שיטת הריבועים הפחותים :

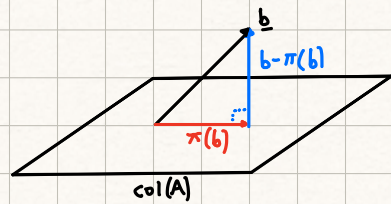
נתונה מערכת משוואות לינארית $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$ מעל $\mathbb{R}$ וידוע כי אין למערכת פתרון (מטריצה A מסדר $m\times n$).

מטרה: למצוא x' כך ש- $A\cdot \underline{x'} \approx b$ במובן ש- $\|A\underline{x'}-\underline{b}\|$ בנורמה תהיה מינימלית (קרובה ל-0 כמה שיותר).

מאחר שלמערכת $A\cdot \underline{x} = \underline{b}$ אין פתרון נובע כי $\underline{b}\notin col(A)$. הוקטור הקרוב ביותר ל-$\underline{b}$ ב- $col(A)$ הינו ההיטל של $\underline{b}$ על $col(A)$.

נסמן $\pi(b)$ את ההיטל הזה. לכן $\underline{x'}$ אמור לקיים $\underline{A}\cdot\underline{x'}=\pi(\underline{b})$.

מהתכונות של היטל נובע כי $\underline{b}-\pi(\underline{b})$ אורתוגונלי ל- $col(A)$.



לכן חייב להתקיים: $\underline{A}^T\cdot(\underline{b}-\pi(\underline{b}))=0$ (תנאי לאורתוגונליות).

נציב:

$$A^T\cdot(\underline{b}-\pi(\underline{b}))=0$$
$$A^T\cdot(\underline{b}-A\underline{x'})=0$$
$$A^T\cdot\underline{b}-A^T\cdot A\cdot\underline{x'}=0$$
$$A^T\cdot A\cdot\underline{x'}=A^T\cdot\underline{b}$$

אם $A^T\cdot A$ הפיכה (בבית יהיה תרגיל נלווה). נקבל:

$$\boxed{\underline{x'}=(A^T\cdot A)^{-1}\cdot A^T\cdot\underline{b}}$$

דוגמה: נמצא את הפתרון המקורב למערכת הבאה:

$$\begin{cases} x_1-x_2=4 \\ 3x_1+2x_2=1 \\ -2x_1+4x_2=3 \end{cases}$$

לכן:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\\-2&4\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$$

נחשב את המטריצות הנדרשות:

$$A^T=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}14&-3\\-3&21\end{pmatrix}\Rightarrow (A^T\cdot A)^{-1}=\frac{1}{285}\cdot\begin{pmatrix}21&3\\3&14\end{pmatrix}$$

תזכורת: מטריצה הופכית מסדר 2×2. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

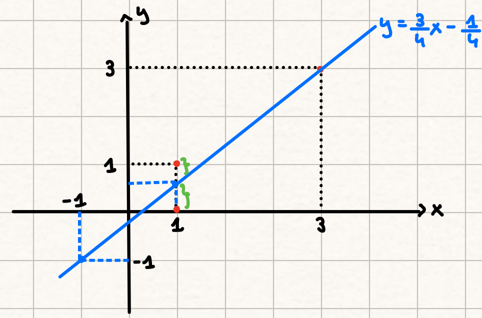
כעת נחשב את $\underline{x'}$:

$$\underline{x'}=(A^T\cdot A)^{-1}\cdot A^T\cdot\underline{b}$$

$$\underline{x'}=\frac{1}{285}\cdot\begin{pmatrix}21&3\\3&14\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&3&-2\\-1&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}}=\frac{1}{285}\cdot\begin{pmatrix}51\\143\end{pmatrix}$$

דוגמה: במישור נתונות 3 נקודות $(1,0)$, $(1,1)$, $(3,2)$.

