פרק 8 - העתקות ליניאריות

הקדמה:

התאמה f בין קבוצה A לקבוצה B נקראת פונקציה אם לכל איבר מ- A מותאם איבר אחד ויחיד מקבוצה B.
נבחין כי ישנם שני תנאים שחייבים להתקיים.
אנו מסמנים $f: A \to B$.
לקבוצה A קוראים תחום ולקבוצה B קוראים טווח. ל- f קוראים כלל ההתאמה. הפונקציה נקבעת על פי שלושתם.
נגדיר $a \in A$: $f(a) = b$, $b \in B$.
האיבר a נקרא מקור, והאיבר b נקרא תמונה.

דוגמאות:

1. נוסחה של $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי: $f(x) = 2x+6$.
נוסחה זו מתארת פונקציה כי היא מוגדרת לכל x בתחום $\mathbb{R}$ ולכל x בתחום, אכן מותאם רק איבר אחד בטווח שגם הוא ב- $\mathbb{R}$. מתקיים למשל $f(7) = 20$.
אומרים כי 7 הוא מקור של 20, או 20 הוא תמונה של 7.

2. גם $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי: $f(x) = x^2$ מתארת פונקציה.
כאן, $2, -2$ הם מקורות של 4, או 4 הוא התמונה של 2 וגם של -2.

3. אם נרצה לומר כי הנוסחה $f(x) = \frac{1}{x}$ מתארת פונקציה נצטרך לצמצם את התחום להיות: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. אחרת התנאי הראשון של פונקציה לא יתקיים. כאן מתקיים למשל ש- 2 הוא מקור של $\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{2}$ הוא תמונה של 2.

מונחים נוספים של פונקציות בהם נשתמש:

1. אם $0 \in B$, אז האפסים של פונקציה $f: A \to B$, הם:
$$K = \{x \in A \mid f(x) = 0\} \subseteq A$$
למשל בפולינומים אלו כל השורשים של הפולינום.
בדוגמה: $f(x) = 2x+6$, מתקיים $K = \{-3\}$.
בדוגמה: $f(x) = x^2$, מתקיים $K = \{0\}$.
בדוגמה: $f(x) = \frac{1}{x}$, מתקיים $K = \emptyset$ כי אין פתרון למשוואה $\frac{1}{x} = 0$.
בדוגמה: $f(x) = \sin x$, מתקיים $K = \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$
נבחין כי לעיתים יש ב- K מספר סופי של איברים, לעיתים יש אינסוף איברים ולעיתים אין כלום.

2. התמונה של פונקציה $f: A \to B$.
$$Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A, f(x) = y\} \subseteq B$$
בדוגמה $f(x) = 2x+6$, התמונה היא $\mathbb{R}$ כל המספרים. כל מספר ממשי שניקח יהיה אפשר למצוא לו x כך ש- $2x+6$ "יתן" את המספר שאנו רוצים.
בדוגמה: $f(x) = x^2$, התמונה היא $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ כלומר המספרים האי שליליים.
בדוגמה: $f(x) = \frac{1}{x}$, התמונה היא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ כלומר כל המספרים ללא 0.
בדוגמה: $f(x) = \sin x$, התמונה היא הקטע הסגור $[-1, 1]$
בפונקציות ממשיות, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נהוג לבחון את התמונה באמצעות גרף.

3. פונקציה $f: A \to B$ חד חד ערכית (חח"ע).
הפונקציה f נקראת חח"ע אם לכל $x_1 \neq x_2$ ב- A מתקיים $f(x_1) \neq f(x_2)$ או אם $f(x_1) = f(x_2)$ ב- B אז $x_1 = x_2$.
למשל הפונקציה $f(x) = 2x+6$ היא חח"ע כי $f(x_1) = f(x_2)$ גורר $2x_1 + 6 = 2x_2 + 6$ כלומר $2x_1 = 2x_2$ ולכן $x_1 = x_2$.
כך גם הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$. לכל $x_1, x_2 \neq 0$ מתקיים שאם $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$ אז זה כמו בהצלבה נקבל $x_1 = x_2$.
אבל הפונקציה $f(x) = x^2$ היא לא חח"ע כי למשל $2^2 = (-2)^2 = 4$ אבל $2 = x_1 \neq x_2 = -2$.
גם הפונקציה $f(x) = \sin x$ היא לא חח"ע כי למשל $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ אבל $0 = x_1 \neq x_2 = \pi$.

④ פונקציה $f: A \to B$ על

הפונקציה f נקראת על אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $f(x)=y$.
כלומר $Im(f)=B$.

למשל הפונקציה $f(x)=2x+6$ היא על, כי לכל $y \in \mathbb{R}$ נבחר $2x_1+6=y$ כלומר $2x_1=y-6$ או $x_1=\frac{y-6}{2}$.
הפונקציה $f(x)=x^2$ היא לא על, כי לא קיים $x \in \mathbb{R}$ המקיים $f(x)=-4$.
הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ היא לא על כי ל-0 אין מקור. אבל אם נגדיר $g: A \to A$ כאשר $A=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ אז לכל $y \in A$, לפונקציה $y=\frac{1}{x}$ נבחר $x=\frac{1}{y}$ ולכן g היא על.

מסקנה: חח"ע ועל תלוי בתחום וטווח של הפונקציה.

דוגמה:

	$f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$	$h(x): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(x)=x^2+1$
תחום וטווח	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
כלל ההתאמה	$f(x)=x^2+1$	$h(x)=x^2+1$
קבוצת אפסים	$K=\emptyset$	$K=\{i,-i\}$
תמונה	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$	$\mathbb{C}$
חח"ע	לא, כי $f(1)=f(-1)=2$	לא, כי $h(1)=h(-1)=2$
על	כי, התמונה לא כל הטווח $\mathbb{R}$.	כן, כי התמונה היא כל $\mathbb{C}$.

העתקה לינארית:

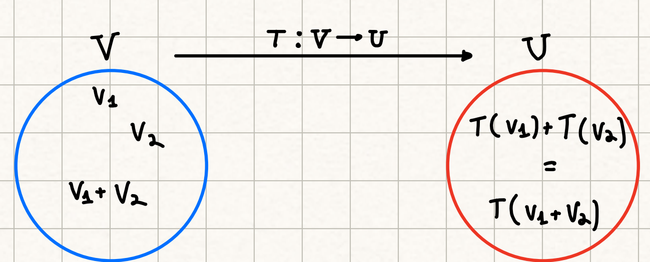
הגדרה: יהיו V, U שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F.
פונקציה $T: V \to U$ נקראת העתקה לינארית אם לכל $u,v \in V$ ולכל $\alpha \in F$ מתקיימות שתי התכונות הבאות:

① $T(u+v)=T(u)+T(v)$
② $T(\alpha u)=\alpha T(u)$

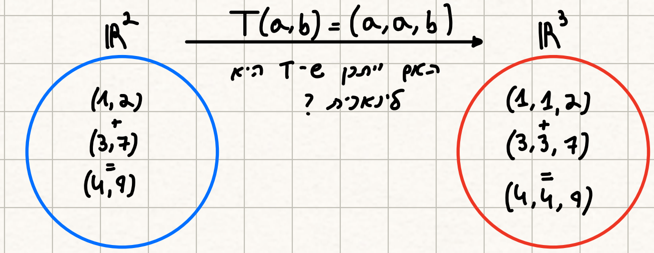
$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$$

המשמעות של התכונה הראשונה היא: לחבר שני וקטורים ב- V ואז להעתיק את וקטור הסכום ל- U, זה אותו הדבר כמו קודם להעתיק את שני הוקטורים ל- U ואז לחבר את התוצאה ב- U. אותו הדבר יהיה גם בתכונה השנייה: לכפול את הוקטור u בסקלר α כאשר את נמצאים ב- V ואז להעתיק אותו ל- U זה אותו דבר כמו קודם להעתיק ל- U ואז את התוצאה לכפול בסקלר α כשאנו נמצאים כבר ב- U.

