הרצאה 8

משתנה מקרי רציף:

בניגוד למשתנה מקרי בדיד, שיכול לקבל מספר סופי של ערכים שונים, משתנה מקרי רציף יכול לקבל כל ערך בקטע של מספרים ממשיים. למשל, גובה של בני אדם - יכול להיות כל מספר בקטע $[0.5,3]$ (כשמודדים במטרים).

דוגמה נוספת היא זווית של המחוג הגדול בשעון ביחס לשעה 12 - כל מספר בקטע $[0,2\pi]$ (כשמודדים ברדיאנים)

במצב כזה, ההסתברות לקבלת ערך ספציפי מסוים היא 0. לכן, במשתנה מקרי רציף אנו מעוניינים לדעת מה ההסתברות שהערך נמצא בטווח מסוים של ערכים בתוך הקטע כולו.

למשל, מה ההסתברות שהגובה שלי הוא בדיוק 1.80 מטר? התשובה היא 0: $P(X=1.80)=0$. לעומת זאת ההסתברות שהגובה שלי בין 1.70 לבין 1.90 כבר גדולה מ-0.

דוגמה נוספת- ההסתברות שהמחוג בשעון יצביע בדיוק על השעה 4 היא 0, לעומת זאת ההסתברות שהמחוג בשעות יהיה בין 4 לבין 6 היא $P(4<X<6)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, שעתיים מתוך 12 שעות שמופיעות בשעון.

פונקציית צפיפות ההסתברות

יהי X משתנה מקרי רציף, פונקציית צפיפות ההסתברות של המשתנה המקרי X מסומנת: $f_X(x)$ והיא מוגדרת באופן הבא:

זו פונקציה המוגדרת בכל $\mathbb{R}$ ומקיימת את התכונות הבאות:

1. $f_X(x)\geq 0$ לכל $x\in\mathbb{R}$
2. לכל שני מספרים ממשיים $a<b$, ההסתברות $P(a<X<b)$ שווה לשטח שמתחת לגרף של f_X לאורך הקטע $[a,b]$

$$P(a<X<b)=\int_a^b f_X(x)\,dx$$

3. השטח מתחת לגרף הפונקציה לאורך כל $\mathbb{R}$ הוא 1 כלומר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1$$

הערה:

בניגוד למשתנה מקרי בדיד, שבו הרבה פעמים חישבנו את פונקציית ההסתברות (רשמנו טבלה), כאן במשתנה מקרי רציף פונקציית הצפיפות (או פונקציית ההתפלגות המצטברת, שנכיר בהמשך) תמיד יהיו נתונות לנו. אנחנו צריכים את פונקציית הצפיפות כדי לחשב את ההסתברות.

נשים לב: $P(a<X)=\int_a^{\infty} f_X(x)\,dx$ ובאופן דומה: $P(X<b)=\int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx$

מכיוון ש: $P(X=a)=P(X=b)=0$ אפשר לומר: $P(a<X<b)=P(a\leq X\leq b)$

דוגמה

פונקציית צפיפות ההסתברות של משתנה מקרי X מוגדרת באופן הבא:

$$f_X(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2} & 0\leq x\leq 2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

נוודא שזו אכן פונקציית צפיפות ונחשב את ההסתברויות: $P(X>1),P(X<1),\ P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{4})$

אם כן, לכל X, אכן $f_X(x)\geq 0$: אם $X>2$ או $X<0$ אז $f_X(x)=0$

אם $0\leq X\leq 2$ אז $0\leq\frac{X}{2}\leq 1$ ולכן $f_X(x)=1-\frac{x}{2}\geq 0$

כמו כן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{2} f_X(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 1-\frac{x}{2}\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \int_{0}^{2} 1-\frac{x}{2}\,dx = \left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{x=0}^{x=2} = 2-\frac{2^2}{4} = 1$$

ואכן $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$. לכן, f_X היא אכן פונקציית צפיפות הסתברות (היא חיובית לכל $x \geq 0$ והשטח מתחת לגרף שלה לאורך כל $\mathbb{R}$ הוא 1)

כעת, נחשב את ההסתברויות:

$$P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx = \left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{1} = \frac{3}{4}$$

$$P(X>1) = \int_{1}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{2} f_X(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1}^{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{x=1}^{x=2} = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f_X(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx = \left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{x=1/2}^{x=3/4} = \frac{11}{64}$$

דוגמה:

עבור אלו ערכים של הפרמטרים זו אכן פונקציית צפיפות. למשל, עבור אילו ערכים של a,b הפונקציה הבאה היא אכן פונקציית צפיפות.

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & 0<x<b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נשים לב ש- b חיובי. כדי ש- f תהיה חיובית, נדרוש ש- $0<a$. כמו כן, נדרוש גם שהאינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ יהיה 1.
כלומר:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{b} ax\,dx = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{ab^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \frac{ab^2}{2}$$

$$2 = ab^2$$

$$a = \frac{2}{b^2}$$

כלומר עבור $a=\frac{2}{b^2}$ הפונקציה $f_X(x)$ היא פונקציית צפיפות.

פונקציית ההתפלגות המצטברת

יהי X משתנה מקרי רציף עם פונקציית צפיפות f_X.

פונקציית ההתפלגות המצטברת מסומנת F_X ומוגדרת באופן הבא:

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = P(X<t)$$

מהמשפט היסודי של חדו"א נקבל שהנגזרת של האינטגרל הוא f_X כלומר $F_X' = f_X$.

אם נתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת, קל יחסית לחשב את ההסתברויות:

$$P(X<a)=F_X(a)$$

$$P(X>b)=1-F_X(b)$$

$$P(a<X<b)=F_X(b)-F_X(a)$$

לדוגמה:

נחשב את פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X בעל פונקציית צפיפות:

$$f_X(x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0\le x\le 2 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

לפי ההגדרה של פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$.

כדי לחשב, נחלק למקרים (לפי f_X):

אם $t<0$:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$$

אם $0<t<2$

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{t}\left(1-\frac{x}{2}\right)dx = \left[x-\frac{x^2}{4}\right] = t-\frac{t^2}{4}$$

אם $t>2$:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{2} f_X(x)\,dx+\int_{2}^{t} f_X(x)\,dx = 0+1+0 = 1$$

וסך הכל:

$$\text{פונקציית התפלגות מצטברת} \longleftarrow F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ t-\frac{t^2}{4} & 0\le t\le 2 \\ 1 & t>2\end{cases}$$

כעת, כשנתונה פונקציית ההתפלגות המצטברת, אפשר באמצעותה לחשב הסתברויות יחסית בקלות.

למשל:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\right) = F_X\left(\frac{3}{4}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{(3/4)^2}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{(1/2)^2}{4}\right) = \frac{11}{64}$$

תוחלת ושונות של משתנה מקרי רציף

יהי X משתנה מקרי רציף בעל פונקציית צפיפות f_X.

התוחלת של X מוגדרת באופן הבא:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

השונות של X מוגדרת באופן הבא:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx\right)^2$$

סטיית התקן של X היא: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

דוגמה:

יהי X משתנה מקרי רציף בעל פונקציית צפיפות הבאה:

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

נמצא את c עבורו זה אכן פונקציית צפיפות ונחשב את התוחלת והשונות.

פתרון:

נמצא את c עבורו זו אכן פונקציית הצפיפות ונחשב את התוחלת והשונות.

לפני שניגש לאינטגרלים כדאי שניזכר בפונקציית גאמא: $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$ ⟵ פונקציית גאמא

נחזור לשאלה ונזכור שהפונקציה תהיה פונקציית צפיפות, כלומר שהאינטגרל שלה בין אינסוף למינוס אינסוף יהיה 1.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f_X(x)\,dx = 0 + \int_0^{\infty} ce^{-x}\,dx = c\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = c\int_0^{\infty} x^0 e^{-x}\,dx = c\cdot\Gamma(0+1) = c\cdot 0!$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= c\cdot 0! \\ 1 &= c\cdot 1 \end{aligned}\right\} \quad c = 1$$

ולכן עבור $c=1$ הפונקציה f_X היא פונקציית צפיפות. נציב את $c=1$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

כעת נחשב את התוחלת:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^1 e^{-x}\,dx = \Gamma(1+1) = 1! = 1$$

כעת נחשב את השונות: ראשית נחשב את $E(X^2)$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2\cdot e^{-x}\,dx = \Gamma(2+1) = 2! = 2$$

ולכן:

$$V(X)= \underbrace{E(X^2)}_{2} - \big(\underbrace{E(X)}_{1}\big)^2 = 2-1^2 = 2-1 = 1$$

התפלגויות רציפות מיוחדות

① התפלגות אחידה

משתנה מקרי רציף X נקרא משתנה מקרי אחיד בקטע $[a,b]$, אם פונקציית צפיפות ההסתברות שלו היא:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a\le x\le b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

במקרה זה נסמן $X\sim U(a,b)$.

למשל, הזווית של המחוג הגדול בשעון, מתפלגת אחידה בקטע $[0,2\pi]$, פונקציית צפיפות ההסתברות במקרה הזה היא:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0\le x\le 2\pi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

תוחלת ושונות של התפלגות אחידה

תוחלת:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}(b-a)(b+a) = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

שונות:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2)$$

$$E(X^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

לכן:

$$V(X)= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}$$

$$V(X) = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות אחידה:

לפי ההגדרה:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

במקרה שלנו:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

לכן נחלק למקרים:

אם $t<a$ אז:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{t} 0\,dx=0$$

אם $a\le t\le b$ אז:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx+\int_{a}^{t} f_X(x)\,dx=0+\int_{a}^{t}\frac{1}{b-a}\,dx=0+\frac{1}{b-a}\cdot[x]_a^t=\frac{1}{b-a}(t-a)=\frac{t-a}{b-a}$$

אם $t>b$, אז:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx=\underbrace{\int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx}_{0}+\underbrace{\int_{a}^{b} f_X(x)\,dx}_{\text{1 כי מתאר את כל השטח}}+\underbrace{\int_{b}^{t} f_X(x)\,dx}_{0}=0+1+0=1$$

סה"כ:

פונקציית התפלגות מצטברת של משתנה אחיד.

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$$

דוגמה

במשוואה ריבועית $x^2-\alpha x+\beta=0$ המקדמים α,β הם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים המתפלגים $\alpha,\beta\sim U(0,1)$

נסמן ב- x_1,x_2 את שורשי המשוואה.

(א) מה ההסתברות ששני השורשים הם ממשיים.

(ב) אם ידוע ששני השורשים ממשיים, מהי ההסתברות ש- $|x_1-x_2|<\frac{1}{2}$?

פתרון:

(א) שורשי המשוואה נתונים ע"י הנוסחה:

$$x_{1,2}=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}$$

כדי שהשורשים יהיו ממשיים, אנו דורשים ש- $\alpha^2-4\beta\ge 0$. כלומר, ההסתברות לכך ששני השורשים הם ממשיים היא ההסתברות ש: $P(\alpha^2-4\beta\ge 0)=P\left(\frac{\alpha^2}{4}\ge\beta\right)$. השאלה היא איך נחשב את ההסתברות $P\left(\frac{\alpha^2}{4}\ge\beta\right)$?

הרעיון הוא להשתמש בגישה הקלאסית - נציג את כל התחום של המשתנים כתחום במישור, ונחשב את החלק היחסי של השטח שבו מתקיים $\frac{\alpha^2}{4}\ge\beta$ מתוך שטח התחום כולו.

$$\alpha, B \sim U(0,1)$$

$$P\left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)$$ ← צריך לחשב את

$$B = \frac{\alpha^2}{4}$$

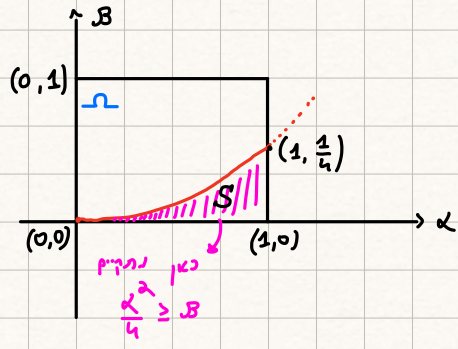
אם נסמן $\alpha = x$, $B = y$ נקבל:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

פרבולה ← $x^2 = 4y$

$$\alpha = x = 0 \longrightarrow B = y = 0$$

$$\alpha = x = 1 \longrightarrow B = y = \frac{1}{4}$$



התחום כולו הוא הריבוע $[0,1]\times[0,1]$ כי אלו הערכים האפשריים של α, B לפי הנתון.
נסתכל על α כ-x ועל B כ-y. אנו צריכים לחשב את השטח שמתחת לגרף הפונקציה $B = \frac{\alpha^2}{4}$ (זהו התחום שבו $\frac{\alpha^2}{4} \geq B$) ונעשה זאת באינטגרציה לאורך הקטע $[0,1]$

$$S = \int_0^1 \frac{\alpha^2}{4} d(\alpha) = \left[\frac{\alpha^3}{12}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=1} = \frac{1}{12} \Rightarrow S = \frac{1}{12}$$

כעת, מרחב המדגם כולו, Ω, הוא ריבוע עם צלע באורך 1 ולכן שטחו הוא 1. לכן ההסתברות היא:

$$P\left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{1/12}{1} = \frac{1}{12}$$

לכן ההסתברות ששני השורשים הם ממשיים היא $\frac{1}{12}$.

ב) נשים לב:

$$|x_1 - x_2| = \left| \underbrace{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4B}}{2}}_{x_1} - \underbrace{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4B}}{2}}_{x_2} \right| = \frac{2\sqrt{\alpha^2 - 4B}}{2} = \sqrt{\alpha^2 - 4B}$$

אם כן אנו מעוניינים בהסתברות הבאה:

$$P\left(\sqrt{\alpha^2 - 4B} < \frac{1}{2} \;\middle|\; \underbrace{x_1, x_2 \in \mathbb{R}}_{\text{שני השורשים ממשיים מושג בסעיף קודם}}\right) = P\left(\alpha^2 - 4B < \frac{1}{4} \;\middle|\; \frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)$$

בהינתן

לפי הנוסחה של הסתברות מותנית:

$$P\left(\alpha^2 - 4B < \frac{1}{4} \;\middle|\; \frac{\alpha^2}{4} \geq B\right) = \frac{P\left(\left(\alpha^2 - 4B < \frac{1}{4}\right) \cap \left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)\right)}{P\left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)}$$

לפי מה שחישבנו בסעיף א $P\left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right) = \frac{1}{12}$

$$P\left(\alpha^2 - 4B < \frac{1}{4} \;\middle|\; \frac{\alpha^2}{4} \geq B\right) = \frac{P\left(\left(\alpha^2 - 4B < \frac{1}{4}\right) \cap \left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)\right)}{P\left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)} = \frac{P\left(\left(\alpha^2 - 4B < \frac{1}{4}\right) \cap \left(\frac{\alpha^2}{4} \geq B\right)\right)}{1/12}$$

כלומר אנו צריכים לחשב את:

$$12 \cdot P\left(\left(\alpha^2-4\beta<\frac{1}{4}\right)\cap\left(\frac{\alpha^2}{4}\ge\beta\right)\right)$$

נסדר את המאורע שבפנים: $\alpha^2-4\beta<\frac{1}{4}$ פירושו $\alpha^2<4\beta+\frac{1}{4}$ כלומר $\frac{\alpha^2}{4}<\beta+\frac{1}{16}$ ולכן:

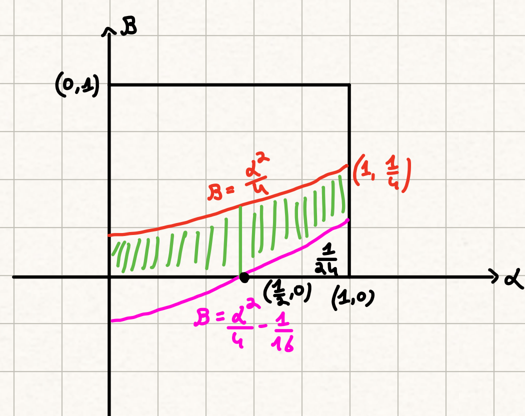
$$12\cdot P\left(\left(\frac{\alpha^2}{4}<\beta+\frac{1}{16}\right)\cap\left(\frac{\alpha^2}{4}\ge\beta\right)\right)$$

$$=12\cdot P\left(\beta<\frac{\alpha^2}{4}<\beta+\frac{1}{16}\right)$$

$$=12\cdot P\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{1}{16}<\beta<\frac{\alpha^2}{4}\right)$$

את ההסתברות הזאת נחשב בגישה הקלאסית: זהו השטח שנמצא מעל העקומה $\beta=\frac{\alpha^2}{4}-\frac{1}{16}$ ומתחת לעקומה $\beta=\frac{\alpha^2}{4}$ בתוך הריבוע Ω.

$$\frac{\alpha^2}{4}-\frac{1}{16}=0$$
$$4\alpha^2-1=0$$
$$\alpha=\frac{1}{2}$$



מדובר על ההפרש בין השטח שנמצא בין העקומה $\beta=\frac{\alpha^2}{4}$ לבין ציר ה-α בתוך הריבוע, אותו כבר חישבנו - $\frac{1}{12}$.
נקודת החיתוך של העקומה $\beta=\frac{\alpha^2}{4}-16$ עם ציר ה-α היא $\frac{1}{2}$ ולכן השטח שנמצא מתחת לעקומה $\beta=\frac{\alpha^2}{4}-16$ בתוך הריבוע Ω נתון ע"י:

$$\int_{1/2}^{1}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{1}{16}\right)d\alpha=\left(\frac{\alpha^3}{12}-\frac{\alpha}{16}\right)\Big|_{1/2}^{1}=\frac{1}{24}$$

