גבול של סדרה

הגדרת הגבול של סדרה:

תהי $\{a_n\}$ סדרה. נאמר שמספר L הוא הגבול של הסדרה a_n ונסמן: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, אם: לכל $\varepsilon>0$ קיים שלב בסדרה שנסמן אותו n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$.

אינטואיטיבית: L הוא הגבול של a_n אם לכל מרחק שנבחר ימין ושמאל מ-L, קיים שלב בסדרה שהחל ממנו כל איברי הסדרה נמצאים בקטע הפתוח סביב L.

הערה: אפשר לרשום: $|a_n-L|<\varepsilon$ במקום: $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$.

דוגמה:

הוכיחו לפי הגדרת הגבול של סדרה.

א) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$

פתרון:

נסביר איך לגשת לתרגילים מהסוג הזה.

בשורה התחתונה, אנו צריכים לכל $\varepsilon>0$ למצוא n_ε מתאים, כזה שלכל n גדול ממנו יתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

איך בפועל נעשה זאת? נתחיל מאי השוויון: $|a_n-L|<\varepsilon$. יש לנו בצד ימין ε בודד, ובצד שמאל ביטוי של n.

אנחנו צריכים "להפוך" את האי-שוויון - לצורה שבצד ימין n בודד ובצד שמאל ביטוי של אפסילון.

את הביטוי של אפסילון שקיבלנו בצד שמאל, נעגל כלפי מעלה (פשוט נשים עליו $\lceil\ \rceil$), נוסיף 1 וזה יהיה n_ε.

נחזור לדוגמה שלנו. אצלנו $a_n=\frac{1}{4n}$ ו- $L=0$.

יהי $\varepsilon>0$. נחפש n_0 כך שלכל $n>n_0$ יתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$ כלומר $\left|\frac{1}{4n}-0\right|<\varepsilon$

אם כן:

$$\left|\frac{1}{4n}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{4n}\right|<\varepsilon \longleftrightarrow \frac{1}{4n}<\varepsilon$$

מכיוון ש- n טבעי, ערך מוחלט לא משנה. נמשיך- נכפול ב- n.

$$\frac{1}{4n}<\varepsilon$$

$$\frac{1}{4}<n\varepsilon$$

$$\frac{1}{4\varepsilon}<n$$

הצלחנו "להפוך" את האי שוויון. לכן $n_0=\left\lceil\frac{1}{4\varepsilon}\right\rceil+1$ יקיים את הדרוש.

- למה זה פותר את התרגיל? אנחנו לכאורה מתחילים הפוך- מתחילים ממה שאנחנו רוצים להראות שמתקיים.
לכל פנים היינו צריכים מלכתחילה לומר מיהו n_0 ואז להראות שאם $n>n_\varepsilon$ אז מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.
בדוגמה שלנו- היינו מתחילים מלומר $n_0=\left\lceil\frac{1}{4\varepsilon}\right\rceil+1$, ואז מניחים $n>n_0$ ומוכיחים $|a_n-L|<\varepsilon$.
מתמטית, מכיוון שהשתמשנו ב"אם ורק אם" אנו תמיד יכולים לחזור אחורה בהוכחה שלנו ולהראות גם את הכיוון "הנכון".
למשל בדוגמה שלנו:

$$n>n_3 \Rightarrow n>\left\lceil\frac{1}{4\varepsilon}\right\rceil+1 \Rightarrow n>\frac{1}{4\varepsilon} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left|\frac{1}{4n}-0\right|<\varepsilon$$

יותר תשובה היא הבעיה טכנית, אם אנחנו לא מתחילים איך שהתחלנו, אין לנו דרך לדעת מהו n_0.

דוגמה: הוכח לפי הגדרת הגבול שהסדרה $a_n=\frac{n+1}{n}$ מתכנסת ל- 1. כלומר: $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$.

לפי הגדרת הגבול צריך להתקיים: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$

נפתור לגבי n את האי שוויון:

$$\left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \longrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

לכן מצאנו שעבור כל $\varepsilon>0$ ניתן להתאים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שכאשר $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-1|<\varepsilon$ ולכן הסדרה מתכנסת ל-1.

