חדו"א 1 הרצאה מס' 1

סדרה היא קבוצה מסודרת וממוספרת. בהמשך נדבר על סדרות אינסופיות (בעלות אינסוף איברים).
ניתן להגדיר סדרה: $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ באמצעות נוסחה לחישוב האיבר הכללי שלה.
לדוגמה נתונה הסדרה $\{n^2\}_1^\infty$, צורה אחרת נתונה הסדרה האינסופית $\{1^2,2^2,3^2,\dots n^2,\dots\}$.

הגדרה 1: סדרה $\{a_n\}$ חסומה מלמעלה אם קיים מספר M כזה שעבור כל איבר הסדרה a_n מתקיים $a_n\le M$.
המספר M נקרא חסם מלמעלה של הסדרה a_n. החסם מלמעלה הקטן ביותר נקרא סופרמום ומסומן: $\sup\{a_n\}$.

דוגמה: נתונה הסדרה $a_n=2-\frac{1}{n}$. בתור חסם מלמעלה אפשר לקחת את המספר 5, כי עבור כל איבר הסדרה מתקיים $a_n\le 5$
לכן לפי הגדרה הסדרה חסומה מלמעלה ע"י 5. החסם מלמעלה הקטן ביותר שווה ל-2 כלומר: $\sup\{a_n\}=2$.

הגדרה 2: סדרה $\{a_n\}$ חסומה מלמטה אם קיים מספר m כזה שעבור כל איבר הסדרה a_n מתקיים: $a_n\ge m$.
המספר m נקרא חסם מלמטה. החסם מלמטה הגדול ביותר נקרא אינפימום של סדרה ומסומן: $\inf\{a_n\}$.

דוגמה: נתונה הסדרה $a_n=\sqrt{n}$. הסדרה חסומה מלמטה על ידי -3 למשל. עבור כל n טבעי מתקיים $a_n\ge -3$ ($\sqrt{n}\ge -3$).
לכן -3 הוא חסם מלמטה של a_n. החסם מלמטה הגדול ביותר הוא 1 ולכן: $\inf\{a_n\}=1$.

הגדרה 3: סדרה $\{a_n\}$ חסומה אם היא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.
דוגמה: הסדרה $a_n=1+\frac{1}{n}$ חסומה כי היא חסומה מלמטה ע"י 1 וחסומה מלמעלה ע"י 2.

הגדרה 4: סדרה $\{a_n\}$ מונוטונית עולה אם עבור כל n מתקיים $a_{n+1}>a_n$ (או $a_{n+1}-a_n>0$ או $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ כאשר $a_n>0$)
הגדרה 5: סדרה $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת אם עבור כל n מתקיים $a_n>a_{n+1}$ (או $a_{n+1}-a_n<0$ או $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ כאשר $a_n>0$)

דוגמה: בדוק מונוטוניות של הסדרה $a_n=\frac{3^n}{2n}$.
נשתמש בתנאי המונוטוניות בעזרת הפרש של שני איברים סמוכים.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3^{n+1}}{2(n+1)}-\frac{3^n}{2n}=\frac{3^{n+1}\cdot n-3^n(n+1)}{2n(n+1)}=\frac{3^n(3n-n-1)}{2n(n+1)}=\frac{3^n(2n-1)}{2n(n+1)}>0$$

