האינטגרל הלא מסוים

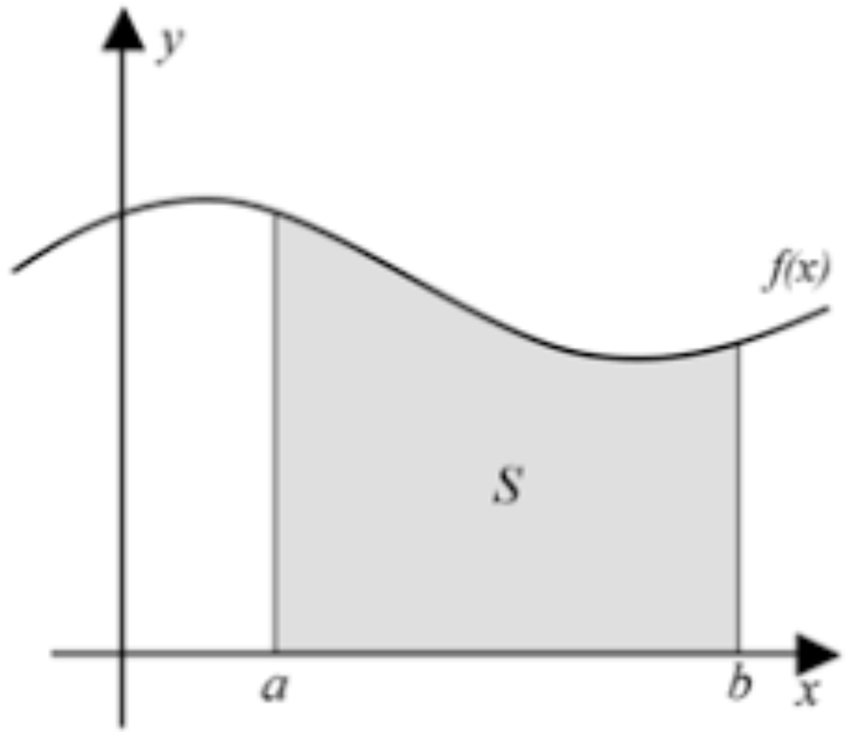
1. מבוא

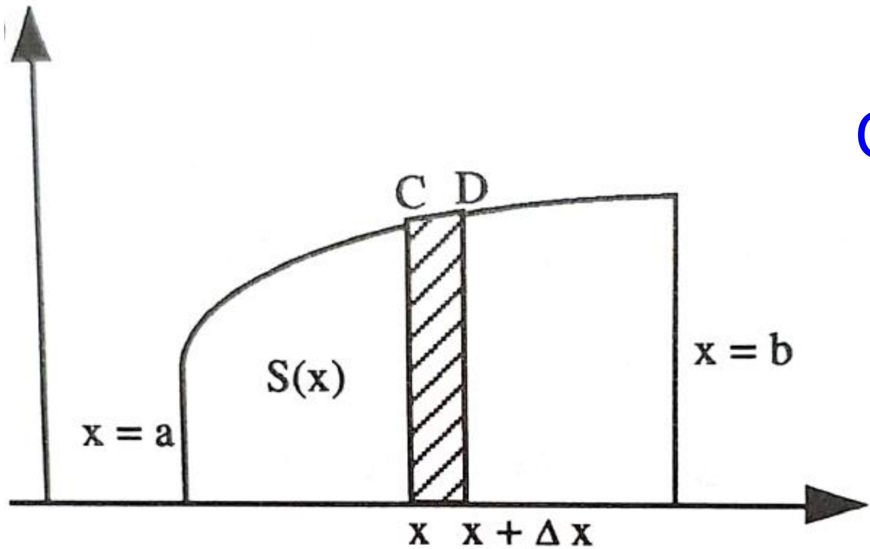
בפרק זה נדון בבעיה המרכזית השנייה של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי :

בעיית השטח

נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה ואי-שלילית בקטע $[a,b]$.

צריך לחשב את השטח שבין הגרף של הפונקציה $f(x)$ לבין הקטע $[a,b]$ שעל ציר ה- x





נגדיר פונקציה $S(x)$ הנותנת את השטח מהאנך $x=a$ ועד האנך המורד מהנקודה C על הפונקציה לציר ה-x .

