לינארית 2 הרצאה 9

תבניות ריבועיות:

יהי P פולינום במספר משתנים, כך שסכום החזקות של כל המשתנים בכל מחובר הינו קבוע ושווה ל- m.
לפולינום כזה קוראים פולינום הומוגני מסדר m.

למשל: $P(x,y,z) = 6x^2y^3z + 5z^6 + 4x^2y^2z^2 - x^2y^4$.

במקרה זה P פולינום הומוגני מסדר 6.

הערה: נשים לב כי לכל סקלר λ מתקיים: $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^6 \cdot P(x,y,z)$.

או באופן כללי, עבור פולינום הומוגני מסדר m: $P(\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda^m \cdot P(\underline{x})$.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. פונקציה $q: V \to \mathbb{R}$ נקראת תבנית ריבועית אם q פולינום הומוגני מסדר 2.

דוגמה: תהי: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. נגדיר $q_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ע"י: $q_A(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$

$$q_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + 7x_1x_3 + 8x_2x_3 + 9x_3^2$$

$$= x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_1x_2 + 10x_1x_3 + 14x_2x_3$$

קיבלנו ש- $q_A(x)$ הוא פולינום הומוגני מסדר 2 ולכן הוא תבנית ריבועית.

הערה: באופן כללי לכל מטריצה ממשית A מסדר $n \times n$ הפונקציה $q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $q_A(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$ הינה תבנית ריבועית (מעל $\mathbb{R}$).

נשים לב, כי אם בדוגמה שלנו נבחר מטריצה אחרת: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (סימטרית) נקבל בדיוק אותה תבנית ריבועית.

יש אינסוף אפשרויות להציג אותה תבנית ריבועית ע"י מטריצה ורק אפשרות אחת להציג אותה ע"י מטריצה סימטרית.

בהינתן תבנית ריבועית $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אפשר להציג אותה ע"י מטריצה סימטרית יחידה A. כאשר $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$

למשל $q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & 4x_1^2 + 16x_2^2 - 5x_4^2 + \\ & + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_1x_4 + \\ & + 2x_2x_3 - 3x_2x_4 + 128x_3x_4. \end{aligned}$$

מכאן המטריצה המבוקשת A הינה:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 16 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 & 0 & 64 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 64 & -5 \end{pmatrix}$$

נזכר כי מטריצה ממשית סימטרית A לכסינה אורתוגונלית מעל $\mathbb{R}$, כלומר קיימת P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש:

$$A = P \cdot D \cdot P^T$$

לכן:

$$q_A(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = \underline{x}^T \cdot PDP^T \cdot \underline{x} \underset{(P^T\cdot \underline{x})^T = \underline{x}^T \cdot P}{=} (P^T\cdot \underline{x})^T \cdot D \cdot (P^T \cdot \underline{x}) \underset{\substack{\text{נסמן} \\ \underline{y} = P^T\cdot \underline{x}}}{=} \underline{y}^T \cdot D \cdot \underline{y}$$

כאשר $\underline{y} = P^T \cdot \underline{x}$ זו היא החלפת משתנים.

דוגמה: תהי $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית הנתונה ע"י:

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

מצאו החלפת משתנים $\underline{y} = P^T \cdot \underline{x}$ הפיכה, כך ש- $q(y_1,y_2,y_3) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2$

פתרון:

המטריצה הסימטרית המייצגת את התבנית הינה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)^2 = 0$$

לכן הערכים העצמיים הם $\lambda = 5$, $\lambda = -1$.

נמצא ו"ע עבור $\lambda = -1$:

$$A-(-1)I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{\lambda=-1} = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_3} \right\} \Leftarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נמצא ו"ע עבור $\lambda = 5$:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{} \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{\lambda=5} = \text{span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1} \right\}$$

נקבל בסיס אורתונורמלי מו"ע:

$V_{\lambda=5}$ $\qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \left(u_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}\right)$

$V_{\lambda=-1}$ $\qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \left(u_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}\right)$

$$W_3 = V_3 - \langle V_3, u_2 \rangle \cdot u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס אורתונורמלי הוא:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן עבור המטריצה :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