מצאו את משוואת הישר $y = mx+n$ כך שסכום המרחקים מהנקודות לישר יהיה מינימלי:



פתרון:

נציב את שיעורי הנקודות במשוואת הישר ונקבל:

$$\begin{cases} m+n = 0 \\ m+n = 1 \\ 3m+n = 2 \end{cases}$$

במקרה זה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

לכן: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

לכן: $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

כמו מקודם, נמצא את $(A^T \cdot A)^{-1}$: $(A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$

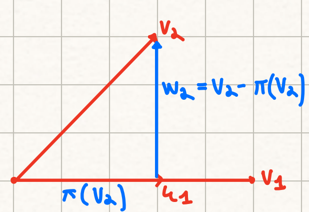
כעת:

$$\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

לכן: $y = m'x + n'$ כלומר $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

הערה: המרחק d מנקודה (x_0, y_0) לישר בעל משוואה $ax+by+c=0$ הינו: $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

תהליך גרם שמידט (Grahm-Schmidt)



יהי V מרחב מכפלה פנימית בעל בסיס $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$

תהליך גרם שמידט מאפשר לבנות בסיס אורתונורמלי $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ מהבסיס הנתון.

שלב 1: מגדירים $u_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$ $\quad \|u_1\| = 1$

שלב 2: $W_2 = V_2 - \pi_B(V_2)$, $W_2 \perp \text{span}\{u_1\}$, $W_2 \in \text{span}\{V_1, V_2\}$

מגדירים $u_2 = \frac{W_2}{\|W_2\|}$, $\|u_2\| = 1$ $\quad B = \{u_1, u_2\}$

שלב 3: $W_3 = V_3 - \pi_B(V_3)$

$W_3 \perp \text{span}\{u_1, u_2\}$, $W_3 \in \text{span}\{V_1, V_2, V_3\}$

מגדירים: $u_3 = \frac{W_3}{\|W_3\|}$, $\|u_3\| = 1$, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$

ממשיכים עד השלב ה-n באופן דומה

דוגמה: ב- $\mathbb{R}_2[x]$ נתונה מכפלה פנימית הבאה :

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(0)\cdot q(0) + p(1)\cdot q(1)$$

מהבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$ של $\mathbb{R}_2[x]$ מצאו בסיס אורתונורמלי ע"י שימוש בתהליך גרם שמידט.

פתרון:

שלב ראשון : $V_1(x) = 1$, $\|V_1(x)\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ לכן $u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ולכן בשלב זה $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

שלב שני :

$$W_2(x) = V_2(x) - \pi_B(V_2(x)) = x - \overbrace{\left\langle x, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\langle V_2, u_1\rangle \cdot u_1}$$

$$W_2(x) = x - \langle x, 1\rangle \cdot \frac{1}{3} = x - 0\cdot\frac{1}{3} = x$$

$$\|W_2(x)\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$u_2(x) = \frac{W_2}{\|W_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad , \quad B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}\right\}$$

שלב שלישי :

$$W_3(x) = V_3(x) - \pi_B(V_3(x))$$

$$W_3(x) = x^2 - \left\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \left\langle x^2, \frac{x}{\sqrt{2}}\right\rangle \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$W_3(x) = x^2 - \underbrace{\langle x^2, 1\rangle}_{2} \cdot \frac{1}{3} - \underbrace{\left\langle x^2, \frac{x}{\sqrt{2}}\right\rangle}_{0} \cdot \frac{x}{2}$$

$$W_3(x) = x^2 - \frac{2}{3} - 0\cdot\frac{x}{2} = x^2 - \frac{2}{3}$$

$$\|W_3(x)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$u_3(x) = \frac{W_3}{\|W_3\|} = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) \quad , \quad B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)\right\}$$

לכן הבסיס האורתונורמלי הוא $B = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{x}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right)\right\}$

אופרטורים לינאריים

יהי V מרחב וקטורי. פונקציה $T: V \to V$ נקראת אופרטור לינארי אם:

(1) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $T(\alpha v) = \alpha \cdot T(v)$

(2) לכל $u,v \in V$ מתקיים: $T(u+v) = T(u) + T(v)$

בדומה למקרה של אופרטור לינארי ב- $\mathbb{R}^n$ מתקיים:

(1) $T(\theta) = \theta$

(2) $T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(v_k)$

הגדרה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$. יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. אופרטור לינארי $T^*: V \to V$ נקרא אופרטור צמוד ל- T (conjugate) אם לכל $u,v \in V$ מתקיים:

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$$

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. אז קיים לו אופרטור $T^*: V \to V$ והוא יחיד.

