הרצאה מספר 1

מרחבים וקטוריים:

הגדרה: יהי V קבוצה של איברים מטבע כלשהו (בהמשך נקרא לאיברים של V וקטורים).

יהי $\mathbb{F}$ שדה של מספרים ($F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$, בהמשך איברים של F נקראים סקלרים).

נגדיר 2 פעולות: $\oplus$ - חיבור של וקטורים ב- V

$\odot$ - כפל של וקטור מ- V בסקלר מ- F.

V נקרא מרחב וקטורי מעל F ביחס לפעולות הנ"ל אם הדרישות הבאות מתקיימות:

1. סגירות ביחס לחיבור ב- V: לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $v_1\oplus v_2\in V$.
2. קומוטטיביות של חיבור ב- V: לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $v_1\oplus v_2=v_2\oplus v_1$
3. אסוציאטיביות של חיבור ב- V: לכל $v_1,v_2,v_3\in V$ מתקיים: $(v_1\oplus v_2)\oplus v_3 = v_1\oplus(v_2\oplus v_3)$
4. קיום איבר ניטרלי ביחס לחיבור: ב- V קיים 0_F כך שלכל $v\in V$ מתקיים $v\oplus 0_F=0_F\oplus v=v$
5. קיום איבר נגדי ביחס לחיבור: לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך ש- $v\oplus -v=-v\oplus v=0_F$
6. סגירות ביחס לכפל בסקלר: לכל $v\in V$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים $\alpha\odot v\in V$
7. אסוציאטיביות ביחס לכפל בסקלר: לכל $v\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in F$ מתקיים: $\alpha\odot(\beta\odot v)=(\alpha\cdot\beta)\odot v$
8. דיסטריבוטיביות של כפל ביחס לחיבור: לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים: $\alpha\odot(v_1\oplus v_2)=(\alpha\odot v_1)\oplus(\alpha\odot v_2)$
   לכל $v\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in F$ מתקיים: $(\alpha+\beta)\odot v=(\alpha\odot v)\oplus(\beta\odot v)$
9. התאמה: לכל $v\in V$: מתקיים $1_F\odot v=v$.

תכונות שנובעות מהדרישות הנ"ל:

1. לכל $v\in V$ מתקיים: $0\odot v=0_V$.
2. איבר ניטרלי ב- V הוא יחיד.
3. לכל $v\in V$ האיבר הנגדי ב- V הוא יחיד.
4. לכל $v\in V$ מתקיים: $(-1)\odot v=-v$.
5. לכל $\alpha\in F$ מתקיים: $\alpha\odot 0_F=0_F$.
6. אם $\alpha\odot v=0_F$ אז $\alpha=0_F$ או $v=0_F$.

דוגמאות למרחבים וקטוריים סטנדרטיים:

1. נסמן $V=\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\end{pmatrix} \middle| x_1,x_2,\dots x_n\in\mathbb{R}\right\}$. נבחר $F=\mathbb{R}$.
   ונבחר $\oplus$ ו- $\odot$ להיות פעולות רגילות של חיבור וקטור עמודה וכפל וקטור עמודה בסקלר:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix} \qquad \alpha\odot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\\\vdots\\\alpha x_n\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ מהווה מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הנ"ל.

2. נסמן $\mathbb{C}^n=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix} \middle| z_1,z_2,\dots z_n\in\mathbb{C}\right\}$ וקטורי עמודה עם n רכיבים מרוכבים.
   נבחר $F=\mathbb{C}$ ו- $\oplus$ $\odot$ פעולות רגילות (כמו בסעיף 1).
   $\mathbb{C}^n$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ביחס לפעולות הרגילות.

3. נסמן $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ את קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ עם רכיבים ממשיים.
   נבחר $F=\mathbb{R}$ ונבחר $\oplus$ ו- $\odot$ להיות פעולות רגילות של חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.
   $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הרגילות.

④ גם $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ מהווה מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ביחס לפעולות הרגילות.

⑤ נסמן $\mathbb{R}_n[x] = \{P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \mid a_0,a_1,\dots a_n\in\mathbb{R}\}$

כל הפולינומים ממעלה n לכל היותר עם מקדמים ממשיים ונבחר $F\in\mathbb{R}$ ו- ⊕, ⊙ פעולות רגילות של חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר.

$\mathbb{R}_n[x]$ מהווה מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הרגילות (האיבר הנייטרלי - פולינום האפס: $0+0\cdot x+0\cdot x^2+\dots+0\cdot x^n$)

תת מרחבים וקטוריים:

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F ביחס לפעולות מסוימות.

תהי U תת קבוצה לא ריקה של V.

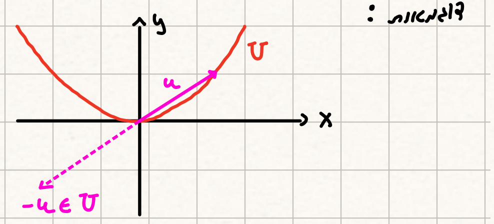
U נקראת תת מרחב וקטורי של V אם U בפני עצמה מהווה מרחב וקטורי מעל F ביחס לאותן הפעולות.