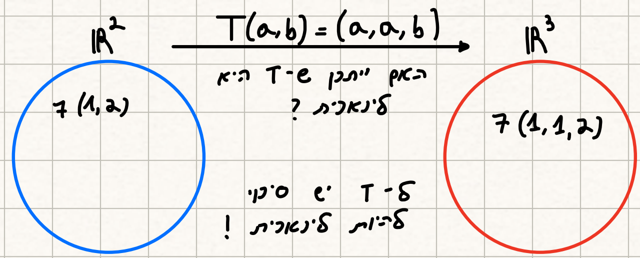
המחשה:



דוגמה:



נבדוק חיבור:
אם נחבר את $(1,2)+(3,7)$ ב- V זה אותו הדבר כמו לחבר אותם ב- U.



נבדוק כפל בסקלר:

נוכיח זאת לפי הגדרה:

נבדוק האם $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a,b)=(a,a,b)$ היא לינארית.

צריך להוכיח שלכל $u,v\in V$ ולכל $\alpha\in F$ מתקיים:

① $T(u+v)=T(u)+T(v)$

② $T(\alpha u)=\alpha T(u)$

נבחר 2 וקטורים כלליים ב- $V=\mathbb{R}^2$: $u=(a,b),\ v=(x,y)$

אז: $u+v=(a+x,\ b+y)$

① נפעיל את T על $u+v$ ונקבל:

$$T(u+v)=T(a+x,b+y)=(a+x,\ a+x,\ b+y)\underset{\text{נפצל את הוקטור לסכום של 2 וקטורים}}{=}\underbrace{(a,a,b)}_{T(a,b)}+\underbrace{(x,x,y)}_{T(x,y)}=T(u)+T(v)$$

② נבדוק גם את התכונה השנייה:

ניקח סקלר $\alpha\in\mathbb{R}$ ונקבל:

$$T(\alpha u)=T(\alpha a,\alpha b)\underset{\text{נפעיל את T}}{=}(\alpha a,\alpha a,\alpha b)\underset{\text{נוציא }\alpha\text{ מחוץ לסוגריים.}}{=}\alpha\underbrace{(a,a,b)}_{T(a,b)}=\alpha T(a,b)=\alpha T(u)$$

לכן $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(a,b)=(a,a,b)$ היא העתקה לינארית.

דוגמאות:

1) האם $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כאשר: $T(a,b,c) = (a+3b, 2c)$?

נבדוק להוכיח כי לכל $u,v \in \mathbb{R}^3$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים:

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(2) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

הוכחה:

נסמן: $u = (a,b,c), \quad v = (x,y,z)$

נחבר את u,v ב- $\mathbb{R}^3$: $u+v = (a+x, b+y, c+z)$

לפי הגדרת העתקה נקבל:

$$T(u+v) = T(a+x, b+y, c+z) \underset{\text{נציב את הנוסחה}}{=} \big(a+x+3(b+y), 2(c+z)\big) = (a+x+3b+3y, 2c+2z) =$$

נפרק את כל מה שקשור ל- u ואת כל מה שקשור ל- v.

$$= \underbrace{(a+3b, 2c)}_{T(u)} + \underbrace{(x+3y, 2z)}_{T(v)} = T(u) + T(v)$$

ניקח סקלר $\alpha \in \mathbb{R}$ ונקבל:

$$T(\alpha u) = T(\alpha a, \alpha b, \alpha c) \underset{\text{נציב את } T}{=} (\alpha a + 3\alpha b, 2\alpha c) \underset{\text{נוציא } \alpha \text{ מחוץ לסוגריים}}{=} \alpha \underbrace{(a+3b, 2c)}_{T(u)} = \alpha T(u)$$

לכן $T(a,b,c) = (a+3b, 2c)$ היא העתקה לינארית.

2) האם $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כאשר: $T(a,b,c) = (a+3b, 2)$? (הפעם יש 2 במקום 2c).

נבדוק להוכיח כי לכל $u,v \in \mathbb{R}$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים:

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(2) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

הוכחה:

נסמן: $u = (a,b,c), \quad v = (x,y,z)$

אז: $u+v = (a+x, b+y, c+z)$

לפי הגדרת ההעתקה נקבל:

$$T(u+v) = T(a+x, b+y, c+z) \underset{\text{נציב את } T}{=} (a+x+3b+3y, 2)$$

$$T(u) + T(v) = T(a,b,c) + T(x,y,z) = (a+3b, 2) + (x+3y, 2) = (a+x+3b+3y, 4)$$

לא שווים

לכן T היא לא לינארית.

3) האם $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, כאשר $T(a,b) = (a \cdot b, 0)$?

שתי התכונות לא מתקיימות. נראה שתכונה 2 לא מתקיימת:

כלומר $T(\alpha u) \neq \alpha T(u)$

נבחר את $\alpha = 2$, $u = (2,3)$ אז:

$$T(2(2,3)) = T(4,6) = (4 \cdot 6, 0) = (24, 0) \neq 2T(2,3) = 2(2 \cdot 3, 0) = 2(6,0) = (12,0)$$

תכונה מספר 2 לא מתקיימת ולכן T לא העתקה לינארית.

④ האם $T:\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ העתקה לינארית, כאשר $T(z,w)=(z,\bar{w})$

צריך להוכיח כי לכל $u,v\in\mathbb{C}^2$ ולכל $\alpha\in\mathbb{C}$ מתקיים:

(א) $T(u+v)=T(u)+T(v)$ (ב) $T(\alpha u)=\alpha T(u)$

הוכחה:

נבחר: $u=(z_1,w_1),\ V=(z_2,w_2)$

נחבר את $u+v$: $u+v=(z_1+z_2,\ w_1+w_2)$

לפי הגדרת ההעתקה נקבל:

$$T(u+v)=T(z_1+z_2,w_1+w_2)=(z_1+z_2,\overline{w_1+w_2})=(z_1+z_2,\bar{w}_1+\bar{w}_2)=\underbrace{(z_1+\bar{w}_1)}_{T(u)}+\underbrace{(z_2,\bar{w}_2)}_{T(v)}=T(u)+T(v)$$

עבור $\alpha\in\mathbb{C}$ נקבל:

$$T(\alpha u)=T(\alpha z_1,\alpha w_1)=(\alpha z_1,\overline{\alpha w_1})=(\alpha z_1+\bar{\alpha}\cdot\bar{w}_1) \Rightarrow$$

α ו- $\bar{\alpha}$ הם לא אותו סקלר ולכן לא ניתן להוציא גורם משותף נתקעו...

כנראה ש- T לא לינארית. נביא דוגמה מספרית:

נביא דוגמא מספרית: נבחר $\alpha=i$, $u=(1,1)$:

$$\left.\begin{aligned} T(\alpha u)&=T(i(1,1))=T(i,i)=(i,\bar{i})=(i,-i)\\ \alpha(Tu)&=iT(1,1)=i(1,\bar{1})=i(1,1)=(i,i)\end{aligned}\right\}\text{ לא שווים}$$

לכן T לא לינארית.

⑤ האם $T:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ העתקה לינארית כאשר: $T(z,w)=(z,\operatorname{Im}(w))$?

