בעיקבה הרצאה מספר 4

פתרון נוסחאות רקורסיביות ליניאריות הומוגניות ע"י פולינום האופייני

אם נתונה לנו פונק' רקורסיבית / נוסחת נסיגה מהצורה הבאה:

$$f(n)=a_1\cdot f(n-1)+a_2\cdot f(n-2)+\ldots+a_k\cdot f(n-k)$$

עם k תנאי התחלה:

$$f(1)=C_1,\ f(2)=C_2,\ \ldots,\ f(k)=C_k$$

כאשר $a_1,\ldots,a_k$ קבועים.

אז נפתור את הנוסחה ע"י השלבים הבאים:

1. נניח $f(n)=x^n$, $f(n-1)=x^{n-1}$, $f(n-2)=x^{n-2}$, ...

2. נפתור את המשוואה (מסדר k) ונקבל k פתרונות: $x_1,x_2,\ldots,x_k$

3. אם קיבלנו k פתרונות שונים, הנוסחה נראית:

$$f(n)=b_1\cdot x_1^n+b_2\cdot x_2^n+b_3\cdot x_3^n+\ldots+b_k\cdot x_k^n$$

ונותר לנו למצוא את המקדמים $b_1,b_2,\ldots,b_k$.

3.1. נמצא את המקדמים ע"י הצבת תנאי ההתחלה ונקבל מערכת של k משוואות ו- k נעלמים.

3.2. נציב את $b_1,\ldots,b_k$ שמצאנו בנוסחה: $f(n)=b_1\cdot x_1^n+b_2\cdot x_2^n+b_3\cdot x_3^n+\ldots+b_k\cdot x_k^n$

4. אחרת, אם יש פתרונות זהים: לדוגמא $x_1=x_2$ אז אין לנו k שונים, ולכן נכפול את x_1 או x_2 ב- n ונקבל

$$f(n)=b_1\cdot x_1^n+\underline{\underline{b_2\cdot n\cdot x_2^n}}+\ldots+b_k X\cdot x_k^n$$

אם יש ריבוי של פתרונות זהים (m זהים: $x_1=x_2=x_3=\ldots=x_m$) נכפול כל פתרון זהה ב- n חוץ מהראשון ונקבל m פתרונות שונים:

$$f(n)=b_1\cdot x_1^n+b_2\cdot n\cdot x_2+b_3\cdot n^2\cdot x_3+b_4\cdot n^3\cdot x_3+\ldots+b_m\cdot n^{m-1}\cdot x_m^n+\ldots+b_k\cdot x_k^n$$

ואז מוצאים את המקדמים.

תרגיל 1

$$f(n)=2\cdot f(n-1)$$
$$f(1)=1$$

1. מציאת פולינום אופייני: נניח $f(n)=x^n$ ו- $f(n-1)=x^{n-1}$:

$$x^n=2\cdot x^{n-1}$$

2. נפתור משוואה ונמצא פתרונות:

$$x=2$$

3. לכן הנוסחא נראית כך: $f(n)=b_1\cdot 2^n$

3.1. נמצא את b_1 ונציב בו:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \\ b_1\cdot 2=1 \end{array}\right\} b_1=\frac{1}{2}$$

לכן הנוסחה היא:

$$\left.\begin{array}{l} f(n)=\frac{1}{2}\cdot 2^n \\ f(n)=2^{-1}\cdot 2^n \end{array}\right\} f(n)=2^{n-1}$$

תרגיל 2:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 3$$

מציאת פולינום אופייני. נציב במקום $a_n = x^n$

$$x^n = 5 \cdot x^{n-1} - 6 \cdot x^{n-2}$$

נמצא פתרונות:

$$x^n = 5 \cdot x^{n-1} - 6 \cdot x^{n-2} \quad / x^{n-2}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_1 = 3$$

קיבלנו 2 פתרונות שונים.

הנוסחה נראית:

$$f(n) = b_1 \cdot x_1^n + b_2 \cdot x_2^n + b_3 \cdot x_3^n + \dots + b_k \cdot x_k^n$$

$$a_n = b_1 \cdot 2^n + b_2 \cdot 3^n$$

נמצא את המקדמים:

נתון $a_1 = 3$, $a_0 = 0$ לכן:

$$a_1 = b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 3^1$$

$$3 = b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 3^1$$

$$3 = 2b_1 + 3b_2$$

$$3 = -2b_2 + 3b_2$$

$$b_2 = 3 \quad , \quad b_1 = -3$$

$$a_0 = b_1 \cdot 2^0 + b_2 \cdot 3^0$$

$$0 = b_1 \cdot 2^0 + b_2 \cdot 3^0$$

$$0 = b_1 + b_2$$

$$b_1 = -b_2$$

נציב ונקבל:

$$a_n = -3 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n$$

$$a_n = -3 \cdot 2^n + 3^{n+1}$$

תרגיל 3:

$$f(n) = 3f(n-2) - 2f(n-3)$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(1) = 2 \quad , \quad f(2) = 3$$