תכונות של סדרות מתכנסות

סדרה קבועה

סדרה $\{a_n\}$ נקראת קבועה, אם כל איבריה שווים זה לזה, למשל:

$$a_n = 8, 8, 8, 8, \dots$$

משפט: אם $a_n=c$ סדרה קבועה אז $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

הוכחה:

נוכיח לפי הגדרת הגבול של סדרה.

יהי $\varepsilon>0$, נבדוק להראות שקיים n_ε כך שלכל $n>n_\varepsilon$ מתקיים: $|a_n-c|<\varepsilon$.

מכיוון ש- $a_n=c$, הדרישה $|a_n-c|<\varepsilon$ שקולה לדרישה $|c-c|<\varepsilon$, כלומר $0<\varepsilon$ ואנו יודעים שזה מתקיים.

לכן כל n_ε שנבחר יקיים את הדרוש. אפשר לבחור כל n_ε שנרצה, למשל $n_\varepsilon=1$.

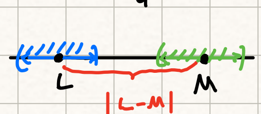
משפט - יחידות הגבול

תהי $\{a_n\}$ סדרה המתכנסת לגבול L, אזי L הוא יחיד.

במילים אחרות, סדרה לא יכולה להתכנס לשני גבולות שונים.

לכן, למשל, אי אפשר לומר שלסדרה $(-1)^n=-1,1,-1,1,\dots$ יש שני גבולות. לסדרה זו אין גבול בכלל, נראה זאת בהמשך.

$\varepsilon=\frac{|L-M|}{4}$



הוכחה:

נניח בשלילה שלסדרה $\{a_n\}$ יש גבול נוסף, M ששונה מ-L.

נניח ש- $M<L$, המקרה השני דומה (רק להחליף את האותיות L,M).

נתבונן ב: $\varepsilon=\frac{L-M}{4}$.

לפי הגדרת הגבול של סדרה, קיים שלב בסדרה n_1 שהחל ממנו $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$.

באופן דומה, קיים שלב בסדרה n_2 שהחל ממנו: $M-\varepsilon<a_n<M+\varepsilon$.

אם נתבונן למשל על: $n_\varepsilon=\max\{n_1,n_2\}$, נקבל שהחל ממנו שני האי-שוויונים מתקיימים: $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$ וגם $M-\varepsilon<a_n<M+\varepsilon$.

כעת, $\varepsilon=\frac{L-M}{4}$, כלומר: $\varepsilon=\frac{1}{4}L-\frac{1}{4}M$.

לכן, $L-\varepsilon<a_n$ משמעותו:

$$L-\left(\frac{1}{4}L-\frac{1}{4}M\right)<a_n$$
$$\frac{3}{4}L+\frac{1}{4}M<a_n$$
$$\frac{3L+M}{4}<a_n$$

מצד שני, $a_n<M+\varepsilon$ משמעותו:

$$a_n<M+\frac{1}{4}L-\frac{1}{4}M$$
$$a_n<\frac{3}{4}M+\frac{1}{4}L$$
$$a_n<\frac{3M+L}{4}$$

קיבלנו את הדבר הבא $\frac{3L+M}{4}<a_n<\frac{3M+L}{4}$, ולכן: $\frac{3L+M}{4}<\frac{3M+L}{4}$, נכפיל ב-4: $3L+M<3M+L$

ונקבל, $2L<2M$, נחלק ב-2 ונקבל $L<M$. זו סתירה להנחה שלנו ש- $M<L$. לכן הטענה נכונה - הגבול הוא יחיד.

משפט: סדרה מתכנסת היא חסומה.

ניסוח מקורי: תהי $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת, אזי $\{a_n\}$ חסומה.

נשים ♥ שהכיוון ההפוך אינו נכון, כלומר אם סדרה היא חסומה זה לא בהכרח אומר שהיא מתכנסת. למשל $(-1)^n$ חסומה אך אינה מתכנסת.