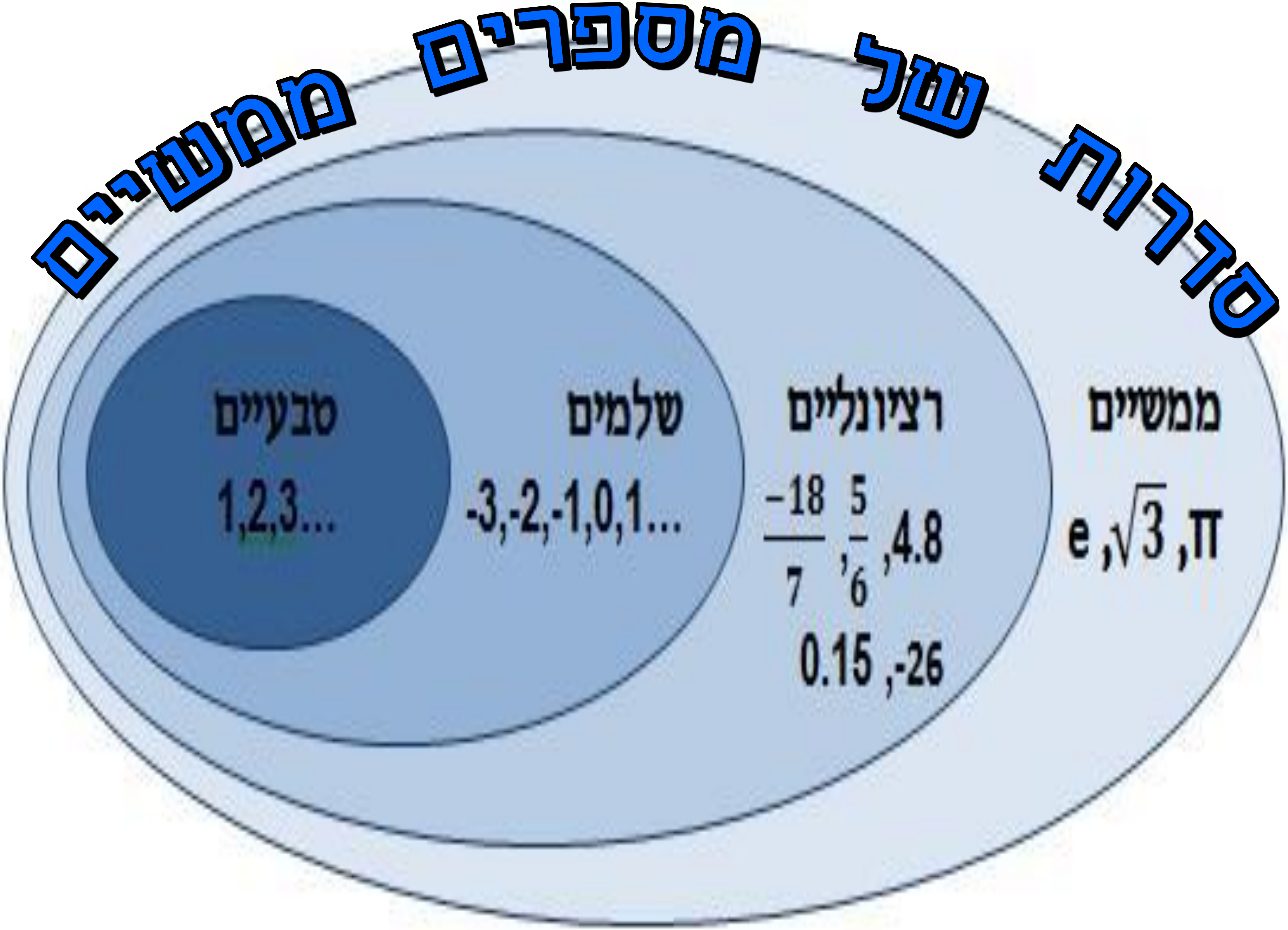
לכן הסדרה היא מונוטונית עולה כי עבור כל שני איברים סמוכים של הסדרה מתקיים $a_{n+1}-a_n>0$.

דוגמה: בדוק את מונוטוניות הסדרה: $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
נחשב את יחס של שני איברים סמוכים וכדי להשתחרר מהשורשים נכפול ונחלק את המונה ואת המכנה בצמוד שלו.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{n+2-n-1}{n+1-n}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<1$$

בשבר האחרון הביטוי של המונה קטן מהמכנה כי מתקיים $\sqrt{n+1}<\sqrt{n+2}$ ו- $\sqrt{n}<\sqrt{n+1}$ ולכן סדרה יורדת.



סדרות של מספרים ממשיים
טבעיים
1,2,3...
שלמים
-3,-2,-1,0,1...
רציונליים
$\frac{-18}{7}$, $\frac{5}{6}$, 4.8
0.15, -26
ממשיים
e, $\sqrt{3}$, π

1. הגדרת סדרה

בשפת היומיום משתמשים במונח "סדרה" לציון שורה של עצמים או של אירועים, המופיעים בסדר מסוים. המונח "סדרה" משמש במתמטיקה לתיאור שורת מספרים לפי חוקיות מסוימת.

למשל:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

שלוש הנקודות הרשומות בצד ימין מורות, שהסדרה נמשכת ללא סוף על פי חוקיות מסוימת.

הגדרה 1.