תכונה 2 לא מתקיים. נבחר $\alpha=i$, $u=(1,i)$

$$\left.\begin{aligned} T(i(1,i))&=T(i,-1)=(i,0)\\ iT(1,i)&=i(1,1)=(i,i)\end{aligned}\right\}\text{ לא שווים}$$

לכן T לא לינארית.

כיצד משתנה התשובה אם נגדיר $T(z,w)=(z,\operatorname{Re}(w))$?

גם במקרה זה, לא נקבל העתקה לינארית. נבחר את אותה דוגמה: $\alpha=i$, $u=(1,i)$

$$\left.\begin{aligned} T(i(1,i))&=T(i,-1)=(i,-1)\\ iT(1,i)&=i(1,0)=(i,0)\end{aligned}\right\}\text{ לא שווים}$$

כיצד תשתנה התשובה לסעיפים הקודמים אם נסתכל על המרחב $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$?

הפעם זה יעבוד כי בוחר סקלר $\alpha\in\mathbb{R}$.

⑥ יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה F ויהי $B=\{V_1,V_2,\dots,V_n\}$ בסיס של V.

נגדיר $T:V\rightarrow F^n$ ע"י:

$$T(w)=[w]_B$$

לכל וקטור $w\in V$ מתאימים את וקטור הקואורדינטות שלו לפי הבסיס הנתון.

הוכיחו כי T העתקה לינארית.

הוכחה

יהיו $u,v\in V$ ונוכיח: $T(u+v)=T(u)+T(v)$

מכיוון $u,v\in V$ אזי קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\ \beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\in F$ כך ש:

צירופים לינאריים ← $u=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ $\quad$ $v=\beta_1v_1+\dots+\beta_nv_n$

לכן:

וקטורי קואורדינטות ← $[u]_B=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ $\quad$ $[v]_B=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$

$$T(u+v)=T\big((\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)+(\beta_1v_1+\dots+\beta_nv_n)\big)=T\big((\alpha_1+\beta_1)v_1+(\alpha_2+\beta_2)v_2+\dots+(\alpha_n\beta_n)v_n\big)$$

$$=\big[(\alpha_1+\beta_1)v_1+(\alpha_2+\beta_2)v_2+\dots+(\alpha_n\beta_n)v_n\big]=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\dots,\alpha_n+\beta_n)$$

$$=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}_{[u]_B}+\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}_{[v]_B}=[u]_B+[v]_B=T(u)+T(v)$$

תכונה שנייה: יהי $u\in V$ ויהי $\delta\in F$, נוכיח: $T(\delta u)=\delta T(u)$

$$T(\delta u)=T\big(\delta(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n)\big)=T(\delta\alpha_1v_1+\delta\alpha_2v_2+\dots+\delta\alpha_nv_n)=[\delta\alpha_1v_1+\delta\alpha_2v_2+\dots+\delta\alpha_nv_n]_B$$

$$=(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2,\dots,\delta\alpha_n)=\delta\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}_{[u]_B}=\delta[u]_B=\delta T(u)$$

לכן T העתקה לינארית.

העתקות לינאריות במרחב המטריצות והפולינומים

① האם $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ העתקה לינארית כאשר $T(A)=2A-5A^t$?

צריך להוכיח כי לכל $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א $T(A+B)=T(A)+T(B)$

ב $T(\alpha A)=\alpha T(A)$

הוכחה:

לפי הגדרה נקבל:

$$T(A+B)=2(A+B)-5(A+B)^t=2A+2B-5(A^t+B^t)=2A+2B-5A^t-5B^t=\underbrace{2A-5A^t}_{T(A)}+\underbrace{2B-5B^t}_{T(B)}=T(A)+T(B)$$

עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ נקבל:

$$T(\alpha A)=2(\alpha A)-5(\alpha A)^t=\alpha 2A-\alpha 5A^t=\alpha\big(\underbrace{2A-5A^t}_{T(A)}\big)=\alpha T(A)$$

לכן T העתקה לינארית.

② האם $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ העתקה לינארית כאשר $T(A)=(|A|,0)$

צריך להוכיח כי לכל $A,B\in\mathbb{R}^{2\times2}$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א $T(A+B)=T(A)+T(B)$

ב $T(\alpha A)=\alpha T(A)$

נראה שבמקרה זה לא מתקיים ולכן T לא לינארית:

$$T(A+B)=(|A+B|,0)\neq T(A)+T(B)=(|A|,0)+(|B|,0)=(|A|+|B|,0)$$

דטרמיננטה של סכום לא שווה לסכום הדטרמיננטים.

דוגמה מספרית, נבחר: $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$

$$T(A+B)=T\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}=(2-3,0)=(-1,0)$$

$$T(A)+T(B)=T\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}=(0,0)+(0,0)=(0,0)$$

לא שווים
ולכן T
לא לינארית

③ האם $T:\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a+b)+cx+2dx^2$ העתקה לינארית?

צריך להוכיח כי לכל $A,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים:

א $T(A+B)=T(A)+T(B)$

ב $T(\alpha A)=\alpha T(A)$

נבחר: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}$

נוכיח את א

$$T(A+B)=T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}a+e&b+f\\c+g&d+h\end{pmatrix}\overset{\text{הפעלת העתקה}}{=}(a+e+b+f)+(c+g)x+2(d+h)x^2=$$

$$=\underbrace{(a+b)+cx+2dx^2}_{T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}+\underbrace{(e+f)+gx+2hx^2}_{T\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix}}=T(A)+T(B)$$

נוכיח את ב: יהי: $\delta\in\mathbb{R}$:

$$T\left(\delta\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}\delta a&\delta b\\\delta c&\delta d\end{pmatrix}=(\delta a+\delta b)+\delta cx+2\delta dx^2=\delta\big(\underbrace{(a+b)+cx+2dx^2}_{T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}\big)=\delta T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\delta T(A)$$

לכן T העתקה לינארית.

⑤ האם $T:\mathbb{R}_n[x]\longrightarrow\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כאשר: $T(p(x))=(p(1),p(0))$?

צריך להוכיח כי לכל $p(x),g(x)\in\mathbb{R}_n[x]$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים:

① $T(p(x)+g(x))=T(p(x))+T(g(x))$

② $T(\alpha p(x))=\alpha T(p(x))$

הוכחה:

$$T(p(x)+g(x))=T((p+g)(x))=((p+g)(1),(p+g)(0))=(p(1)+g(1),p(0)+g(0))=\underbrace{(p(1),p(0))}_{T(p(x))}+\underbrace{(g(1),g(0))}_{T(g(x))}=T(p(x))+T(g(x))$$

$$T(\alpha p(x))=T((\alpha p)(x))=((\alpha p)(1),(\alpha p)(0))=(\alpha p(1),\alpha p(0))=\alpha\big(\underbrace{p(1),p(0)}_{T(p(x))}\big)=\alpha T(p(x))$$

⑥ האם $T:\mathbb{R}_n[x]\longrightarrow\mathbb{R}_{n-1}[x]$ העתקה לינארית, כאשר $T(p(x))=p'(x)$?

כלומר T מתאימה לכל פולינום את הנגזרת שלו.

