חדו״א 1 הרצאה 6

רציפות של פונקציה:

הגדרה: תהי f מוגדרת סביב נקודה x_0, נאמר ש- f רציפה ב- x_0 אם:

① קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$

② מתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

הערה: קל לראות ש- $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} = f(x_0)$

ניתן גם להגדיר רציפות מימין ומשמאל בנקודה על ידי גבולות חד צדדיים בנקודה:

(1) $f(x)$ רציפה מימין בנקודה x_0 אם מתקיים: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

(2) $f(x)$ רציפה משמאל בנקודה x_0 אם מתקיים: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

דוגמאות:

בכל אחד מהסעיפים צריך לבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $x=a$.

ⓐ $f(x)=x^2 \;,\; a=2$

נבדוק את הגבול $\lim_{x\to 2} f(x) = 2^2 = 4$

נבדוק את ערך הפונקציה בנקודה $f(2) = 2^2 = 4$

מתקיים $\lim_{x\to a} f(a) = f(a)$ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $x=2$.

ⓑ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 2, & x<0 \end{cases} \;,\; a=0$

נבדוק את הגבולות החד צדדיים של הפונקציה:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2) = 2 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq f(0) = 0$$

לכן הפונקציה $f(x)$ אינה רציפה ב- $x=0$.

ⓒ $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-2} \;,\; a=2$

הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x=2$ ולכן אינה רציפה ב- $x=2$ (למרות שהגבול קיים).

ⓓ $f(x) = \begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 10, & x=0 \end{cases} \;,\; a=0$

מתקיים $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ובנוסף $f(0)=10$. כלומר הגבול קיים אך הוא שונה מערך הפונקציה בנקודה, לכן $f(x)$ אינה רציפה ב- $x=0$.

ⓔ מצאו ערך a עבורו הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x+1, & x\leq 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$ תהיה רציפה בנקודה $x=1$.

אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=1$ אז קיים גבול ב- $x=1$ וערכו צריך להיות שווה ל- $f(1)=1+1=2$, לכן קיימים גבולות מימין ומשמאל והם שווים לאותו ערך 2. כלומר

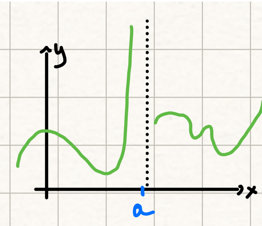
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3-ax^2) = 3-a \Rightarrow 3-a=2 \Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2$$

על מנת שהגבול משמאל יהיה שווה לגבול מימין ושניהם יהיו שווים ל-2 הפרמטר a צריך להיות 1.

סוגי אי רציפות

אי רציפות מסוג שני:



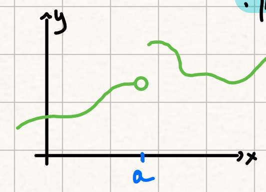
אחת הגבולות החד צדדיים יצא לא קיים/אינסופי.

אם:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

לא קיים/אינסופי יש לנו אי רציפות מסוג שני - עיקרית

אי רציפות מסוג ראשון:



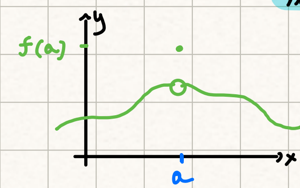
במקרה זה:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \neq B = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

מדובר באי רציפות מסוג 1 - קפיצה.

הגבולות החד צדדיים קיימים אבל $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

אי רציפות סליקה/בור

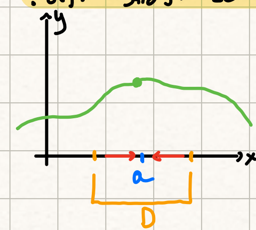


במקרה זה: $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}\right) \neq f(a)$

כלומר: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ או ש- $f(a)$ לא מוגדר.

אי רציפות מסוג סליקה/בור.

הגדרה של רציפות בקטע:



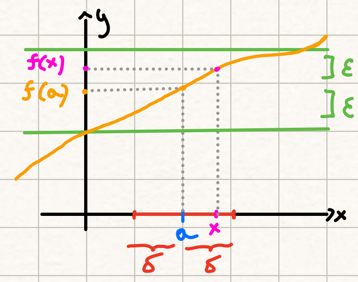
פונקציה f רציפה בקטע D $\Longleftrightarrow$ לכל x_0 בקטע D מתקיים ש- f רציפה ב- $x = x_0$.

