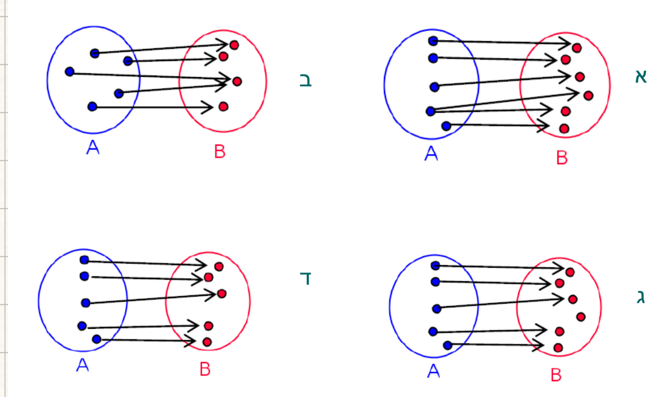
פונקציות של משתנה ממשי יחיד

העצמים העיקריים בהם עוסק חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי הם פונקציות.
בשפה היומיומית המילה פונקציה משמשת במובן תפקיד.
בשפה המתמטית יש למילה זו משמעות אחרת והיא תלות או התאמה.
המונח "פונקציה" נטבע לראשונה על ידי לייבניץ בשנת 1673 לציון התלות של גודל אחד בגודל אחר.

הגדרה 1:

תהיינה שתי קבוצות A ו- B.
כלל המתאים לכל איבר $a\in A$ איבר אחד ולא מספר איברים בקבוצה B נקרא <u>התאמה</u> מקבוצה A לקבוצה B.
נהוג לסמן התאמות של קבוצה לקבוצה באותיות f,g,h וכדומה.
הסימון $f: A\to B$ פירושו "f היא התאמה של קבוצה A לקבוצה B". לכל איבר $a\in A$ קוראים מקור, ולאיבר $b\in B$ המתאים ל-a קוראים תמונה של a.

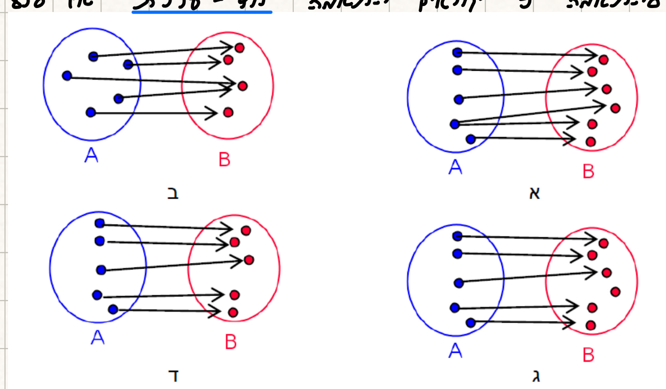
דוגמה 1.



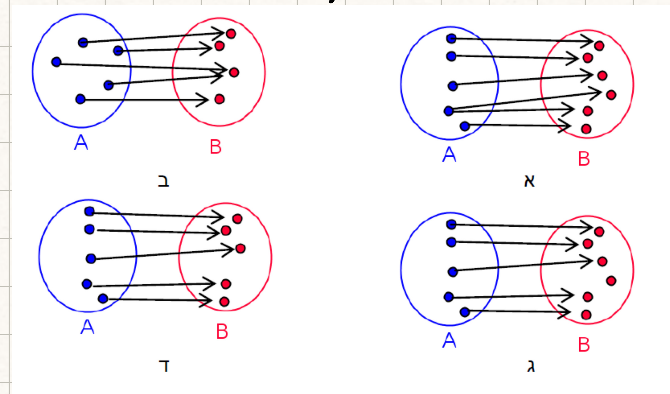
דוגמאות:

התאמה המתאימה לכל מספר ממשי חיובי x מלבן ששטחו שווה ל- x: $f:\{x\in\mathbb{R} \mid x>0\}\longrightarrow x$
התאמה המתאימה לכל מספר ממשי את המספר 1: $1 \longrightarrow f:\{x\in\mathbb{R}\}$.
התאמה המתאימה לכל משולש את המעגל החסום בו: $f: x\longrightarrow \frac{3x}{2}$
התאמה המתאימה לכל מספר טבעי מספר שמתחלק בו:

להתאמה f קוראים התאמה <u>חד-ערכית</u> אם לכל מקור $a\in A$ היא מתאימה תמונה אחת בלבד $b\in B$.