נתאים לכל מספר טבעי n מספר ממשי a_n :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & \ldots \end{array}$$

לקבוצת המספרים הסדורים המתקבלת בדרך זו נקרא ***סדרה*** או

סדרה אינסופית .

המספרים $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ נקראים ***איברי הסדרה***.

כל איבר נקבע בצורה יחידה על פי ***מיקומו*** בסדרה.

האיבר שנמצא במקום ה- n בסדרה מסומן על ידי a_n ונקרא

איבר הכללי של הסדרה.

מקובל לסמן סדרה אינסופית בקצרה ע"י $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

דוגמה 1

נרשום את חמישה האיברים הראשונים של הסדרה על ידי נוסחה

לאיבר כללי : $a_n = n^2$

דוגמה 2

נרשום את חמישה האיברים הראשונים של הסדרה על ידי נוסחה

לאיבר כללי : $a_n = \frac{n}{n+1}$

דוגמה 3

נרשום את חמישה האיברים הראשונים של הסדרה על ידי נוסחה

לאיבר כללי : $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

דוגמה 4

יהיו a ו-d שני מספרים ממשיים. אם לכל מספר טבעי n נגדיר :

$$a_n = a + d(n-1)$$

אז נקבל סדרה שנקראת ***סדרה חשבונית***.

המספר a הוא ***האיבר הראשון*** של הסדרה $(a_1=a)$

והמספר d נקרא ***ההפרש הקבוע*** של הסדרה.

דוגמה 5

יהיו a ו-q שני מספרים ממשיים ו- $q\neq 0$. אם לכל מספר טבעי n

נגדיר :

$$a_n = a \cdot q^{n-1}$$

אז נקבל סדרה שנקראת ***סדרה הנדסית***.

המספר a הוא ***האיבר הראשון*** של הסדרה $(a_1=a)$

והמספר q נקרא ***המנה*** של הסדרה.

דרך מיוחדת להגדרת סדרה היא ***הגדרה רקורסיבית.***

ההגדרה הרקורסיבית מורכבת משני חלקים:

(1) הערך של האיבר הראשון a_1

(2) נוסחת רקורסיה מן הצורה $a_{n+1} = f\left(a_n\right)$ שבאמצעותה ניתן לחשב את העוקף אם נתון לנו האיבר הקודם a_n

דוגמה 1

נרשום את חמישה האיברים הראשונים של הסדרה על ידי הגדרה הרקורסיבית: $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3 \cdot (-1)^n$

דוגמה 2

נרשום את חמישה האיברים הראשונים של הסדרה על ידי הגדרה הרקורסיבית: $a_1 = a_2 = 1\ ,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

2. סדרות חסומות ולא חסומות

הגדרה 2.

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים מספר M

כך שלכל $n \in N$ מתקיים $a_n \le M$

מספר M נקרא **חסם מלעיל** של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

הגדרה 3.

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים מספר K

כך שלכל $n \in N$ מתקיים $a_n \ge K$

מספר K נקרא **חסם מלרע** של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

הגדרה 4.

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **נקראת חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

באופן שקול:

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **נקראת חסומה** אם קיים מספר M כך שלכל $n \in N$ מתקיים $|a_n| \leq M$

מספר M נקרא חסם מוחלט של הסדרה.

דוגמה 1

הסדרה $a_n = n^2 - n + 1$ חסומה מלמטה, אך לא חסומה מלמעלה.

דוגמה 2

הסדרה $\left\{3 - 2^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה אך לא חסומה מלמטה.

דוגמה 3

האם הסדרה $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ היא חסומה ?

דוגמה 4

הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ אינה חסומה לא מלמטה ולא מלמעלה.

3. סדרות מונוטוניות

הגדרה 5.

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית עולה** :

אם קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $a_n \leq a_{n+1}$

נאמר שהסדרה היא **מונוטונית עולה ממש** אם לכל $n \geq n_1$: $a_n < a_{n+1}$

הגדרה 6.

הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת **מונוטונית יורדת** :

אם קיים n_1 כך שלכל $n \geq n_1$ מתקיים $a_n \geq a_{n+1}$

נאמר שהסדרה היא **מונוטונית יורדת ממש** אם לכל $n \geq n_1$: $a_n > a_{n+1}$

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה

או מונוטונית יורדת.

דוגמה 1

הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

דוגמה 2

הסדרה $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

דוגמה 3

הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ אינה מונוטונית.

