לינארית 2 הרצאה 4

שיוויון פרסבל :

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $B=\{u_1,u_2,\dots u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V. אז לכל $v\in V$ מתקיים :

$$\|v\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\langle v,u_k\rangle|^2$$

הוכחה :

מתקיים $v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n$ כאשר $\alpha_k=\langle v,u_k\rangle$ לכל $k=1,\dots,n$.

אורתוגונליות

$$\|v\|^2=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\alpha_ku_k,\sum_{k=1}^{n}\alpha_ku_k\right\rangle=\langle\alpha_1u_1,\alpha_1u_1\rangle+\langle\alpha_2u_2,\alpha_2u_2\rangle+\dots+\langle\alpha_nu_n,\alpha_nu_n\rangle$$

1 כי אורתונורמלי

$$=\alpha_1\cdot\overline{\alpha_1}\underbrace{\langle u_1,u_1\rangle}_{1}+\alpha_2\cdot\overline{\alpha_2}\underbrace{\langle u_2,u_2\rangle}_{1}+\dots+\alpha_n\cdot\overline{\alpha_n}\underbrace{\langle u_n,u_n\rangle}_{1}$$

$$=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\dots|\alpha_n|^2=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2=\sum_{k=1}^{n}|\langle v,u_k\rangle|^2$$

מסקנות מאי שיוויון פרסבל :

אי שוויון בסל (Bessel)

באותם סימונים כמו קודם, לכל $k\le n$ מתקיים :

$$\|v\|^2\ge\sum_{j=1}^{k}|\langle v,u_j\rangle|$$

אי שוויון קושי - שוורץ (cauchy-schwartz)

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים :

$$|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$$

הוכחה :

נגדיר : $u_1=\frac{u}{\|u\|}$ - וקטור יחידה. נתייחס ל- u_1 כוקטור ראשון של בסיס אורתונורמלי מסוים של V.

לפי שיוויון בסל :

$$\|v\|^2\ge\sum_{j=1}^{1}|\langle v,u_j\rangle|^2=|\langle v,u_1\rangle|^2$$

$$=\left|\left\langle v,\frac{u}{\|u\|}\right\rangle\right|^2=\left|\frac{1}{\|u\|}\cdot\langle v,u\rangle\right|^2=\left(\frac{1}{\|u\|}\right)^2\cdot|\langle v,u\rangle|^2$$

הוצאנו סקלר $\frac{1}{\|u\|}$ ללא סימני הצמדה כי $\|u\|\in\mathbb{R}$

מקבל :

$$\|v\|^2\ge\left(\frac{1}{\|u\|}\right)^2\cdot|\langle v,u\rangle|^2 \quad /\cdot\|u\|^2$$

נכפיל ב-

$$\|v\|^2\cdot\|u\|^2\ge|\langle v,u\rangle|^2$$

$$\|v\|^2\cdot\|u\|^2\ge|\langle u,v\rangle|^2$$

מ.ש.ל

דוגמה :

ב- $\mathbb{R}^3$ נתון $\underline{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\underline{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$. לפי אי שוויון קושי שוורץ

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

נבחר מכפלה: סטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 \le (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+y_3^3)$$

מסקנה: אם נבחר $\underline{y} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ נקבל :

$$(x_1+x_2+x_3)^2 \le 3\cdot(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

אי שוויון המשולש :

לכל $u,v\in V$ מתקיים

$$\|u+v\| \le \|u\|+\|v\|$$

הוכחה :

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,u\rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}(\langle u,v\rangle)}_{\substack{z=a+ib \quad |z|=\sqrt{a^2+b^2} \\ a\le\sqrt{a^2+b^2}}} + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2 \overset{\text{קושי שוורץ}}{\le} \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 \underset{\text{כפל מקוצר בכיוון ההפוך}}{=} (\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|u+v\|^2 \le (\|u\|+\|v\|)^2$$

הגדרה :

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. פונקציה $d: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ נקראת מרחק ב- V , אם :

① לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים $d(v_1,v_2)\ge 0$ ו- $d(v_1,v_2)=0$ אם ורק אם $v_1=v_2$.