רציפות לפי הגדרה

f רציפה ב- $x=a$ $\iff$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x: $|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

הגדרה לפי קושי:



הגדרה לפי היינה: לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, מתקיים $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$

רציפות בקטע לפי הגדרה:

פונקציה f רציפה בקטע D $\iff$ לכל x_0 בקטע D מתקיים ש- f רציפה ב- $x=x_0$ $\iff$

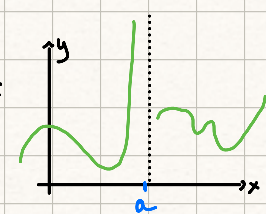
לכל $x_0\in D$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל x: $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

למה בכלל לסווג את סוגי אי הרציפות השונים?

כשאנחנו מתעסקים עם פונקציות לא רציפות, אזי תמיד אפשר "לתקן". כלומר לבנות פונקציה חדשה שמשתמשת בקודמת "הפגומה" ולסדר אותה כך שתהיה רציפה.

אי רציפות מסוג שני:



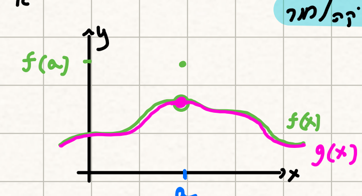
אי רציפות עיקרית אי אפשר לתקן.

אי רציפות מסוג ראשון:

אי רציפות קפיצה ניתן לתקן:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x<a \\ f(x) - \text{מספר}, & x>a \\ \lim_{x\to a^-} f(x), & x=a \end{cases}$$

אי רציפות סליקה/בור



אי רציפות בור ניתן לתקן:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x\neq a \\ \lim_{x\to a} f(x) & x=a \end{cases}$$

משפט: אם $f(x)$ היא פונקציה אלמנטרית, אז $f(x)$ רציפה בכל נקודה בה היא מוגדרת.

דוגמאות:

① האם $f(x)=\sin(x)$ רציפה בנקודה $x=0$? כן. הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא אלמנטרית ומוגדרת כאשר $x=0$ ולכן היא רציפה.

② האם הפונקציה $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ רציפה בנק $x=1$? לא. אמנם הפונק אלמנטרית אבל היא לא מוגדרת בנקודה $x=1$.

③ הוכיחו כי הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}1+2^{\frac{1}{x-5}}, & x\neq 5\\ \frac{1}{2}, & x=5\end{cases}$ אינה רציפה בנקודה $x=5$.

תשובה:

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 5^-}\left(1+2^{\frac{1}{x-5}}\right)\\ \lim\limits_{x\to 5^+}\left(1+2^{\frac{1}{x-5}}\right)\end{matrix} = \begin{cases} x-5\xrightarrow[\text{שואף}]{}0^- \Rightarrow \frac{1}{x-5}\xrightarrow[\text{שואף}]{}-\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x-5}}\longrightarrow 0 \Rightarrow 1+2^{\frac{1}{x-5}}\xrightarrow[x\to 5]{} 1+0=1\\ 1+2^{\frac{1}{0^+}}\xrightarrow[\text{שואף}]{} 1+\infty\xrightarrow[\text{שואף}]{}\infty\end{cases}$$

קיבלנו 2 גבולות
שונים שאחד מהם הוא אינסוף
לכן הפונקציה לא רציפה ב- $x=5$

דוגמאות לבדיקת רציפות

① בדקו האם הפונקציה הבאה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

לכל $x\neq 0$, מתקיים $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה.

עבור $x=0$, נבדוק:

f רציפה בנקודה $x=0$ אמ"מ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$:

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\\ f(0)=1\end{matrix}\right\}$$ f רציפה ב- $x=0$

בסה"כ f פונקציה רציפה.

② מצאו עבור אילו ערכי a,b הפונקציה רציפה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{ax}-1}{x}, & x>0\\ 1, & x=0\\ \frac{\arctan(bx)}{x}, & x<0\end{cases}$$

f רציפה לכל x ובפרט בנקודה $x=0$ לכן $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{e^{ax}-1}{ax}}_{1}\cdot a=1\cdot a=a\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{\arctan(bx)}{bx}}_{1}\cdot b=1\cdot b=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$$ קיים אם $a=b$

$f(0)=1=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a=b$ ערך הפונק בנקודה.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a=1\ ,\ b=1}$$

③ מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציה ומיינו אותן לסוגים:

$$f(x)=\frac{1}{\ln(x+6)}$$

f אלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה.