השטח שמעניין אותנו הוא ההפרש בין השטחים:

$$12\cdot P\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{1}{16}<\beta<\frac{\alpha^2}{4}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{2}$$

② התפלגות מעריכית

משתנה מקרי X נקרא משתנה מעריכי (או מתפלג מעריכית) עם פרמטר λ, אם הוא בעל פונקציית צפיפות מהצורה:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

נסמן: $X \sim exp(\lambda)$

משתנה מקרי מעריכי מתאר את משך הזמן שעובר עד שמתרחש האירוע הראשון בתהליך אירועים פואסוני.
למשל, כמה זמן עובר עד שהשיחה הראשונה מגיעה למוקד הטלפונים, כמה זמן עובר עד שהחלק במקרר מתקלקל.

תוחלת ושונות של התפלגות מעריכית

לפי הנוסחה:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

נציב $y = \lambda x$ ואז $dy = \lambda dx$ כלומר $dx = \frac{1}{\lambda} dy$. לגבי הגבולות, אם $x=0$ אז $y=0$ ואם $x \to \infty$ אז $y \to \infty$

ולכן:

$$\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} y e^{-y} \cdot \frac{1}{\lambda} dy = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y^1 \cdot e^{-y}\,dy = \frac{1}{\lambda} \cdot \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda} \cdot 1!$$

סך הכל:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

נעבור לשונות:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \ldots\ldots = \frac{2}{\lambda^2}$$

כלומר $E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ ואז:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

פונקציית התפלגות מצטברת של התפלגות מעריכית

לפי ההגדרה:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$$

במקרה שלנו:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

נחלק למקרים:

אם $t < 0$.

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$$

אם $t>0$:

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx+\int_{0}^{t} f_X(x)\,dx = 0+\int_{0}^{t}\lambda e^{-\lambda x}dx=\left(-e^{-\lambda x}\right)_{x=0}^{x=t}=-e^{-\lambda t}+e^{0}=1-e^{-\lambda t}$$

ובסה"כ :

$$F_X(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-e^{-\lambda t} & t>0\end{cases}$$

דוגמא :

נניח שהבקעות שערים במשחק הכדורגל בליגה הלאומית, מהוות רצף אירועים פואסוני. בממוצע כל 90 דקות מבקיעים 3 שערים. נשתמש בהתפלגות מעריכית כדי לחשב את ההסתברויות הבאות :

(א) ההסתברות שהשער הראשון יובקע רק במחצית השנייה

פתרון:

במקרה שלנו, אם כל 90 דקות מבקיעים בממוצע 3 שערים, בדקה אחת מבקיעים בממוצע $\frac{1}{30}$ שערים, כלומר $\lambda=\frac{1}{30}$.
אם נסמן ב- Y את הזמן במשחק שבו יובקע השער הראשון, כפי שהסברנו $Y\sim Exp(\lambda)$. לכן ההסתברות המבוקשת היא $P(Y>45)$ וזו ההסתברות שהשער הראשון מובקע במחצית השנייה.

$$P(Y>45)=1-F_Y(45)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{30}\cdot 45}\right)=e^{-\frac{3}{2}}$$

תכונת חוסר הזיכרון של התפלגות מעריכית:

זו היא תכונה שיש גם להתפלגות גיאומטרית (בדידה). תכונת חוסר הזיכרון אומרת כך: יהי $X\sim exp(\lambda)$ משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר λ. אזי:

$$P(X>a+b \mid X>a)=P(X>a)$$

כלומר ההסתברות שעבר $a+b$ זמן כשידוע שעבר a זמן, שווה להסתברות שעבר b זמן.

(ב) נכנסו למשחק באיחור של 20 דקות. מהי ההסתברות שיעברו לפחות 30 דקות עד שיובקע שער?

פתרון:

לפי תכונת חוסר הזיכרון $P(Y>20+30 \mid Y>20)=P(Y>30)$

$$P(Y>30)=1-F_Y(30)=1-\left(1-e^{-\frac{1}{30}\cdot 30}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

דוגמה:

הזמן (בדקות) בו ינון מלחין שיר מתפלג מעריכית עם הפרמטר $\lambda=11$ כלומר $T\sim exp(11)$. מה תוחלת מספר השירים שינון מלחין ב- 50 דקות?

פתרון:

כלומר הזמן שלוקח לינון עד שהוא מכין שיר 1 הוא 11 דקות. כלומר כל דקה ינון מכין 11 שירים.

נסמן ב- Y את מספר השירים שינון מלחין בדקה.

$$E(Y) = 50\cdot 11 = 550$$