פרק 9 - מטריצת מעבר בסיס ומטריצה מייצגת

תזכורת:

יהיו V, U שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F.

העתקה $T: V \to U$ נקראת העתקה לינארית, אם לכל $u,v \in V$ ולכל $\alpha,\beta \in F$ מתקיים: $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

עד כה ראינו גם:

1. העתקה לינארית, $T: V \to V$ נקראת אופרטור לינארי.
2. אם $T: V \to U$ לינארית אז $T(0)=0$ וגם $T(-v)=-T(v)$.
3. הגרעין של T: $Ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0\}$ והוא תת מרחב וקטורי של V.
4. התמונה של T: $Im(T)=\{u\in U \mid \exists v\in V, T(v)=u\}$ והיא תת מרחב וקטורי של U.
5. T חח"ע אמ"מ: $Ker(T)=\{0\}$.
6. T על אמ"מ $\dim(Im(T))=\dim(U)$.
7. תמונות של בסיס ל-V פורשות את התמונה של T.
8. משפט המימדים השני: $\dim V=\dim Ker(T)+\dim Im(T)$
9. העתקה לינארית T המוגדרת על איברי בסיס של V קיימת ומוגדרת היטב.

דוגמה חשובה:

תהי $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ העתקה המוגדרת ע"י $T(v)=Av$, כאשר: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}$

למשל:

$$\underbrace{T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^4}=A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}}_{3\times4}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{4\times1}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\6\\11\end{pmatrix}}_{3\times1}\in\mathbb{R}^3$$

א. הראו ש- T לינארית.

ב. מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ד. הכלילו עבור $T:F^n\to F^m$ המוגדרת ע"י $T(v)=Av$ כאשר $A\in F^{m\times n}$.

פתרון:

א. נראה ש- T לינארית. יהיו $u,v\in\mathbb{R}^4$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי צריך להראות $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

$$T(\alpha u+\beta v)=A(\alpha u+\beta v)=A(\alpha u)+A(\beta v)=\alpha\underbrace{Au}_{T(u)}+\beta\underbrace{Av}_{T(v)}=\alpha T(u)+\beta T(v)\ \checkmark$$

לכן T לינארית.

ב. בסיס ומימד לתמונה $Im(T)$.

ראינו שאם ניקח בסיס של $\mathbb{R}^4$ ונפעיל עליו T, נקבל קבוצה פורשת לתמונה.

נפעיל את T על הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$:

$$E=\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$T(e_1)=A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\\C_1\\|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T(e_3)=A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\\C_3\\|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$T(e_2)=A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\\C_2\\|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$T(e_4)=A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\1&2&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\\C_4\\|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$$

לכן: $Im(T) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\right\}$

לקבלת בסיס נדרג את A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow B_{ImT} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad \dim Im(T) = 3$$

ב) בסיס ומימד לגרעין של T.

מחפשים $V \in \mathbb{R}^4$ המקיים $T(V) = AV = 0$.

כלומר יש לפתור את המע"ה ההומוגנית $AV = 0$.

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&1&2&3&0\\1&2&3&5&0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}a&b&c&d\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&2&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\end{array} \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix}a-c=0\\b+2c=0\\d=0\end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\-2c\\c\\0\end{pmatrix} \Rightarrow c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow B_{kerT} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

קיבלנו כי הגרעין הוא מרחב הפתרונות של המע"ה ההומוגני $A\vec{X}=0$ ולכן מימד הגרעין הוא מימד הפתרונות של $A\vec{X}=0$ כלומר: $\dim(ker(T)) = 4 - rank(A) = 4 - 3 = 1$

ג) הכללה עבור $T: F^n \to F^m$ המוגדרת ע"י $T(V) = AV$ כאשר $A \in F^{m \times n}$.

ראינו כי ההוכחה ש- T לינארית לא תלויה באיברי המטריצה A.

בנוסף ראינו שבמקרה זה, ע"י הפעלת T על הבסיס הסטנדרטי של F^n נקבל: $Im(T) = col(A)$

מכאן נובע: $\dim(Im(T)) = rank(A)$

ראינו שהגרעין הוא מרחב הפתרונות של $A\vec{X}=0$.

ממשפט המימדים השני נובע: $\dim(ker(T)) = \dim V - \dim(Im(T)) = n - rank(A)$

מטריצה של אופרטור לפי בסיס כלשהו

נתונים שני בסיסים של $\mathbb{R}^n$:

$$B=\{b_1,\dots,b_n\}\ ,\ C=\{c_1,\dots,c_n\}$$

ראינו כיצד עבור וקטור v נוכל למצוא את $[V]_B$ ואת $[V]_C$.

כעת נרצה למצוא את הקשר ביניהם. נחשוב על בסיס B כבסיס "ישן" ונרצה לעבור לבסיס "חדש" C.

כל איבר בבסיס B נוכל לתאר באמצעות C.

$$b_1=a_{11}\cdot c_1+a_{21}\cdot c_2+\ \dots\ +a_{n1}\cdot c_n$$

$$\dots$$

$$b_n=a_{1n}\cdot c_1+a_{2n}\cdot c_2+\dots+a_{nn}\cdot c_n$$

נבנה מטריצה אשר עמודותיה יהיו וקטורי הקואורדינטות של איברי הבסיס B, לפי הבסיס C.

סך הכל נקבל את מטריצת המעבר מ- B ל- C:

$$[I]_C^B=\big([b_1]_C\ [b_2]_C\ \cdots\ [b_n]_C\big)$$

מטריצת המעבר מקיימת את הקשר: $[I]_C^B\cdot[V]_B=[V]_C$

כאשר כופלים במטריצת המעבר המשמעות היא שאנחנו מתרגמים את וקטור הקואורדינטות שפעם נמצא בבסיס B לוקטור קואורדינטות בבסיס אחר (במקרה זה בבסיס C).

תכונות של מטריצת מעבר:

1. מטריצת מעבר תמיד הפיכה ומתקיים: $\left([I]_C^B\right)^{-1}=[I]_B^C$

2. לכל שלושה בסיסים B,C,D מתקיים: $[I]_D^B=[I]_D^C\,[I]_C^B$

3. לכל בסיס B מתקיים: $[I]_B^B=I$

4. נסמן ב- E את הבסיס הטבעי, אז מתקיים $[I]_E^B=(b_1\,b_2\dots b_n)$ זו מטריצה שעמודותיה הן איברי הבסיס B.
כמו כן מתקיים $[I]_B^E=\left([I]_E^B\right)^{-1}=(b_1\,b_2\dots b_n)^{-1}$ (ההופכית למטריצה הנ"ל).

איך מוצאים בפועל מטריצת מעבר:

בהינתן שני בסיסים:

$$B=(b_1,b_2,\dots,b_n)\ ,\ C=(c_1,c_2,\dots c_n)$$

כדי למצוא את המטריצה $[I]_C^B$ נבנה מטריצה מורחבת מהצורה:

$$\left(c_1,c_2\dots,c_n\mid b_1,b_2,\dots b_n\right)$$

נדרג אותה לצורה קנונית עד שנגיע למצב סופי בו $(I_n\mid M)$.

המטריצה מצד ימין (M) מקיימת $M=[I]_C^B$ והיא מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C.

- כעת לאחר שמצאנו את מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C נוכל להיעזר בה כדי למצוא את מטריצת המעבר בכיוון ההפוך (מבסיס C לבסיס B). לפי המשפט $[I]_B^C=\left([I]_C^B\right)^{-1}$.

הערה: היה ניתן כמובן לחשב את $[I]_B^C$ באופן ישיר על ידי דירוג המטריצה המורחבת $(b_1,b_2\dots b_n\mid c_1,c_2\dots c_n)$ לצורה קנונית.

דוגמאות :

1) נתונים 2 בסיסים של $\mathbf{R}^3$:

$B=\{\bar{b}_1=(1,1,1),\bar{b}_2=(1,2,1),\bar{b}_3=(1,1,2)\}$, $C=\{\bar{c}_1=(1,0,1),\bar{c}_2=(1,-1,0),\bar{c}_2=(1,-2,0)\}$.

מצא את מטריצת המעבר $[I]_C^B$, את $\bar{u}$ ואת $[\bar{u}]_C$, כאשר $[\bar{u}]_B=(3,-2,4)$.

נתונים שני הבסיסים :

$$B=\left\{\overset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}},\overset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}},\overset{b_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}\right\}\qquad C=\left\{\overset{c_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}},\overset{c_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}},\overset{c_3}{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}\right\}$$

אנחנו נדרשים למצוא את מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס C :

$$[I]_C^B=\left(c_1\,c_2\,c_3\,\middle|\,b_1\,b_2\,b_3\right)$$

$$[I]_C^B=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&1&2&1\\1&0&0&1&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&1&2&1\\0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&3&2\\0&-1&-2&1&2&1\\0&0&1&-1&-2&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to R_2+2R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&2\\0&-1&0&-1&-2&1\\0&0&1&-1&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&2\\0&1&0&1&2&-1\\0&0&1&-1&-2&0\end{array}\right)\Rightarrow [I]_C^B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$$

