לינארית 1 פרק שני - מטריצות

הגדרה: מבנה מלבני של איברים עם m שורות ו-n עמודות נקרא מטריצה מסדר $m\times n$.

דוגמה למטריצה:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2.4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 7.01 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה מסדר } 2\times 4.} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ \pi \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה מסדר } 3\times 1} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה מסדר } 3\times 3}$$

איברים במטריצה מסמנים לרוב עם אותיות קטנות ושני אינדקסים. i לסימון מספר השורה ו-j לסימון מספר העמודה: a_{ij}
דרכים נוספות לסימון A_{ij} או $(A)_{ij}$.

מטריצה כללית:

$$A_{m\times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

כתיבה מקוצרת: $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,2,\dots m \\ j=1,2,\dots n}}$

שוויון בין מטריצות:

יהיו A ו-B שתי מטריצות. נאמר כי A ו-B שוות ונסמן $A=B$ אם:
(א) שתיהן מאותו סדר $m\times n$ (שוויון סדרים).
(ב) כל האיברים שווים בהתאמה $a_{ij}=b_{ij}$ לכל i,j (שוויון איברים)

חיבור מטריצות:

יהיו $A,B\in F^{m\times n}$. נגדיר את המטריצה $A+B$ להיות המטריצה המתקבלת ע"י חיבור איבר איבר בהתאמה.
כלומר $(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ לכל i,j. מתקיים $A+B\in F^{m\times n}$.
דוגמה:

$$\underset{2\times 3}{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}}^{A}} + \underset{2\times 3}{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}}^{B}} = \underset{2\times 3}{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}}^{A+B}}$$

חיסור מטריצות:

יהיו $A,B\in F^{m\times n}$. נגדיר את המטריצה $A-B$ להיות המטריצה המתקבלת ע"י חיסור איבר איבר בהתאמה.
כלומר $(A-B)_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ לכל i,j. מתקיים $A-B\in F^{m\times n}$.
דוגמה:

$$\underset{2\times 3}{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}}^{A}} - \underset{2\times 3}{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}}^{B}} = \underset{2\times 3}{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & 5 & -10 \end{pmatrix}}^{A-B}}$$

כפל בסקלר:

יהיו $A\in F^{m\times n}$, ויהי $\alpha\in F$ סקלר. נגדיר את המטריצה $\alpha\cdot A$ להיות המטריצה המתקבלת ע"י הכפלת כל איבר של A בסקלר α.
כלומר $(\alpha\cdot A)_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$ לכל i,j.
דוגמה:

$$7\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 28 & 63 & -7 \end{pmatrix}$$

שחלוף:

יהי $A\in F^{m\times n}$. נגדיר את המטריצה המשוחלפת של A להיות המטריצה המתקבלת מ-A ע"י כתיבת כל שורה שלה כעמודה בהתאמה.

מסמנים: A^t או A^T.

כלומר: $(A^t)_{ij}=(A)_{ji}=a_{ji}$ לכל i,j. מתקיים $A^t\in F^{m\times n}$

דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-3\\4&9&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times3},\quad A^t=\begin{pmatrix}1&4\\0&9\\-3&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times2}$$

משפט: יהיו A,B,C מטריצות עם איברים בשדה F ויהיו α,β סקלרים ב-F. בהנחה שהפעולות הבאות מוגדרות אז מתקיים:

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(4) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

(5) $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\beta\cdot(\alpha\cdot A)=A\cdot(\alpha\cdot\beta)$

(6) $(A+B)^t=A^t+B^t$

(7) $(\alpha\cdot A)^t=\alpha\cdot A^t$

(8) $(A^t)^t=A$

נוכיח את סעיפים $1,4,6$:

תחילה נזכר בהגדרת הפעולות:

$$A,B\in F^{m\times n},\ \alpha\in F\Longrightarrow (A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ (\alpha\cdot A)_{ij}=\alpha a_{ij},\ (A^t)_{ij}=a_{ji}$$

נוכיח את סעיף 1:

צ"ל $A+B=B+A$

נבדוק שוויון סדרים:

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}}_{m\times n}=\underbrace{\underset{m\times n}{B}+\underset{m\times n}{A}}_{m\times n}$$

שוויון איברים:

$$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\underset{\text{חוק חילוף החיבור בסקלרים}}{=}b_{ij}+a_{ij}=(B+A)_{ij}$$

נוכיח את סעיף 4:

צ"ל: $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

שוויון סדרים:

$$\underbrace{\alpha\,(\underbrace{\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}}_{m\times n})}_{m\times n}=\underbrace{\alpha\cdot\underset{m\times n}{A}+\alpha\cdot\underset{m\times n}{B}}_{m\times n}$$

שוויון איברים:

$$(\alpha\cdot A+\alpha\cdot B)_{ij}\overset{\text{הגדרת חיבור מטריצות}}{=}(\alpha\cdot A)_{ij}+(\alpha\cdot B)_{ij}\overset{\text{הגדרת כפל בסקלר}}{=}\alpha\cdot a_{ij}+\alpha\cdot b_{ij}=\alpha(a_{ij}+b_{ij})\overset{\text{הגדרת חיבור מטריצות}}{=}\alpha(A+B)_{ij}=(\alpha\cdot(A+B))_{ij}$$

נוכיח את סעיף 6:

שוויון סדרים:

$$\underbrace{(\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B})^t}_{n\times m}=\underbrace{\underset{n\times m}{A^t}+\underset{n\times m}{B^t}}_{n\times m}$$

שוויון איברים:

$$\left((A+B)^t\right)_{ij}\overset{\text{הגדרת שחלוף}}{=}(A+B)_{ji}\overset{\text{הגדרת חיבור מטריצות}}{=}(A)_{ji}+(B)_{ji}\overset{\text{הגדרת שחלוף}}{=}(A^t)_{ij}+(B^t)_{ij}\overset{\text{חיבור מטריצות}}{=}(A^t+B^t)_{ij}$$

כפל מטריצות:

בהינתן שתי מטריצות A ו- B, ננסה להגדיר את המכפלה AB. נגדיר בשני שלבים:

שלב 1: כפל שורה בעמודה: תהי A_i שורה של A עם p איברים ותהי $\tilde{B}_j$ עמודה של B עם p איברים.