הוכחה:

נסמן את גבול הסדרה $\{a_n\}$ ב- L. נתבונן ב- $\varepsilon=10^{-6}$ (כל אפסילון יעשה את העבודה).
לפי הגדרת הגבול של סדרה, קיים n_ε כך שלכל $n>n_\varepsilon$ מתקיים: $L-10^{-6}<a_n<L+10^{-6}$.
כעת נתבונן באיברים עד לפני n_ε: $\{a_1,a_2,\dots,a_{n_\varepsilon}\}$ מכיוון שיש כאן מספר סופי של איברים, אחד מהם הוא הגדול מביניהם ואחד מהם הוא הקטן מביניהם. בפרט, קיימים מספרים a,b כך ש: $a\le a_1,a_2,\dots,a_{n_\varepsilon}\le b$ (במילים אחרות, כל קבוצה סופית היא חסומה).
אם כן, כל איבר בסדרה קטן-שווה מ- $L+10^{-6}$ או מ- b. לכן, אם נסמן $M=\max\{b,L+10^{-6}\}$, נקבל שכל איברי הסדרה קטנים מ- M.
באופן דומה, כל איבר בסדרה גדול שווה מ- $L-10^{-6}$ או מ- a. לכן אם נסמן: $m=\min\{a,L-10^{-6}\}$, נקבל שכל איברי הסדרה גדולים מ- m.
סה"כ, קיבלנו שלכל n מתקיים $m<a_n\le M$, כלומר הסדרה אכן חסומה.

אריתמטיקה של גבולות - משפטי גבולות

תהיינה: $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות מתכנסות, נסמן $a_n\to L,\ b_n\to M$. אזי:

1. גם $\{a_n+b_n\}$ מתכנסת, ומתקיים $a_n+b_n\to L+M$.
2. גם $\{a_nb_n\}$ מתכנסת, ומתקיים $a_nb_n\to LM$.
3. אם $b_n\neq0$ אזי גם $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ מתכנסת ומתקיים $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{L}{M}$
4. אם c קבוע, אזי גם $\{ca_n\}$ מתכנסת ומתקיים $ca_n\to cL$
5. אם $a_n\ge0$ אזי גם $\{\sqrt{a_n}\}$ מתכנסת ומתקיים $\sqrt{a_n}\to\sqrt{L}$

הערה:

במתמטיקה חשוב להבין מה לא בהכרח נכון, לא פחות מלהבין מה נכון.
במשפט שלנו, הנתון הוא ששתי הסדרות $\{a_n\},\{b_n\}$ מתכנסות
למשל, אם שתי הסדרות לא מתכנסות, אי-אפשר לקבוע מראש איך יתנהג הסכום שלהם.
למשל: $a_n=b_n=(-1)^n$ לא מתכנסות וגם הסכום: $a_n+b_n=2(-1)^n$ לא יתכנס.
מצד שני, אם: $a_n=(-1)^n,\ b_n=-(-1)^n$ לא מתכנסות, אך הסכום שלהן $a_n+b_n=0$ סדרה קבועה שכן מתכנסת.

משפטים חשובים בעזרתם ניתן לחשב גבולות:

משפט: חסומה כפול אפסה

אם $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $\{b_n\}$ היא סדרה חסומה אזי $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$

דוגמה: נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sin(n)\right)=0\ //$$

הסדרה $\frac{1}{n}$ שואפת ל- 0 והסדרה $-1<\sin(n)\le1$ חסומה לכן $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n)}{n}=0$

דוגמה נוספת:

נחשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!\cdot\sin(n^2)}{(n+1)!-n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)!-n!}\cdot\sin^2(n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n!(n+1-1)}\cdot\sin^2(n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{אפסה}}\cdot\underbrace{\sin(n^2)}_{\text{חסומה}}\right)=0\ //$$

משפט: כלל השורש
אם סדרה a_n חיובית וקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$

דוגמה: אם $a_n=p$ כאשר p קבוע $(p>0)$. אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p}{p}=1$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p}{p}=1$

משפט: כלל המנה
אם a_n היא סדרה חיובית ו- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$ אז:
- אם $L<1$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
- אם $L>1$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$

דוגמה: נחשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ כאשר $0<a<b$
לפי כלל המנה נקבל: $\longleftarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}\cdot\frac{b^n}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{b}=\frac{a}{b}<1$
קיבלנו $L<1$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$ לפי כלל המנה.

