תגבה הרצאה 5

קומבינטוריקה

ענף מתמטי העוסק בבעיות ספירה.

חוק הסכום:

מתי מחברים? מחברים כאשר סופרים עצמים (אלמנטים, אובייקטים) המתחלקים למספר סוגים, כך שאין בהם חפיפה, מחברים את מספר העצמים מכל סוג.

פורמלית: אם בקבוצה א' יש m איברים, ובקבוצה ב' יש n איברים והקבוצות זרות. אז מספר האפשרויות לבחור איבר מקבוצה א' או ב' הוא: $m+n$.

דוגמה: לוועד המחלקה יש לבחור נציג משנה א' או שנה ב'. ישנם 30 סטודנטים משנה א' ו-40 סטודנטים משנה ב'. מספר האפשרויות לבחירת נציג הוא $30+40=70$.

חוק המכפלה:

מתי נכפיל? כאשר סופרים אפשרויות הנקבעות ע"י מספר מסוים של בחירות והבחירות אינן תלויות זו בזו. במקרה זה מספר האפשרויות הכללי הוא מכפלת מספריהן בכל אחת מהבחירות.

פורמלית: אם ניתן לבצע תהליך ב-2 שלבים, בשלב א' m תוצאות והעקבות כל תוצאה של שלב א' יש n תוצאות לשלב ב' ואם כל צירוף אפשרי של איברים נותן תוצאה שונה, אז מספר האפשרויות לבצע את תהליך הוא $m \times n$

דוגמה: כמה מילים באורך 2 ניתן לבנות מעל האותיות a,b,c:

$$\underbrace{3}_{\text{3 אפשרויות לתו ראשון}}\ \underbrace{3}_{\text{3 אפשרויות לתו שני}} = 3\cdot 3 = 9$$

9 אפשרויות: aa, ab, ac, ba, bc, bb, ca, cb, cc

דוגמה:

כמה מילים באורך 2 ניתן לבנות מהאותיות a,b,c כאשר a היא אות במילה?

$$\underbrace{2}_{\text{אפשרויות ל-}a}\ \underbrace{3}_{\text{3 אפשרויות לבחירת תו 2}} = 6$$

(ספרנו כאן כפילויות כלומר ספרנו את aa פעמיים)

לא נכון

aa, ab, ba, ac, ca, aa } 5

(ספרנו את aa פעמיים וזה לא טוב)

$$\boxed{\text{בניית מילה באורך 2 מ-}a,b,c\text{ בלי אילוצים}} - \boxed{\text{מספר המילים באורך 2 בלי }a} = \boxed{\text{כל המילים באורך 2 עם }a\text{ במילה}} = 5 \checkmark$$

נכון

aa, ab, ba, ac, ca } 5

$$\Downarrow \quad 9 \qquad \Downarrow \quad 4 \qquad \Downarrow \quad 5$$

$$\underbrace{2}_{\text{2 אפשרויות b או c}}\ \underbrace{2}_{\text{2 אפשרויות b או c}} = 4$$

חליפות :

נתונה קבוצה של n אלמנטים שונים, חליפה של k מתוך n היא תת קבוצה של k איברים מתוך ה- n המסודרים בסדר כלשהו. כל איבר בקבוצה נמצא בחליפה לכל היותר פעם 1. סימון $P(n,k)$

$$\underset{n}{\overset{1}{\_\_}}\quad \underset{(n-1)}{\overset{2}{\_\_}}\quad \underset{(n-2)}{\overset{3}{\_\_}}\quad \_\_\quad \dots\dots \underset{(n-k+1)}{\overset{k}{\_\_}}$$

$$P(n,k) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \dots \cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

דוגמה : (חליפות)

10 אנשים רצים, ממוספרים מ- 1 עד 10. הם משתתפים בתחרות שבה מחלקים 3 מדליות: זהב, כסף וארד.
מהו מספר האפשרויות לחלק מדליות?

פתרון:

שלב א': בוחרים מתוך 10 אפשרויות לזוכה במדליית הזהב.
שלב ב': בוחרים מתוך 9 אפשרויות לזוכה במדליית הכסף.
שלב ג': בוחרים מתוך 8 אפשרויות לזוכה במדליית ארד.

סך כל האפשרויות: $10\cdot9\cdot8$

$$P(10,3) = \frac{10!}{7!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot\cancel{7\cdot\dots}}{\cancel{7\cdot6\cdot5\cdot\dots}} = 10\cdot9\cdot8$$

תמורות :

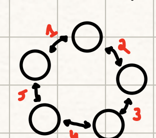
תמורה של n אלמנטים היא חליפה של n מתוך n.
כלומר $P(n,n)$. כלומר זה סידור של n אלמנטים.

דוגמאות:

(א) בכמה אופנים ניתן להושיב 5 ילדים בשורה?

$$\underline{5}\quad \underline{4}\quad \underline{3}\quad \underline{2}\quad \underline{1} = 5!$$

(ב) בכמה אופנים ניתן להושיב 5 ילדים בשולחן עגול? $(n-1)! = \frac{n!}{n}$ (מספר האפשרויות לסדר n איברים במעגל)



ניתן לפרוס כל מעגל לסידור ממנו שורה.
ניתן לפתוח מעגל בכמה מקומות, בכל פעם איבר אחר מהמעגל יהיה הראשון.
ולכן מספר השורות שניתן לסדר ממעגל 1 שווה למספר האיברים בו.
כאשר אנו דורשים לחשב כמה סידורים שונים יש כאשר מסדרים n איברים במעגל, עלינו לחשב את מספר השורות שניתן לסדר $(n!)$, אולם בסוף עלינו לחלק ב- n, מאחר וכל n שורות יוצרות מעגל אחד.

צירופים:

נתונה קבוצה של n אלמנטים שונים, צירוף של k מתוך n היא תת קבוצה של k איברים מתוך ה-n ללא חשיבות לסדר ביניהם.

דוגמה:

בכיתה שיש בה 20 תלמידים רוצים לבחור נבחרת כדורסל ובה יש 5 שחקנים.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת? סדר בחירת השחקנים אינו חשוב.

פתרון:

נניח שיש עם חשיבות לסדר: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdots\cdots$ כלומר $20!$

אבל במקרה בחרנו כל נבחרת כמה פעמים.

כמה פעמים כל נבחרת נספרת? $5!$ (כמספר האפשרויות לסדר אותה)

ולכן נחלק ב- $5!$

כלומר ללא חשיבות מתקבל $\frac{20!}{5!}$.

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$