לינארית 2 הרצאה מספר 7

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

T נורמלי אמ"מ לכל בסיס אורתונורמלי B המטריצה $[T]_B^B$ נורמלית.

T אוניטרי אמ"מ לכל בסיס אורתונורמלי B המטריצה $[T]_B^B$ אוניטרית.

T הרמיטי אמ"מ לכל בסיס אורתונורמלי B המטריצה $[T]_B^B$ הרמיטית.

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטור לינארי

הגדרה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. וקטור $0 \neq v \in V$ נקרא וקטור עצמי של אופרטור T, אם קיים סקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $T(v) = \lambda v$. λ נקרא ערך עצמי של T המתאים לוקטור עצמי v.

הערה: נשים לב שאם v וקטור עצמי של T המתאים לערך עצמי λ אז לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$\underline{T(\alpha v)} = \alpha \cdot T(v) = \alpha \cdot \lambda v = \underline{\lambda(\alpha v)}$$

כלומר αv גם וקטור עצמי של T המתאים ל- λ.

אם v_1, v_2 שני וקטורים עצמיים של T המתאימים ל- λ, אז:

$$\underline{\underline{T(v_1+v_2)}} = T(v_1) + T(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \underline{\underline{\lambda(v_1+v_2)}}$$

כלומר v_1+v_2 גם וקטור עצמי של T המתאים ל- λ.

מסקנה: הקבוצה $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ מהווה תת מרחב וקטורי של V שנקרא תת מרחב עצמי המתאים לערך עצמי λ.

טענה: בתנאים הנ"ל, λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם λ ערך עצמי של $[T]_B^B$ כאשר B בסיס כלשהו של V.

הסבר: לפי הנתון: $T(v) = \lambda v$ עבור $v \neq 0$. נעבור להצגה מטריציונית ביחס לבסיס B כלשהו של V:

$$\underbrace{[T(v)]_B}_{[T]_B^B \cdot [v]_B} = [\lambda \cdot v]_B = \lambda \cdot [v]_B$$
- קואורדינטות לפי B.

מטריצה מייצגת של T ביחס לבסיס B

קיבלנו $[T]_B^B \cdot [v]_B = \lambda \cdot [v]_B$

מטריצה כפול וקטור שווה ל- λ כפול אותו הוקטור. כלומר $A\underline{X} = \lambda \cdot \underline{X}$ - הגדרה לערך עצמי ווקטור עצמי עבור מטריצה.

לכן λ ערך עצמי של $[T]_B^B$ ווקטור עצמי הוא $[v]_B$.

מסקנה: יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי B בסיס כלשהו של V. אז כל הערכים העצמיים הם הפתרונות של המשוואה האופיינית

$$P_{[T]_B^B}(t) = 0$$

כאשר $P_{[T]_B^B}(t) = \left|[T]_B^B - tI\right|$ - הפולינום האופייני של $[T]_B^B$.

דוגמה: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ אופרטור לינארי הנתון ע"י:

$$T(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים עצמיים של T.

פתרון: המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיס הסטנדרטי $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)-4 = \lambda^2-6\lambda+1 = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2-6\lambda+1$$

$$0 = \lambda^2-6\lambda+1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

כלומר יש 2 ע"ע שהם $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$

אם רוצים למצוא וע"ע המתאימים אז פותרים מערכות הומוגניות הבאות:

① $$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - (3+2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \underline{x} = 0$$

② $$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - (3-2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \underline{x} = 0$$

הגדרה: יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. יהי λ ערך עצמי של T.

ריבוי אלגברי של λ הינו ריבוי שלו כפתרון משוואה אופיינית $P_{[T]}(t) = 0$ כאשר $[T]$ מטריצה מייצגת של אופרטור T.

לדוגמה עבור המשוואה $(\lambda-2)^2(\lambda-1)^3(\lambda+4) = 0$

$\lambda_1 = 2$ ר"א 2, $\lambda_2 = 1$ ר"א 3, $\lambda_3 = -4$ ר"א 1

ריבוי גיאומטרי של λ הינו $\dim(V_\lambda)$. במילים פשוטות המספר המקסימלי של וקטורים עצמיים בת"ל המתאימים ל-V.

כידוע: לכל ע"ע λ של T מתקיים:

$$\boxed{1 \le \text{ר"ג של } \lambda \le \text{ר"א של } \lambda}$$

הגדרה: יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. T נקרא אופרטור לכסין, אם קיים בסיס B של V, כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית.

משפט: יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי.

T לכסין $\Longleftrightarrow$ קיים בסיס של V המורכב מוקטורים עצמיים של T <=> לכל ע"ע λ של T מתקיים

$$\underbrace{\text{ר"א של } \lambda}_{m_a(\lambda)} = \underbrace{\text{ר"ג של } \lambda}_{m_g(\lambda)}$$

דוגמה: $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

בדקו האם T ניתן ללכסון ואם כן לכסנו.

פתרון:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \to C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 5-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 5-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 5$ ר"א 1 ולכן ר"ג 1

$\lambda_2 = -1$ ר"א 2 וכעת נמצא את ר"ג:

$$A - \lambda_1(I) = \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda_2 & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ר"ג של λ_2 הוא 2

סיכום:

$\lambda_1 = 5$ ר"א 1 ולכן ר"ג 1

$\lambda_2 = -1$ ר"א 2 ור"ג 2.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כעת נמצא את הוקטור העצמי של הע"ע $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda_1 & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן מתקיים:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תזכורת:

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T:V \to V$ אופרטור לינארי.