$-1, 2, -3, 4, -5, 6 \ldots$

4. גבול של סדרה

מושג הגבול הוא אבן יסוד של חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

כל המושגים המרכזיים, כמו רציפות, נגזרת, אינטגרל, מתבססים על מושג הגבול.

שימוש במושג זה מהווה קו אדום בין אלגברה לבין חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ומסמן מעבר מתהליכים סופיים לתהליכים אינסופיים.

דוגמה 1

נתבונן בסדרה : $a_n = \frac{1}{n}$

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4},\ a_5 = \frac{1}{5},\ a_6 = \frac{1}{6},\ \ldots$$

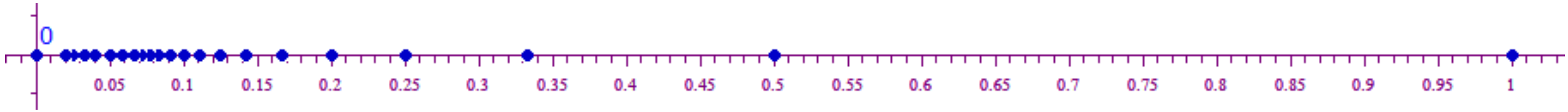
רואים כי כל איבר בסדרה קטן מקודמו וגדול מ-0

איברי הסדרה הולכים ומתקרבים ל-0 במובן כי ההפרש בין

האיבר הסדרה a_n לבין 0 הולך וקטן כאשר n הולך וגדל,

אף איבר לא יגיע ל- 0 .

ניתן לומר, כי הנקודה 0 **גובלת** משמאל לסדרה.



ננסה לתת ניסוח יותר מדויק של תופעה זו:

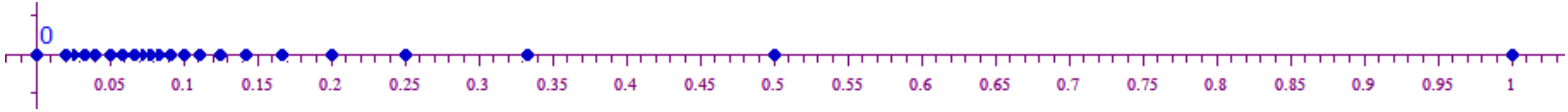
נבחר מספר קטן r וגדול מ-0 ונתבונן בקטע $(0,r)$.

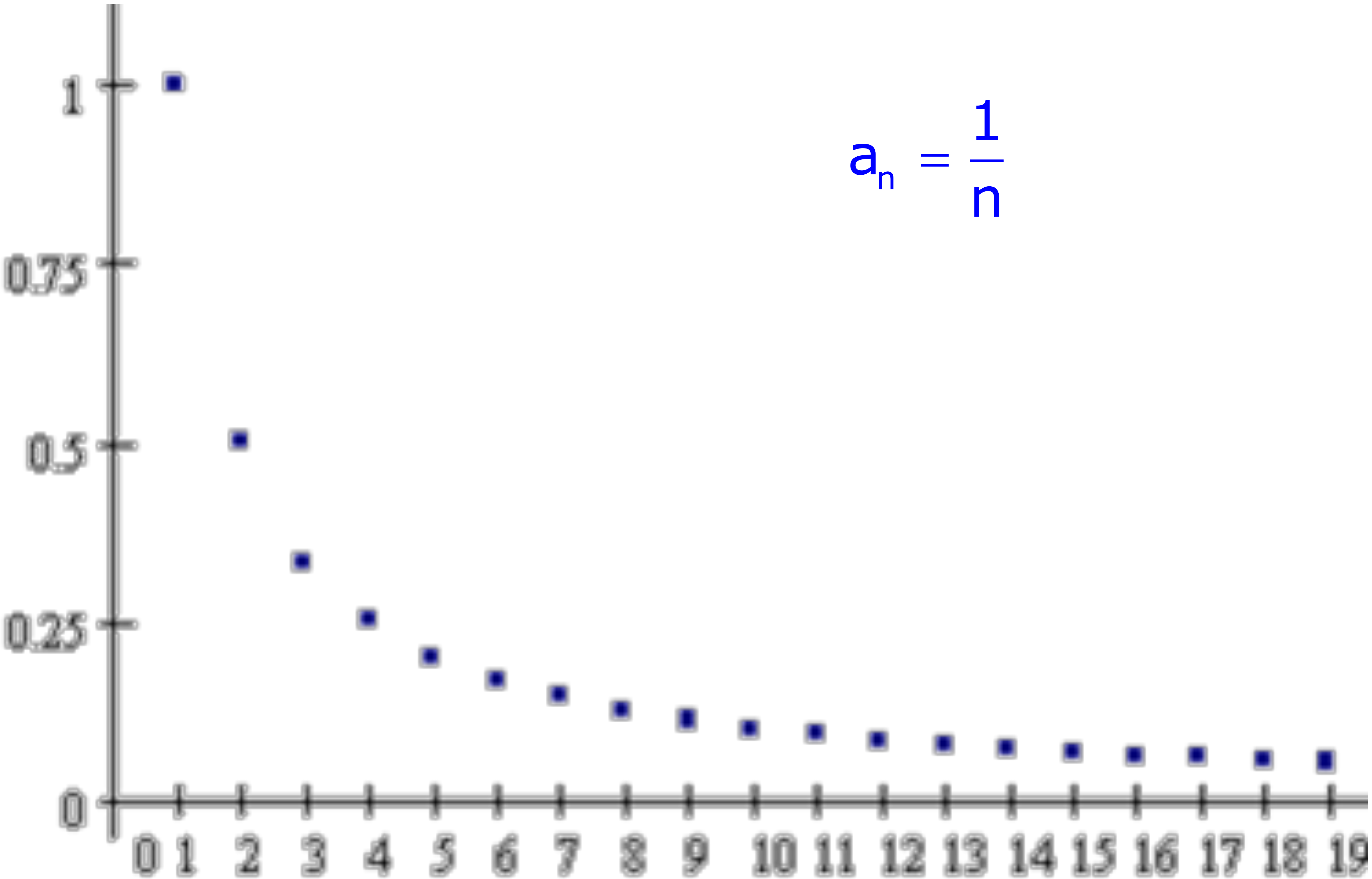
קיימים אינסוף מספרים טבעיים המקיימים את האי-שוויון:

$$\frac{1}{n} < r$$

הכוונה היא:

לכל n חוץ אולי ממספר סופי, a_n נמצא בתוך הקטע $(0,r)$.





1
0.75
0.5
0.25
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
$a_n = \frac{1}{n}$

דוגמה 2

נתונה סדרה : $a_n = \frac{n-1}{n}$

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{3}{4},\ a_5 = \frac{4}{5},\ a_6 = \frac{5}{6},\ \ldots$$

רואים כי כל איבר בסדרה גדול מקודמו וקטן מ-1

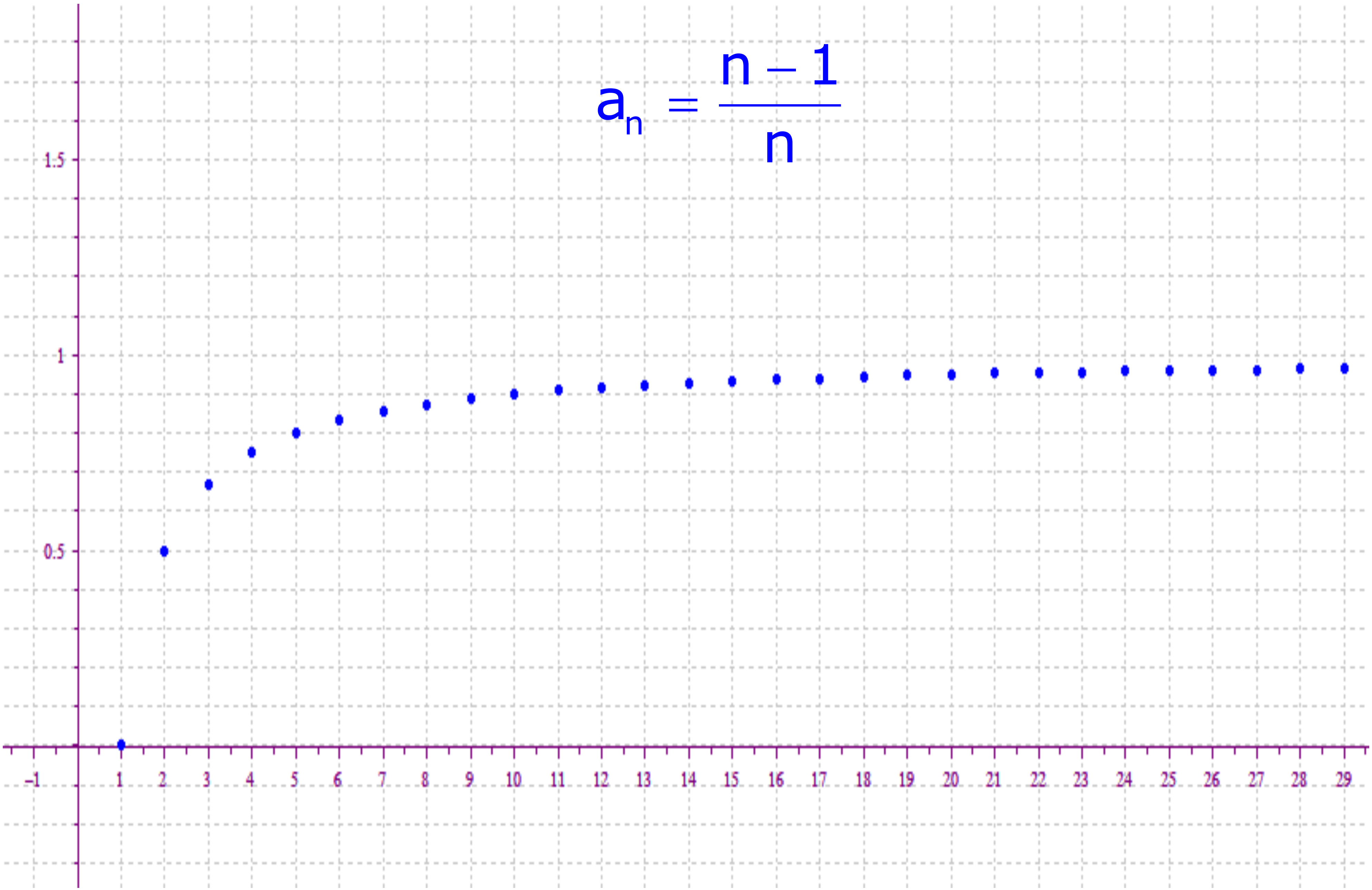
איברי הסדרה הולכים ומתקרבים ל-1 במובן כי ההפרש בין האיבר

הסדרה a_n לבין 1 הולך וקטן כאשר n הולך וגדל.

אף איבר לא יגיע ל- 1 .

ניתן לומר, כי הנקודה 1 **גובלת** מימין לסדרה, במובן כי בכל קטע