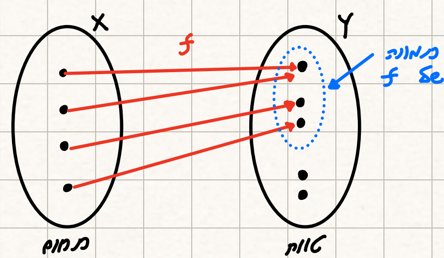


התאמה f תקרא ערכית נקראת חד-חד ערכית אם למקורות שונים מתאימות תמונות שונות.



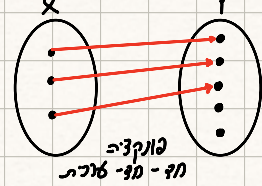
הגדרות בסיסיות:

יהיו X ו- Y שתי קבוצות מספרים. פונקציה f מ- X ל- Y $(f:X\longrightarrow Y)$ היא חוק שמתאים לכל איבר ב- X איבר יחיד ב- Y. הקבוצה X נקראת "תחום" או "תחום הגדרה" של פונקציה f והקבוצה Y היא "טווח" הפונקציה. מספר x בתחום $(x\in X)$ נקרא "משתנה בלתי תלוי" או "מקור" של הפונקציה f.
מספר y בטווח Y $(y\in Y)$ נקרא "משתנה תלוי" או "תמונה" או "ערך הפונקציה" וכותבים $y=f(x)$.
קבוצת כל התמונות נקראת "תמונה של פונקציה". תמונה של פונקציה היא קבוצה חלקית של טווח הפונקציה.

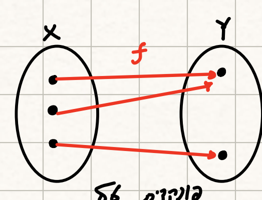


דוגמה: $f(x)=-\sqrt{x}\ ,\ f:\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}\longrightarrow\mathbb{R}$
הפונקציה f מתאימה לכל מקור בתחום $\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ איבר יחיד (ערך הפונקציה, תמונה) בטווח $\mathbb{R}$ לפי חוק ההתאמה $f(x)=-\sqrt{x}$. תמונת הפונקציה היא קבוצת כל התמונות $\{y\in\mathbb{R}\mid y\leq 0\}$.
הערה: אם בהגדרת הפונקציה לא נתון במפורש תחום, אז הפונקציה מוגדרת בתחום "טבעי" כלומר בתחום ההגדרה הגדול ביותר. אם בהגדרת הפונקציה לא נתון במפורש טווח, אז ברירת המחדל היא שטווח הפונקציה הוא $\mathbb{R}$.
אם למשל אומרים שנתונה הפונקציה $y=\sqrt{1-x^2}$ אז הכוונה מדובר על פונקציה שהגדרתה הפורמלית היא
$f:\{x\in\mathbb{R}\mid -1\leq x\leq 1\}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$

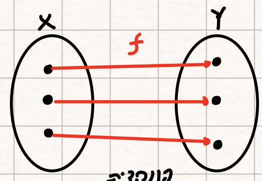
אם פונקציה f מוגדרת כך שלכל תמונה ב- Y יש רק מקור אחד ב- X אז אומרים ש- f היא פונקציה חד-חד ערכית או בקיצור ח.ח.ע:



אם f מוגדרת כך שלכל איבר בטווח יש מקור, אז אומרים ש- f היא פונקציה על (פונקציה על מ- X על Y)



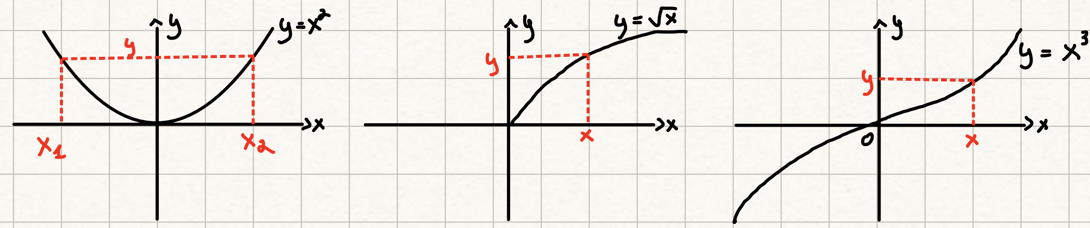
אם f מוגדרת כך שלכל איבר בטווח יש מקור והוא יחיד אז f היא פונקציה חד-חד ערכית ועל.