נוכיח שזו אכן העתקה לינארית:

$$T((p+g)(x))=(p+g)'(x)=(p'+g')(x)=\underbrace{p'(x)}_{T(p(x))}+\underbrace{g'(x)}_{g(p(x))}=T(p(x))+T(g(x))$$

$$T((\alpha p)(x))=(\alpha p)'(x)=\alpha\underbrace{p'(x)}_{T(p(x))}=\alpha T(p(x))$$

העתקה זו נקראת העתקת הגזירה, ולעיתים מסמנים אותה: $D(p(x))$

העתקות לינאריות מיוחדות

הגדרה: יהיו V,U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F.
העתקה $T:V\to U$ המוגדרת על ידי $T(v)=0$ לכל $v\in V$ נקראת <u>העתקת האפס</u>

משפט: העתקת האפס היא לינארית
הוכחה:
נוכיח כי לכל $u,v\in V$ מתקיים: $T(u+v)=T(u)+T(v)$

$$T(u+v)=0=\underbrace{0}_{T(u)}+\underbrace{0}_{T(v)}=T(u)+T(v)$$

נוכיח כי לכל $\alpha\in F$ מתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$

$$T(\alpha v)=0=\alpha\cdot\underbrace{0}_{T(v)}=\alpha\cdot T(v)$$

לכן העתקת האפס היא העתקה לינארית.

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
העתקה לינארית $T:V\to V$ נקראת <u>אופרטור לינארי</u>.

דוגמה:
ראינו שיעור קודם כי העתקת הגזירה: $T:\mathbb{R}_n[x]\longrightarrow\mathbb{R}_{n-1}[x]$ המוגדר ע"י $T(p(x))=p'(x)$ היא העתקה לינארית.
נגדיר כעת $D:\mathbb{R}_n[x]\longrightarrow\mathbb{R}_n[x]$, ע"י $D(p(x))=p'(x)$ אז D אופרטור לינארי.

נזכור כי $D\neq T$ כי העתקה, כמו פונקציה נקבעת לפי התחום והטווח שלה.
למשל: ניתן לומר כי לפולינום x^n בטווח אין מקור ע"י D.
לא ניתן לומר כי לפולינום x^n אין מקור ע"י D, כי x^n בכלל לא בטווח.

הגדרה:
יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
העתקה $T:V\to V$ המוגדרת ע"י $T(v)=v$ לכל $v\in V$ נקראת <u>העתקת הזהות</u> או אופרטור הזהות.
נהוג לסמן את העתקת הזהות כך: $I(v)$ או $Id(v)$.

משפט: העתקת הזהות היא לינארית
הוכחה:
נוכיח כי לכל $u,v\in V$ מתקיים: $T(u+v)=T(u)+T(v)$:

$$T(u+v)=\underbrace{u}_{T(u)}+\underbrace{v}_{T(v)}=T(u)+T(v)$$

נוכיח כי עבור $\alpha\in F$ מתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$

$$T(\alpha v)=\alpha\underbrace{v}_{T(v)}=\alpha\cdot T(v)\ \checkmark$$

לכן העתקת הזהות היא העתקה לינארית.

דוגמאות לאופרטורים לינאריים :

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.

פונקציה $T: V \longrightarrow U$ נקראת העתקה לינארית, אם לכל $u,v \in V$ ולכל $\alpha \in F$

מתקיים $T(u+v) = T(u) + T(v)$ וגם $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

העתקה לינארית $T: V \longrightarrow V$ נקראת אופרטור לינארי.

כעת נציג אופרטורים לינאריים עבור $V = \mathbb{R}^2$ ועבור $V = \mathbb{R}^3$.

דוגמה 1 :

יהי $V = \mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$.

נגדיר $T: V \longrightarrow V$ על ידי : $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

ונגדיר $S: V \longrightarrow V$ על ידי : $S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

נשים לב ש- T, S הם אופרטורים לינאריים. נוכיח למשל עבור T

יהי : $\alpha \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ אז :

$$T(v+u) = T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}\right) \underset{\text{נפעיל את } T}{=} \begin{pmatrix} x+a \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}_{T(v)} + \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}_{T(u)} = T(v) + T(u)$$

$$T(\alpha u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix} \underset{\text{נפעיל את } T}{=} \begin{pmatrix} \alpha a \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}_{T(u)} = \alpha T(u)$$

ולכן T אופרטור לינארי.

האפס והנגדי בהעתקה לינארית

משפט :

יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F ותהי $T: V \longrightarrow U$ לינארית.

אזי :

(1) $T(0) = 0$

(2) $T(-v) = -T(v)$

במילים אחרות : 0_V הולך ל- 0_U, והנגדי עובר לנגדי.

הוכחה :

(1) מהנתון ש- T לינארית נובע כי לכל $\alpha \in F$ מתקיים : $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

נבחר $\alpha = 0$ ונקבל : $T(0v) = 0T(v)$. אבל $0v = 0_V$ ו- $0T(v) = 0_U$ ולכן : $T(0_V) = 0_U$

(2) עתה נבחר את $\alpha = -1$ ונקבל : $T(-1v) = -1T(v)$.

אבל לכל וקטור w מתקיים $-1w = -w$ ולכן : $T(-v) = -T(v)$.

דוגמאות :

① האם העתקה $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T(a,b) = (a,4)$ היא לינארית ?

לפי המשפט שראינו, אם מתקיים $T(0,0) = (0,0)$ אז יכול להיות שהעתקה היא לינארית (צריך לבדוק גם $T(-v) = -T(v)$)

במקרה זה $T(0,0) = (0,4)$ ולכן T לא לינארית.

② האם $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $S(a,b) = (ab, 0)$ לינארית ?

מתקיים $S(0,0) = (0 \cdot 0, 0) = (0,0)$ אבל זו לא העתקה לינארית כי :

למשל : $S(u+v) \neq S(u) + S(v)$

ניקח $V = (2,7)$ $u = (1,2)$ אז : $S(u+v) = S(3,9) = (27,0) \neq S(u) + S(v) = S(1,2) + S(2,7) = (2,0) + (14,0) = (16,0)$

הגרעין של העתקה ליניארית

הגדרה: יהיו V,U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T:V\to U$ העתקה ליניארית.
אזי, הגרעין של T הוא אוסף כל הוקטורים ב- V אשר T שולחת ל- 0 של U.
מסמנים: $Ker(T)$, כלומר:

$$Ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0\}\subseteq V$$

ברור כי $Ker(T)\neq\emptyset$ שכן כאמור $T(0)=0$ ולכן: $0_V\in Ker(T)$.

דוגמה:
נסתכל על ההעתקה הליניארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י: $T(a,b)=(2a,a,0)$

$$T(0,0)=(2\cdot 0,0,0)=(0,0,0)\Rightarrow (0,0)\in Ker(T)$$

$$T(1,0)=(2,1,0)\neq(0,0,0)\Rightarrow (1,0)\notin Ker(T)$$

$$T(0,1)=(2\cdot 0,0,0)=(0,0,0)\Rightarrow (0,1)\in Ker(T)$$

$$T(0,b)=(0,0,0)\Rightarrow (0,b)\in Ker(T)$$

משפט: יהיו V,U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T:V\to U$ העתקה ליניארית.
אזי $Ker(T)$ הוא תת מרחב של V.

הוכחה:
נוכיח את שתי התכונות המספיקות להוכחת תת מרחב וקטורי:
א) $Ker(T)\neq\emptyset$ שכן כאמור $T(0)=0$ ולכן $0_V\in Ker(T)$.
ב) יהיו: $u,v\in Ker(T)$ אזי: $T(v)=0$, $T(u)=0$ ויהיו $\alpha,\beta\in F$, אזי:

$$T(\alpha u+\beta v)=T(\alpha u)+T(\beta\alpha)=\alpha T(u)+\beta T(v)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

לכן: $\alpha u+\beta v\in Ker(T)$ וקיבלנו מש"ל.

