לינארית 2 הרצאה 2

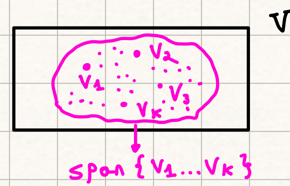
נפרש ותלות לינארית:

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F ויהיו $v_1, v_2, \dots v_k$ וקטורים מ- V.
נפרש של $v_1, v_2, \dots v_k$ מעל F היא קבוצה:

$$span\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k \in F\}$$

נפרש של $v_1, \dots v_k$ הוא קבוצה של כל הצירופים הלינאריים של $v_1, \dots v_k$ מעל F.

במחשב:



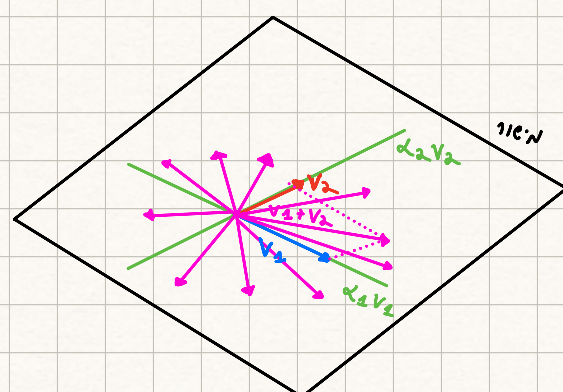
טענה: יהי V מ"ו מעל F ויהיו $v_1, v_2, \dots v_k \in V$ אז $span\{v_1, v_2, \dots v_k\}$ הוא תת מרחב וקטורי של V.

דוגמאות:

1) ב- $\mathbb{R}^3$ נתונים שני וקטורים: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

נמצא את $span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון:



אנחנו אמורים לקבל כנראה מישור שמוגדר ע"י הוקטורים הנתונים.
נבדוק מהו התנאי על $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ להיות בנפרש המבוקש.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

נבדוק מהו התנאי על x, y, z כך שימצאו α_1, α_2 הנ"ל:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\2 & 0 & y\\3 & -1 & z\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\0 & -2 & y-2x\\0 & -4 & z-3x\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\0 & -2 & y-2x\\0 & 0 & z-3x-2(y-2x)\end{array}\right)$$

$rank(A) = rank(A[\underline{b}])$ אם ורק אם $z-3x-2(y-2x)=0$

לכן, פתרון קיים אם ורק אם $x-2y+z=0$

בעצם שוקטור $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ נמצא בנפרש, אם ורק אם $x-2y+z=0$

כלומר הנפרש הוא המישור בעל המשוואה $x-2y+z=0$.

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-2y+z=0\right\}$$

② ב- $\mathbb{R}_3[x]$ נתונים שני פולינומים $P_1(x)=1+2x-x^3$ ו- $P_2(x)=x^2+2x^3$.
קבעו מהו התנאי $P(x)\in\mathbb{R}_3[x]$ להיות ב- $span\{P_1(x),P_2(x)\}$

פתרון

יהי $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ פולינום כללי מ- $\mathbb{R}_3[x]$

נבדוק מתי קיימות α_1,α_2 כך ש- :

$$\alpha_1\cdot(1+2x-x^3)+\alpha_2(x^2+2x^3)=a+bx+cx^2+dx^3$$

$$\underline{\alpha_1}+\underline{2\alpha_1}x+\underline{\alpha_2}\cdot x^2+\underline{(-\alpha_1+2\alpha_2)}x^3=\underline{a}+\underline{b}x+\underline{c}x^2+\underline{d}x^3$$

הפולינומים שווים, אם ורק אם המקדמים של החזקות המתאימות שווים.

לכן:

$$\begin{cases}\alpha_1=a\\ 2\alpha_1=b\\ \alpha_2=c\\ -\alpha_1+2\alpha_2=d\end{cases}$$

קיבלנו מערכת משוואות לינאריות עם 4 משוואות ו- 2 נעלמים:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\2&0&b\\0&1&c\\-1&2&d\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&0&b-2a\\0&1&c\\0&0&d+a-2c\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&1&c\\0&0&-2a+b\\0&0&a-2c+d\end{array}\right)$$

הפתרון קיים אם ורק אם
$$(*)\quad\begin{cases}-2a+b=0\\ a-2c+d=0\end{cases}$$

לכן $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ נמצא בנפרש, אם ורק אם המקדמים שלו מקיימים את (*)

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל F. קבוצה $\{v_1,v_2,\dots v_k\}$ של וקטורים מ- V נקראת קבוצה פורשת של V, אם:

$$V=span\{v_1,v_2,\dots v_k\}$$

(כל וקטור של V נמצא בנפרש $v_1,v_2,\dots,v_k$.