לדוגמה: $y=x^2$ היא לא פונקציה חח"ע כי לכל ערך הפונקציה y ניתן להתאים שני מקורות (x_1,x_2).
$y=x^2$ היא גם לא פונקציה על כי לא לכל איבר בטווח $\mathbb{R}$ יש מקור.

דוגמה נוספת: הפונקציה $y=\sqrt{x}$ היא פונקציה חח"ע כי לכל ערך הפונקציה y ניתן להתאים מקור אחד בלבד.
הפונקציה $y=\sqrt{x}$ היא לא פונקציה על כי לא לכל איבר בטווח $\mathbb{R}$ יש מקור.

דוגמה נוספת: הפונקציה $y=x^3$ היא חח"ע ועל כי לכל איבר בטווח יש מקור והוא יחיד.



הגדרה 2:

תחום ההגדרה הטבעי של פונקציה $y=f(x)$ הינו קבוצת המספרים הממשיים הגדולה ביותר שעבורם הפונקציה $f(x)$ מוגדרת, כלומר שלפונקציה $y=f(x)$ יש ערכים ממשיים.
מקובל לסמן את תחום ההגדרה של $y=f(x)$ על ידי $D(f)$ (מהמילה Domain באנגלית).
מעתה והלאה, בכל פעם שלא נציין במפורש את תחום ההגדרה של פונקציה נתונה, נתכוון תמיד לתחום ההגדרה הטבעי שלה.

דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה של $f(x)=\frac{x^2+2}{(x-1)(x+3)}$

הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת בנקודות $x=-3$, $x=1$ כי חילוק ב-0 אסור. בכל הערכים האחרים של x הפונקציה $f(x)$ מוגדרת ומקבלת ערכים ממשיים.
לכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא קבוצת כל הממשיים x, פרט ל-$x=-3$ ו-$x=1$
את תחום ההגדרה אפשר לרשום כאיחוד של קטעים באופן הבא:

$$D(f)=(-\infty,3)\cup(-3,1)\cup(1+\infty)$$

דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

שורש תמיד צריך להיות אי-שלילי ומאחר והוא במכנה הוא גם לא שווה ל-0. לכן נדרוש $x^2-4>0$ וזה מתקיים כאשר $x>2$ או $x<-2$.
לכן תחום ההגדרה הוא: $D(f)=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$

המכנה צריך להיות שונה מאפס לכן $x\neq -3$. כשהמונה מתאפס הפונקציה לא מוגדרת ולכן גם $x\neq 3$.

לכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $D(f)=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$

דוגמה: מצאו את תחום ההגדרה הטבעי של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x^2}}$

השורש במכנה צריך להיות גדול מ-0. נדרוש $-x^2>0$, נכפיל במינוס ונקבל $x^2<0$ וזה פסוק שקר עבור המשתנים

לכן במקרה זה הפונקציה <u>לא</u> מוגדרת לכל x.

הגדרה 3:

תהיה פונקציה $y=f(x)$ מ-D ל-E: $f:D\longrightarrow E$

התמונה של פונקציה $y=f(x)$ היא קבוצת כל המספרים $y\in E$ אשר קיים $x\in D$ כך ש- $y=f(x)$.

את התמונה של $y=f(x)$ מקובל לסמן על ידי $Image(f)=I(f)$.

פורמלית: $I(f)=\{y\in E \mid \exists x\in D \Rightarrow y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in D\}$

הערה: התחום של הפונקציה והתמונה של הפונקציה הם מושגים שונים.

ברוב המקרים התחום של הפונקציה הוא "הרבה יותר גדול" מן התמונה.

דוגמה: מצאו את התמונה של הפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כאשר $f(x)=\sin(x)$

נסמן $y=\sin(x)$. סינוס נע בין 1 למינוס 1 ולכן $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid -1\le y\le 1\}$

דוגמה: מצאו את התמונה של הפונקציה $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ כאשר $f(x)=1+\cos^2x$

נסמן $y=\cos^2(x)+1$. הערך המקסימלי של $\cos^2(x)$ הוא 1 והערך המינימלי של $\cos^2(x)$ הוא 0.

לכן: $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid 1\le y\le 2\}$

דוגמה: מצאו את התמונה של הפונקציה: $f(x)=1+\sqrt{x-2}$

נסמן $y=1+\sqrt{x-2}$ הערך המינימלי של y הוא 1 והערך המקסימלי הוא $+\infty$.