② לכל $v_1,v_2\in V$ מתקיים : $d(v_1,v_2) = d(v_2,v_1)$

③ לכל $v_1,v_2,v_3\in V$ מתקיים (אי שוויון המשולש) : $d(v_1,v_3)\le d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3)$

לפונקציה d המקיימת תכונות אלה קוראים מטריקה. מרחב שמוגדרת בו מטריקה נקרא מרחב מטרי.

יהי V מרחב מכפלה פנימית. תהי $\|\cdot\|$ נורמה ב- V המושרית ע"י מכפלה פנימית : כלומר $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

נגדיר לכל $u,v\in V$: $d(u,v) = \|u-v\|$.

נראה כי הפונקציה d מהווה מרחק ב- V.

① לכל $u,v\in V$ מתקיים $d(u,v)=\|u-v\|\ge 0$ (זה קורה בגלל הגדרת הנורמה $\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v,u-v\rangle}\ge 0$)

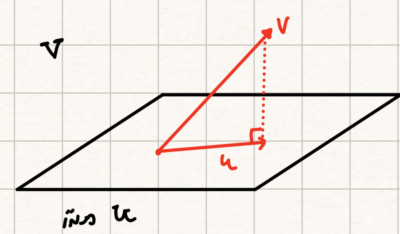
לכל $u,v\in V$ מתקיים $d(u,v)=0$ אם ורק אם $\|u-v\|=0$ (זה קורה בגלל הגדרת נורמה) $\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v,u-v\rangle} = 0$

אם ורק אם $u-v=0$ כלומר $u=v$.

$$d(v,u) = \|v-u\| = \|-(u-v)\| = \sqrt{\langle -(u-v), -(u-v) \rangle} = \sqrt{\langle u-v, u-v \rangle} = \|u-v\| = d(u,v) \checkmark$$ יש סימטריות ②

$$d(u,w) = \|u-w\| = \|(u-v)+(v-w)\| \underset{\text{אי שיוויון משולש}}{\leq} \|u-v\|+\|v-w\| = d(u,v)+d(v,w)$$ ③

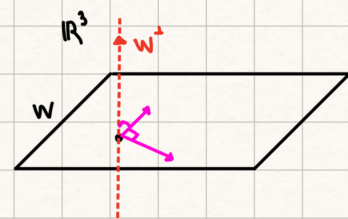
היטל של וקטור על תת מרחב וקטורי:



יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$.

ויהי W תת מ"ו של V.

נסמן: $W^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp w = w \in W \text{ לכל}\}$ כלומר $W^{\perp}$ קבוצה של כל וקטורי V אורתוגונלים-ם לכל $w \in W$



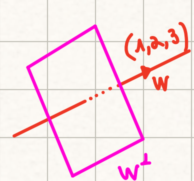
דוגמה: במרחב $\mathbb{R}^3$ נתון תת מרחב:

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

נמצא את $W^{\perp}$ ביחס למכפלה פנימית סטנדרטית.

נסמן $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. מתי $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W^{\perp}$? אם ורק אם $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

נבצע את המכפלה הפנימית הסטנדרטית



$$x + 2y + 3z = 0$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2y-3z\\y\\z\end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$W^{\perp} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הערה: בסימונים הנ"ל $W^{\perp}$ הוא תת מרחב תת מרחב של V.

כלומר קבוצה אורתוגונלית היא תת מרחב וקטורי של V.