השטח המוגבל על ידי $x=a$, ציר ה-x , הפונקציה והאנך המורד מ- C הוא $S(x)$.

השטח המוגבל על ידי $x=a$, ציר ה-x, הפונקציה והאנך המורד מ- D הוא בהתאם להגדרה $S(x+\Delta x)$.

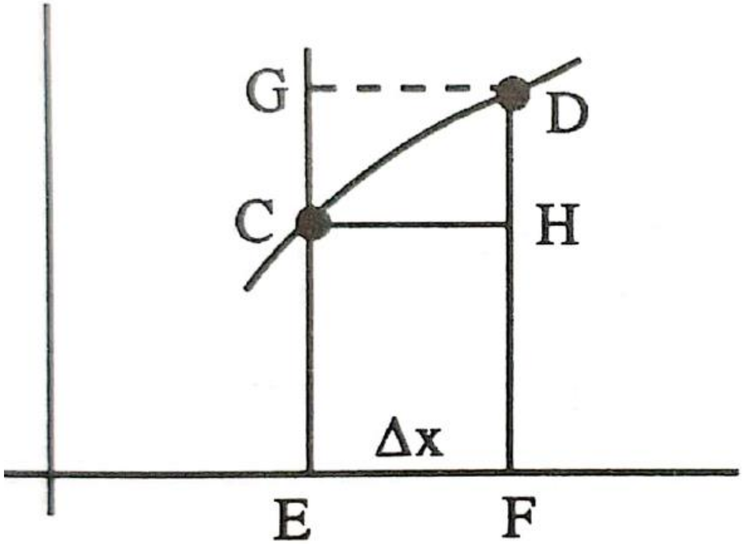
השטח המקווקו ניתן לבטא ע"י ההפרש של שני שטחים: $S(x+\Delta x)-S(x)$

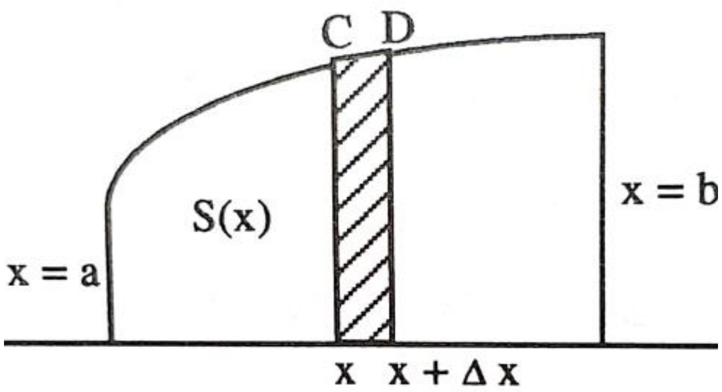
הקו CD אינו קו ישר, ולכן איננו יודעים לחשב שטח זה.

ניתן לעשות זאת על ידי קירובים.

נבנה שני מלבנים: CHFE ו-GDFE

השטח ממקווקו הוא מקיים :





$$S_{CHFE} < S(x+\Delta x) - S(x) < S_{GDFE}$$

$$CE \cdot \Delta x < S(x+\Delta x) - S(x) < DF \cdot \Delta x$$

$$CE < \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} < DF$$

$$f(x) < \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) < \lim_{\Delta x \to 0} f(x)\left[\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}\right] < \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)$$

$$S'(x) = f(x)$$

2. פונקציות קדומות

הגדרה 1

$F(x)$ נקראת ***פונקציה קדומה*** לפונקציה $f(x)$ בתחום D
אם עבור כל x בתחום D מתקיים : $F'(x) = f(x)$
לכל קבוע C גם $F(x)+C$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$
אם לפונקציה $f(x)$ יש פונקציה קדומה אז למעשה יש לה אינסוף פונקציות קדומות השונות זו מזו בקבוע C .

הגדרה 2

תהי $f(x)$ פונקציה בעלת פונקציה קדומה $F(x)$. אוסף כל הפונקציות הקדומות $F(x)+C$ נקרא ***האינטגרל הלא מסוים*** של $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

כאשר C מספר קבוע כלשהו.

