הרצאה מספר 1

נושאים בקורס:

מבוא לתורת הקבוצות.

אינדוקציה ונוסחה רקורסיבית.

קומבינטוריקה.

מבוא לתורת הגרפים.

מבוא לתורת הקבוצות

קבוצה - אוסף של עצמים (סופי או אינסופי). דוגמה לקבוצה $\{5,3,-1\}$ זו קבוצה בעלת 3 איברים: $5,3,-1$.

נאמר כי המספרים הללו שייכים לקבוצה. כלומר $5\in A$, $-1\in A$, $2\notin A$.

במקרה הכללי $x\in A$ אומר ש-x שייך לקבוצה A ו- $x\notin A$ אומר ש-x לא שייך לקבוצה A.

הגדרה: קבוצות A,B נחשבות שוות אם כל איבר ב-A נמצא ב-B וכל איבר ב-B נמצא ב-A.

לדוגמה $\{5,3,-1\}=\{3,-1,5\}$ וגם $\{3,5,5,-1,-1\}=\{5,-1,3\}$ כלומר מס' המופעים של כל עצם בקבוצה אינו משנה.

גם הקבוצה: $\{1+2,2+3,-1\}=\{3,5,-1\}$ כלומר גם אופן תיאור הקבוצה אינו משנה.

יש קבוצות סופיות: $\{5,3,-8\}$ ויש קבוצות אינסופיות $\{1,2,3,\ldots\}$.

קבוצות חשובות:

מספרים טבעיים: $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$

מספרים שלמים: $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$

מספרים רציונליים: $\mathbb{Q}=\{x\mid x=\frac{p}{q}, p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{Z}, q\neq0\}$

מספרים ממשיים: כל מספר על הישר הממשי $=\mathbb{R}$

קבוצה ריקה: מסומנת $\emptyset$.

יחסים בין קבוצות:

הכלה - $A\subseteq B$: אם כל איבר ב-A שייך ל-B. לדוגמה: $\{2,3\}\subseteq\{2,3\}$ אבל $\{2,3\}\nsubseteq\{2,1\}$

הכלה ממש - $A\subset B$: כל איבר של A מופיע ב-B. אבל קיים איבר ב-B שלא מופיע ב-A.

לדוגמה $\{1\}\subset\{8,3,2,1\}$ אבל: $\{2,3\}\not\subset\{2,3\}$.

הערות: לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset\subseteq A$.

לכל קבוצה A מתקיים $A\subseteq A$.

אם $B\subseteq A$ נאמר ש-B תת קבוצה של A.

מספר האיברים בקבוצה A: $|A|$

$|\{1,1,1\}|=1$ $\quad$ $|\{1,2\}|=2$

$|\mathbb{N}|=\infty$ $\quad$ $|\emptyset|=0$

פעולות בקבוצות:

חיתוך ואיחוד:

חיתוך - $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ and } x\in B\}$

איחוד - $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ or } x\in B\}$

הפרש - $A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ and } x\notin B\}$ - הערה: $A\setminus A=\emptyset$. הערה: $A\setminus\emptyset=A$. אם $A\setminus B=\emptyset$ אז $A\subseteq B$.

מכפלה קרטזית - $A\times B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ לדוגמה אם $A=\{1,2\}$ ו- $B=\{1,2,3\}$

אינדוקציה

זהו כלי שימושי להוכחה של טענות על מס׳ טבעיים.

עקרון האינדוקציה המתמטית: תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n \ge 1$.

אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

① בסיס האינדוקציה: הטענה $P(1)$ נכונה.

② צעד האינדוקציה: לכל $n > 1$ נכונות הטענה $P(n-1)$ גוררת את נכונות הטענה $P(n)$.

אם 2 תנאים אלה מתקיימים אז $P(n)$ תקפה לכל $n \ge 1$.

תרגיל:

הוכיחו: לכל מספר טבעי $n \ge 0$ מתקיים:

$$0+1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

הוכחה:

בסיס האינדוקציה: $0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$ ✓

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ כלומר מתקיים $0,1,\ldots k = \frac{k(k+1)}{2}$ כעת ננסה להוכיח את הטענה עבור $k+1$.

$$\underbrace{0,1,2,3,\ldots .k}, k+1 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + k+1 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2} \stackrel{!}{=} \frac{k^2+2k+k+2}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$ ✓

תרגיל:

טענה: לכל $n \ge 0$ מתקיים $10^n - 3^n$ מתחלק ב-7.

בסיס האינדוקציה: נכונה עבור $n=0$

$$10^0 - 3^0 = 1-1 = \underset{\text{מתחלק ב-7}}{0}$$ ✓

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$ כלומר מתקיים $10^k - 3^k$ מתחלק ב-7. ננסה להוכיח עבור $k+1$.

$$10^{k+1} - 3^{k+1} \stackrel{?}{=} \text{מתחלק ב-7}$$

$$10^k \cdot 10 - 3^k \cdot 3 \stackrel{?}{=} \text{מתחלק ב-7}$$

$$10^k \cdot (7+3) - 3^k \cdot 3 \stackrel{?}{=} \text{מתחלק ב-7}$$

$$\underbrace{10^k \cdot 7}_{\text{מתחלק ב-7}} + 10^k \cdot 3 - 3^k \cdot 3 \stackrel{?}{=} \text{מתחלק ב-7}$$

$$\text{מתחלק ב-7} + 3\underbrace{(10^k - 3^k)}_{\text{הנחת אינדוקציה}}$$

$$\text{מתחלק ב-7} + \text{מתחלק ב-7} = \text{מתחלק ב-7}$$ ✓

תרגיל

נתון: $a_0 = 1$

$a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n>0)$

טענה: הוכיחו $a_n = 2^{n+1} - 1$

בסיס האינדוקציה: עבור $n=0$

$a_0 = 2^{0+1} - 1 = 1$ ✓

צעד: נראה שנכונות $n-1$ גוררת נכונות n.

הנחת האינדוקציה: $a_{n-1} = 2^n - 1$

נתון:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$
$$a_n = 2(2^n - 1) + 1$$
$$a_n = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 \checkmark$$

ולכן הטענה תקפה לכל $n \geq 0$.