נגדיר:

$$A_i\tilde{B}_j = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_pb_p = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k$$

כלומר, כופלים איבר איבר בהתאמה ומחברים. התוצאה היא מספר.

שלב 2: כפל מטריצה במטריצה - נכפול כל שורה i של A עם כל עמודה j של B ונקבל מספר. את המספר שיוצא נמקם במקום ij במטריצת התוצאה. כדי לממש זאת, "אורך" השורה של A צריך להיות שווה לאורך העמודה של B. לכן: מספר העמודות ב- A צריך להיות שווה למספר שורות B. מספר השורות בתוצאה זהה למספר השורות של A.
מספר העמודות בתוצאה זהה למספר העמודות של B.

הגדרה פורמלית של כפל מטריצות:

תהי A מטריצה מסדר $m\times p$ ותהי B מטריצה מסדר $p\times n$.

אזי מטריצת המכפלה AB היא מטריצה מסדר $m\times n$ המוגדרת ע"י:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{j2} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

הערות:

מומלץ לבצע כפל מטריצות לפי השלבים הבאים:

1. קבעו האם המכפלה $C=AB$ מוגדרת: $A_{7\times5} \checkmark B_{5\times10}$ $\quad A_{7\times5} \times B_{7\times7}$
2. קבעו את סדר מטריצת המכפלה C: $\underbrace{A_{7\times5} \quad B_{5\times10}}_{C_{7\times10}}$
3. כפלו את המטריצות לקבלת C.

תרגיל: עבור המטריצות A,B,D חשבו, אם ניתן את המכפלות AB ו- DB.

$$\underset{2\times2}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times2}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times3}{D} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$A\times B =$ לא מוגדר $(A_{2\times2} \quad B_{3\times2})$

$D\times B =$ מוגדר $(\underbrace{D_{3\times3} \quad B_{3\times2}}_{3\times2})$

סדר התוצאה של DB יהיה 3×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 36 \\ 24 & 73 \\ 13 & 41 \end{pmatrix}$$

תרגול:

נרשום המטריצות: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

הראו שהמכפלות BA, AB מוגדרות וחשבו אותן:

$$A_{1\times3} \times B_{3\times1} = C_{1\times1}$$

$$AB = (13)_{1\times1}$$

$$B_{3\times1} \times A_{1\times3} = C_{3\times3}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

מטריצות מתחלפות בכפל:

נאמר שאם A מטריצה מסדר $m\times p$ ואילו B מטריצה מסדר $p\times n$.

אזי מטריצת המכפלה AB היא מטריצה מסדר $m\times n$ המוגדרת ע"י: $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

דוגמה:

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \times B_{2\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

ננסה לחשב את BA: נראה שהכפל לא מוגדר $3\times4 \;\; 2\times3$, $\neq$

מסקנה: כפל מטריצות הוא לא קומוטטיבי (לא חילופי).

אם BA מוגדר אז יהיה שוויון? לא בהכרח!

$$AB \Rightarrow \underbrace{5\times\overbrace{2 \quad 2}^{=}\times5}_{5\times5}$$

$$BA \Rightarrow \underbrace{2\times5 \quad 5\times2}_{2\times2}$$

$$\begin{matrix} BA & & AB \\ 2\times2 & \neq & 5\times5 \end{matrix}$$

לא מאותו סדר

ואילו AB וגם BA מוגדרות ומאותו הסדר, האם אז נקבל שוויון? לא בהכרח.

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B_{2\times2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB \neq BA$$

כפל מטריצות הוא לא קומוטטיבי.

אבל, לפעמים כן מקבלים $AB = BA$.

מהו תנאי הכרחי לכך?

נניח ש- A היא מסדר $m\times p$ ו- B היא מסדר $p\times m$. הכפל מוגדר ומקבלים:

$$\left.\begin{aligned}
&AB \Rightarrow \underbrace{m\times \underbrace{p \quad p}_{=}\times n} \Rightarrow m\times n \underset{m=n}{\Rightarrow} n\times n \\
&BA \Rightarrow \underbrace{p\times \underbrace{n \quad m}_{m=n}\times p} \Rightarrow p\times p \underset{AB=BA}{\Rightarrow} p=n
\end{aligned}\right\} m=n=p$$

מסקנה: בהכרח שתי המטריצות מסדר $n\times n$.

הערות: תנאי זה הוא הכרחי אבל לא מספיק.

הגדרה:

יהיו A ו- B שתי מטריצות מסדר $n\times n$.

אומרים ש- A ו- B מתחלפות בכפל אם $AB=BA$.

דוגמאות:

$$A_{2\times 2}\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix},\quad B_{2\times 2}=\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
AB&=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\
BA&=\begin{pmatrix}7&-3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} AB=BA$$