

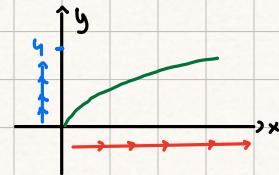
> 3. חישוב גבולות

: חישוב

: חישוב גבולות מוגבלים

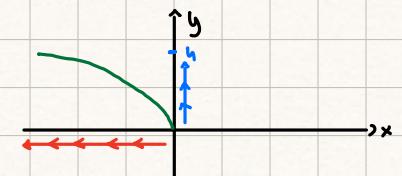
. 4-8. גבולות מוגבלים, $y \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ ו- $f(x) \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$



. 4-8. גבולות מוגבלים, $y \rightarrow \infty$, $y \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ ו- $f(x) \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



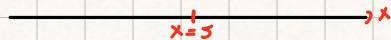
כדי לחשב גבולות מוגבלים, כdeg בפונקציה יש לשים $x \rightarrow \pm\infty$ ו- $f(x)$ יתגלו.

! מ"ט קד $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ גבול מוגבל!



כדי לחשב גבולות מוגבלים, כdeg בפונקציה יש לשים $x \rightarrow \pm\infty$ ו- $f(x)$ יתגלו.

: $x=5$ מוגבל מוקדם מ- $f(x)$ ו- $f(x)$ מוגבל מוקדם מ- $x=5$.



כדי לחשב גבולות מוגבלים מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$:



$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

בנוסף ל- $x=5$ מוגבל מוקדם מ- $f(x)$ יש גם גבול מוגבל מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$.

$$x=5 \text{ מוגבל מוקדם}$$

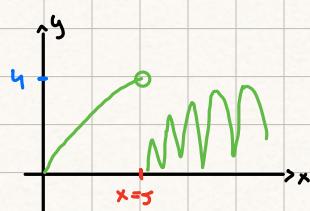
כדי לחשב גבול מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$:

כדי לחשב גבול מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 4$$

כדי לחשב גבול מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$$



, ו- $x=5$ מוגבל מוקדם מ- $f(x)$ ו- $f(x)$ מוגבל מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 4$$

בנוסף ל- $x=5$ מוגבל מוקדם מ- $f(x)$, כדי לחשב גבול מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$ יש גם גבול מוקדם מוקדם מ- $x=5$ מוקדם מ- $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4$$

לימ גבול מוגדר בנקודה x_0 כהו קורן נון.

אם כיוון שטח $x = x_0$ מוגדר בנקודה x_0 , אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

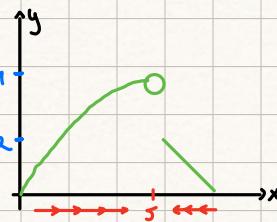
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{בג}$$

$\epsilon - \delta$ פול פון סינר שיפוט רוחני בינהו מושג זה.



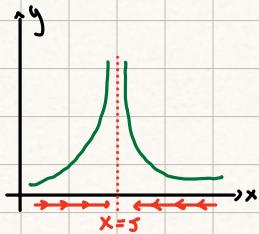
$\epsilon - \delta$ שיפוט רוחני מוגדר מושג $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ בפונקציית f .

במקרה הבא:

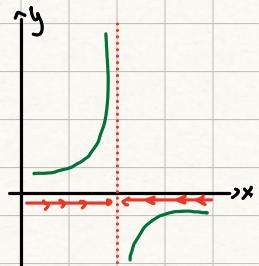


במקרה הבא:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ או $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$. מושג זה מוגדר כפונקציית f מוגדרת בנקודה x_0 ומשתנה x מוגדר בפונקציית f מוגדרת בנקודה x_0 .



במקרה הבא $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ או $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

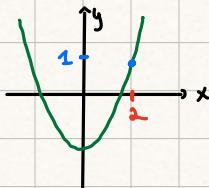
במקרה הבא $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ מושג $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

במקרה הבא $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ מושג $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 = 2^2 - 3 = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

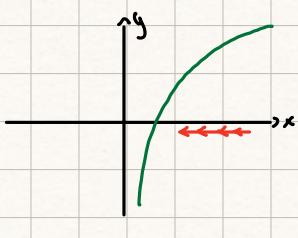


במקרה הבא $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ מושג $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

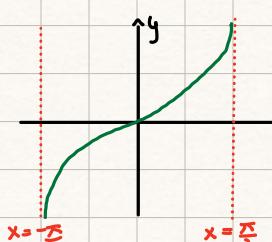
$\therefore x = a$ የቅርብ ተስፋ ተስፋ እንደሆነ

כבר פורסם בירב הפלטים. מילון אונליין של מילון עברי.