דוגמה:
א) תהי $T:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(A)=A+A^t$
מצאו את $Ker(T)$
לפי הגדרת גרעין והגדרת העתקה מתקיים:
$A\in Ker(T)$ אמ"מ $T(A)=0$ וזה מתקיים אם $A+A^t=0$ וזה קורה כאשר $A=-A^t$
כלומר אם A אנטי סימטרית. לכן $Ker(T)$ הוא מרחב המטריצות האנטי סימטריות.

ב) יהי: $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ אופרטור הגזירה: $D(p(x))=p'(x)$
מצאו את $Ker(D)$.
לפי הגדרת גרעין והגדרת האופרטור מתקיים:
$p(x)\in Ker(D)$ אמ"מ $D(p(x))=0$ כלומר אמ"מ $p'(x)=0$ וזה קורה אמ"מ $p(x)=c$
וזה קורה אמ"מ $p(x)$ פונקציה קבועה. לכן $Ker(T)$ הוא מרחב הפולינומים ממעלה 0.

תמונה של העתקה לינארית

הגדרה: יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \to U$ לינארית.
אזי, התמונה של T היא אוסף כל הוקטורים ב-U אשר יש להם מקור ע"י T.
מסמנים $Im(T)$:

$$Im(T) = \{u \in U \mid \exists v \in V,\ T(v) = u\} \subseteq U$$

בגלל כי $Im(T) \neq 0$ שכן כאמור $T(0) = 0$ ולכן $0_U \in Im(T)$.

דוגמה 1:

נסתכל על ההעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י: $T(a,b) = (2a, a, 0)$
למשל:

$$T(0,0) = (0,0,0) \Rightarrow (0,0,0) \in Im(T)$$
$$T(v) = (1,1,0) \Rightarrow (1,0,0) \notin Im(T)$$
$$T(3,1) = (6,3,0) \Rightarrow (6,3,0) \in Im(T)$$
$$T(a,b) = (2a,a,0) \Rightarrow (2a,a,0) \in Im(T)$$

משפט: יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \to U$ העתקה לינארית.
אזי $Im(T)$ הוא תת מרחב של U.

הוכחה:

נוכיח את שתי התכונות המספיקות להוכחת תת מרחב וקטורי:

(א) $Im(T) \neq \emptyset$ כי $T(0) = 0$ ולכן $0_U \in Im(T)$.

(ב) יהיו: $u_1, u_2 \in Im(T)$ אזי קיימים $w_1, w_2 \in V$: $T(w_1) = u_1$, $T(w_2) = u_2$
אז לכל $\alpha, \beta \in F$ מתקיים:

$$T(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha T(w_1) + \beta T(w_2) = \alpha u_1 + \beta u_2$$

לכן $\alpha u_1 + \beta u_2 \in Im(T)$ כי יש לו מקור ע"י T.

דוגמה:

תהי $T: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(A) = A^t$
מצאו את $Im(T)$.

לפי הגדרת התמונה והגדרת ההעתקה מתקיים:

$A \in Im(T)$ אומר קיימת B כך ש: $T(B) = A$. נבחר $B = A^t$ ונקבל:

$$T(B) = B^t = (A^t)^t = A \Rightarrow Im(T) = \mathbb{R}^{n\times n}$$

כלומר התמונה של T זו המטריצות ההפוכות של A.

העתקה חד חד ערכית

הגדרה: יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \longrightarrow U$ העתקה לינארית.
אזי, העתקה T נקראת חח"ע אם לכל $T(v)=T(u)$ נקבל $v=u$ או אם $v \neq u$ אז $T(v) \neq T(u)$.

דוגמה:
נסתכל על ההעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י: $T(a,b)=(2a,a,0)$

$$T(0,0)=(0,0,0)$$
$$T(0,1)=(0,0,0)$$

קיבלנו: $T(0,0)=T(0,1)=(0,0,0)$ אבל: $(0,0) \neq (0,1)$
גם $T(1,1)=T(1,2)=(2,1,0)$ אבל $(1,1) \neq (1,2)$
לכן T לא חח"ע.

משפט:
יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \longrightarrow U$ לינארית.
אזי, T חח"ע אם ורק אם $Ker(T)=\{\vec{0}\}$ (כלומר $\dim Ker(T)=0$)
בדוגמה שלנו $T(0,1)=(0,0,0)$ כלומר $(0,1) \in Ker(T)$ לכן $Ker(T) \neq \{0\}$ ולכן T לא חח"ע.

הוכחה

כיוון ראשון: נתון T חח"ע וצ"ל $Ker(T)=\{0\}$.
יהי $v \in Ker(T)$, נוכיח כי $v=0$:
נתון כי $v \in Ker(T)$ לכן לפי הגדרת הגרעין $T(v)=0$.
כמו כן לפי משפט (האפס) שאם נתון כי T לינארית מתקיים $T(0)=0$.
נתון לנו ש-T חח"ע ולכן אם $T(v)=T(0)$ אז $v=0$. לכן $Ker(T)=\{0\}$.

כיוון שני: נתון $Ker(T)=\{0\}$ וצ"ל T היא חח"ע.
יהי: $T(v)=T(u)$ ונוכיח $v=u$.
לאחר העברת אגפים מקבלים $T(v)-T(u)=0$.
נשתמש בלינאריות של T: $T(v-u)=0$
כשאנחנו יודעים ש- $T(\text{משהו})=0$ ניתן להגיד: $\text{משהו} \in Ker(T)$
כלומר $v-u \in Ker(T)$. נתון $Ker(T)=\{0\}$, לכן $v-u=0$ ולכן $v=u$.

דוגמה:
א) תהי: $T: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(A)=A+A^t$
האם T היא חח"ע?
מקודם ראינו כי $A \in Ker(T)$ אמ"מ A אנטי סימטרית. לכן $Ker(T) \neq \{0\}$ כלומר T לא חח"ע.

ב) הראו כי העתקה הלינארית $T: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ היא חח"ע כאשר:

$$T(a+bx+cx^2)=(a+b,\ a-b,\ 2c,\ c)$$

נבדוק מי נמצא בגרעין של T:

$$T(a+bx+cx^2)=(a+b,\ a-b,\ 2c,\ c)=(0,0,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=0 \\ 2c=0 \\ c=0 \end{array}\right\} \Downarrow \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{array} \Rightarrow Ker(T)=0$$

לכן T חח"ע.

העתקה על

הגדרה: יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \longrightarrow U$ העתקה לינארית.
אזי, העתקה T נקראת על אם לכל $u \in U$ קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = u$
אם ורק אם $Im(T) = U$ (התמונה היא כל הטווח).

דוגמה:
נסתכל על ההעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י: $T(a,b) = (2a, a, 0)$
לווקטור $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ אין מקור ע"י T. לכן T לא על.

משפט:
יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \rightarrow U$ לינארית.
אזי, T על אם ורק אם $\dim Im(T) = \dim U$

בדוגמה שלנו, איבר כללי בתמונה הוא מהצורה $(2a, a, 0)$ ולכן מימד התמונה 1.
ואילו מימד הטווח הוא $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ לכן $\dim Im(T) \neq \dim U$ ולכן T לא על.

הוכחה:
נזכיר כי $Im(T)$ תת מרחב של U, ועל פירוש $Im(T) = U$.
לכן T היא על אמ"מ תת המרחב $Im(T)$ שווה למרחב כולו U.
וזה קורה אמ"מ מימד תת המרחב שווה למימד המרחב כולו.
כלומר, אמ"מ $\dim Im(T) = \dim U$.