לכן: $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\ge 1\}$

דוגמה: מצאו את התמונה של הפונקציה $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

נסמן: $y=\frac{x+1}{x-1}$

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$
$$y(x-1)=x+1$$
$$yx-y=x+1$$
$$\left.\begin{array}{l} yx-x=y+1 \\ x(y-1)=y+1 \end{array}\right\} \quad x=\frac{y+1}{y-1}\ ,\ y\neq 1$$

לכן התמונה של הפונקציה היא: $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\neq 1\}$

שוויון פונקציות:

הגדרה:

שתי פונקציות $y=f(x)$ ו- $y=g(x)$ שוות זו לזו אם שני התנאים הבאים מתקיימים ביחד.

א) תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מתלכדים זה עם זה.

ב) לכל x מן התחום הגדרה מתקיים: $f(x)=g(x)$.

דוגמה: האם שתי הפונקציות הבאות שוות זו לזו: $g(x)=x-3$, $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$$

$$f(x)=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)}$$

$$f(x)=x-3\ ,\ x\neq 3 \qquad g(x)=x-3\ ,\ x\neq 3$$

לכן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ שוות זו לזו.

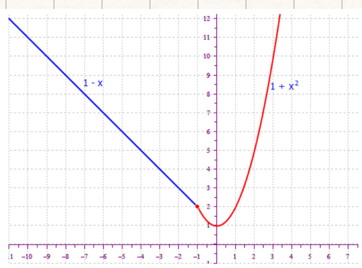
שיטות לתיאור פונקציה:

הגדרה לפי נוסחה: זו היא הדרך הכי שכיחה לתאר פונקציה. משתמשים בנוסחה מתמטית עם משתנה יחיד.

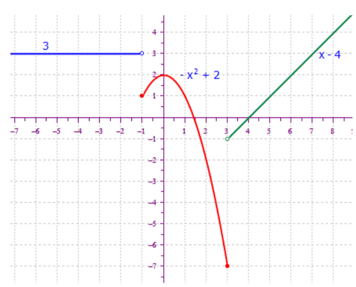
דוגמאות: $f(x)=x^2\cdot\cos(x)$, $g(x)=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x}$, $h(x)=\frac{\cos(2x)}{\sin(x)}$

הגדרה לפי מקרים: ניתן להגדיר פונקציה באמצעות נוסחאות שונות בתחומים שונים.

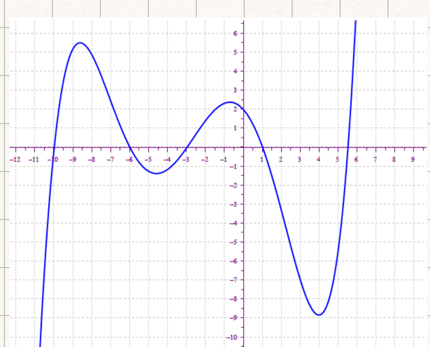
$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1\\ 1+x^2, & x\geq -1\end{cases}$$



$$g(x)=\begin{cases}3 & , x<-1\\ -x^2+2 & , -1\leq x\leq 3\\ x-4 & , x>3\end{cases}$$



הגדרה לפי גרף: מגדירים את הפונקציה באמצעות קו מסוים במערכת הצירים. קו זה נקרא גרף הפונקציה.



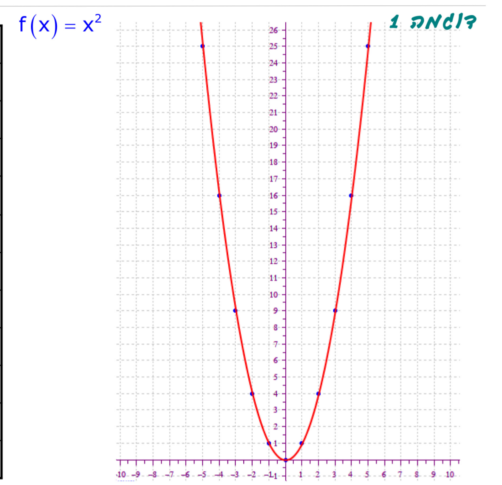
תיאור גרפי של פונקציות:

הגרף של פונקציה נתונה הינו התיאור הגיאומטרי של הפונקציה באמצעות מערכת קואורדינטות קרטזית. המערכת מורכבת משני צירים ניצבים: הציר האופקי נקרא ציר x והציר האנכי נקרא ציר y. הגרף של הפונקציה הוא מורכב מאוסף כל הנקודות (x,y) במערכת קואורדינטות המקיימות את התנאים: $y=f(x),\ x\in D$.