T נקרא אופרטור נורמלי אם $T \circ T^* = T^* \circ T$

T נקרא אופרטור אוניטרי אם $T \circ T^* = T^* \circ T = I$ (כלומר $T^* = T^{-1}$) במקרה ממשי (מעל $\mathbb{R}$) T אורתוגונלי.

T נקרא אופרטור הרמיטי, אם $T^* = T$. במקרה ממשי, T נקרא סימטרי.

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $T:V\to V$ אופרטור נורמלי.

אז:

① לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $T-\alpha I$ גם נורמלי.

② לכל $v\in V$: $\|T(v)\|=\|T^*(v)\|$

③ אם λ ע"ע של T, אז $\bar{\lambda}$ ע"ע של T^* עם אותו וקטור עצמי.

④ אם $\lambda\neq\mu$ ע"ע של T! v וקטור עצמי המתאים ל-λ. כלומר $T(v)=\lambda v$, $T^*(v)=\bar{\lambda}\cdot v$.
u וקטור עצמי המתאים ל-μ. כלומר $T(u)=\mu u$, $T^*(u)=\bar{\mu}\cdot u$.

אז $u\perp v$ (וקטורים עצמיים של ע"ע שונים אורתוגונליים זה לזה).

⑤ לכל ע"ע λ של T מתקיים $T(V_\lambda^{\perp})\subseteq V_\lambda^{\perp}$

הוכחה (חלקית):

①
$$(T-\alpha I)\circ(T-\alpha I)^*=(T-\alpha I)\circ(T^*-\bar{\alpha}I)=T\circ T^*\underline{-\alpha T^*}\,\underline{-\bar{\alpha}T}+\underline{|\alpha|^2\cdot I}$$

$$(T-\alpha I)^*\circ(T-\alpha I)=(T^*-\bar{\alpha}I)\circ(T-\alpha I)=T^*\circ T\,\underline{-\bar{\alpha}\cdot T}\,\underline{-\alpha T^*}+\underline{|\alpha|^2\cdot I}$$

T נורמלי, לכן $T^*\circ T=T\circ T^*$ ולכן מה שמסומן בהתאם צבע ולכן $T-\alpha I$ נורמלי.

②
$$\|T(v)\|=\langle T(v),T(v)\rangle=\langle v,T^*(T(v))\rangle\underset{\text{נורמלי } T}{=}\langle v,T(T^*(v))\rangle\underset{\text{נעביר } T \text{ אותו לצד שמאל עם } T \text{ כוכב}}{=}\langle T^*(v),T^*(v)\rangle=\|T^*(v)\|^2$$

④
$$0=\langle \underbrace{T(v)-\lambda v}_{0},u\rangle=\langle T(v),u\rangle-\lambda\langle v,u\rangle$$

$$0=\langle v,\underbrace{T^*(u)-\bar{\mu}\cdot u}_{0}\rangle=\langle v,T^*(u)\rangle-\mu\langle v,u\rangle$$

נחסיר בין המשוואות:

$$0=\langle T(v),u\rangle-\lambda\langle v,u\rangle-\big(\langle v,T^*(u)\rangle-\mu\langle v,u\rangle\big)$$

$$0=\langle T(v),u\rangle-\lambda\langle v,u\rangle-\langle v,\underbrace{T^*(u)}_{\text{נעביר}}\rangle+\mu\langle v,u\rangle$$

$$0=\cancel{\langle T(v),u\rangle}-\lambda\langle v,u\rangle-\cancel{\langle T(v),u\rangle}+\mu\langle v,u\rangle$$

$$0=\langle v,u\rangle\cdot(\underbrace{\mu-\lambda}_{\text{שונה מ-0 כי לפי נתון } \lambda\neq\mu})\Rightarrow\langle v,u\rangle=0\Rightarrow v\perp u\ \checkmark$$

5 יהי $u \in V_\lambda^\perp$ ויהי $v \in V_\lambda$

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle = \langle u, \bar{\lambda} v\rangle = \lambda \underbrace{\langle u, v\rangle}_{0 \text{ כי } u \perp v}$$

כי $u \in V_\lambda^\perp$ ו- v וקטור עצמי המתאים ל- λ

לכן $T(u) \perp v$ כלומר $T(u) \in V_\lambda^\perp$

מהמשפט הנ"ל ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$ ויהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי.
יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ כל הערכים העצמיים של T. אז מתקיים:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

כלומר לכל $v \in V$ יש הצגה $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ יחידה, כך ש- $v_j \in V_{\lambda_j}$ ו- $v_i \perp v_j$ לכל $i \neq j$

מסקנה: בסימונים הנ"ל, אם T נורמלי, אז מעל $\mathbb{C}$ קיים בסיס של וקטורים עצמיים ל- V ולכן T ניתן ללכסון.

מסקנה: מכיוון שבכל V_{λ_j} ניתן לבצע את התהליך של גרם שמידט מסיקים כי קיים בסיס אורתונורמלי של V שמורכב מוקטורים עצמיים של אופרטור נורמלי T.