סימון

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[F(x) + C\right] = f(x)$$

הסמל dx המופיע בפעולות הגזירה והאינטגרציה משמש לזיהוי המשתנה הבלתי-תלוי. אם מציינים את המשתנה הבלתי-תלוי באות שונה מ-x, נניח t, צריך לשנות בהתאם גם הסמל.

3. תכונות של האינטגרל הלא מסוים

תכונה 1

אם $f(x)$ פונקציה גזירה אז מתקיים: $\int d(f(x)) = \int f'(x)dx = f(x) + C$

תכונה 2

אם k מספר קבוע ו-$f(x)$ פונקציה כלשהי אז מתקיים:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

תכונה 3

אם $\int f(x)dx = F(x) + C$ ופונקציה $q(x)$ גזירה אז מתקיים :

$$\int f(q(x))dq(x) = F(q(x)) + C$$

תכונה 4

אם $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ אז $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$$

תכונה 5

האינטגרל של הסכום (או ההפרש) של שתי פונקציות שווה לסכום (או להפרש) האינטגרלים :

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

תכונה 6

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

4. טבלת אינטגרלים

טבלת אינטגרלים יסודיים	
$\int k\,dx = kx + C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ,\quad n \neq -1$	$\int \cos dx = \sin x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$

5. שיטות אינטגרציה

אינטגרציה ישירה

דוגמה 1

מצאו את האינטגרל : $\int \left(x^3 - 5x\right) dx$

דוגמה 2

מצאו את האינטגרל : $\int \left(2 + \sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx$

דוגמה 3

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{\left(\sqrt{x} + 1\right)^3}{x} dx$

דוגמה 4

מצאו את האינטגרל : $\int \cos^2 x dx$

דוגמה 5

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

שיטת ההכנסה לדיפרנציאל

דוגמה 1

מצאו את האינטגרל : $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

דוגמה 2

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$

דוגמה 3

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2}\,dx$

דוגמה 4

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{(\sin x)^3}}\,dx$

דוגמה 5

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,dx$

אינטגרציה לפי חלקים

בניגוד לפעולות הגזירה כאשר עבורה יש מספר כללים בכדי לגזור כמעט כל פונקציה אלמנטרית, לגבי פעולת האינטגרציה אין כללים דומים המאפשרים לבצע אינטגרציה אפילו של פונקציות אלמנטריות פשוטות.

סיבה חלקית למצב זנ היא שבמקרים רבים לא קיימות עבורן פונקציות קדומות אלמנטריות ולכן אין בידנו דרכים פשוטות לתאר את הפונקציות הקדומות האלה גם במקרים שיש לנו שיטה למצוא אותן.

למשל, לא קיימת פונקציה קדומה אלמנטרית עבור e^{x^2} או $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

למרות זאת יש מספר שיטות לחישוב אינטגרלים של פונקציות רבות ושכיחות.

שיטה המבוססת על כלל הגזירה של מכפלת פונקציות:

$$\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

ממנה נובע כי

$$u(x)\cdot v'(x)=\left[u(x)\cdot v(x)\right]'-u'(x)\cdot v(x)$$

לכן מהגדרת האינטגרל נקבל את הנוסחה הבאה :

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

שנקראת ***נוסחת האינטגרציה לפי חלקים***

$$u'(x)=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad du=u'(x)\,dx\,,\;v'(x)=\frac{dv}{dx}\quad\Rightarrow\quad dv=v'(x)\,dx$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

דוגמה 1

מצאו את האינטגרל : $\int xe^x dx$

דוגמה 2

מצאו את האינטגרל : $\int \ln x \, dx$

דוגמה 3

מצאו את האינטגרל : $\int x(\ln x)^2 \, dx$

דוגמה 4

מצאו את האינטגרל : $\int \arctan x \, dx$

דוגמה 5

מצאו את האינטגרל : $\int e^x \sin x \, dx$

רשימת אינטגרלים טיפוסיים אשר ניתן לפתור על ידי אינטגרציה לפי חלקים :

$$\int (ax+b)^n \cdot \sin(kx)\,dx$$

$$\int (ax+b)^n \cdot \cos(kx)\,dx$$

$$\int f(x) \cdot (\ln x)^n\,dx$$

$$\int (ax+b)^n \cdot e^{kx}\,dx$$

$$\int f(x) \cdot (\arccos x)^n\,dx$$

$$\int f(x) \cdot (\arcsin x)^n\,dx$$

$$\int f(x) \cdot (\operatorname{arccot} x)^n\,dx$$

$$\int f(x) \cdot (\arctan x)^n\,dx$$

כאשר הפונקציה $f(x)$ צריכה להיות מספיק פשוטה בכדי שפתרון האינטגרל יתאפשר. מלבד סוג זה קיימים עוד מספר רב של אינטגרלים ניתן לפתור באמצעות אינטגרציה לפי חלקים.