דוגמה:
תהי $T: \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י $T(A) = A + A^t$.
האם T על?
נבחין כי כל המטריצות בתמונה הן מהצורה $A + A^t$ כלומר מטריצות סימטריות.
לכן אם ניקח מטריצה B לא סימטרית ב- $\mathbb{R}^{n \times n}$ לא נוכל למצוא לה מקור. לכן T לא על.

דוגמה
הראו כי ההעתקה הלינארית $T: \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ היא על, כאשר:

$$T(a + bx + cx^2) = (a+b, a-b)$$

איבר כללי בתמונה נראה כך $(a+b, a-b)$ וזה מרחב שניתן לתאר ע"י $span\{(1,1), (1,-1)\}$
ואלו הם שני וקטורים בת"ל ב- $\mathbb{R}^2$ ולכן $\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ ולכן T היא על.

משפט: $\dim(\ker T) + \dim(Im T) = n$
לכן T חח"ע אמ"מ T על $\mathbb{R}^n$ אמ"מ T הפיך (כלומר קיים T^{-1}).
אם: $T(\vec{u}) = \vec{w}$
אז: $T^{-1}\vec{w} = \vec{u}$
אם $T(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$ אז $T^{-1}\vec{u} = A^{-1} \cdot \vec{u}$

דוגמה לתרגיל מסכם:

תהי: $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\4x+8y\end{pmatrix}$

א) מצאו מטריצה $A_{n\times n}$ כך שלכל $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ יתקיים $A\cdot\vec{u} = T(\vec{u})$

ב) מצאו בסיס ומימד של- $Im(T)$.

ג) מצאו בסיס ומימד של- $Ker(T)$

ד) האם T היא על?

ה) האם T היא חח"ע?

תשובות:

א) המטריצה המייצגת של T היא $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}$ נבדוק זאת עם הוקטור $u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\4x+8y\end{pmatrix} \\ T(\vec{u}) = \begin{pmatrix}x+2y\\4x+8y\end{pmatrix}\end{array}\right\} A\cdot\vec{u} = T(\vec{u}) \checkmark$$

ב) נמצא בסיס ל- $Im(T)$. לפי הגדרת התמונה:

$$Im(T) = \{u\in\mathbb{R}^2 \mid \exists v\in\mathbb{R}^2, T(v)=u\}$$

$$Im(T) = \left\{\begin{pmatrix}x+2y\\4x+8y\end{pmatrix} \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר $Im(T)=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ ולכן $\dim(ImT)=1$

ג) נמצא בסיס ל- $Ker(T)$: לפי הגדרת הגרעין:

$$Ker(T) = \{v\in\mathbb{R}^2 \mid T(v)=0\}$$

$$Ker(T) = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} \middle| T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\right\}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{שקול}} Nul\,A$$

$$Nul\,A = \left\{\begin{pmatrix}-2x_2\\x_2\end{pmatrix}, x_2\in\mathbb{R}\right\} \Rightarrow span\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$Nul\,A = \left\{x_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, x_2\in\mathbb{R}\right\}$$

הבסיס של $Ker(T)$ הינו $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא $\dim(kerT)=1$

ד) האם T על? כיוון ש- $\dim(U)=2$ וכיוון $\dim(ImT)=1$ ולכן $\dim(ImT)<\dim(U)$ לכן T לא על.

ה) האם T חח"ע? הבסיס של $Ker(T)=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ כלומר $Ker(T)\neq\{0\}$ ולכן T לא חח"ע.

תזכורת:

יהיו V, U שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F.

העתקה $T: V \to U$ נקראת העתקה לינארית, אם לכל $u,v \in V$ ולכל $\alpha,\beta \in F$ מתקיים: $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

עד כה ראינו גם:

① העתקה לינארית, $T: V \to V$ נקראת אופרטור לינארי.

② אם $T: V \to U$ לינארית אז $T(0)=0$ וגם $T(-v) = -T(v)$.

③ הגרעין של T: $\ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0\}$ והוא תת מרחב וקטורי של V.

④ התמונה של T: $Im(T)=\{u\in U \mid \exists v\in V, T(v)=u\}$ והיא תת מרחב וקטורי של U.

⑤ T חח"ע אמ"מ: $\ker(T)=\{0\}$.

⑥ T על אמ"מ $\dim(Im(T))=\dim(U)$.

דוגמא מסכמת:

תהי $T: \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=(a-d,\ b+c,\ 2a-2d)$

א. מצאו בסיס ומימד ל- $\ker(T)$.

כשמחפשים בסיס ל- $\ker(T)$ נפתור ממ"ש הומוגני.

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=(a-d,\ b+c,\ 2a-2d)=(0,0,0)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a-d=0 \\ b+c=0 \\ 2a-2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=d \\ b=-c \end{matrix} \Rightarrow \ker(T)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$$ ← הגרעין

$$B_{\ker(T)}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

בסיס לגרעין $B_{\ker(T)}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

מימד של הגרעין. $\dim(\ker(T))=2$

ב. מצאו בסיס ומימד ל- $Im(T)$:

איבר כללי בתמונה: $(a-d,\ b+c,\ 2a-2d)$

נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת ונבדוק תלות:

$$(a-d,\ b+c,\ 2a-2d)=a(1,0,2)+b(0,1,0)+c(0,1,0)+d(-1,0,-2)$$

קבוצה פורשת לתמונה: $span(Im(T))=\{(1,0,2),(0,1,0),(0,1,0),(-1,0,-2)\}$

נשמיט את הוקטורים התלויים ונקבל קבוצה פורשת בת"ל המהווה בסיס לתמונה:

$B_{Im(T)}=\{(1,0,2),(0,1,0)\}$

$\dim(Im(T))=2$

ד) האם T חח"ע ? האם T על ?

בסעיף א' קיבלנו $\dim\ker(T)=2$ לכן $\ker(T)\neq\{0\}$ ולכן T לא חח"ע.

בסעיף ב' קיבלנו $\dim \operatorname{Im}(T)=2\neq\dim(\mathbb{R}^3)=3$ לכן T לא על.

ה) הראו שאם $A\in\ker(T)$ אז גם $A^2\in\ker(T)$.

ניקח מטריצה כללית בגרעין ונקרא לה A. היא תהיה מהצורה הבאה:

$$A=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}$$

נמצא את A^2 ונראה שגם היא צירוף לינארי של הבסיס של $\ker(T)$:

$$A^2=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2&\alpha\beta+\beta\alpha\\-\beta\alpha-\alpha\beta&\alpha^2-\beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2-\beta^2&2\alpha\beta\\-2\alpha\beta&\alpha^2-\beta^2\end{pmatrix}=\underbrace{\alpha^2-\beta^2}_{\text{סקלר }\gamma}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\underbrace{2\alpha\beta}_{\text{סקלר }\delta}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2=\gamma\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

מטריצה A^2 היא צירוף לינארי של איברי הבסיס של $\ker(T)$, לכן $A^2\in\ker(T)$

ו) הראו ש- $u=(3,7,6)\in\operatorname{Im}(T)$ ומצאו את אוסף כל המקורות של u.

למציאת אוסף כל המקורות נפתור את המשוואה הבאה:

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-d,\ b+c,\ 2a-2d)=(3,7,6)$$

אם נצליח לפתור את המשוואה אז u בתמונה ומצאנו את המקורות. אחרת u לא בתמונה.

$$T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=(a-d,\ b+c,\ 2a-2d)=(3,7,6)$$

$$\begin{cases}a-d=3\\b+c=7\\2a-2d=6\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=3+d\\b=7-c\end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \middle|\ a=3+d,\ b=7-c\right\}=\left\{\begin{pmatrix}3+d&7-c\\c&d\end{pmatrix}\ \middle|\ c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

קיבלנו כי לוקטור $u=(3,7,6)$ יש אינסוף מקורות מעל $\mathbb{R}$.

