דטרמיננטים

ראינו במספרים שמספר a הוא הפיך אם ורק אם $a\neq 0$.

ראינו גם שבמטריצות זה לא עובד, כלומר מטריצה $A\neq 0$ היא לא בהכרח מטריצה הפיכה.

אם כן, נשאלת השאלה: האם ניתן להגדיר משהו שכן יעבוד במטריצות כלומר, משהו בסגנון: A הפיכה אמ"מ "משהו" שונה מ-0.

ההבחנה אם מטריצה הפיכה או לא הפיכה היא מאוד חשובה לנו ולפתור משוואות המושוות ל-0 זה לרוב משימה פשוטה יותר ולכן אנו מותרים להגיע.

אנו נגדיר מושג חדש הקשור למטריצות ריבועיות שנקרא "דטרמיננטה".

יש דרכים שונות להגדיר דטרמיננטה, למשל באמצעות תמורות או פונקציות נפח אותם בקורס שלנו, אנו נעדיף במונחים אלמנטריים יותר.

אנו נגדיר "דטרמיננטה" באמצעות "דטרמיננטה".

הגדרה:

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נגדיר פונקציה בין $F^{n\times n}$ לשדה F.

המתאימה לו נקראת הדטרמיננטה של A, ומסומנת $\det(A)$ או $|A|$.

כלומר $\det: F^{n\times n}\longrightarrow F$.

את ההתאמה נגדיר באינדוקציה על n, סדר המטריצה:

א $n=1$

במקרה זה, המטריצה A נראית כך: $A=(a)$ כאשר $a\in F$. נגדיר $\det(A)=a$.

במילים אחרות, עבור מטריצה מסדר 1×1, הדטרמיננטה של המטריצה זה המספר היחידי שנמצא בתוך המטריצה.

דוגמה: אם $A=(-5)$ אז $\det(A)=-5$.

זהירות: במטריצות 1×1, הסימון: $|A|=|(-5)|$ יכול לבלבל אותנו עם ערך מוחלט.

ב $n=2$

במקרה זה, המטריצה A נראית כך: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ כאשר: $a,b,c,d\in F$.

נגדיר:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc\in F$$

דוגמה: נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$ אז:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$$

כלומר למטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$ נתאים את המספר בשדה: -2.

אם נרצה להשתמש בסימון של הקווים הישרים $||$:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$$

דוגמה: יהיו: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3\end{pmatrix}$

משבו את: $\det(A),\det(B),\det(A+B)$.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7\end{vmatrix}=1\cdot 7-3\cdot 5=7-15=-8$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-0\cdot(-1)=-6+0=-6$$

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 4-3\cdot 4=12-12=0$$

נשאלת השאלה האם מתקיים: $\det(A)+\det(B)=\det(A+B)$? התשובה היא לא.

$$\det(A)+\det(B)=-8-6=-14\neq\det(A+B)=0$$

ⓖ $n=3$

עבור $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ נגדיר:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

לכל איבר a_{ij} בשורה הראשונה, נכפול את שלושת הבאים:

(1) סימן: $(-1)^{i+j}$

(2) מספר: a_{ij}

(3) דטרמיננטה קטנה יותר: דטרמיננטה ללא השורה ה-i וללא העמודה ה-j.

דוגמה:

נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\,1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\,2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\,3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\underbrace{(5\cdot 9-6\cdot 8)}_{-3} - 2\underbrace{(4\cdot 9-6\cdot 7)}_{-6} + 3\underbrace{(4\cdot 8-5\cdot 7)}_{-3} = -3+12-9 = 12-12 = 0 \;//$$

דוגמה 2:

בדוגמה זו נראה ששלושת המשפטים שציינו במימוש דטרמיננטה 3×3 נכונים גם במימוש דטרמיננטה ב- 2×2:

Ⓐ $n=1$: עבור $A=(a)$ נגדיר $\det(A)=a$

Ⓑ $n=2$: עבור $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ נגדיר $\det(A)=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad-bc$

נרשום לפי שלבים:

(1) סימן: $(-1)^{i+j}$

(2) מספר: a_{ij}

(3) דטרמיננטה קטנה יותר: דטרמיננטה ללא השורה ה-i וללא העמודה ה-j.

נ״ק את ההגדרה עבור $n=2$:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot a\cdot\det\big((d)\big) + (-1)^{1+2}\cdot b\cdot\det\big((c)\big) = \underline{ad-bc}$$

אז החוק תקף גם עבור 2×2 אבל מעשית אז- יותר קל לזכור את הנוסחה $ad-bc$ במקום בה.

מסקנה: ישנה הגדרה אחת עבור $n=1$ והגדרה אחת עבור $n\geq 1$.

נזכר במה שדיברנו עד עכשיו:

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. נגדיר פונקציה בין $F^{n\times n}$ לשדה F.
המתאימה לו נקראת הדטרמיננטה של A, ומסומנת $\det(A)$ או $|A|$.

א) עבור $n=1$: עבור $A=(a)$, נגדיר: $\det(A)=a$

ב) עבור $n\geq 2$: לכל איבר a_{ij} בשורה הראשונה נכפול את שלושת הבאים:

(1) סימן: $(-1)^{i+j}$

(2) מספר: a_{ij}

(3) דטרמיננטה קטנה יותר: דטרמיננטה ללא השורה ה-i וללא העמודה ה-j.

נזכור עבור $n=2$ קיבלנו: $\det(A)=\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc$

עבור $n=3$ קיבלנו:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

בהמשך זה נגדיר באופן פורמאלי את הדטרמיננטה הקטנה יותר.

הגדרה:

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית, $n\geq 2$.
<u>המינור</u> ה-ij של A מסומן M_{ij}, ושווה לדטרמיננטה המתקבלת ללא השורה ה-i וללא העמודה ה-j.
למעשה, M_{ij} הוא דטרמיננטה מסדר $(n-1)\times(n-1)$.

שאלה: כמה מינורים יש למטריצה מסדר $n\times n$? יש n^2 מינורים. כי יש n^2 מקומות, ולכל אחד מהם ניתן למחוק שורה i ועמודה j
שאלה: כמה מינורים משתתפים בחישוב הדטרמיננטה? n מינורים, נשים לב שאלה ה-n מינורים של השורה הראשונה.

עכשיו, נכתוב את ההגדרה של דטרמיננטה עבור $n=3$ באמצעות מינורים:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}_{M_{11}} + (-1)^{1+2}a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}}_{M_{12}} + (-1)^{1+3}a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}}_{M_{13}}$$

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}M_{13} = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k}$$

דוגמא:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2\end{vmatrix} = (-1)^{1+1}2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}0\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4\end{vmatrix}}_{\text{לא צריך לחשב כי הוא מוכפל ב-0}}$$

$$= 2\left((-1)\cdot(-2)-3\cdot 4\right)-3\left(1\cdot(-2)-3\cdot 5\right) = 2\cdot(-10)-3\cdot(-17) = -20+51 = 31$$

דוגמא: נמצא את M_{23} עבור $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & 17 \\ 5 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

המינור M_{23} שווה לדטרמיננטה ללא שורה 2 וללא עמודה 3.

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1&0&2\\5&3&-1\\2&3&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\tilde{M}_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}\tilde{M}_{12}+(-1)^{1+3}a_{13}\tilde{M}_{13}$$

$$M_{23}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}3&-1\\3&0\end{vmatrix}+\underbrace{(-1)^{1+2}0\begin{vmatrix}5&-1\\2&0\end{vmatrix}}_{0}+(-1)^{1+3}2\begin{vmatrix}5&3\\2&3\end{vmatrix}=1\cdot(0+3)+2(15-6)=3+18=21$$

הגדרה כללית של דטרמיננטה:

תהי: $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית כאשר $n\geq 2$. נגדיר העתקה בין $F^{n\times n}$ לשדה F, שנקראת הדטרמיננטה של A ע"י:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&&&\\a_{n1}&\dots&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\dots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}=\boxed{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k}}$$

דוגמה:

חשב דטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&4\\5&0&-1&0\\2&1&3&7\\-1&3&0&6\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&3&7\\3&0&6\end{vmatrix}\underbrace{+(-1)^{1+2}\cdot0\cdot M_{12}+(-1)^{1+3}\cdot0\cdot M_{13}}_{\text{לא נכתוב יותר (כופלים ב-0)}}+(-1)^{1+4}\cdot4\begin{vmatrix}5&0&-1\\2&1&3\\-1&3&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}0&-1&0\\1&3&7\\3&0&6\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5&0&-1\\2&1&3\\-1&3&0\end{vmatrix}=\underbrace{(-1)^{1+2}(-1)}_{1}\underbrace{\begin{vmatrix}1&7\\3&6\end{vmatrix}}_{-15}-4\left[\underbrace{(-1)^{1+1}5}_{5}\underbrace{\begin{vmatrix}1&3\\3&0\end{vmatrix}}_{-9}+\underbrace{(-1)^{1+3}(-1)}_{-1}\underbrace{\begin{vmatrix}2&1\\-1&3\end{vmatrix}}_{7}\right]$$

$$=-15-4(-45-7)=-15+208=193$$

נשאלת השאלה איך נתמודד עם דטרמיננטים גדולים ללא אפסים בשורה הראשונה? נצטרך לפתח כלים שיקלו עלינו.

נסתכל על הדוגמה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&4&8\\0&-1&9\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\5&4&8\\0&-1&9\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}4&8\\-1&9\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}5&8\\0&9\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}3\begin{vmatrix}5&4\\0&-1\end{vmatrix}=1\cdot(36+8)-2(45-0)+3(-5-0)=-61$$

נחשב את $\det(A^t)$

$$|A^t|=\begin{vmatrix}1&5&0\\2&4&-1\\3&8&9\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}4&-1\\8&9\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}5\begin{vmatrix}2&-1\\3&9\end{vmatrix}=1\cdot(36+8)-5\cdot(18+3)=-61$$

קיבלנו $\det(A)=\det(A^t)$ ובהמשך נראה שזה לא במקרה.

הדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת:

משפט 1:

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אזי ניתן לחשב את הדטרמיננטה של A לפי איזו שורה שנרצה,
כלומר: $\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}$ לכל: $i=1,\dots,n$. אנו לא נוכיח משפט זה (ההוכחה שלו היא באינדוקציה על n).

דוגמה: נראה מקרה ל-$\det(A)$:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\5&4&8\\0&-1&9\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}4&8\\-1&9\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\begin{vmatrix}5&8\\0&9\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}3\begin{vmatrix}5&4\\0&-1\end{vmatrix}=1\cdot(36+8)-2(45-0)+3(-5-0)=-61$$

אם נחשב לפי השורה השלישית יהיו לנו רק שני מחוברים:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\5&4&8\\0&-1&9\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}\cdot 0\begin{vmatrix}2&3\\4&8\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix}1&3\\5&8\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}9\begin{vmatrix}1&2\\5&4\end{vmatrix}=0+1(8-15)+9(4-10)=-61$$

משפט 2:

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. אזי $\det(A)=\det(A^t)$

הוכחה:

מאחר ודטרמיננטים מוגדרים באמצעות דטרמיננטים מסדר $n-1$, מתבקש להוכיח משפטים על דטרמיננטים באמצעות אינדוקציה.
כי הנחת האינדוקציה היא עבור מטריצות מסדר $n-1$ והוכחת האינדוקציה היא עבור n. לכן, המשימות נשארו להביע למצב שבו אנו "נגיע פנימה" את הנחת האינדוקציה.
נוכיח את משפט 2 באינדוקציה על n, סדר המטריצה.

מסקנה:

ניתן לחשב את הדטרמיננטה של A לפי איזו עמודה שנרצה, כלומר:

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj} \quad \text{לכל } j=1,\dots,n$$

עתה נוכל לבחור לפתח לפי שורה או עמודה כרצוננו, וכמובן הכי משתלם לחשב לפי השורה או העמודה עם הכי הרבה אפסים.

דוגמה 1:

נחשב את הדטרמיננטים הבאים:

$$\begin{vmatrix}2&1&3&2\\0&0&5&0\\-1&1&1&3\\3&4&-5&0\end{vmatrix}\underset{R_2}{=}(-1)^{2+3}\cdot 5\begin{vmatrix}2&1&2\\-1&1&3\\3&4&0\end{vmatrix}\underset{C_3}{=}-5\left[(-1)^{1+3}\cdot 2\begin{vmatrix}-1&1\\3&4\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 3\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}\right]=-5\left(2\cdot(-7)-3\cdot 5\right)=145$$

$$\begin{vmatrix}16&4&0&8&0\\13&0&0&-2&0\\7&12&2&5&-9\\11&6&0&8&-3\\7&0&0&0&0\end{vmatrix}\underset{R_5}{=}\underbrace{(-1)^{5+1}\cdot 7}_{7}\cdot\begin{vmatrix}4&0&8&0\\0&0&-2&0\\12&2&5&-9\\6&0&8&-3\end{vmatrix}\underset{R_2}{=}\underbrace{7\cdot(-1)^{2+3}\cdot(-2)}_{14}\cdot\begin{vmatrix}4&0&0\\12&2&-9\\6&0&-3\end{vmatrix}\underset{C_2}{=}14\cdot(-1)^{2+2}\cdot 2\begin{vmatrix}4&0\\6&-3\end{vmatrix}=\underbrace{28(-12-0)}_{-336}$$

דוגמה 2:

חשבו את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} 16 & 4 & 6 & 8 & 32 \\ 0 & 7 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \underset{C_1}{=} \underbrace{(-1)^{1+1}\cdot 16}_{16} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \underset{C_1}{=} \underbrace{16\,(-1)^{1+1}\cdot 7}_{16\cdot 7} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -9 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \underset{C_1}{=} 16\cdot 7\cdot(-1)^{1+1}\cdot 2 \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 16\cdot 7\cdot 2\cdot 8\cdot(-9)$$

נשים לב כי במקרה זה כאשר $A = \begin{vmatrix} 16 & 4 & 6 & 8 & 32 \\ 0 & 7 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix}$ מדורגת מכפלת אלכסון ראשי $= \det(A)$.

משפט 3:

נתון: $A \in F^{n\times n}$ מטריצה משולשת עליונה או משולשת תחתונה אז הדטרמיננטה של A שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

הוכחה:

תהי A מטריצה משולשת עליונה, נוכיח באינדוקציה על n:

בסיס אינדוקציה: $n=1$: $A=(a)$ ולכן $\det(A)=a$.

נוכיח גם עבור $n=2$: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$. $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - 0 = a_{11}a_{22}$

הנחת האינדוקציה: נניח כי B היא מטריצה משולשת עליונה מסדר $(n-1)\times(n-1)$ ומתקיים $\det(B) = b_{11}b_{22}\cdots b_{(n-1)(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} b_{kk}$

כעת נניח שA היא מטריצה מסדר $n\times n$ אז נקבל: $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

נחשב את $\det(A)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{C_1}{=} (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{דטרמיננטה של מטריצה } (n-1)\times(n-1)} = 1 \cdot a_{11} \cdot (a_{22} \cdots a_{nn}) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

דטרמיננטה של מטריצה $(n-1)\times(n-1)$
לפי הנחת האינדוקציה ה- det
שלה הוא מכפלת האלכסון

שיעור 240
כולל