נמצא פולינום אופייני ונציב $f(n) = x^n$

$$x^n = 3x^{n-2} - 2x^{n-3} \quad / x^{n-3}$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$x^3 - 2x - x + 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x-1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1 , \quad x_3 = -2$$

קיבלנו 2 פתרונות זהים ולכן $f(n) = b_1 \cdot x_1^n + \underline{\underline{b_2 \cdot n \cdot x_2^n}} + \dots + b_k x \cdot x_k^n$ לכן:

$$f(n) = b_1 \cdot 1^n + \underline{\underline{b_2 \cdot n \cdot 1^n}} + b_3 (-2)^n$$

ואז מוצאים את המקדמים :

$f(0)=1$

$1 = b_1\cdot 1^0 + b_2\cdot 0 + b_3(-2)^0$

$1 = b_1 + b_3$

$b_1 = 1 - b_3$

$f(1)=2$

$2 = b_1\cdot 1 + b_2 - 2b_3$

$2 = b_1 + b_2 - 2b_3$

$2 = 1 - b_3 + b_2 - 2b_3$

$2 = -3b_3 + b_2 + 1$

$b_2 = 1 + 3b_3$

$f(2)=3$

$3 = b_1 + 2b_2 + 4b_3$

$3 = 1 - b_3 + 2 + 6b_3 + 4b_3$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 9b_3 + 3 \\ 9b_3 = 0 \end{array}\right\} b_3 = 0$$

$\Downarrow$

$b_1 = 1 \quad b_2 = 1 \quad b_3 = 0$

הנוסחה הכללית היא :

$$f(n) = b_1\cdot 1^n + b_2\cdot n\cdot 1^n + b_3(-2)^n$$

$f(n) = 1\cdot 1^n + 1\cdot n\cdot 1^n + 0$

$f(n) = 1^n + n\cdot 1^n$

$f(n) = 1 + n\cdot 1$

$f(n) = n + 1$

שיטת המשוואות הלא הומוגניות

$$f(n) = a_1\cdot f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots a_k f(n-k) + g(n)$$

קבועים : $a_1,\dots a_k$ קבועים.

ונתונים לנו גם תנאי התחלה : $f(0)=C_0,\ f(1)=C_1,\ \dots\ f(k-1)=C_{k-1}$

שלבים לפתרון :

1. נמצא פתרון כללי לנוסחה ההומוגנית המתאימה

   a_n^h / $f_h(n)$ (ללא תנאי התחלה)

2. נמצא פתרון פרטי לנוסחה הלא הומוגנית. ניחוש

3. נחבר את הפתרון הכללי משלב 1 לפתרון הפרטי משלב 2 לקבלת : $f(n) = f_h(n) + f_p(n)$

   $f_h(n)$: פתרון כללי להומוגנית

   $f_p(n)$: פתרון פרטי ללא הומוגנית

4. נחשב מקדמים.

② טבלת ניחושים :

$g(n)$	$f_p(n)$
c קבוע	A
n לינארי	$A_1\cdot n + A_0$
n^2 פולינום.	$A_2\cdot n^2 + A_1\cdot n + A_0$
r^n מעריכי	$A\cdot r^n$

דוגמה:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \rightarrow g(n)$$
$$a_1 = 1$$

① נמצא פתרון כללי לנוסחה ההומוגנית:

$$a_n = 2a_{n-1}$$
$$x^n = 2x^{n-1} \quad / x^{n-1}$$
$$x = 2$$
$$a_n^h = b_1 \cdot 2^n$$

② נשתמש בשיטת הניחושים כדי לנחש את הפתרון הפרטי:

הניחוש: $a_n^p = A$

נציב בלא הומוגנית $\longrightarrow$ $a_n = 2a_{n-1} + 1$

$$A = 2A + 1$$
$$A = -1 \longrightarrow a_n^p = -1 \longleftarrow \text{פתרון פרטי}$$

③ מחברים: $a_n = b_1 \cdot 2^n - 1$

④ מציאת מקדמים כאשר $a_1 = 1$

$$1 = b_1 \cdot 2 - 1$$
$$2b_1 = 2$$
$$b_1 = 1$$

ולכן הנוסחה היא $a_n = 2^n - 1$

תרגיל:

נתון: $f(n) = -2f(n-1) + n + 3$

ונתון תנאי התחלה: $f(0) = 3$

ראשית נעבוד על החלק ההומוגני:

$$f(n) + 2f(n-1) = 0$$
$$r + 2 = 0$$
$$r = -2$$

לכן הפתרון הכללי של החלק ההומוגני הוא: $f_n^h = A \cdot (-2)^n$

כעת נסתכל על החלק הלא הומוגני - הוא מדרגה $n+3$ כלומר היא לינארי ולכן ננחש $f_n^p = cn + d$

נציב בנוסחה הרקורסיבית:

$$f(n) + 2f(n-1) - n - 3 = 0$$
$$cn + d + 2\big(c(n-1) + d\big) - n - 3 = 0$$
$$cn + d + 2(cn - c + d) - n - 3 = 0$$
$$cn + d + 2cn - 2c + 2d - n - 3 = 0$$
$$3cn + 3d - 2c - n - 3 = 0$$
$$3cn - n + 3d - 2c - 3 = 0$$
$$n(3c - 1) + \underbrace{3d - 2c - 3}_{} = 0$$

$$3c - 1 = 0 \qquad 3d - 2c - 3 = 0$$
$$c = \frac{1}{3} \qquad 3d - \frac{2}{3} - 3 = 0$$
$$3d = 3\frac{2}{3} \qquad d = \frac{11}{9}$$

$$f_n^p = \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$$

לכן הפתרון הכללי הוא $f_n = f_n^h + f_n^p$

$$f_n = A\cdot(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$$

נציב תנאי התחלה $f(0)=3$

$$3 = A + \frac{11}{9}$$
$$A = \frac{16}{9}$$
$$\Downarrow$$
$$f(n) = \frac{16}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n + \frac{11}{9}$$

בדיקה

$$f(0) = 3$$
$$f(1) = \frac{16}{9}\cdot(-2)^1 + \frac{1}{3} + \frac{11}{9} = -2$$

תרגיל:

נתון:
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2\cdot 3^{n-2}$$
$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 2$$

מציאת a_n^h:

$$x^n = x^{n-1} + 2x^{n-2} \quad / x^{n-2}$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -1$$
$$\Downarrow$$
$$a_n^h = b_1\cdot 2^n + b_2(-1)^n$$

שלב שני: ניחוש. לפי הטבלת ניחוש: $A\cdot r^n$

נמיר את החלק הלא הומוגני לצורה כזאת:

$$2\cdot 3^{n-2} = 2\cdot 3^n\cdot 3^{-2} = \frac{2}{9}3^n$$

ניחוש $a_n^p = A\cdot 3^n$

נציב בלא הומוגנית:

$$A\cdot 3^n = A\cdot 3^{n-1} + 2(A\cdot 3^{n-2}) + 2\cdot 3^{n-2} \quad / 3^{n-2}$$
$$A\cdot 9 = A\cdot 3 + 2A + 2$$
$$9A = 5A + 2$$
$$\left.\begin{array}{l} 4A = 2 \\ A = \frac{1}{2} \end{array}\right\} a_n^p = \frac{1}{2}\cdot 3^n$$
$$\Downarrow$$
$$a_n = a_n^h + a_n^p$$

$$a_n = b_1\cdot 2^n + b_2(-1)^n + \frac{1}{2}\cdot 3^n$$

נציב את תנאי ההתחלה כדי למצוא את b_1, b_2:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 = 1 & a_1 = 2 \\ b_1 + b_2 + \frac{1}{2} = 1 & 2b_1 - b_2 + \frac{3}{2} = 2 \\ b_1 + b_2 = \frac{1}{2} & 2b_1 - b_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2b_1 - b_2 = b_1 + b_2 \\ b_1 = 2b_2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3b_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = \frac{1}{6} \quad b_1 = \frac{1}{3} \end{array}\right\} a_n = \frac{1}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{2}\cdot 3^n$$

תרגיל:

$$f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) + 5$$

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 0$$

פולינום אופייני:

$$f(n) - 3f(n-1) + 2f(n-2) = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$f_n^h = b_1 \cdot 2^n + b_2 \cdot 1^n$$

נשים לב חלק הלא הומוגני, ל-5 שהוא מקדם קבוע לכן ננחש $f_n^p = A$. נציב בלא הומוגני:

$$A = 3A - 2A + 5$$

$$A = A + 5$$

$$0 = 5$$ פסוק שקר

נעבור לניחוש הבא בעלת הניחושים פולינום נציב $f_n^p = A_1 \cdot n + A_0$. נציב ברקורסיה:

$$A_1 n + A_0 = 3\left(A_1 \cdot (n-1) + A_0\right) - 2\left(A_1(n-2) + A_0\right) + 5$$

$$A_1 n + A_0 = 3A_1 n - 3A_1 + 3A_0 - 2A_1 n + 4A_1 - 2A_0 + 5$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1 + 5 \\ A_1 &= -5 \\ A_0 &= \text{כל ערך} \end{aligned}\right\} f_n^p = -5n$$

$$\Downarrow$$

$$f = f_n^h + f_n^p$$

$$f(n) = b_1 \cdot 2^n + b_2 \cdot 1^n - 5n$$

$$\Downarrow$$

$$f(n) = b_1 \cdot 2^n + b_2 - 5n$$

כעת נמצא מקדמים לפי תנאי ההתחלה:

$f(0) = 0$

$b_1 + b_2 = 0$

$b_2 = -b_1$

$f(1) = 0$

$2b_1 + b_2 - 5 = 0$

$2b_1 - b_1 = 5$

$b_1 = 5, \quad b_2 = -5$

$$f(n) = 5 \cdot 2^n - 5 - 5n$$