מרחבים וקטוריים

הגדרה:

תהי V קבוצה ויהי F שדה. נגדיר פעולת חיבור $+$ בין איבר V ופעולת כפל בסקלר $\cdot$ בין איבר מ-V לאיבר מ-F.
הקבוצה V נקראת <u>מרחב וקטורי</u> מעל השדה F, ואיברי V נקראים וקטורים, אם לכל $u,v,w\in V$ לכל $\alpha,\beta\in F$ מתקיימות כל 10 התכונות הבאות:

1. סגירות לחיבור, $u+v\in V$
2. אסוציאטיביות בחיבור, $u+(v+w)=(u+v)+w$
3. קומוטטיביות בחיבור, $u+v=v+u$.
4. קיים ב-V איבר אפס לחיבור המסומן 0, ומקיים $0+v=v+0=v$
5. קיים ב-V איבר נגדי המסומן $-v$, ומקיים: $-v+v=v+(-v)=0$
6. סגירות לכפל בסקלר, $\alpha\cdot v\in V$
7. $(\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$
8. $(\alpha\cdot\beta)\cdot v=\alpha\cdot(\beta\cdot v)=\beta\cdot(\alpha\cdot v)=v\cdot(\alpha\cdot\beta)$
9. עבור $1\in F$ מתקיים $1\cdot v=v$.
10. $\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$

דוגמאות:

(א) $V=\mathbb{R}^{2\times 3}$ הוא מרחב וקטורי מעל $F=\mathbb{R}$ עם הפעולות הרגילות של חיבור מטריצות וכפל בסקלר.

(ב) הכללה: $V=\mathbb{R}^{m\times n}$ הוא מרחב וקטורי מעל $F=\mathbb{R}$ עם הפעולות הרגילות של חיבור מטריצות וכפל בסקלר.

דוגמאות סטנדרטיות למרחבים וקטורים:

א. נסתכל על שני מקרים פרטיים של מטריצות מסדר $m\times n$.
מטריצת שורה: $V=F^{1\times n}$
מטריצת עמודה: $V=F^{n\times 1}$
אנחנו שואפים לא להבחין ביניהם. קיבלנו את הקבוצה הבאה:

$$F^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\ \middle|\ a_1,a_2,\dots\dots,a_n\in F\right\}=\left\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\ \middle|\ a_1,a_2,\dots,a_n\in F\right\}$$

חשוב לזכור: למרות שמעכשיו נכתוב F^n לא נבחין בין מטריצת שורה למטריצת עמודה, חייבים לשמור על חוקי הכתיבה.
נסתכל במספר מקרים פרטיים מוכרים של F^n כאשר $F=\mathbb{R}^n$:
כאשר $n=2$ אז $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ זהו המישור האוקלידי.
כאשר $n=3$ אז $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$ זהו המרחב האוקלידי.
כאשר $n=1$ אז $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}$ זהו הישר.

למעשה אנו דורשים שכל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו כאשר החיבור זה החיבור בשדה והכפל בסקלר זה הכפל בשדה.
מקרה פרטי נוסף: $F=\mathbb{C}$, $V=\mathbb{C}^2$: $V=\mathbb{C}^2=\{(z,w)\mid z,w\in\mathbb{C}\}=\{(a+ib,c+id)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ מ"ו
בדוגמאות סטנדרטיות תמיד ניקח את הסקלרים מאותו שדה של V.

כעת נראה מה קורה אם מערבבים בין השדות ונבדוק האם מקבלים מ"ו?

(א) $V=\mathbb{R}^2,\ F=\mathbb{C}$: תכונות 1-5 מתקיימות כי הן מתקיימות ב-$\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ ולשדה F אין משמעות.
תכונה 6: האם $\alpha\cdot v\in\mathbb{R}^2$ כאשר $v\in\mathbb{R}^2$ ו-$\alpha\in\mathbb{C}$.
נבחר לדוגמא $v=(1,0)\in\mathbb{R}^2$ ו-$\alpha=i\in\mathbb{C}$ ונקבל: $\alpha\cdot v=i(1,0)=(i,0)\notin\mathbb{R}^2$
תכונה 6 לא מתקיימת ולכן V אינו מ"ו מעל F.