כעת נחשב את הוקטור u בבסיס C . הוקטור u נתון בבסיס B . אם ניקח את הוקטור בבסיס B ונכפיל אותו במטריצת המעבר נקבל את הוקטור בבסיס C :

$$[I]_C^B\cdot[u]_B=[u]_C$$

$$\underset{3\times3}{\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\-1&-2&0\end{pmatrix}}\cdot\underset{3\times1}{\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}9\\-5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow [u]_C=\begin{pmatrix}9\\-5\\1\end{pmatrix}$$

נחשב את הוקטור u לפי קואורדינטות בבסיס B :

נתון קואורדינטות : $[u]_B=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$

ונתון בסיס B : $B=\left\{\overset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}},\overset{b_2}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}},\overset{b_3}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}\right\}$

$$\vec{u}=3b_1-2b_2+4b_3=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\9\end{pmatrix}$$

נוכל לחשב את u גם לפי בסיס C :

נתון $[u]_C$ קואורדינטות : $[u]_C=\begin{pmatrix}9\\-5\\1\end{pmatrix}$

נתון בסיס C : $C=\left\{\overset{c_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}},\overset{c_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}},\overset{c_3}{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}\right\}$

$$u=9c_1-5c_2+c_3=9\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\9\end{pmatrix}$$

ראינו שניתן להגיע לאותה תוצאה עבור u. פעם אחת עם חישוב בבסיס B ופעם אחת עם חישוב בבסיס C.

2) נתונה מטריצת מעבר בסיס $[I]_C^B=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}$ וידוע כי $B=\{\bar{b}_1=(4,7),\bar{b}_2=(-1,-2)\}$.

מצא את הבסיס C.

יש לנו 3 בסיסים: בסיס B, בסיס E טבעי ובסיס C אותו אנו צריכים למצוא.

נוסחה:
$$[I]_E^C=[I]_E^B\,[I]_B^C$$

$$[I]_E^B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C=\left([I]_C^B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\5&7&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}10&15&5&0\\10&14&0&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}10&15&5&0\\0&-1&-5&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+15R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}10&0&-70&30\\0&-1&-5&2\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-7&3\\0&1&5&-2\end{array}\right)$$

$$[I]_B^C=\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$$

נוסחה:
$$[I]_E^C=[I]_E^B\,[I]_B^C$$

$$[I]_E^C=\begin{pmatrix}4&-1\\7&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-33&14\\-59&25\end{pmatrix}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}-33\\-59\end{pmatrix},\begin{pmatrix}14\\25\end{pmatrix}\right\}$$

3) נתונות מטריצות מעבר בסיס $[I]_C^B=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}, [I]_B^E=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$

מצא את מטריצת מעבר בסיס $[I]_E^C$, כאשר E - הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$.

$$[I]_E^C=[I]_E^B\cdot[I]_B^C \longleftarrow \text{נוסחה}$$

$$[I]_E^B=\left([I]_B^E\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$[I]_B^C=\left([I]_C^B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\5&7\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}$$

$$[I]_E^C=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&3\\5&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-43&18\\12&-5\end{pmatrix}$$

8) נתונה מטריצת מעבר בסיס $[I]_C^B = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}$ וידוע כי $B=\{\bar b_1=(-1,1,-1), \bar b_2=(-1,0,-1), \bar b_3=(1,-1,0)\}$. מצא את הבסיס C.

$$[I]^C_E = [I]^B_E \cdot [I]^C_B$$

$$[I]^B_E = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$[I]^C_B = \left([I]^B_C\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&-2&1\\1&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$[I]^C_E = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&3&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&0&2\\2&-1&0\\-2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&3&5&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&1&3&-2&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&-1&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1+R_3]{R_2\to R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&1&3&-2\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

לכן בסיס C: $C=\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

הצגת אופרטור לינארי בבסיס כללי B

נסמן את הבסיס הסטנדרטי ב- E. ראינו שעבור אופרטור לינארי T מתקיים $[T]_E = \left(T(e_1)\ T(e_2) \dots T(e_n)\right)$

כלומר המטריצה המייצגת של אופרטור T ביחס לבסיס הסטנדרטי/טבעי מורכבת מעמודות שהן הוקטורים $T(e_1)\dots T(e_n)$

כאשר נרצה להעביר את האופרטור לבסיס אחר:

$$[T]_B = [I]^E_B [T]_E [I]^B_E$$

המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס B מתקבלת ע"י כפל של 3 מטריצות שונות.

הראשונה מימין $[I]^B_E$ מוצגת ע"י $(b_1 \dots b_n)$ - וקטורי הבסיס B כעמודות.

המטריצה הבאה $[T]_E$ גם היא ידועה ומורכבת מ- $T(e_1)\dots T(e_n)$.