שלב I - מציאת תחום הגדרה -

נדרוש: $\ln(x+6)\neq 0 \Leftarrow x+6\neq 1 \Leftarrow x\neq -5$

$x+6>0 \Leftarrow x>-6$

תחום הגדרה: $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-6$ וגם $x\neq -5\}$

שלב II - בדיקת סוג אי הרציפות של הנקודות החשודות

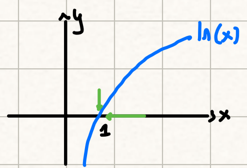
עבור $x=-5$

$$\lim_{x\to(-5)^+} f(x)=\frac{1}{\ln(x+6)}=\frac{1}{\ln(-5^++6)}=\frac{1}{\ln(1^+)}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

אחד הגבולות יצא לנו אינסופי ולכן אי הרציפות מסוג עיקרי.

לכן $x=-5$ היא נק' אי רציפות עיקרית.

סקיצה של $\ln(x)$

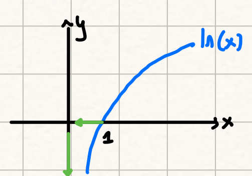


עבור $x=-6$:

$$\lim_{x\to -6^+} f(x)=\frac{1}{\ln(x+6)}=\frac{1}{\ln(-6^++6)}=\frac{1}{\ln(0^+)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

f אינה מוגדרת ב- $x=6$ ו- $\lim_{x\to -6^+} f(x)=0$ לכן אי הרציפות היא בור.

סקיצה של $\ln(x)$



סך הכל:

$x=-5$ אי רציפות עיקרית

$x=6$ אי רציפות סליקה/בור.

④ מצאו את כל נקודות אי הרציפות של הפונקציה $f(x)$ ומיינו אותן לסוגים:

$$f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

f אלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה.

נמצא את תחום ההגדרה של $f(x)$: $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq -1\}$

נבדוק את סוג אי הרציפות עבור $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1+(-1)^+)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

אז אין צורך לבדוק מה קורה בצד השני ואי הרציפות היא מסוג עיקרית.

⑤ מצאו את כל נקודות אי הרציפות של הפונקציה $f(x)$ ומיינו אותן לסוגים:

$$f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}}$$

הפונקציה f אלמנטרית ולכן רציפה בתחום הגדרתה.

נמצא את תחום ההגדרה של f:

$$1-\frac{1}{3^x}\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\neq \frac{1}{3^x} \\ 3^x\neq 1 \end{array}\right\} 3^x\neq 3^0$$

תחום הגדרה: $x\neq 0$

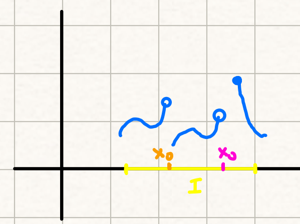
לכן תחום ההגדרה של $f(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

נבדוק את סוג אי הרציפות עבור $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3^{0^+}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1^+}} = \frac{1}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

אז אין צורך לבדוק מה קורה בצד השני ולכן אי הרציפות היא מסוג עיקרי.

נקודות קיצון מקומיות וגלובליות



הגדרה: $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע I

אם קיים $x_0 \in I$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים $f(x_0) \geq f(x)$ אז ל- f יש מקסימום בקטע: x_0 - נק' מקסימום של f בקטע I
$f(x_0)$ - המקסימום של f בקטע I

אם קיים $x_0 \in I$ כך שלכל $x \in I$ מתקיים $f(x_0) \leq f(x)$ אז ל- f יש מינימום בקטע: x_0 - נק' מינימום של f בקטע I
$f(x_0)$ - המינימום של f בקטע I

* הערה: בפונקציה קבועה כל הנקודות בקטע I הן מינימום ומקסימום. נק' מינימום ומקסימום לא חייבת להיות יחידה. ערך מקסימלי של f יש רק אחד אבל יכולות להיות מספר נקודות כאלה.