ב) נערבב הפוך: $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{C}^2$:

תכונות 1-5 מתקיימות כי הן מתקיימות ב-$\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$ ולשדה אין משמעות כאן.
תכונה 6: האם $\alpha\cdot v\in\mathbb{C}^2$ כאשר $v\in\mathbb{C}^2$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$? הפעם התשובה היא כן, כי וקטור מרוכב כפול סקלר ממשי יישאר מרוכב. שאר התכונות 7-10 גם הן מתקיימות. לכן $V=\mathbb{C}^2$ הוא מרחב וקטורי מעל $F=\mathbb{R}$.

2. נסתכל על הקבוצה הבאה, כאשר F שדה:

$$F_n[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n \mid a_0,a_1,\dots,a_n\in F\}$$

מדובר באוסף כל הפולינומים ממעלה לכל היותר n עם מקדמים בשדה F כולל פולינום ה-0 המתקבל כאשר כל המקדמים הם 0.
עם חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר, כפי שהגדרנו בעבר.
נראה את קיום כל 10 התכונות.
לצורך כך ניקח 3 פולינומים:

$$f(x)=a_0+\dots+a_nx^n \qquad g(x)=b_0+\dots+b_nx^n \qquad h(x)=c_0+\dots+c_nx^n$$

1. סגירות: $f(x)+g(x)\in F_n[x]$

$$f(x)+g(x)=a_0+\dots+a_nx^n+b_0+\dots+b_nx^n$$
$$=(a_0+b_0)+\dots+(a_nx^n+b_nx^n)\in F_n[x]$$

תכונות 2 ו-3 מתקיימות בגלל אופן הגדרת החיבור וחוק הקיבוץ והחילוף בשדה.

2. מתקיים $f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x)$

3. מתקיים: $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ (לפי חילוף).

4. קיים ב-$F_n[x]$ איבר 0, והוא פולינום ה-0. נסמן אותו ב-$P_0(x)$ ונקבל:

$$f(x)+P_0(x)=(a_0+\dots+a_nx^n)+(0+\dots+0x^n)=a_0+\dots a_nx^n$$

5. קיים ב-$F_n[x]$ נגדי:
הנגדי של: $f(x)=a_0+\dots+a_nx^n$ הוא: $-f(x)=-a_0-\dots-a_nx^n$ כי:

$$f(x)+(-f(x))=0+\dots+0x^n=P_0(x)$$

6. יהי $\alpha\in F$ אז $\alpha\cdot f(x)\in F_n[x]$ כי:

$$\alpha\cdot f(x)=\alpha(a_0+\dots a_nx^n)=\alpha a_0+\dots+\alpha a_nx^n\in F_n[x]$$

תכונות 7-10 מתקיימות גם כן בגלל אופן הגדרת החיבור וחוק הקיבוץ והחילוף בשדה הפולינומים.
סך הכל קיבלנו שהפולינומים ממעלה לכל היותר n בשדה F הם מרחב וקטורי.

הכללה של הפולינומים: נשים לב שאם המקדמים של הפולינומים הם ממשיים, אז הפולינומים הם למעשה פונקציות ממשיות.
לכן, נכליל ונגדיר: $V=\{f(x)\mid f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\}$, $F=\mathbb{R}$
נגדיר חיבור וכפל בסקלר לכל $f(x),g(x)\in V$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$ ע"י:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(\alpha\cdot f)(x)=\alpha\cdot f(x)$$

נבחין כי מתקיים הקשר הבא:

$$\mathbb{R}_0[x]\subset\mathbb{R}_1[x]\subset\dots\subset\mathbb{R}_n[x]\subset\dots\subset\mathbb{R}[x]\subset\dots\subset V$$

דוגמאות לא סטנדרטיות למרחבים וקטוריים :

דוגמה 1 :

נגדיר $V=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}$ ונגדיר $F=\mathbb{R}$.