דוגמאות:

① $\{1,x,x^2\}$ היא קבוצה פורשת של מ"ו $\mathbb{R}_2[x]$, כי כל פולינום $P(x)=a+bx+cx^2$ מ- $\mathbb{R}_2[x]$ מתקיים:

$$P(x)=a+bx+cx^2=\underbrace{a}_{\alpha_1}\cdot 1+\underbrace{b}_{\alpha_2}\cdot x+\underbrace{c}_{\alpha_3}\cdot x^2$$

② במ"ו $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ נתבונן בתת מ"ו של U של מטריצות סימטריות ($A^T=A$). מצאו קבוצה פורשת של U.

פתרון:

יהי: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ מטריצה במרחב $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

$A\in U$ אם ורק אם $A^T=A$, כלומר:

$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$a=a$ ✓
$c=b$
$b=c$
$d=d$ ✓

לכן $A\in U$ אם ורק אם $c=b$ ולכן $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$

מתקיים:

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&d\end{pmatrix}=\underbrace{a}_{\alpha_1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\underbrace{b}_{\alpha_2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\underbrace{d}_{\alpha_3}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו כי כל מטריצה מ-U היא צירוף ליניארי של המטריצות $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. כלומר המטריצות האלה מהוות קבוצה פורשת של U. כלומר:

$$U=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל F ויהיו $v_1,v_2,\dots v_k$ וקטורים מ-V.

$v_1,v_2,\dots v_k$ נקראים תלויים ליניארית, אם קיימות $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_k$ לא כולם שווים ל-0, כך ש-

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_kv_k=\Theta$$

איבר ניטרלי במ"ו

אם השוויון מתקיים רק כאשר $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dots\alpha_k=0$ אומרים כי הוקטורים $v_1,v_2,\dots,v_k$ בלתי תלויים ליניארית (בת"ל).

דוגמה:

ב-$\mathbb{R}_2[x]$ בדקו האם הקבוצה

$$P_1(x)=1+2x+3x^2,\ P_2(x)=4+5x+6x^2,\ P_3(x)=x^2-1$$

היא בת"ל או לא.

פתרון:

נתבונן במשוואה:

$$\alpha_1(1+2x+3x^2)+\alpha_2(4+5x+6x^2)+\alpha_3(x^2-1)=0$$

$$(\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3)+(2\alpha_1+5\alpha_2)x+(3\alpha_1+6\alpha_2+\alpha_3)x^2=0$$

השוויון מתקיים אם ורק אם כל המקדמים שווים ל-0:

$$\begin{cases}\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3=0\\2\alpha_1+5\alpha_2=0\\3\alpha_1+6\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&4&-1\\2&5&0\\3&6&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&4&-1\\0&-3&2\\0&-6&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-3&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

יש אינסוף פתרונות כי $\text{rank}(A)<\{\text{מספר נעלמים}\}$, לכן יש גם פתרון לא טריוויאלי ולכן הפולינומים תלויים ליניארית.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F.

קבוצה $B=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}$ של וקטורים מ- V נקראת בסיס של V, אם:

① B קבוצה פורשת של V כלומר $V=\operatorname{span} B$.

② B בת"ל.

אפשר להוכיח כי בכל בסיס של מרחב נתון V יש אותה כמות וקטורים.

כמות וקטורים בבסיס של V נקראת מימד של V. מסמנים $\dim(V)$

בסיסים ומימדים של מרחבים סטנדרטיים:

① ב- $\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ הבסיס הסטנדרטי הוא: $E=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\}$. מתקיים $\dim\mathbb{R}^n=n$.

② ב- $\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$ אותו הבסיס כמו ב- ① ומתקיים $\dim(\mathbb{C}^n)=n$

③ ב- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מעל $\mathbb{R}$ הבסיס הסטנדרטי הוא:

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\cdots\cdots,\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\}$$

במקרה זה $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R}))=m\cdot n$

④ ב- $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ מעל $\mathbb{C}$ אותו דבר כמו ב- ③ ומתקיים $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{C}))=m\cdot n$

⑤ במ"ו $\mathbb{R}_n[x]$ הבסיס הסטנדרטי הוא $E=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ ומתקיים $\dim\mathbb{R}_n[x]=n+1$

הערה: באופן כללי, כדי לבדוק האם הקבוצה הנתונה במ"ו V מהווה בסיס צריך לבדוק האם למערכת (לא הומוגנית) כללית המתאימה יש פתרון יחיד.