שיטת ההצבה

משפט

תהי $F(x)$ פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בקטע (a,b) ונניח ש- $x=\varphi(t)$ פונקציה גזירה בקטע מסוים $\alpha<t<\beta$ כך ש- $a<\varphi(t)<b$ אז מתקיים :

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+2x}}\,dx=\left\{\begin{array}{l} t=\sqrt{1+2x} \\ 1+2x=t^2 \\ x=\frac{t^2-1}{2} \end{array}\quad dx=t\,dt\right\}=\int\frac{t\,dt}{1+t}=\int\frac{t}{1+t}\,dt=\int\frac{t+1-1}{1+t}\,dt=\int\frac{t+1}{1+t}-\frac{1}{1+t}$$

$$=\int 1\,dt-\int\frac{1}{1+t}\,dt=t-\ln|1+t|+C=\sqrt{1+2x}-\ln\left|1+\sqrt{1+2x}\right|+C$$

$$\int\frac{\ln^3 x}{x}\,dx=\left\{\begin{array}{l} \ln x=t \\ x=e^t \\ dx=e^t\,dt \end{array}\right\}=\int\frac{t^3e^t}{e^t}\,dt=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\ln^4 x}{4}+C$$

שיטת
הצבה

$$\int\frac{\ln^3 x}{x}\,dx=\int\frac{1}{x}\cdot\ln^3 x\,dx=\int(\ln x)^3\cdot d(\ln x)=\frac{(\ln x)^4}{4}+C$$

הכנסה
לדיפרנציאל

דוגמה 1

מצאו את האינטגרל : $\int x(2x+3)^{10}dx$

דוגמה 2

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{1}{1+\sqrt{1+2x}}dx$

דוגמה 3

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

דוגמה 4

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

דוגמה 5

מצאו את האינטגרל : $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{x}+1}}dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} = \left\{\begin{array}{l} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5\,dt \\ \sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3 \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2 \end{array}\right\} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int \frac{t^2}{1+t^2} = 6\int 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = 6t - 6\arctan(t)$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\sqrt[6]{x} + C$$

$$\int 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int 1\,dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = t - \arctan(t)$$

הצבות מיוחדות

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{e^x+1} \\ t^2 = e^x+1 \\ e^x = t^2-1 \\ x = \ln\left|t^2-1\right| \end{array} \quad dx = \frac{2t}{t^2-1}\,dt \right\} \int \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t} \cdot \frac{2t}{t^2-1}\,dt = 2\int \left(t^2-1\right)dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + C$$

בשלב ביניים
לא מסיפים צריך מתחם

$$\frac{2}{3}\left(\sqrt{e^x+1}\right)^3 - 2\sqrt{e^x+1} + C$$

אינטגרלים מן הצורה: $\int x^n \cdot \sqrt[m]{ax+b}\ dx\ ,\ \ n,m \in Z$

ההצבה כאן היא : $ax+b=t^m \ \Rightarrow\ x=\frac{1}{a}\left(t^m-b\right)$

אינטגרלים מן הצורה: $\int x^{2n+1}\sqrt{a^2 \pm x^2}\ dx\ ,\ \ n \in Z$

ההצבה כאן היא : $t^2=a^2 \pm x^2$

אינטגרלים מן הצורה: $\int x^{2n}\sqrt{k^2 - x^2}\ dx\ ,\ \ n \in Z$

ההצבה כאן היא : $x=k \cdot \sin t \ \Rightarrow\ t=\arcsin\left(\frac{x}{k}\right)$

אינטגרלים מן הצורה: $\int x^{2n}\sqrt{k^2+x^2}\,dx\ ,\ n\in Z$

ההצבה כאן היא : $x=k\cdot\tan t \;\Rightarrow\; t=\arctan\left(\frac{x}{k}\right)$