נראה ש- V הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ביחס לפעולות הבאות:

יהיו $x,y\in V$, $\alpha\in\mathbb{R}$ ונגדיר:

חיבור וקטורים : $x\oplus y = x\cdot y$

כפל בסקלר: $\alpha\odot x = x^{\alpha}$

נראה שהתכונות מתקיימות:

(1) סגירות לחיבור: אם $x,y\in V$ אז $x\oplus y = x\cdot y\in V$ כי מכפלת ממשיים חיוביים היא ממשי חיובי.

תכונות 2 ו- 3 מתקיימות בזכות הקיבוץ והחילוף של כפל רגיל בממשיים:

(2) חוק קיבוץ: $x\oplus(y\oplus z) = x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z = (x\oplus y)\oplus z$

(3) חוק חילוף: $x\oplus y = x\cdot y = y\cdot x = y\oplus x$

(4) קיים ב- V איבר אדיש לחיבור והוא המספר הממשי החיובי 1: $x\oplus 1 = x\cdot 1 = x$. כלומר $0_V = 1$.

(5) קיים ב- V איבר נגדי: הנגדי של x הוא $y=\frac{1}{x}\in V$ כי מתקיים $x\oplus y = x\cdot y = x\cdot \frac{1}{x} = 1 = 0_V$

(6) סגירות לכפל בסקלר: יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, אז $\alpha\odot x = x^{\alpha}>0$ כי x ממשי חיובי ולכן $\alpha\odot x\in V$.

תכונות 7-10 מתקיימות מחוקי כפל וחזקה של מספרים ממשיים.

(7) $(\alpha+\beta)\odot x = x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}\cdot x^{\beta} = x^{\alpha}\oplus x^{\beta} = \alpha\odot x\oplus\beta\odot x$

(9) $1\odot x = x^{1} = x$

לכן $V=\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ הוא מרחב וקטורי מעל $F=\mathbb{R}$.

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. אזי:

(א) האדיש לחיבור ב- V הוא יחיד.

(ב) הנגדי של v ב- V הוא יחיד.

(ג) לכל $v\in V$ מתקיים $0_F\cdot v = 0_V$

(ד) לכל $v\in V$ מתקיים $(-1)\cdot v = -v$

(ה) $\alpha\cdot v = 0$ אמ"מ $\alpha=0$ או $v=0$.

הוכחה

(א) האדישים לחיבור הוא יחיד.

נניח בשלילה שקיימים ב- V שני אדישים לחיבור: e_1, e_2.

מצד אחד e_1 אדיש לחיבור ולכן: $e_1+e_2=e_2$.

מצד שני e_2 אדיש לחיבור ולכן: $e_1+e_2=e_1$

אגף שמאל שווה בשני המקרים ולכן גם אגף ימין, כלומר $e_1=e_2$.

(ב) הנגדי של v, כלומר $-v$ שקיים לפי תכונה 5 הוא יחיד.

נניח בשלילה שקיים ל- v נגדי נוסף: v_1.

מהגדרת הנגדי מתקיים: $v+v_1=0$

נוסיף את $-v$ לשני אגפי המשוואה:

$$-v+(v+v_1) = -v+0$$

לפי תכונה 2, נזיז את הסוגריים באגף שמאל ונקבל:

$$(-v+v)+v_1 = -v+0$$

לפי תכונות 5 באגף ימין ו- 4 באגף שמאל נקבל:

$$0+v_1 = -v$$

לפי תכונה 4 נקבל: $v_1=-v$ ולכן הנגדי הוא יחיד.