> להוכחת היחידות ולדברים נוספים נצטרך טענת עזר הבאה:
> אם במרחב מכפלה פנימית V עבור $u,v \in V$ מתקיים:
> לכל $w \in V$ $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$
> אז $u = v$

הוכחה:

יהי $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V.

נסמן: $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ עבור $u \in V$.

כמו כן נסמן: $T^*(v) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k$ (בהנחה של קיום הצמוד)

מתקיים:

$$\langle T(u), v \rangle = \left\langle T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k\right), v \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(u_k), v \right\rangle = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle T(u_k), v \rangle}$$

$$\langle u, T^*(v) \rangle = \left\langle u, \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k, \sum_{k=1}^{n} \beta_k u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \alpha_k u_k, \beta_k u_k \rangle = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_k} \underbrace{\langle u_k, u_k \rangle}_{\|u_k\|^2 = 1}}$$

השוויון $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$ מתקיים אם ורק אם:

$$\overline{\beta_k} = \langle T(u_k), v \rangle$$

כלומר:

$$\beta_k = \overline{\langle T(u_k), v \rangle} = \langle v, T(u_k) \rangle$$

וזה נותן אפשרות להגדיר את T^* באופן הבא:

$$T^*(v) = \sum_{k=1}^{n} \langle v, T(u_k) \rangle \cdot u_k$$

נראה כי T^* אופרטור לינארי:

$$T^*(\alpha v)=\sum_{k=1}^{n}\langle \alpha v, T(u_k)\rangle u_k=\sum_{k=1}^{n}\alpha\langle v,T(u_k)\rangle\cdot u_k=\alpha\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\langle v,T(u_k)\rangle\cdot u_k}_{T^*(v)}=\alpha\cdot T^*(v)$$

באופן דומה מוכיחים כי $T^*(v_1+v_2)=T^*(v_1)+T^*(v_2)$

לכן T^* הוא אופרטור לינארי.

כעת נראה את יחידות של T^*.

נניח כי קיים אופרטור לינארי נוסף $S:V\to V$ כך שמתקיים $\langle T(u),v\rangle=\langle u,S(v)\rangle$

כבר ראינו שמתקיים כי עבור T^* מתקיים: $\langle T(u),v\rangle=\langle u,T^*(v)\rangle$

לכן מכלל המעבר מתקיים $\langle u,S(v)\rangle=\langle u,T^*(v)\rangle$.

מכיוון שהשוויון מתקיים לכל u מסיקים (לפי טענת העזר) כי $S(v)=T^*(v)$ לכל v. ולכן $S=T^*$ כלומר T^* יחיד.

מ.ש.ל.

טענה: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ בעל בסיס אורתונורמלי B.

יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי ויהי $T^*:V\to V$ אופרטור צמוד ל- T.

אם $[T]_B^B$ מטריצה מייצגת של T ביחס לבסיס B, אז:

$$\boxed{[T^*]_B^B=\left(\overline{[T]_B^B}\right)^T}$$

דוגמה: ב- $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$ נתון אופרטור לינארי:

$$T\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&i\\-2i&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

נבחר מכפלה פנימית סטנדרטית ב- $\mathbb{C}$ כלומר: $\langle \underline{z},\underline{w}\rangle=\underline{z}^T\cdot\overline{\underline{w}}$

ונבחר בסיס אורתונורמלי $E=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$[T]_E^E=\begin{pmatrix}1&i\\-2i&3\end{pmatrix}$$

לכן $[T^*]_E^E$ היא המשוחלפת הצמודה

$$[T^*]_E^E=\left(\overline{[T]_E^E}\right)^T=\begin{pmatrix}1&+2i\\-i&3\end{pmatrix}$$

לכן: $T^*\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2i\\-i&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$