פרק ט - ערכים עצמיים ולכסון

הקדמה:

בפרק הקודם ראינו כיצד מייצגים אופרטור לינארי באמצעות מטריצה.
ראינו שעבור אופרטור לינארי אחד, ניתן לבנות הרבה מטריצות מייצגות
ראינו גם שבהינתן מטריצה מייצגת והבסיס שלפיו "ייצגנו" את המטריצה, כל האינפורמציה של האופרטור "מוצפנת" במטריצה והיא מחליפה את הנוסחה של האופרטור.

דוגמה: עבור האופרטור $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המקיים $T(a,b)=(2a-b,4a-3b)$ נוכל לבנות הרבה מטריצות מייצגות בבסיסים שונים

$$T(a,b)=(2a-b,4a-3b)\xrightarrow[\text{בסיס סטנדרטי}]{\{(0,1),(1,0)\}}[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}2&-1\\4&-3\end{pmatrix}$$

$$T(a,b)=(2a-b,4a-3b)\xrightarrow[\text{בסיס כלשהו}]{\{(1,2),(2,5)\}}[T]_{B_2}=\begin{pmatrix}4&9\\-2&-5\end{pmatrix}$$

$$T(a,b)=(2a-b,4a-3b)\xrightarrow[\text{בסיס כלשהו}]{\{(1,1),(1,4)\}}[T]_{B_3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}$$

$\vdots$

ולמה זה טוב? כי לגבי מטריצות יש לנו הרבה תיאוריה, כלים ושיטות נוחות לעבודה עם מטריצות.
בדוגמה שלנו, ובמקרים רבים אחרים, עם קצת מזל, או שלא, מקבלים מטריצה מייצגת ממש כיפית - מטריצה אלכסונית!
אם קיים אופרטור שניתן למצוא לו בסיס שעבורו המטריצה המייצגת של T אלכסונית אז נקרא לאופרטור כזה אופרטור לכסין.
אם נצליח לייצג את האופרטור שלנו באמצעות מטריצה אלכסונית, כל המשך העבודה יהיה הרבה יותר קל כי למטריצות אלכסוניות יש הרבה תכונות וסגולות שאין למטריצות כלליות.

תזכורת - תכונות המטריצה האלכסונית

נסמן ב- S את מרחב המטריצות האלכסוניות מעל לשדה F: $S=\{A\in F^{n\times n} \mid A_{ij}=0,\ \forall i\neq j\}$ אז לכל $D_1,D_2\in S$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים:

1. S סגורה לכפל בסקלר: $\alpha D_1\in S$
2. S סגורה לחיבור: $D_1+D_2\in S$
3. S סגורה להעלאה בחזקה: $D_1^k\in S$: $k\in\mathbb{N}$
4. S סגורה לכפל: $D_1\cdot D_2\in S$ (כפל של מטריצה אלכסונית במטריצה אלכסונית = מטריצה אלכסונית)
5. האיברים של S מתחלפים בכפל: $D_1\cdot D_2=D_2\cdot D_1$ (הערה: עבור מטריצה כללית A: $AD_1\neq D_1A$).

דוגמה: נתון $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י: $T(a,b)=(a+3b,2a+2b)$

א) מצאו מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי E:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$$

ב) מצאו מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס $B=\{\underbrace{(1,1)}_{b_1},\underbrace{(3,-2)}_{b_2}\}$

$$\left.\begin{aligned}T(1,1)&=(4,4)=4\underbrace{(1,1)}_{b_1}+0\underbrace{(3,-2)}_{b_2}\\T(3,-2)&=(-3,2)=0\underbrace{(1,1)}_{b_1}+(-1)\underbrace{(3,-2)}_{b_2}\end{aligned}\right\}\quad[T]_B=\begin{pmatrix}4&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה אלכסונית ולכן האופרטור T הוא לכסין.

נתבונן כעת במטריצות המייצגות שמצאנו.

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad [T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

בין 2 המטריצות האלה מתקיים הקשר: $[T]_B = P^{-1}[T]_E P$ המטריצה P היא מטריצת המעבר מבסיס E לבסיס B

כלומר $P = [I]_E^B$ ולכן $[T]_B = [I]_P^E [T]_E [I]_E^B$ כמו שראינו בפרק על מטריצות מעבר. פשוט יותר נוח לכתוב $[T]_B = P^{-1}[T]_E P$ לכן נשאר בכתיבה זו. מטריצת המעבר מ-E ל-B היא $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

מתקיים:

$$[T]_B = P^{-1}[T]_E P$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{[T]_B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{[T]_E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

מכאן נובע כי $[T]_E$ ו- $[T]_B$ דומות. שתיהן מטריצות המייצגות את האופרטור T בבסיסים שונים

ג הראו כי אם T לכסין אז גם T^2 לכסין (מבלי לחשב את T^2):

כאמור מתקיים: $[T]_B = P^{-1}[T]_E P$, נכפול ב-P בצד שמאל וב-P^{-1} בצד ימין.

$$P \cdot [T]_B \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1}[T]_E P \cdot P^{-1}$$

$$P \cdot [T]_B \cdot P^{-1} = [T]_E$$

$$\Downarrow$$

$$[T]_E = P \cdot [T]_B \cdot P^{-1}$$

נחשב את $[T^2]_E$ כלומר, נחשב מטריצה מייצגת של T^2 לפי בסיס סטנדרטי E:

$$[T^2]_E = ([T]_E)^2 = (P \cdot [T]_B \cdot P^{-1})(P \cdot [T]_B \cdot P^{-1}) = P[T]_B \underbrace{P^{-1}P}_{I}[T]_B P^{-1}$$

$$= P[T]_B[T]_B P^{-1} = P(\underbrace{[T]_B}_{\text{אלכסונית}})^2 P^{-1} = P\underbrace{[T^2]_B}_{\text{אלכסונית}} P^{-1}$$

קיבלנו $[T^2]_E = P[T]_B^2 P^{-1}$ ולכן: $[T^2]_B = P^{-1}[T^2]_E P$ (צד מתקבל אז כפל מצד ימין/שמאל).

לכן המטריצה המייצגת של T^2 לפי בסיס B היא אלכסונית, לכן T לכסין.

ערכים עצמיים (ע"ע) ווקטורים עצמיים (ו"ע)

דוגמה:

נתון האופרטור הלינארי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדר ע"י $T(a,b)=(a+3b,\ 2a+2b)$

א) מצאו מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי $E=\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}$

$$\left.\begin{aligned} T(e_1)&=T(1,0)=(1,2)=1e_1+2e_2 \\ T(e_2)&=T(0,1)=(3,2)=3e_1+2e_2 \end{aligned}\right\}\ [T]_E=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ב) מצאו מטריצה מייצגת של T לפי הבסיס $B=\{v_1=(1,1),\ v_2=(3,-2)\}$:

$$\left.\begin{aligned} T(v_1)&=T(1,1)=(4,4)=4v_1+0v_2 \\ T(v_2)&=T(3,-2)=(-3,2)=0v_1+(-1)v_2 \end{aligned}\right\}\ [T]_B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כדי לקבל מטריצה אלכסונית, כל וקטור בבסיס צריך לקיים את התכונה:

$$T(v)=\lambda v$$

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.
וקטור $v\neq 0$ ב-V נקרא וקטור עצמי (ו"ע), של T אם קיים סקלר $\lambda\in F$, כך ש: $T(v)=\lambda v$.
הסקלר λ נקרא ערך עצמי (ע"ע) של T המתאים לוקטור העצמי v.

דוגמה: