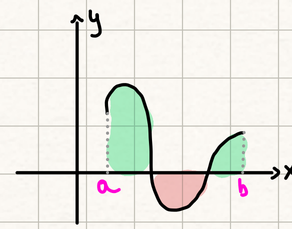
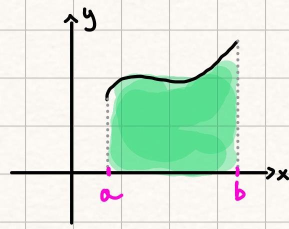
הרצאה 9 - האינטגרל הלא מסוים

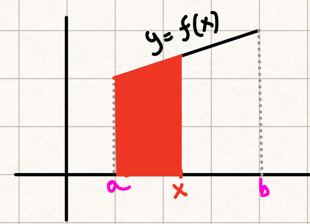
בפרק הקודם, למדנו שלפעמים ניתן לחשב את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

סימנו את השטח מתחת לגרף $y=f(x)$, בקטע $[a,b]$ ב- $\int_a^b f(x)\cdot dx$

וקראנו לו האינטגרל המסוים של $y=f(x)$ בקטע $[a,b]$

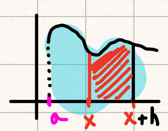
כעת, נגדיר פונקציה חדשה, המייצגת את השטח הכלוא מתחת לגרף החל מהנקודה a עד לנקודה x.



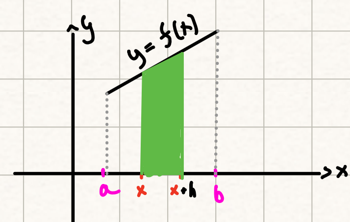
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

נקרא ל- $F(x)$ פונקציה צוברת שטח, כי היא צוברת עוד ועוד שטח ככל שמגדילים את הערך של x.

נתבונן על הנגזרת של הפונקציה $F(x)$ בנקודה x:



$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right)=\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}=\frac{\int_x^{x+h} f(t)\cdot dt}{h}\xrightarrow{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h}=f(x)$$



עבור $h\to 0$ נקבל שטח של צורה שקרובה למלבן.

לכן:

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\cdot dt}{h}\xrightarrow{h\to 0}\frac{f(x)\cdot h}{h}=f(x)$$

לסיכום הפרק קיבלנו כי: $F'(x)=f(x)$

הנגזרת של פונקציית השטח שווה לפונקציה המקורית. או במילים אחרות, הפונקציה הקדומה היא הפונקציה שצוברת שטח.