$$

שוויון פרסבל (Parseval)

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $B=\{u_1,u_2,\dots u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. אז לכל $v\in V$ מתקיים :

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v,u_k\rangle|^2$$

הוכחה :

מתקיים $V=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$ כאשר $\alpha_k=\langle v,u_k\rangle$ לכל $k=1,\dots,n$.

$$\|v\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k, \sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k \right\rangle \overset{\text{אורתוגונליות}}{=} \langle \alpha_1u_1,\alpha_1u_1\rangle + \langle\alpha_2u_2,\alpha_2u_2\rangle + \dots + \langle\alpha_nu_n,\alpha_nu_n\rangle$$

$$= \alpha_1\cdot\overline{\alpha_1}\overbrace{\langle u_1,u_1\rangle}^{1\ \text{כי אורתונורמלי}} + \alpha_2\cdot\overline{\alpha_2}\overbrace{\langle u_2,u_2\rangle}^{1} + \dots + \alpha_n\cdot\overline{\alpha_n}\overbrace{\langle u_n,u_n\rangle}^{1}$$

$$= |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots |\alpha_n|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, u_k \rangle|^2$$