המטריצה השמאלית $[I]^E_B$ היא ההופכית של הראשונה.

נוסחה נוספת להצגת אופרטור T בבסיס כללי B היא: $[T(u)]_B = [T]_B [u]_B$

דוגמאות:

4) $T:\mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ מתאים לכל וקטור $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ את התמונה
$(x_1+x_2+x_3, -x_1-x_2-x_3, 3x_1+3x_2+3x_3)\in\mathbf{R}^3$
מצא את המטריצה $[T]_B$ המייצגת אותו בבסיס
$B=\{\bar b_1=(1,1,1), \bar b_2=(0,1,2), \bar b_3=(0,1,3)\}$
וחשב את $[T\bar u]_B$, כאשר $[\bar u]_B=(-3,-1,1)$

כדי למצוא את $[T]_B$. ניעזר בנוסחה: $[T]_B = [I]^E_B [T]_E [I]^B_E$

$$[I]^B_E = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$[I]^E_B = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&2&3&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow [I]_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_e = \Big(T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_3) \Big)$$

$$\left.\begin{array}{l} T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 \\ -1-0-0 \\ 3+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 \\ 0-1-0 \\ 0+3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ T(e_3) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 \\ 0-0-1 \\ 0+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = [I]_B^E [T]_E [I]_E^B$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -8 & -8 & -8 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -24 & -24 & -32 \\ 18 & 18 & 24 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -24 & -24 & -32 \\ 18 & 18 & 24 \end{pmatrix}$$

נתון $[u]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ וצריך למצוא את $[T(u)]_B$

$$[T(u)]_B = [T]_B \cdot [u]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -24 & -24 & -32 \\ 18 & 18 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 64 \\ -48 \end{pmatrix}$$

13) $T:\mathbf{R}^4 \mapsto \mathbf{R}^4$ מתאים לכל וקטור $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbf{R}^4$ את התמונה
$(x_1+x_2+x_3+x_4, x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+x_4, x_1+x_3+x_4)\in\mathbf{R}^4$
מצא את המטריצה $[T]_B$ המייצגת אותו בבסיס
$B=\{\bar{b}_1=(1,-1,0,0), \bar{b}_2=(0,-1,1,0), \bar{b}_3=(1,-1,1,0), \bar{b}_4=(1,-1,0,1)\}$
וחשב את תמונתו $T\bar{u}$ של וקטור $\bar{u}$, כאשר $[\bar{u}]_B=(3,-1,1,2)$ ב - 2 הדרכים הבאות:
א. מציאת $\bar{u}$ תוך שימוש במטריצת מעבר בסיס המתאימה והצבתו בתבנית של T
ב. מציאת $[T\bar{u}]_B$ תוך שימוש במטריצה $[T]_B$ ולאחר מכן מציאת $T\bar{u}$ תוך שימוש במטריצת מעבר הבסיס המתאימה.

א) נחשב קודם את הוקטור u בהינתן הבסיס הנתון.

נתון בסיס B:

$$B=\left\{ \overset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_3}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{b_4}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}$$

$$u = 3b_1 - b_2 + b_3 + 2b_4$$

$$u = 3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-5\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix}6\\-5\\0\\2\end{pmatrix}$$

כעת נחשב את $T(\vec{u})$:

$$T(\vec{u}) = T\begin{pmatrix}6\\-5\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-5+0+2\\6-5+0\\6-5+2\\6+0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\\8\end{pmatrix} \Rightarrow T(\vec{u}) = \begin{pmatrix}3\\1\\3\\8\end{pmatrix}$$

ב) נמצא קודם את $[T]_B$ ניעזר בנוסחה: $[T]_B = [I]^E_B [T]_E [I]^B_E$

$$[I]^B_E = \begin{pmatrix}1&0&1&1\\-1&-1&-1&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$[I]^E_B = \begin{pmatrix}1&0&1&1\\-1&-1&-1&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\-1&-1&-1&-1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2+R_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&-1&-1&0\\0&-1&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&-1&-1&-1\\0&-1&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&-1&-1&-1\\0&1&0&0&-1&-1&0&0\\0&0&1&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \Rightarrow [I]^E_B = \begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\-1&-1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0+0\\1+0+0\\1+0+0\\1+0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad T(e_3) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+1+0\\0+0+1\\0+0+0\\0+1+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1+0+0\\1+0+0\\0+1+0\\0+0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T(e_4) = T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0+1\\0+0+0\\0+0+1\\0+0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$[I]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_B^E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = [I]_B^E \, [T]_E \, [I]_E^B$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[T(u)]_B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{[T]_B} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{[u]_B} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$T(u) = [I]_E^B \cdot [T(u)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$