דוגמה 1

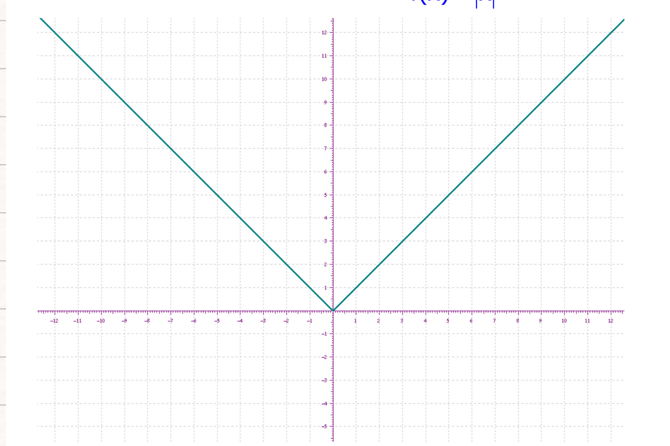
$f(x)=x^2$

x	f(x)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
-1	1
-2	4
-3	9
-4	16
-5	25

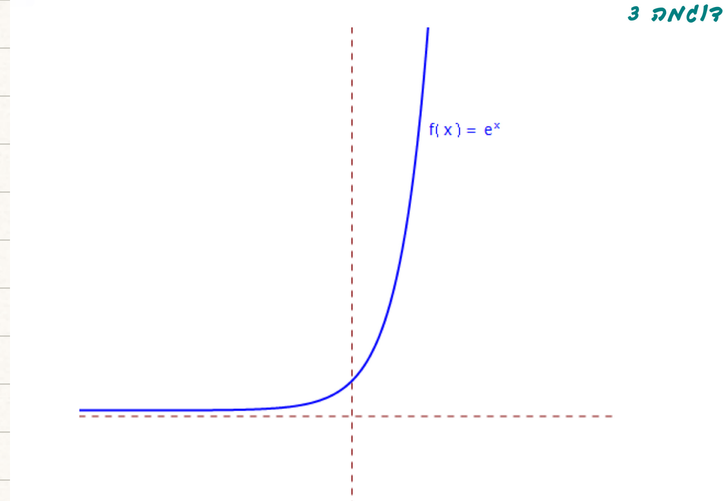


דוגמה 2

$f(x)=|x|$

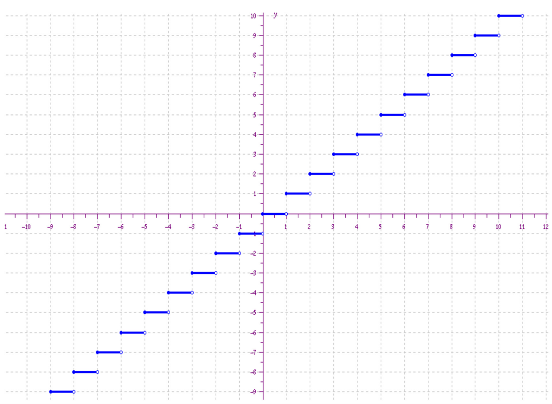


דוגמה 3



דוגמה 4

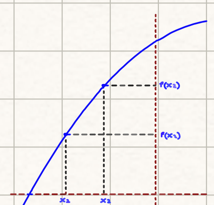
נגדיר את הפונקציה הערך השלם באופן הבא: $f(x)=[x]$
לכל מספר ממשי x קיים מספר שלם יחיד n ומספר ממשי יחיד r $0\le r<1$
כך ש- $x=n+r$



תכונות כלליות של פונקציות

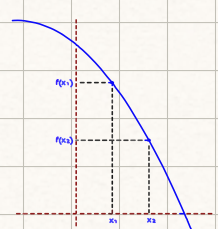
מונוטוניות

הגדרה: תהי פונקציה $y=f(x)$ המוגדרת מעל תחום D.