ג) לכל $v\in V$ מתקיים $0_F\cdot v=0_v$

האיבר $0\in F$ אדיש לחיבור ולכן נכתוב:

$$0\cdot v=(0+0)\cdot v \underset{\text{תכונה 7}}{=} 0\cdot v+0\cdot v$$

$$0\cdot v=0\cdot v+0\cdot v$$

V סגור לכפל בסקלר לפי תכונה 6, לכן $0\cdot v\in V$ ולכן יש לו נגדי לפי תכונה מספר 4 שהוא $-0\cdot v$:

נחבר את הנגדי לשני אגפי המשוואה ונקבל:

$$-0\cdot v+0\cdot v=-0\cdot v+(0\cdot v+0\cdot v)$$

$$-0\cdot v+0\cdot v=(-0\cdot v+0\cdot v)+0\cdot v$$

איבר ועוד הנגדי נותן 0 ולכן:

$$0=0+0\cdot v$$

0 אדיש לחיבור ולכן:

$$0=0\cdot v$$

ד) לכל $v\in V$ מתקיים $(-1)\cdot v=-v$

נחשב את ערכו של הביטוי: $v+(-1)\cdot v$:

$$v+(-1)\cdot v \underset{\text{תכונה 9}}{=} 1\cdot v+(-1)\cdot v=\underbrace{(1+(-1))}_{0}\cdot v \underset{\text{ראינו בסעיף קודם}}{=} 0\cdot v=0$$

קיבלנו $v+(-1)\cdot v=0$ ולכן $(-1)\cdot v$ הוא הנגדי של v.

אבל $-v$ הוא הנגדי של v. מיחידות הנגדי נקבל $(-1)\cdot v=-v$

ה) $\alpha\cdot v=0$ אמ"מ $\alpha=0$ או $v=0$.

כיוון שני $(\Rightarrow)$: נתון $\alpha=0$ או $v=0$ וצ"ל $\alpha\cdot v=0$.

אם $\alpha=0$ לפי סעיף ג במשפט נקבל: $\alpha\cdot v=0\cdot v=0$

אם $v=0$ נקבל $\alpha\cdot v=\alpha\cdot 0$. נשתמש באת ההוכחה שעשינו בסעיף ג רק במקום להתחיל מ- $0_F\cdot v=(0_F+0_F)\cdot v$ ולהסיק ש- $0_F\cdot v=0_v$ נתחיל ב- $\alpha\cdot 0_v=\alpha(0_v+0_v)$ ונסיק בסוף של דבר ש- $\alpha\cdot 0_v=0_v$.

כיוון ראשון $(\Leftarrow)$: נתון $\alpha\cdot v=0_v$ וצ"ל $\alpha=0_F$ או $v=0_v$

אם $\alpha=0$ אז סיימנו.

אם $\alpha\neq 0$ אז ל-α יש הופכי בשדה α^{-1}.

$$\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot v)=\alpha^{-1}\cdot 0_v$$

$$(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\cdot v=\alpha^{-1}\cdot 0_v$$

$$1_F\cdot v=\alpha^{-1}\cdot 0_v$$

$$v=\alpha^{-1}\cdot 0_v$$

$$v=0_v$$

תת מרחב וקטורי

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ותהי W תת קבוצה של V.
W נקראת תת מרחב וקטורי (תמ"ו) של V, אם W מרחב וקטורי בפני עצמו עם אותן פעולות ומעל אותו שדה.

ראינו שהמטריצות הסימטריות הממשיות מסדר 2x2 הן תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

נבדוק כמה דוגמאות נוספות לחידוד ההגדרה :

① האם $\mathbb{R}^2$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^3$?

תשובה : לא כי $\mathbb{R}^2$ הוא תת קבוצה של $\mathbb{R}^3$.

② האם $\mathbb{R}^2$ הוא תת מרחב של $\mathbb{C}^2$?

תשובה : לא כי $\mathbb{R}^2$ הוא מ"ו מעל לשדה $\mathbb{R}$ ואילו $\mathbb{C}^2$ הוא מ"ו מעל לשדה $\mathbb{C}$.

③ האם $\mathbb{R}^+$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}$?

תשובה : לא כי הפעולות שהגדרנו ב- $\mathbb{R}^+$ שונות מהפעולות שמוגדרות ב- $\mathbb{R}$.