בדידה הרצאה 9

משפט : בינום של ניוטון

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n=0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

כאשר n טבעי.

* אפשר להפוך את סדר האיברים בחשבון :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

זהות פסקל :

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{אם האיבר ה-}k\text{ חלק מהבחירה}} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{אם האיבר ה-}k\text{ לא חלק מהבחירה}}$$

קומבינטורית - בחירה של k איברים מתוך n כאשר בצד ימין מחלקים את הבחירה לשני מקרים זרים.

מקרה 1 : האיבר ה-k נכלל בבחירה ונותר לבחור $\binom{n-1}{k-1}$

מקרה 2 : האיבר ה-k לא נכלל בבחירה ונותר לבחור $\binom{n-1}{k}$

בצד שמאל הבחירה היא של k מתוך n בלי חלוקה למקרים.

אלגברית -

$$\boxed{C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}\cdot\frac{n-k}{n-k}$$

$$= \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}\left(n-k+k\right) = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k)!}\cdot n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

הוכח קומבינטורית :

$$\binom{n}{k+1}\cdot(k+1) = \binom{n}{k}\cdot(n-k)$$

סיפור : מספר האפשרויות לבחירת ועד בגודל $k+1$ מתוך כיתה בגודל n.
כאשר אחד מחברי הועד הוא יו"ר הועד.

צד שמאל : בוחרים את כל חברי הועד + יו"ר $\binom{n}{k+1}$ ואז בוחרים מתוכם יו"ר.

צד ימין : בוחרים חברי ועד ללא יו"ר $\binom{n}{k}$ ואז בוחרים יו"ר ממי שנשאר $(n-k)$
במקרה זה בוחרים ועד לחוד ויו"ר לחוד.

הוכח אלגברית: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$

אלגברית:

נשתמש בבינום של ניוטון: $y=1$ $\quad x=-1$

$$(-1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\cdot\underbrace{1^{n-i}}_{1}$$

$$0=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$$

קומבינטורית:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots=0$$

$$\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}\dots}_{\text{סך הכל תתי הקבוצות בגודל זוגי לקבוצה בעלת } n \text{ איברים.}}=\underbrace{\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots}_{\text{סך הכל תתי קבוצות בגודל אי זוגי.}}$$

טענה: מספר תתי הקבוצות בגודל זוגי שווה למספר תתי הקבוצות בגודל אי זוגי.

תרגיל: מהו המקדם של x^7y^4 בפיתוח $(x+y)^{11}$

$$(x+y)^{11}=\sum_{i=0}^{11}\binom{11}{i}x^iy^{11-i}$$

$$=\binom{11}{0}x^0y^{11}+\binom{11}{1}x^1y^{10}+\binom{11}{2}x^2y^9+\dots+\binom{11}{7}x^7y^4$$

תרגיל: מהו המקדם של $x^{12}y^{13}$ בפיתוח $(\underbrace{2x}_{x}-\underbrace{3y}_{y})^{25}$ תשובה: $\binom{25}{12}\cdot2^{12}(-3)^{13}$

תרגולים :

① הוכח כי בכל תת קבוצה של הקבוצה $\{1,2,.....,30\}$ המונה 21 איברים יש לפחות 3 מספרים עוקבים.

פתרון :

נגדיר שובכים :

$$\underbrace{[1,2,3],\ [4,5,6],\ [7,8,9],\ .....\ [28,29,30]}_{\text{10 שובכים}}$$

יש 21 יונים. לפי עקרון שובך היונים קיים שובך עם לפחות 3 איברים $\left(\left\lceil \frac{21}{10} \right\rceil = 3\right)$

② בכל קבוצה של 12 מספרים שלמים שונים, יש 2 מספרים שהפרשם הוא מספר המתחלק ללא שארית ב- 11.

פתרון :

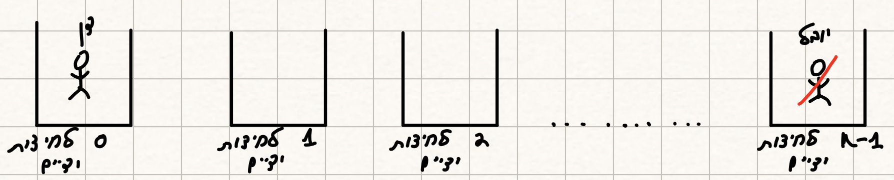
הנחה יעוזה: הפרש בין 2 מספרים שהשארית מודולו 11 שלהם זהה, מתחלק בשלמות ב- 11.
שובכים - לכל מספר נתאים את השארית שלו מודולו 11 ונגדיר שובכים באופן הבא :

$$\underbrace{0 \bmod (11),\ 1 (\bmod 11),\ 2 (\bmod 11),\ 3 (\bmod 11),\ .....,\ 10 \bmod (11)}_{\text{11 שובכים.}}$$

יש 11 שובכים ו-12 יונים ולכן לפי עקרון שובך היונים קיים שובך עם 2 מספרים. כלומר יש 2 מספרים ששארית החלוקה שלהם ב- 11 זהה ולכן לפי הנחה ה-יעוזה גם ההפרש שלהם מתחלק ב- 11.

③ n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים זה לזה. הוכח כי קיימים לפחות 2 אנשים שלחצו את אותו מספר של ידיים.

שובכים :



אם יש מישהו שלא לחץ ידיים כלל, לא יתכן שיש מישהו שלחץ ידיים לכולם, ולהיפך.
לכן יש לנו n-1 שובכים. לפי עקרון שובך היונים קיימים לפחות 2 אנשים שלחצו ידיים זה לזה.

④ הוכח כי : $a+2\binom{a}{2}=a^2$

פתרון :

$$a+\cancel{2}\left(\frac{a!}{\cancel{2}!(a-2)!}\right)$$

$$= a + \frac{a!}{(a-2)!}$$

$$\frac{a!}{(a-2)!} = \frac{\cancel{1\cdot2\cdot3\cdot....\cdot(a-2)}(a-1)(a)}{\cancel{1\cdot2\cdot3....\cdot(a-2)}}$$

$$= a + a(a-1)$$

$$= a + a^2 - a$$

$$= a^2$$

5 הוכח :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 3^i = 4^n$$

נעזר בבינום של ניוטון $x=3,\ y=1$

$$(3+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 3^i \cdot \underbrace{1^{n-i}}_{1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 3^i$$

$$\boxed{(4)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 3^i}$$