אינטגרלים מן הצורה: $\int x^{2n}\sqrt{x^2-k^2}\,dx\ ,\ n\in Z$

ההצבה כאן היא : $x=\frac{k}{\cos t} \;\Rightarrow\; t=\arccos\left(\frac{k}{x}\right)$

הצבות טריגונומטריות

$$\int x^{2n}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx \;\Rightarrow\; x=a\cdot\sin t$$

$$\int x^{2n}\cdot\sqrt{a^2+x^2}\,dx \;\Rightarrow\; x=a\cdot\tan t$$

$$\int x^{2n}\cdot\sqrt{x^2-a^2}\,dx \;\Rightarrow\; x=\frac{a}{\sin t}$$

אינטגרציה של פונקציות רציונליות

הגדרה 1

פונקציה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר $P(x)$ ו-$Q(x)$ הם פולינומים, נקראת פונקציה רציונאלית. אם מעלת הפולינום $P(x)$ קטנה ממעלת הפולינום $Q(x)$

אז פונקציה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ נקראת פשוטה.

הגדרה 2

פונקציות רציונאליות בעלות אחת מן הצורות הבאות:

(1) $\frac{A}{x-k}$ (2) $\frac{A}{(x-k)^n}, \ n \in N, \ n > 1$ (3) $\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)}$ (4) $\frac{mx+n}{(ax^2+bx+c)^n}$

לא רלוונטי לנו

נקראות פונקציות רציונאליות יסודיות.

(1) $\dfrac{A}{x-k}$ $$\int \frac{A}{x-k}dx = A\cdot \ln|x-k| + C$$

דוגמא

$$\int \frac{17}{(x-2)^{2024}}dx = 17\int (x-2)^{-2024}dx = \frac{17\cdot(x-2)^{-2023}}{-2023}$$

(2) $\dfrac{A}{(x-k)^n}$, $n\in N$, $n>1$ $$\int \frac{A}{(x-k)^n}dx = \frac{A}{(1-n)(x-k)^{n-1}} + C$$

(3) $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ $$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{mx}{ax^2+bx+c} + \frac{n}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{mxdx}{ax^2+bx+c} = \frac{m}{2a}\cdot \int \frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{ax^2+bx+c} - \frac{m}{2a}\cdot \int \frac{bdx}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}dx = ?$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)} \stackrel{?}{=} \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-5}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)} \stackrel{?}{=} \frac{a(x-5)+b(x+2)}{(x+2)(x-5)}$$

$$1 = a(x-5)+b(x+2)$$

$$1 = (a+b)x - 5a + 2b$$

$x=0$: $-5a+2b=1$

$x=1$: $1 = a+b-5a+2b$, $1=-4a+3b$

$$\frac{1}{(x+2)(x-5)} = \frac{-1}{7(x+2)} + \frac{1}{7(x-5)} \xleftarrow{\text{אחרי הצבה}}$$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}dx = \int \frac{-1}{7(x+2)} + \int \frac{1}{7(x-5)} = -\frac{1}{7}\ln(x+2) + \frac{1}{7}\ln(x-5) + C$$

$-5a+2b=-4a+3b$

$\left.a=-b\right\}\quad 1=4b+3b$

$1=7b$

$b=\frac{1}{7}\qquad a=-\frac{1}{7}$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$1=a(x-5)+b(x+2)$

$0\cdot x+1=(a+b)x+(-5a+2b)$

$a+b=0$

$a=-b$

$1=-5a+2b$

$1=5b+2b$

$7b=1$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \quad b=\frac{1}{7} \quad a=-\frac{1}{7}$

$$(1)\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a}\left[\frac{p}{(x-x_1)}+\frac{q}{(x-x_2)}\right]$$

מקרה כללי

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) = (x-k)^m (ax^2+bx+c)^n$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{t_1}{(x-k)} + \frac{t_2}{(x-k)^2} + \ldots + \frac{t_m}{(x-k)^m} +$$

$$= \frac{s_1x+r_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{s_2x+r_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{s_nx+r_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int \frac{x^4 - 5x^3 + 20x - 16}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$$

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 20x - 16}{(x-1)(x-2)(x-4)} = x + 2 + \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-4)}$$