מעבדה הרצאה 8

עקרון שובך היונים

דוגמה:

בחדר מסוים יש 10 זוגות נשואים. מה המספר המינימלי של אנשים שצריך לבחור כך שבוודאות ייבחרו 2 אנשים שהם בני זוג? תשובה: 11 אנשים

אם $n+1$ יונים נכנסות ל- n שובכים, אז בוודאות יש שובך אחד בו יותר מיונה אחת.

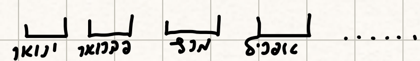
עקרון כללי יותר: $k>n$

אם k עצמים נכנסים ל- n תאים, יש תא אחד לפחות עם $\lceil \frac{k}{n} \rceil$.

תרגיל:

הסבירו מדוע בכל קבוצה של 13 אנשים לפחות 2 מהם נולדו באותו החודש.

פתרון: נשתמש בעקרון שובך היונים. נגדיר תא לכל חודש:

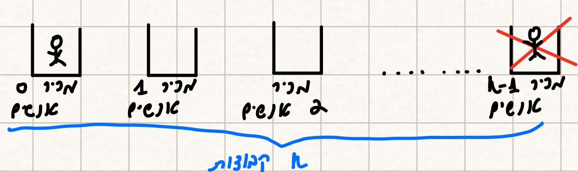


יש 12 חודשים ולכן יש 12 תאים. אם נחלק 13 אנשים ל- 12 תאים (קבוצות) יש קבוצה עם לפחות 2 אנשים והם נולדו באותו החודש.

תרגיל:

הראו כי בחבורה עם n אנשים כאשר כמה מהם מכירים אחד את השני, יש זוג שמכיר את אותו מספר של אנשים.

פתרון:



נגדיר את קבוצות ההיכרות: אנשים שמכירים 0 אנשים אחרים, אנשים שמכירים אחד 1, אנשים שמכירים 2 אנשים, וכך הלאה, עד הקבוצה של אנשים שמכירים $n-1$ אנשים (כל האנשים).

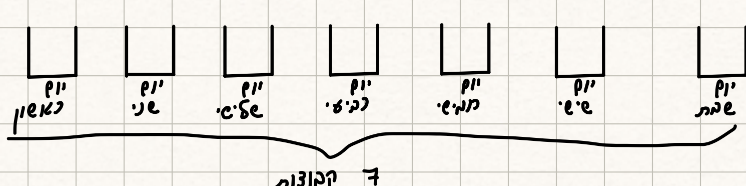
* אם יש אדם שמכיר 0 אנשים אז אין אדם שמכיר $n-1$ אנשים (כי יחס ההיכרות הדדי).
* ולהיפך, אם יש אדם שמכיר $n-1$ אנשים אין אדם שמכיר 0 אנשים.

ולכן בפועל יש $n-1$ קבוצות של הכרויות. מכאן, ניתן להשתמש בעקרון שובך היונים ולחלק n אנשים ל- $n-1$ קבוצות. קיימת קבוצה עם לפחות 2 אנשים ושניהם מכירים את אותה כמות של אנשים.

תרגיל:

הראו שאם בוחרים קבוצה של 30 אנשים, אז ניתן לבחור תת קבוצה של 5 מהם כך שכל החמישה נולדו באותו היום של השבוע.

פתרון: $\lceil \frac{30}{7} \rceil = 5$



נגדיר כל יום בשבוע להיות קבוצה. לפי עקרון שובך היונים אם נחלק 30 אנשים ל- 7 קבוצות, נקבל קבוצה עם לפחות 5 אנשים והם נולדו באותו יום בשבוע.

תרגיל:

הוכיחו שאם בוחרים 7 מספרים שונים מתוך קבוצת המספרים $\{1,2,\ldots\ldots,11\}$ אז קיימים בדיוק שניים שסכומם 12.

פתרון:

$$\underbrace{\{6\} \quad \{11,1\} \quad \{10,2\} \quad \{9,3\} \quad \{8,4\} \quad \{7,5\}}_{\text{6 קבוצות}}$$

נגדיר את כל הקבוצות שסכומן 12: $\{6\} \quad \{11,1\} \quad \{10,2\} \quad \{9,3\} \quad \{8,4\} \quad \{7,5\}$

סך הכל הגדרנו 6 קבוצות.

בכל קבוצה זוג מספרים שסכומם = 12.

נחלק 7 המספרים בין הקבוצות שהגדרנו, לפי עקרון שובך היונים קיימת קבוצה עם לפחות 2 מספרים והסכום שלהם = 12.

כלומר: $\lceil \frac{7}{6} \rceil = 2$ כלומר יש תא אחד עם 2 מספרים שהסכום שלהם 12.

תרגילים

תרגיל:

נתונות האותיות:

א, א, א, א
ב, ב, ב, ב
ג, ג, ג, ג
ד, ד, ד, ד

כמה מילים בנות 10 אותיות ניתן להרכיב מהן אם כל אות מופיעה לפחות פעמיים במילה?