הערות:

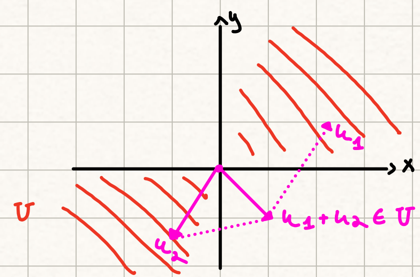
① לכל מ"ו V יש שני תמ"ו טריוויאלים: V עצמו, $\{0_V\}$ מרחב שמכיל את האיבר הנייטרלי.

② מכיוון שמדובר במרחבים רגילים עם פעולות רגילות נמשיך לסמן את הפעולות בצורה רגילה בלי להקפיד בעיגול.

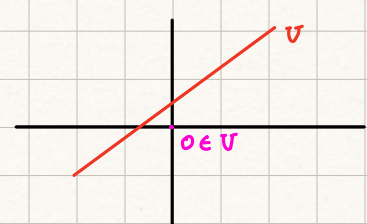
דוגמאות:



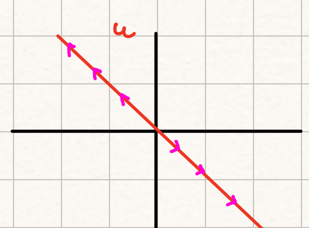
הנגדי לא שייך ל- U ולכן U לא תמ"ו



U לא תמ"ו של $\mathbb{R}$.



U לא תמ"ו של $\mathbb{R}^2$.



U תמ"ו של $\mathbb{R}^2$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות מסוימות.

תהי U תת קבוצה כלשהי של V.

U תת מרחב וקטורי של V אם ורק אם:

① U לא ריקה.

② יש סגירות ביחס לחיבור ב- U.

③ יש סגירות ביחס לכפל בסקלר ב- U.

הערה:

① מסגירות ביחס לכפל בסקלר נובע: $0_V\in U$

② את 2 הסגירויות לפעמים נוח לבדוק על ידי בדיקה משולבת

לכל $\alpha_1,\alpha_2\in F$ ולכל $u_1,u_2\in U$ נבדוק שמתקיים $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2\in U$

דוגמאות :

① $V=\mathbb{R}_2[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ עם פעולות רגילות.

נגדיר : $U=\{P(x)\in V \mid P(1)=0,\ P(-1)=0\}$

בדקו האם U תמ"ו של V.

פתרון :

פולינום האפס מקיים את התנאי להיות ב- U.

לכן $U\neq\emptyset$.

יהיו : $P(x),q(x)$ שני פולינומים מ- U, כלומר $P(1)=0, P(-1)=0$ ו- $q(-1)=0, q(1)=0$

מתקיים :

$$(P+q)(1)=P(1)+q(1)=0$$
$$(P+q)(-1)=P(-1)+q(-1)=0$$

לכן $P+q\in U$ יש סגירות לחיבור

יהי $P(x)\in U$ כלומר $P(1)=0,\ P(-1)=0$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\alpha\cdot P(1)=0$$
$$\alpha\cdot P(-1)=0$$

ולכן גם $\alpha\cdot P(x)\in U$ לכן יש סגירות ביחס לכפל בסקלר.

לכן U תמ"ו של V.

② $V=M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

נגדיר את U :

$$U=\{A\in V \mid trace(A)=0\}$$

נבדוק האם U תמ"ו של V :

בדיקת איבר ניטרלי -

$$\Theta=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}$$

מתקיים : $trace(\Theta)=0+0+\dots 0=0$

לכן $\Theta\in U$ כלומר U לא ריקה.

תהינה $A,B\in U$ כלומר $trace(A)=0$ וגם $trace(B)=0$

ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים :

$$trace(\alpha A+\beta B)=(\alpha\cdot a_{11}+\beta\cdot b_{11})+(\alpha a_{22}+\beta b_{22})+\dots\dots+(\alpha a_{nn}+\beta b_{nn})$$

$$=\alpha(\underbrace{a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}}_{trace(A)=0})+\beta(\underbrace{b_{11}+b_{22}+\dots b_{nn}}_{trace(B)=0})=0$$

לכן $\alpha\cdot A+\beta\cdot B\in U$ ולכן U תמ"ו של V.

③ נסמן $V=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מעל $\mathbb{R}$ ונתונה קבוצה U.

$$U=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid |A|=0\}$$

האם U תמ"ו של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

פתרון : $|\Theta|=0$ ולכן $\Theta\in U$ כלומר U לא ריקה.

תהינה $A,B\in U$ כלומר $|A|=|B|=0$. נבדוק האם בהכרח $|A+B|=0$

לצערנו אין תכונה שאומרת $|A+B|=|A|+|B|$

לדוגמה נבחר $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\in U$ ונבחר $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\in U$ מתקיים $A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

מתקיים $|A+B|=1\neq 0$ לכן $A+B\notin U$ ולכן U לא תמ״ו של $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$