הגדרה :

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי W תת מרחב וקטורי של V בעל בסיס אורתונורמלי :

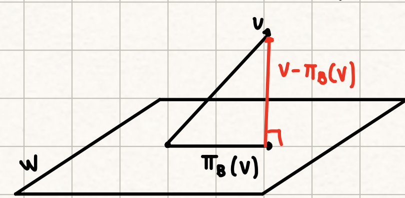
$$B = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$$

יהי $v \in V$. היטל של v על W מסומן על ידי $\Pi_B(v)$ ומוגדר באופן הבא :

$$\Pi_B(v) = \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle \cdot w_j$$

הערה : אפשר להוכיח כי $\Pi_B(v)$ הוא וקטור הקרוב ביותר ל- v מבין וקטורי W , כלומר : לכל $w \in W$: $\|v - \Pi_B(v)\| \le \|v - w\|$

טענה : בסימונים הנ"ל הוקטור $v - \Pi_B(v)$ אורתוגונלי לכל $w \in W$



הוכחה :

יהי $B = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ בסיס אורתונורמלי של W ויהי $w \in W$. מתקיים:

בסיס אורתונורמלי

$$\langle v - \Pi_B(v), w \rangle = \langle v, w \rangle - \langle \Pi_B(v), w \rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i \right\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{k} \langle v, w_j \rangle \cdot w_j , \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i \right\rangle$$

יוצא עם צמוד

$$= \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \langle v, w_i \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \langle v, w_i \rangle w_i , \alpha_i w_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \langle v, w_i \rangle - \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \langle v, w_i \rangle \cdot \underbrace{\langle w_i, w_i \rangle}_{1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \langle v, w_i \rangle - \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \langle v, w_i \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v - \Pi_B(v), w \rangle = 0$$

לכן $v - \Pi_B(v)$ אורתוגונלי לכל $w \in W$

דוגמה :

ב- $\mathbb{R}^3$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית נתון תת מרחב וקטורי :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y - 3z = 0 \right\}$$

עבור הוקטור $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$ נמצא את ההיטל $\Pi_W(v)$

פתרון :

נמצא בסיס אורתונורמלי ל- W .

רואים כי וקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in W$. נמצא $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ כך ש- $x+2y-3z=0$ וגם $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (כלומר אורתוגונלים)

כלומר $\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 0$ כלומר $x+y+z=0$.

נחפש וקטור שמקיים גם $x+2y-3z=0$ וגם $x+y+z=0$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{לאחר דירוג אינסוף פתרונות}} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$$

אחד מהם

כלומר הבסיס האורתוגונלי של W הוא: $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix} \right\}$

ננרמל את הוקטורים: $w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$

לכן הבסיס האורתונורמלי הוא $B = \{w_1, w_2\}$

לפי הגדרת היטל:

$$\pi_B(v) = \langle v, w_1\rangle \cdot w_1 + \langle v, w_2\rangle \cdot w_2$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$$

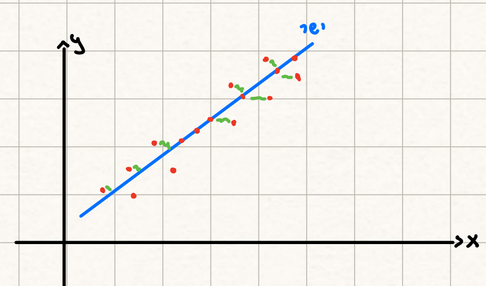
$$= \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{-5}{42}\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}27\\12\\17\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_B(v) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}27\\12\\17\end{pmatrix}$$

שיטת הריבועים הפחותים (Least squares Approximation)

נתונות נקודות במישור xy:

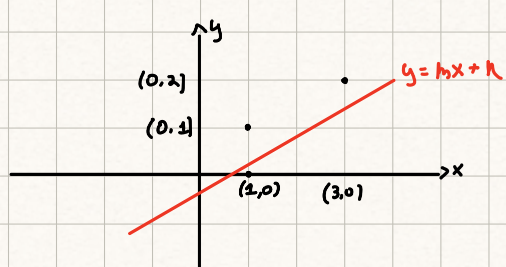


מחפשים ישר שמתאר את הנקודות האדומות (•) באופן מיטבי.

אחת האפשרויות היא לדרוש שסכום ריבועי המרחקים מהנקודות לישר יהיה מינימלי.

למשל עבור $(1,0), (1,1), (3,2)$ נחפש ישר $y = mx + n$

בשיעור הבא נראה כי מחפשים פתרון מקורב למערכת:



$$\begin{cases} 0 = m+n \\ 1 = m+n \\ 2 = 3m+n \end{cases}$$