פתרון:

נחלק למקרים:

אות אחת שמופיעה 4 פעמים ושאר שלוש האותיות מופיעות פעמיים:

- נבחר את האות שמופיעה 4 פעמים: $\binom{4}{1}$
- נסדר את האותיות: $\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

10 = { א א א א / ב ב / ג ג / ד ד

בסך הכל: $\binom{4}{1}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$

2 אותיות מופיעות 3 פעמים והשאר פעמיים.

- נבחר את האותיות שמופיעות 3 פעמים: $\binom{4}{2}$
- נסדר: $\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}$

ובסך הכל: $\binom{4}{2}\cdot\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}$

לבסוף נחבר: $\binom{4}{1}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} + \binom{4}{2}\cdot\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!}$

תרגיל 2 :

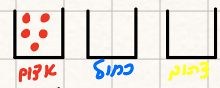
נתונה ערימת כדורים כחולים, אדומים וצהובים.

(א) נרצה לבחור 10 כדורים כך שיהיו לפחות 5 אדומים.

(ב) נרצה לבחור 10 כדורים כך שלכל היותר יהיו 5 אדומים.

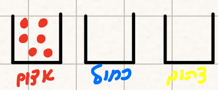
פתרון :

(א) $\binom{7}{2} = \binom{5+3-1}{3-1} \Leftarrow$ לפזר 5 כדורים בין 3 תאים



$\underbrace{}_{\binom{1}{1}}$ אופציות.

(ב) הפתרון לא חוקי - 6 כדורים ומעלה $\binom{6}{2} = \binom{4+3-1}{3-1}$ לפזר 4 בין 3 תאים



נשתמש בשיטת המשלים ונחשב כמה פתרונות יש ללא אילוצים פחות כל הלא חוקיים.

$$\underbrace{\left(\text{פתרונות ללא אילוצים}\right)}_{\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}} - \underbrace{\left(\text{כל הלא חוקיים}\right)}_{\binom{6}{2}} = \binom{12}{2}-\binom{6}{2}$$

לפזר 10 כדורים ב- 3 תאים

תרגיל 3 :

דרך קו תקשורת רוצים להעביר 5 אותיות a,b,c,d,e ו- 15 רווחים כך שכל הרווחים הם בין האותיות ויש לפחות רווח אחד בין אות לאות.

$\underline{b}$ רווח $\underline{a}$ רווח $\underline{c}$ רווח $\underline{e}$ רווח $\underline{d}$

סידור אותיות - $5!$

נשים 4 רווחים בין האותיות ואז נשארנו עם 11 רווחים לסדר בין 4 תאים : $\binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3}$

בסך הכל : $5! \cdot \binom{14}{3}$

הבינום של ניוטון

נוסחת הבינום של ניוטון - מאפשרת לנו לפתח סוגריים מהצורה : $(x+y)^n$.

דוגמה :

$$(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y) = xxxx + \underline{xxxy} + \underline{xxyx} + xxyy + \underline{xyxx} + xyxy + xyy + xyyy + \underline{yxxx} + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy$$

בעזרת חוק החילוף ניתן לכנס איברים דומים : $xxyx = xxxy = xyxx = yxxx = x^3y$

בסכום נמצאים : כל הסדרות/וקטורים באורך 4 מעל $\{x,y\}$ וכל וקטור מופיע בדיוק פעם אחת.

ומה המקדם של x^3y ?

כמספר הוקטורים באורך 4 המכילים 3 תווים של 'x' ופעם אחת תו 1 של 'y'.

מה המקדם x^iy^j ? $\binom{n}{i}$.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k y^{n-k}$$

משפט: בינום של ניוטון

$$\boxed{(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n=0}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}}$$

כאשר n טבעי.

* אפשר להפוך את סדר האיברים ולרשום:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

נבדוק שהנוסחה עובדת, למשל נבדוק את הנוסחא כאשר $n=2$ נגיע ל- $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$:

$$(x+y)^2=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}x^k y^{2-k}=$$

$$=\underbrace{\binom{2}{0}x^0y^{2-0}}_{k=0}+\underbrace{\binom{2}{1}x^1y^{2-1}}_{k=1}+\underbrace{\binom{2}{2}x^2y^{2-2}}_{k=2}=\frac{2!}{0!(2-0)!}y^2+\frac{2!}{1!(2-1)!}xy+\frac{2!}{2!(2-2)!}x^2=y^2+2xy+x^2$$

זהויות קומבינטוריות:

① $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

אלגברית: $\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

קומבינטורית: בכמה אופנים ניתן לחלק n איברים ל-2 קבוצות, אחת בגודל k והשנייה בגודל $n-k$.
אם נבחר קבוצה בגודל k אז יש $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
באותו אופן אם נבחר קבוצה בגודל $n-k$ איברים: $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

② $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

אלגברית: נציב $x=y=1$ בבינום של ניוטון ונקבל:

$$(1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot 1^i\cdot 1^{n-1}$$

$$2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\ \checkmark$$

קומבינטורית: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

2^n - מספר תתי הקבוצות של קבוצה בעלת n איברים. (הוכחנו).
בצד שמאל של השוויון אנו סופרים את כל הקבוצות בגודל 0 מתוך n איברים וכל הקבוצות בגודל 1, וכל הקבוצות בגודל 2 וכך הלאה עד כל הקבוצות בגודל n. וזה שווה לסך הכל תתי הקבוצות שיש לקבוצה בעלת n איברים.