$(1-r,1)$, $r>0$, יש אינסוף איברי הסדרה.


$a_n = \frac{n-1}{n}$
1.5
1
0.5
-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29

הגדרה 1. ההגדרה האינטואיטיבית

המספר L נקרא גבול של הסדרה $\{a_n\}$ אם מתקיים מצב הבא:

כאשר מספר n הולך וגדל, הערך של a_n מתקרב ל- L כך,

שהמרחק מ- a_n עד ל- L יהיה קטן כרצוננו כאשר n יהיה

מספיק גדול.

מקובל לומר שסדרה מתכנסת לגבול L ולסמן : $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

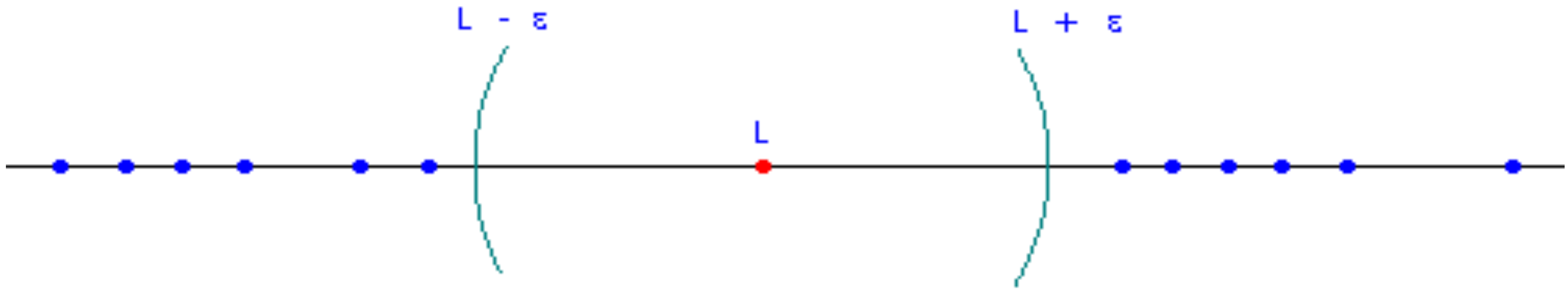
הגדרה 2. ההגדרה המתמטית המדויקת

המספר L נקרא גבול של הסדרה $\{a_n\}$ אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים מספר טבעי N כך שלכל $n>N$ מתקיים : $|a_n - L| < \varepsilon$