נשים לב כי אוסף זה, לא מהווה תת מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$, שכן וקטור ה-0 איננו באוסף זה.

למשל, רק אוסף המקורות של 0 מכילים את וקטור ה-0 ומהווים תת מרחב.

מציאת קבוצה פורשת לתמונה

משפט: יהיו V, U מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F, ותהי $T: V \to U$ לינארית.
יהי $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ בסיס של V.
אזי $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ קבוצה פורשת לתמונה.
במילים אחרות: תמונות איברי בסיס של V פורשת את התמונה של T.

הוכחה:
יהי $u \in Im(T)$, נוכיח כי u הוא צירוף לינארי של $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$.
$u \in Im(T)$ לכן לפי הגדרת התמונה $v \in V$ כך ש- $T(v) = u$.
אבל $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, לכן קיימים: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ כך ש:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

נפעיל T על 2 האגפים:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$$

$$u = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$$

T העתקה לינארית ולכן:

$$u = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots \alpha_n T(v_n)$$

כלומר u הוא צירוף לינארי של: $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$
ולכן $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ פורשת את התמונה של T.

דוגמה:
תהי $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d, b+c, 2a-2d)$
מצאו את הבסיס והממד לתמונה.
פתרון: לפי המשפט שלמדנו ראינו, אם נפעיל T על איברי הבסיס של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ נקבל קבוצה פורשת לתמונה.
נבחר את הבסיס הסטנדרטי ונקבל:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0,2), \quad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0) \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0) \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1,0,-2)$$

נשמיט וקטורים תלויים לינארית ונקבל: $B_{ImT} = \{(1,0,2), (0,1,0)\}$. בנוסף $\dim Im(T) = 2$.

דוגמה:
תהי $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

מצאו בסיס ל- $Im(T)$.
פתרון: נפעיל T על איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}} \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

נשים וקטורים תלויים לינארית ונקבל בסיס לתמונה $B_{ImT}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

משפט המימדים השני

תזכורת:

יהיו V,U שני מרחבים וקטורים מעל אותו שדה F.

העתקה $T:V\to U$ נקראת העתקה לינארית, אם לכל $u,v\in V$ ולכל $\alpha,\beta\in F$ מתקיים: $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

עד כה ראינו גם:

1. העתקה לינארית, $T:V\to V$ נקראת אופרטור לינארי.
2. אם $T:V\to U$ לינארית אז $T(0)=0$ וגם $T(-v)=-T(v)$.
3. הגרעין של T: $ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0\}$ והוא תת מרחב וקטורי של V.
4. התמונה של T: $Im(T)=\{u\in U \mid \exists v\in V, T(v)=u\}$ והיא תת מרחב וקטורי של U.
5. T חח"ע אמ"מ: $ker(T)=\{0\}$.
6. T על אמ"מ $dim(Im(T))=dim(U)$.
7. תמונות של בסיס ל-V פורשות את התמונה של T.

משפט המימדים השני:

יהיו V,U מרחבים וקטורים מעל אותו שדה F, ותהי $T:V\to U$ העתקה לינארית. אזי:

$$dim(V)=dim\,ker(T)+dim\,Im(T)$$

מימד הגרעין ועוד מימד התמונה שווה למימד התחום.

הוכחה:

נסמן: $dim\,ker(T)=k$, $dim\,V=n$. נוכיח כי מתקיים $dim\,Im(T)=n-k$

למציאת קבוצה פורשת לתמונה יש להפעיל T על בסיס של V.

ואז נצטרך להשמיט תלויים לקבלת בסיס וממנו להסיק את המימד.

נתחיל מבסיס לתת מרחב קטן יותר של V, ואותו נשלים לבסיס של כל V.

כאמור: $dim\,ker(T)=k$, $dim\,V=n$.

$ker(T)\subseteq V$ תת מרחב לכן ניקח בסיס של הגרעין:

$$B_{ker(T)}=\{w_1,w_2,\dots,w_k\}$$

נשלים אותו לבסיס של כל V:

$$B_{ker(T)}=\{w_1,w_2,\dots,w_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$$

נפעיל T על הבסיס של V ונקבל קבוצה פורשת לתמונה:

$$\{T(w_1),T(w_2),\dots T(w_k),T(v_{k+1}),\dots T(v_n)\}$$

אבל $w_1,w_2,\dots w_k\in ker(T)$ ולכן $T(w_j)=0$ לכל: $j=1,\dots,k$.

לכן נוכל להשמיט אותם מהקבוצה הפורשת ונקבל קבוצה פורשת קטנה יותר:

$$\underbrace{\{T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)\}}_{n-k \text{ וקטורים}}$$ קבוצה פורשת לתמונה

בקבוצה זו יש בדיוק $n-k$ וקטורים, שזה מימד התמונה שרצינו לקבל.

נוכיח שהקבוצה הפורשת בת"ל:

יהי: $\alpha_{k+1},\dots\alpha_n\in F$ כך ש:

$$\alpha_{k+1}T(v_{k+1})+\alpha_{k+2}T(v_{k+2})+\dots+\alpha_nT(v_n)=0$$

מכיון שכל הסקלרים הם 0 :

נשתמש בלינאריות של T :

$$\alpha_{k+1}T(V_{k+1}) + \alpha_{k+2}T(V_{k+2}) + \dots + \alpha_n T(V_n) = 0$$

$$T(\alpha_{k+1}V_{k+1} + \dots + \alpha_n V_n) = 0$$

לכן: $\alpha_{k+1}V_{k+1} + \dots + \alpha_n V_n \in ker(T)$ ולכן וקטור זה הוא צירוף לינארי של איברי $B_{ker(T)}$.

כלומר קיימים סקלרים $B_1 \dots B_k \in F$ כך שמתקיים

$$\alpha_{k+1}V_{k+1} + \dots + \alpha_n V_n = B_1W_1 + \dots + B_kW_k$$

נעביר אגפים :

$$\alpha_{k+1}V_{k+1} + \dots + \alpha_n V_n - B_1W_1 - \dots + B_kW_k = 0$$

צירוף לינארי של איברי הבסיס B_V שמתאפס, ולכן קבוצה בת"ל.

וכל הסקלרים הם 0: בפרט $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$.

לכן $\{\underbrace{T(V_{k+1}), \dots, T(V_n)}_{n-k \text{ וקטורים}}\}$ קבוצה פורשת לתמונה עם וקטורים בת"ל ולכן היא גם בסיס.

$$B_{Im(T)} = \{\overbrace{T(V_{k+1}), \dots, T(V_n)}^{n-k \text{ וקטורים בת"ל}}\}$$

מימד $\quad dim(Im(T)) = n-k$

הצבה

$$dim(Im(T)) = dim(V) - dimker(T)$$

$$\boxed{dim(V) = dim(Im(T)) + dimker(T)}$$

מ.ש.ל

דוגמה :

תהי $T: \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י : $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-d,\ b+c,\ 2a-2d)$

מצאו את המימד של התמונה והגרעין.

<u>פתרון</u> : ראינו כבר דוגמה זו. ראינו שבבסיס לתמונה $B_{Im(T)} = \{(1,0,2),(0,1,0)\}$ ולכן $dimIm(T) = 2$.