נקבל כי $A = P\cdot D\cdot P^T$ כאשר $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ההצבה המבוקשת היא :

$$\underline{y} = P^T\cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} \\ \frac{-x_1+x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-x_1-x_2+2x_3}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow y_1 \\ \leftarrow y_2 \\ \leftarrow y_3 \end{matrix}$$

$$q(\underline{y}) = \underline{y}^T\cdot D\cdot \underline{y}$$

$$q(\underline{y}) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

או במשתנים ישנים :

$$q(\underline{x}) = \frac{5}{3}(x_1+x_2+x_3)^2 - \frac{1}{2}(-x_1+x_2)^2 - \frac{1}{6}(-x_1-x_2+2x_3)^2$$

משפט סילבסטר :

תהא A מטריצה סימטרית אזי קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $A = P\cdot D\cdot P^T$, כאשר :

$$D = \mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1,0,\dots,0)$$

הוכחה :

A סימטרית ממשית לכן A לכסינה אורתוגונלית כלומר קיימת מטריצה אורתוגונלית Q כך ש- $A = QDQ^T$.

$$D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_k}_{\text{חיוביים}}, \underbrace{\mu_1,\dots,\mu_m}_{\text{שליליים}}, \underbrace{0,\dots,0}_{\text{ת}})$$

נגדיר 2 מטריצות ממשיות אלכסוניות :

$$L = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_k}, \sqrt{-\mu_1}\dots\sqrt{-\mu_m}, 1,\dots,1)$$

$$R = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}},\dots,\frac{1}{\sqrt{-\mu_m}}, 1,\dots,1\right)$$

מתקיים: $R\cdot L = L\cdot R = I$ ו- $R^T = R$, $L^T = L$.

לכן :

$$A = QDQ^T = Q\cdot LRD\overbrace{LR}^{RL}Q^T$$

$$= QL\cdot RDR\cdot \underbrace{LQ^T}_{(QL^T)^T = (QL)^T}$$

$$= QL\cdot \boxed{RDR}\cdot (QL)^T$$

נסמן $P = QL$:

$$= P\cdot \mathrm{diag}(1,\dots,1\ ,\ -1,\dots,-1\ ,\ 0,\dots,0)\cdot P^T$$

הערה: מספר ה-1-ים = מספר ע"ע חיוביים כולל ריבוי אלגברי.
מספר ה-(1-)-ים = מספר ע"ע שליליים כולל ריבוי אלגברי.
מספר ה-(0)-ים = ריבוי אלגברי של ע"ע 0.

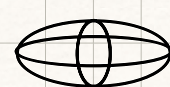
לכל תבנית ריבועית כזו ניתן להתאים שלישיה (k,m,n)
כאשר: k - מספר ה-1-ים.
m - מספר ה-(1-)-ים.
n - מספר ה-(0)-ים.

השלישיה הזאת נקראת סיגנטורה של תבנית ריבועית.
הסיגנטורה של תבנית $q(\underline{x})$ מאפשרת לגלות מה היא הצורה הגיאומטרית המתאימה למשוואה $q(\underline{x}) = 1$.

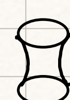
בדוגמה שראינו הסיגנטורה הייתה: $(1,2,0)$
המשוואה $q(\underline{x})=1$ מתארת משטח מסוים במרחב.

ב-$\mathbb{R}^2$ עבור תבנית ריבועית $q(\underline{x})$ יש סיגנטורות שמתאימות למשוואה $q(\underline{x})=1$:
$(2,0,0)$ - אליפסה
$(1,1,0)$ - היפרבולה
$(1,0,1)$ - זוג ישרים

ב-$\mathbb{R}^3$ יש יותר סיגנטורות שמתאימות למשוואה $q(\underline{x})=1$:
$(3,0,0)$ - אליפסואיד.

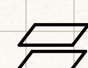


$(2,1,0)$ - היפרבולואיד חד יריעתי.

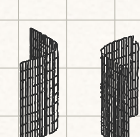


$(2,0,1)$ - גליל

$(1,2,0)$ - היפרבולואיד דו יריעתי



$(1,0,2)$ - זוג מישורים מקבילים



גליל היפרבולי

$(1,1,1)$ - גליל היפרבולי

מסקנה: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=1$

המשוואה מתארת היפרבולואיד דו יריעתי כי הסיגנטורה היא $(1,2,0)$

דוגמה: ב- $\mathbb{R}^2$ נתונה תבנית ריבועית $q(x,y)=x^2+axy+y^2$

קבעו מהו סוג היריעה $q(x,y)=1$ בהתאם לערך פרמטר $a\in\mathbb{R}$.