מרחבי מכפלה פנימית:

הגדרה: יהי V מ"ו מעל F. נסמן ב- $V\times V$ את קבוצת כל הזוגות הסדורים של וקטורים מ- V.

פונקציה: $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\longrightarrow F$ (לכל זוג סדור של וקטורים מתאים סקלר יחיד מ- $\mathbb{F}$)

נקראת מכפלה פנימית ב- V אם:

① $\langle v_2,v_1\rangle=\overline{\langle v_1,v_2\rangle}$ לכל $v_1,v_2\in V$.

② $\langle\alpha v_1,v_2\rangle=\alpha\langle v_1,v_2\rangle$ לכל $v_1,v_2\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$

③ $\langle v_1+v_2,v_3\rangle=\langle v_1,v_3\rangle+\langle v_2,v_3\rangle$ לכל $v_1,v_2,v_3\in V$

④ $\langle v,v\rangle\geq 0$ לכל $v\in V$ ו- $\langle v,v\rangle=0$ אם ורק אם $v=\theta$.

הערות:

צמוד של מכפלה זה מכפלת צמודים

① $\langle v_1,\alpha v_2\rangle=\overline{\langle\alpha v_2,v_1\rangle}=\overline{\alpha\cdot\langle v_1,v_2\rangle}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\langle v_1,v_2\rangle}=\overline{\alpha}\cdot\langle v_1,v_2\rangle$

② מתקיים: $\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\dots=\langle v_1,v_2\rangle+\langle v_1,v_3\rangle$

③ לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\in\mathbb{R}$

④ אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אפשר להתעלם מההצמדה המרוכבת.

דוגמאות:

① ב- $\mathbb{R}^n$ מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $\langle\underline{x},\underline{y}\rangle=\underline{x}^T\cdot y$

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right\rangle=(x_1,x_2,\dots x_n)\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$$

האם $\langle\underline{x},\underline{y}\rangle=\underline{x}^T\cdot y$ הופך מרחב למכפלה פנימית:

$$\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = \underbrace{\underline{y}^T \cdot \underline{x}}_{\text{מספר}} = (\underline{y}^T \cdot \underline{x})^T = \underline{x}^T \cdot (\underline{y}^T)^T = \underline{x}^T \cdot \underline{y} = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$ (א)

$$\langle \alpha \underline{x}, \underline{y} \rangle = (\alpha \underline{x})^T \cdot \underline{y} = \alpha \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{y} = \alpha \cdot \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$ (ב)

$$\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = (\underline{x} + \underline{y})^T \cdot \underline{z} = (\underline{x}^T + \underline{y}^T) \cdot \underline{z} = \underline{x}^T \cdot \underline{z} + \underline{y}^T \cdot \underline{z} = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$$ (ג)

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = x^T \cdot x = (x_1, x_2, \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{x \geq 0} + \dots \underbrace{x_n^2}_{x \geq 0} \geq 0$$ (ד)

סכום של מחוברים לא שליליים שווה ל-0, אם ורק אם כל המחוברים שווים ל-0.

כלומר $x_1^2, x_2^2, \dots x_n^2 = 0 \iff x_1^2 = x_2^2 = \dots x_n^2 = 0$ ולכן $x_1, x_2, \dots x_n$ כולם אפסים, משמע $\underline{x} = \underline{0}$.

לכן הראנו כי $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \underline{x}^T \cdot \underline{y}$ מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}^n$.

המכפלה הפנימית הזאת נקראת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$ (או מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{R}^n$)

(2) ב-$\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$ נגדיר: $\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2}$

האם $\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1 \cdot \overline{w_1} + z_2 \cdot \overline{w_2}$ מכפלה פנימית ?

(א)

$$\left\langle \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = w_1 \cdot \overline{z_1} + w_2 \cdot \overline{z_2} \checkmark$$

$$\overline{\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \overline{z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2}} = \overline{z_1 \cdot \overline{w_1}} + \overline{z_2 \cdot \overline{w_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{w_1}} + \overline{z_2} \cdot \overline{\overline{w_2}} = \overline{z_1} \cdot w_1 + \overline{z_2} \cdot w_2 \checkmark$$

(ב), (ג) - קל לבדוק

(ד)

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} = \begin{bmatrix} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{bmatrix} = (a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i) + (a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)$$

$$= \underbrace{(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2)}_{a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}} \geq 0$$

השוויון ל-0 מתקיים אם ורק אם $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ כלומר כאשר $z_2 = z_1 = 0$ משמע $\underline{z} = 0$

לכן הפעולה הנתונה היא מכפלה פנימית ב-$\mathbb{C}^2$.