לפי משפט המימדים השני נקבל :

$$dimker(T) = dim\mathbb{R}^{2\times2} - dimIm(T) = 4-2 = 2$$

דוגמה :

תהי $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T(a,b) = (2a+7b,\ 4a+3b,\ 23a+17b,\ 5a-3b)$$

הוכיחו ש- T חח"ע.

נמצא בסיס לתמונה ע"י הוצאת סקלרים מהאיבר הכללי :

$$T(a,b) = a(2,4,23,5) + b(7,3,17,-3)$$

לכן $dim(Im(T)) = 2$.

לפי משפט המימדים השני :

$$dimker(T) = dim\mathbb{R}^2 - dimIm(T) = 2-2 = 0$$

לכן $ker(T) = \{0\}$ כלומר T חח"ע.

הקשר בין חח"ע ועל בהעתקות לינאריות

תזכורת:

יהיו V, U שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F.

העתקה $T: V \to U$ נקראת העתקה לינארית, אם לכל $u,v \in V$ ולכל $\alpha,\beta \in F$ מתקיים: $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

עד כה ראינו גם:

1. העתקה לינארית, $T: V \to V$ נקראת אופרטור לינארי.
2. אם $T: V \to U$ לינארית אז $T(0)=0$ וגם $T(-v) = -T(v)$.
3. הגרעין של T: $\ker(T)=\{v\in V \mid T(v)=0\}$ והוא תת מרחב וקטורי של V.
4. התמונה של T: $Im(T) = \{u\in U \mid \exists v\in V, T(v)=u\}$ והיא תת מרחב וקטורי של U.
5. T חח"ע אמ"מ: $\ker(T)=\{0\}$.
6. T על אמ"מ $\dim(Im(T))=\dim(U)$.
7. תמונות של בסיס ל-V פורשות את התמונה של T.
8. משפט המימדים השני: $\dim V = \dim Ker(T)+\dim Im(T)$

דוגמה:

א. מצאו אם קיימת, העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ שהיא חח"ע.

פתרון:

אם T חח"ע אז לפי משפט, $\dim Ker(T)=0$. לכן ממשפט המימדים השני נקבל:

$$\dim V = \dim Ker(T)+\dim Im(T)$$

$$\underbrace{2}_{\text{נתון}} = \underbrace{0}_{\text{נתון}} + \underbrace{2}_{\text{חייב להיות}}$$

לכן נמצא העתקה לינארית שמימד התמונה שלה הוא 2. ואז מימד הגרעין הוא 0 ולכן זה נקבל ש-T חח"ע כנדרש.

נבחר לדוגמה את: $T=(a,b)=(a,b,0)$ העתקה לינארית (קל להוכיח זאת).

הבסיס לתמונה של T הוא $B_{Im(T)}=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ לכן המימד של התמונה הוא $\dim Im(T)=2$.

מכאן נובע ש-$\dim Ker(T)=0$ ולכן זה מתקיים אם T בהכרח חח"ע (הגדרה של חח"ע $\dim Ker(T)=0$). כמובן שיש אינסוף דוגמאות להעתקות כאלה.

ב. מצאו אם קיימת, העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ שהיא על.

פתרון:

אם T על אז לפי משפט (הגדרה של על) מתקיים $\dim Im(T)=3$. לכן ממשפט המימדים השני נקבל:

$$\dim V = \dim Ker(T)+\dim Im(T)$$

$$\underbrace{2}_{\text{נתון}} = \underbrace{-1}_{\text{נובע}} + \underbrace{3}_{\text{נתון}}$$

מקרה זה לא "יתכן" שכן $\dim Ker(T)$ לא יכול להיות שלילי ולכן לא קיימת T לינארית מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^3$ שהיא על.

מסקנה מסעיף ב':

משפט: אם $T: V \to U$ לינארית ומתקיים $\dim V<\dim U$ אז T לא על.

הוכחה: נניח בשלילה ש-T על לכן מתקיים $\dim Im(T)=\dim U$ ולכן לפי משפט המימדים השני:

$$\dim Ker(T)=\dim V-\dim Im(T)=\dim V-\dim U<0$$ סתירה!

לא קיימת העתקה כזו.

① מצאו אם קיימת, העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ שהיא על.

פתרון:

אם T על אז לפי הגדרה של על מתקיים $\dim Im(T) = 2$. לכן ממשפט המימדים השני מתקיים:

$$\dim V = \dim\ker(T) + \dim Im(T)$$

$$\underset{\text{נתון}}{3} = \underset{\text{נמצא}}{1} + \underset{\text{נתון}}{2}$$

לכן נמצא העתקה לינארית שמימד התמונה שלה הוא 2 ואז היא תהיה על.

לדוגמה: $T(a,b,c) = (a,b)$

מדובר בהעתקה לינארית ובנוסף $Im(T) = \mathbb{R}^2$ לכן $\dim Im(T) = 2$ ולכן T היא על. כמובן שיש אינסוף העתקות כאלה.

② מצאו אם קיימת, העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ שהיא חח"ע

פתרון:

אם T חח"ע אז לפי הגדרה $\dim\ker(T) = 0$. לכן ממשפט המימדים השני נקבל:

$$\dim V = \dim\ker(T) + \dim Im(T)$$

$$\underset{\text{נתון}}{3} = \underset{\text{נתון}}{0} + \underset{\text{נמצא}}{3}$$

התמונה היא תת מרחב של U (במקרה זה $\mathbb{R}^2$) ולכן המימד שלה לא יכול להיות 3 כלומר $\dim Im(T) \neq 3$.

זו סתירה ולכן לא ניתן למצוא $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ שהיא חח"ע.

מסקנה מסעיף ב':

משפט: אם $T:V \to U$ לינארית ומתקיים $\dim V > \dim U$ אז T לא חח"ע.

הוכחה: נניח בשלילה ש-T חח"ע לכן $\dim\ker(T) = 0$. ולכן לפי משפט המימדים השני:

$$\dim V = \dim\ker(T) + \dim Im(T)$$

$$\dim\ker(T) = \dim V - \dim Im(T) = \dim V - 0 = \dim V - 0 = \dim V > \dim U$$ סתירה

זו סתירה כי V הוא תת מרחב של U ולכן לא "יתכן" ש- $\dim V > \dim U$.

מסקנות שנובעות מהדוגמה:

① תהי $T:V \to U$ לינארית. אם T חח"ע ועל אז $\dim V = \dim U$

② תהי $T:V \to U$ לינארית. אם $\dim V = \dim U$ אז T חח"ע אם ורק אם T על (T חח"ע $\iff$ T על).

הוכחה לסעיף 2:

② נתון $\dim V = \dim U$

כיוון ראשון: נתון T חח"ע וצריך להוכיח T על.

אם T חח"ע אז $\dim\ker(T) = 0$ ולכן לפי משפט המימדים השני:

$$\dim Im(T) = \dim V - \dim\ker(T) = \dim V - 0 = \dim V = \dim U$$

ולכן בגלל שמתקיים $\dim Im(T) = \dim(U)$ אז T על.

כיוון שני: נתון T על וצריך להוכיח ש-T חח"ע.

אם T על אז מתקיים $\dim Im(T) = \dim(U)$ אבל נתון $\dim V = \dim U$ ולכן $\dim Im(T) = \dim V$.

לפי משפט המימדים השני:

$$\dim\ker(T) = \dim V - \underbrace{\dim Im(T)}_{\dim V} = \dim V - \dim V = 0$$

ולכן $\dim\ker(T) = 0$ כלומר T חח"ע