א) פונקציה $f(x)$ נקראת עולה בתחום D אם מתקיים:

$$\forall x_1,x_2\in D:\ x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$



ב) פונקציה $f(x)$ נקראת יורדת בתחום D אם מתקיים:

$$\forall x_1,x_2\in D:\ x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

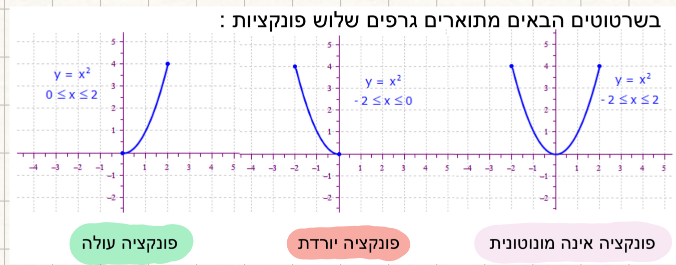
נאמר כי $f(x)$ מונוטונית, אם היא מקיימת את אחד מן התנאים הקודמים.

הערה: בהגדרה, כל האי-שוויונות הם אי-שוויונות חזקים. לכן עלייה/ירידה של פונקציה קוראים עלייה/ירידה במובן החזק או ממש.
אם נחליף את האי-שוויונות הללו באי שוויונות חלשים, נגיע למושג עלייה/ירידה במובן החלש.

פונקציה $f(x)$ נקראת לא יורדת בתחום D אם מתקיים: $\forall x_1,x_2\in D: x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

פונקציה $f(x)$ נקראת לא עולה בתחום D אם מתקיים: $\forall x_1,x_2\in D: x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$

למשל, פונקציה קבועה אינה עולה ואינה יורדת.



דוגמה: הוכיחו שהפונקציה $f(x)=ax+b$ כאשר a ו-b קבועים, היא מונוטונית עולה ממש כאשר $a>0$ ומונוטונית יורדת ממש כאשר $a<0$.

פתרון:

יהיו $x_1,x_2\in D$ שני מספרים ממשיים כך שמתקיים $x_1<x_2$. נתבונן בהפרש כאשר $a>0$

$$f(x_2)-f(x_1)=(ax_2+b)-(ax_1+b)=\underbrace{a}_{\text{גדול מ-0}}\underbrace{(x_2-x_1)}_{\text{חיובי לפי הגדרה שלנו}} \longrightarrow f(x_2)-f(x_1)>0 \longrightarrow f(x_2)>f(x_1)$$

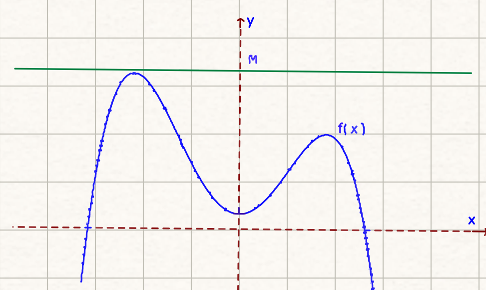
נראה מה קורה כאשר $a<0$:

$$f(x_2)-f(x_1)=(ax_2+b)-(ax_1+b)=\underbrace{a}_{\text{קטן מ-0}}\underbrace{(x_2-x_1)}_{\text{חיובי לפי הגדרה שלנו}} \longrightarrow f(x_2)-f(x_1)<0 \rightarrow f(x_2)<f(x_1)$$

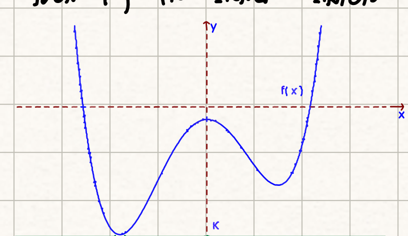
כיוון שכאשר $a>0$ מתקיים $f(x_2)>f(x_1)$ ולכן הפונק' עולה וכאשר $a<0$ מתקיים $f(x_2)<f(x_1)$ ולכן הפונק' יורדת.

חסימות של פונקציה

פונקציה $y=f(x)$ המוגדרת בתחום D נקראת חסומה מלמעלה אם קיים מספר ממשי M כך שלכל $x\in D$ מתקיים $f(x)\le M$.



פונקציה $y=f(x)$ המוגדרת בתחום D נקראת חסומה מלמטה אם קיים מספר ממשי K כך שלכל $x\in D$ מתקיים $f(x)\ge K$.



פונקציה $y=f(x)$ המוגדרת בתחום D נקראת חסומה אם קיימים שני מספרים ממשיים K,M כך שלכל $x\in D$ מתקיים $K\le f(x)\le M$.