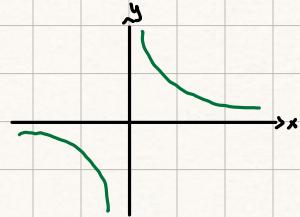
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} l_n(x) = -\infty$$



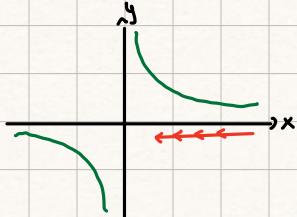
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty$$



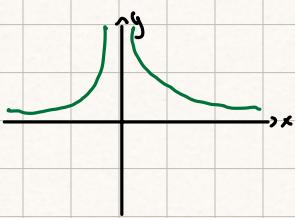
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



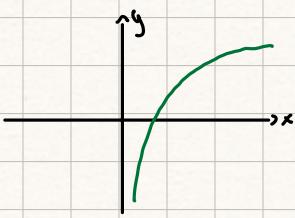
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



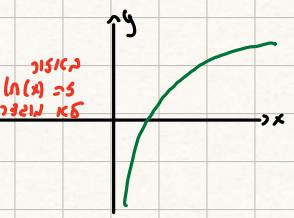
לפיכך נובעת מושגתו של קבוצה כלשהי $f(x)$ ביחס ל- x .

תפקידו של מילון הוא לסייע לאדם בפתרון בעיותיו ובהבנתם.

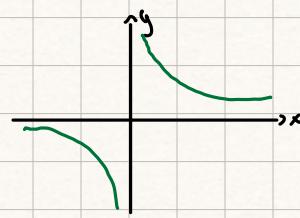
$$\lim_{x \rightarrow \infty} l_n(x) = \infty$$



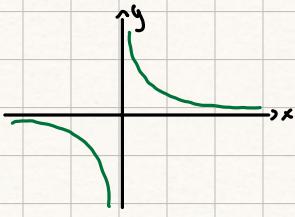
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$



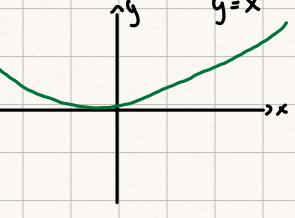
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$



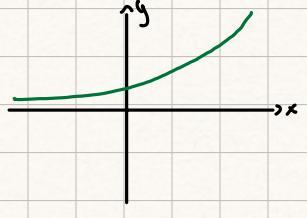
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



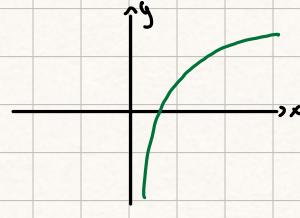
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{10} = \infty$$



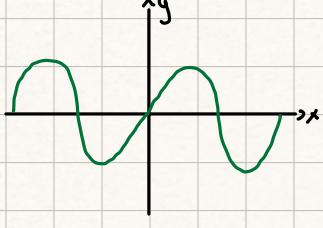
$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^x = \infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) = \text{पर्याप्त कर्म}$$



אנו נוכיח את הטענה:

אם $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = B$ אז $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = A + B$.

הוכחה:

$$\text{ר. גורן}: \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) - f_2(x)) = A - B \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = A + B \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A/B \quad (B \neq 0) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot f_2(x) = A \cdot B \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A^B \quad (A > 0) \quad (3)$$

הנראה: $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ כי $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$ קיימים! ו- $\lim_{x \rightarrow a}$ קיימת $f_1(x) + f_2(x)$ כי $f_1(x)$ ו- $f_2(x)$ קיימות.

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty^\infty = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\infty + c = \infty$$

$$-\infty = 0$$

$$\infty \cdot c = \infty \quad (c > 0)$$

$$\infty - c = \infty$$

$$c^\infty = \infty \quad (c > 1)$$

$$\infty \cdot c = -\infty \quad (c < 0)$$

$$\infty - \infty = \text{בלתי קי}$$

$$c^\infty = 0 \quad (0 < c < 1)$$

$$\infty/c = \infty \quad (c > 0)$$

$$\infty^c = \infty \quad (c > 0)$$

$$\infty^c = 0 \quad (c < 0)$$

$$\infty/c = -\infty \quad (c < 0)$$

$$\infty^{(-\infty)} = \text{בלתי קי}$$

$$\infty^{-\infty} = 0$$

$$\infty \cdot (-\infty) = \text{בלתי קי}$$

$$(-\infty)^\infty = \text{בלתי קי}$$

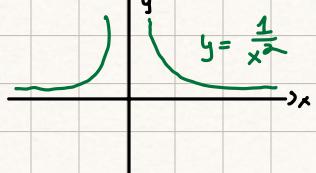
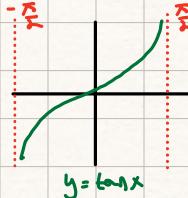
$$\infty/\infty = \text{בלתי קי}$$

$$(-\infty)^{(-\infty)} = \text{בלתי קי}$$

$$(-\infty)/(-\infty) = \text{בלתי קי}$$

$$(-\infty)^\infty = \text{בלתי קי}$$

(ב) מוכיחים $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x = \infty$ (בלתי קי)



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x \cdot (x^2 + 3) = \underbrace{\ln(\infty)}_{\infty} \cdot \underbrace{(x^2 + 3)}_{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \tan x = \infty \cdot 0 \quad ! \quad \text{בלתי קי}$$