אם המספר L הינו הגבול של הסדרה $\{a_n\}$, אומרים כי סדרה זו ***מתכנסת*** למספר L.

הגדרה 3.

המספר L נקרא גבול של הסדרה $\{a_n\}$:
אם לכל $\varepsilon > 0$ יש לכל היותר מספר סופי של איברי הסדרה שאינם נמצאים בסביבה : $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$



תנאי הכרחי ומספיק לאי-קיום גבול:

הסדרה $\{a_n\}$ ***אינה מתכנסת*** לגבול L אם ורק אם קיים $\varepsilon > 0$ מסוים כך שאינסוף איברים של הסדרה נמצאים מחוץ לסביבה $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

דוגמה 1

הסדרה $a_n = (-1)^n$ אינה מתכנסת לשום גבול.

דוגמה 2

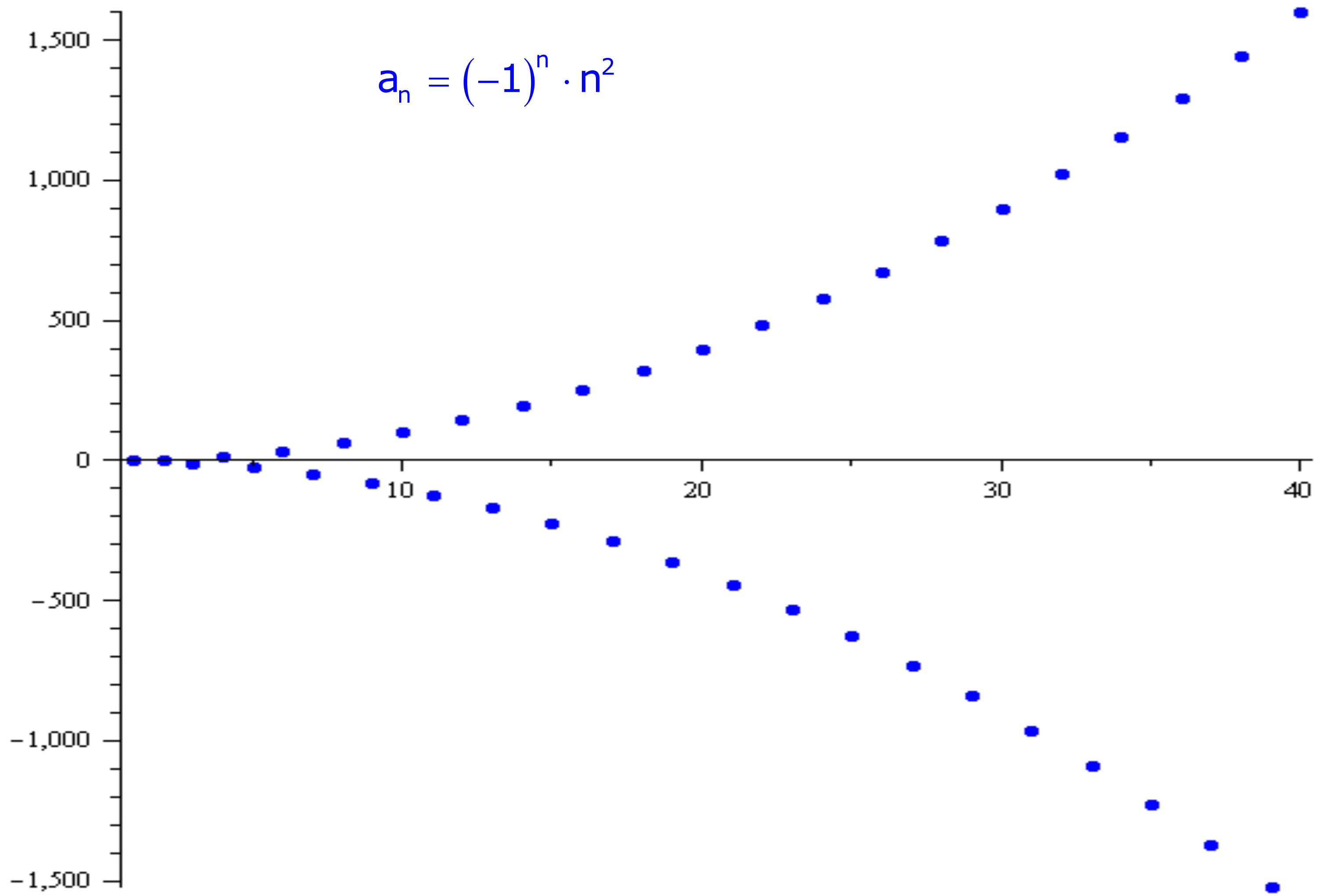
הסדרה $a_n = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{2}\right)$ אינה מתכנסת לשום גבול.