משפט: המספר של אוילר
הסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה. לכן יש לה גבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$
כאשר $e\approx 2.7182818$ הוא מספר אי רציונלי (הקבוע של אוילר).
נקבל גם $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$ כאשר $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$.
לדוגמה:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)^{n^2+n}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$$

אפשר בהכללה להשתמש בנוסחה הבאה: אם $a_n,b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ אז $\lim\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{b_n}=\left(e^k\right)^A$ כאשר A מוגדר להיות המנה בין גבול הסדרה במעריך לסדרה במכנה: $A=\lim\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$.

דוגמה: מצאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n+1}$
נכפיל את המעריך ונחלק כדי להגיע לתבנית של אוילר:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{5n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2(5n+1)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{2(5n+1)}{n}}=\lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}_{e}\Big]^{10}=e^{10}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(5n+1)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n+2}{n}=10$$

שיטות לחישוב גבולות

בסעיף זה נביא שיטות לחישוב גבולות אשר לא ניתן לחשב לפי משפטים שלמדנו בסעיף הקודם. נציג את רשימת השאלות אשר עליהם המשפטים הנ"ל לא עונים.

(1) גבולות מן הצורה "$\frac{0}{0}$"
אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ יש לחשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ אם הוא קיים.

(2) גבולות מן הצורה "$\frac{\infty}{\infty}$"
אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ יש לחשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ אם הוא קיים.

(3) גבולות מן הצורה "$0\cdot\infty$"
אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ יש לחשב את $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$ אם הוא קיים.

(4) גבולות מן הצורה "$\infty-\infty$"
אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ יש לחשב את $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ אם הוא קיים.

(5) גבולות מן הצורה "∞^0"

אם $\lim_{n\to\infty} b_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ יש לחשב את $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ אם הוא קיים.

(6) גבולות מן הצורה "1^∞"

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ יש לחשב את $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ אם הוא קיים.

(7) גבולות מן הצורה "0^0"

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ יש לחשב את $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ אם הוא קיים.

גבול של סדרה רציונלית

נציג דרך לחישוב גבול של סדרה רציונלית, כלומר סדרה שאיבר הכללי שלה מורכב ממנה של שני פולינומים.
דרך הפתרון תהיה לצמצם את המונה והמכנה ב- n^k כאשר k היא המעלה הגבוהה ביותר של n בפולינומים.

דוגמה: חשב את הגבול של: $a_n = \frac{3n^3-4n+1}{5n^3-7n^2+3} = ?$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n+1}{5n^3-7n^2+3}=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-4n+1}{5n^3-7n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^3-4n+1}{n^3}}{\frac{5n^3-7n^2+3}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty}5-\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}=\frac{3-4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{5-7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}=\frac{3-4\cdot0+0}{5-7\cdot0+0}=\frac{3}{5}$$

דוגמה: חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{3n-5}=?$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2-n+3}{n^2}}{\frac{3n-5}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{n}{n^2}+\frac{3}{n^2}\right)}{\left(\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\text{"}\frac{2-0+0}{0-0}\text{"}=\text{"}\frac{2}{0}\text{"}=\infty$$

דוגמה: חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+3}{3n^3-5n^2+1}=?$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+3}{3n^3-5n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n+3}{n^3}}{\frac{3n^3-5n^2+1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n^2}{n^3}-\frac{n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)}{\left(\frac{3n^3}{n^3}-\frac{5n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{\lim_{n\to\infty}3-5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}=\text{"}\frac{0-0+3\cdot0}{3-5\cdot0+0}\text{"}=\frac{0}{3}=0$$

הכפלה בצמוד

דוגמה: חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)=?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)=?$$

מהצורה "$\infty-\infty$"

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n^2-1}-\sqrt{2n^2-n+5}\right)\left(\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)}{\left(\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((2n^2-1)-(2n^2-n+5)\right)}{\left(\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-6)}{\left(\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{2n^2-n+5}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{6}{n}\right)}{n\left(\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{6}{n}\right)}{\left(\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}=\frac{1-0}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

דוגמה: חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-2}}{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}}\right)=?$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-2}}{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-2}\right)\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}{\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n}\right)\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-2}\right)\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}{(3n+1-3n)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-2}\right)\cdot\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-2}\right)\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}{1\cdot\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1-2n+2)\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}{\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-2}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}\right)}{\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-2}\right)}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)}=3\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$