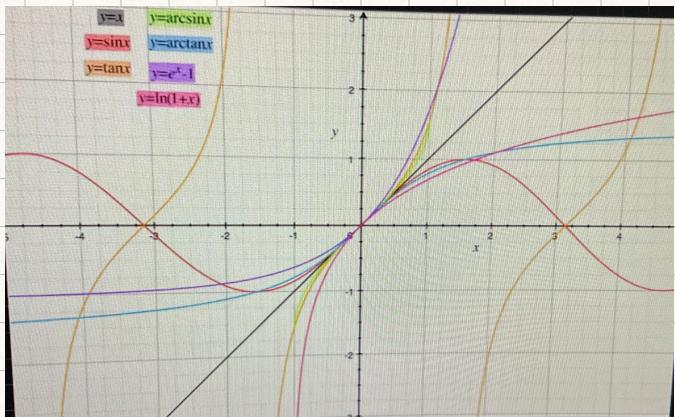
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{x+1} = \frac{\infty}{\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{\infty}{\frac{\pi}{2}} = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$\text{ונס } x = \frac{1}{t} \quad \text{ו- } t = \frac{1}{x}$$

: מוכיחים $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x} = e \quad : \text{בנוסף}$$



ת. 100 מילון: אוניברסיטאות

- $x \rightarrow 0$ \Rightarrow $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ \Rightarrow $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ \Rightarrow $g(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ \Rightarrow $h(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

תגלו: נס סמיאניר נסיאו, x מינימום גיאו נס נס.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \frac{\sin(0^+)}{0^+} = 1$$

: γενδ

. 1 (17) סעדי ג'סיל נאסרה עליה "אל" מילוי 0-8 ערך או 0.01 גורם "אל" נס נס א. גיבס

$$: \text{know} \quad \text{perimeter} \quad \text{width} \quad \text{height} \quad \frac{\sin x}{x} \quad \text{sec} \quad \text{tangent} : = 178^{\circ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

$$x = \sin(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan(t)} = 1$$

$$x = \tan(t)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+2} \right)$$

جعفریان

לענין מילוי הנקודות (1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3(1 + \frac{1}{x^3})}{x^2(1 + \frac{2}{x^2})} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x(1 + \frac{1}{x^3})}{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \frac{1(1+1)}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} \right) \quad \text{Spcz } n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 3-1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x+1}{x+4} \right) = \frac{1+1+1}{1+4} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} : \text{מבחן נר הנגזרת}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{x+1-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} + 1) = 2$$

(9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \right) : \text{чисבו את הגבול}$$

פתרונות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2-2+2x^3}{(1-x^2)(1-x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1-x^2+2x^3}{1-x^2-x^3+x^5} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}} : \text{чисבו את הגבול}$$

(10)

פתרונות:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}, y \rightarrow 0, \quad x - \frac{\pi}{2} = y$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{x-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-\cos y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{y}{2}}{y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{y}{2}}{\sin^2 \frac{y}{2}} \right) = \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{y}{2}}{\left(\frac{y}{2}\right)^2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{2} \right)^2 \frac{1}{y} = 2 \cdot 1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{4y} = 2 \cdot 1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} : \text{чисבו את הגבול}$$

(11)

פתרונות:

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0, \quad \arcsin x = y \Rightarrow x = \sin y$$

نعשית החלפת המשתנים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{3 \sin y} = \frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin y}{y} \right)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right)} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x : \text{чисבו את הגבול}$$

(12)

פתרונות:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-1}{1+x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right)^x \\ -\frac{1}{1+x} = y \Rightarrow x = -1 - \frac{1}{y}, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 & \quad \text{نعשית החלפת המשתנים} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + y \right)^{-1-\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + y \right)^{-1} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \left(1 + y \right)^{\frac{1}{y}} = 1 \cdot e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9-7x^2+6x}{2-7x-7x^2} \right)^{8x-5} : \text{чисבו את הגבול}$$

(13)

פתרונות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9-7x^2+6x}{2-7x-7x^2} \right)^{8x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{13x+7}{-7x^2-7x-2} \right)^{\frac{[-7x^2-7x+2]}{13x+7} \cdot \frac{13x+7}{[-7x^2-7x+2]} (8x-5)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13x+7}{[-7x^2-7x+2]} (8x-5)} = e^{\frac{104}{7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2} : \text{чисבו את הגבול}$$

פתרונות:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{2x+9}-5)(\sqrt[3]{2x+9}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{2x+9}+5)(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(2x+9-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{2x+9}+5)(x-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(2x-16)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{2x+9}+5)(x-8)} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{2x+9}+5)} = 2 \cdot \frac{12}{10} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-1}{x-2} : \text{чисבו את הגבול}$$

פתרונות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x+2}{x^2+2} : \text{чисבו את הגבול}$$

פתרונות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+x+2}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+2} : \text{чисבו את הגבול}$$

פתרונות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 0$$