שאלה:

האם לכל סדרה $a_n = \frac{3}{n} + (-1)^n$ יש גבול ?

הגדרה 4 (התבדרות).

הסדרה $\{a_n\}$ נקראת ***סדרה מתבדרת*** אם איננה מתכנסת.



הגדרה 4 התכנסות באופן רחב.

תהיה $\{a_n\}$ סדרה של המספרים הממשיים.

אם לכל מספר M קיים מספר טבעי N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $a_n > M$

אז סדרה זו שואפת לפלוס אינסוף : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

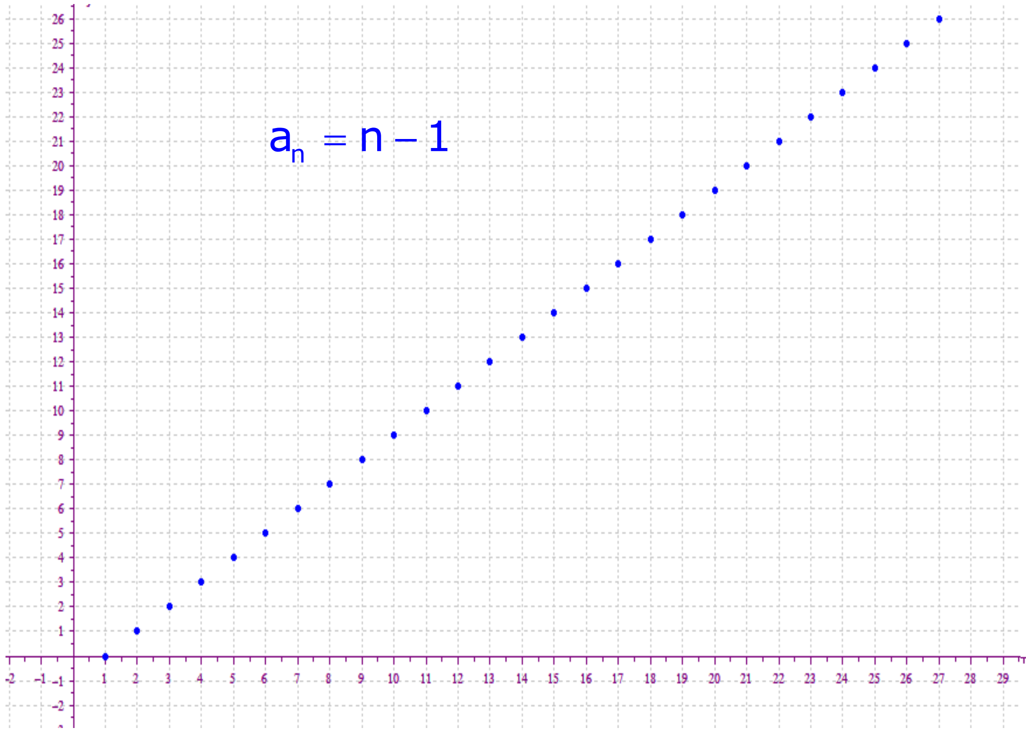
ואם לכל מספר M קיים מספר טבעי N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $a_n < M$

אז סדרה זו שואפת למינוס אינסוף : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

נציין ש**אין** להתייחס אל "$+\infty$" או "$-\infty$" כאל ***מספרים ממשיים***

אלא כאל סימני עזר קיצור בכתיבה.

דוגמאות



$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n-1) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n-n^2) = -\infty$$