## הרצאה 3

**תזכורת:**

במרחב מדגם $\Omega$, ההסתברות של מאורע $A \subseteq \Omega$ להתרחש היא $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

הסתברות מותנית - את המאורע "$A$ בהינתן $B$" מסמנים $A|B$. איך מחשבים את ההסתברות שלו? תכלס, כשיודעים ש-$B$ קורה אז בעצם $B$ הוא כל מרחב המדגם, בעוד שהמאורע שאנחנו רוצים שיקרה בפועל הוא "$B$ וגם $A$" ולכן $P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$ ואפשר גם לרשום $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

נוסחת ההסתברות השלמה - אם $B_1, B_2, \ldots$ מאורעות שזרים בזוגות (כלומר, החיתוך של כל שניים מהם הוא קבוצה ריקה) והאיחוד שלהם הוא כל מרחב המדגם אז:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \ldots$$

נוסחת בייס - $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$

תלות - מאורעות $A,B$ נקראים בלתי תלויים אם: $P(A|B) = P(A)$. תנאים שקולים:

(1) $P(B|A) = P(B)$

(2) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**משפט:** המאורעות $A,B$ בלתי תלויים אם ורק אם המאורעות המשלימים $\bar{A}, \bar{B}$ בלתי תלויים.
מכיוון שמדובר במשפט מסוג אמ"מ, אפשר לומר אותו גם על "תלויים" במקום "בלתי תלויים".

**הוכחה:** נתון ש-$A,B$ בלתי תלויים כלומר $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. צ"ל ש-$\bar{A}, \bar{B}$ בלתי תלויים כלומר $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$
מה אנחנו יודעים לעשות על הסתברות שבהגדרה יש פעולות על קבוצות? בעצם, שני דברים - כשיש משלים, אפשר לעשות "1 פחות", כשיש איחוד אפשר לפרק את ההסתברות $P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$.
אז כן נשתמש בדה מורגן $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

מצד אחד:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) \underset{\text{דה מורגן}}{=} P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) = 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A \cap B)}_{\substack{\text{נתון שהמאורעות ב"ת} \\ \text{ולכן } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}} =$$

$$\Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$

מצד שני:

$$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

שני האגפים שווים ולכן $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

**דוגמה :**

ההסתברות לעבור את המבחן בהסתברות היא 0.6 וההסתברות לעבור את המבחן באלגוריתמים היא 0.9.
ההסתברות לעבור את שני המבחנים היא 0.55.
האם יש תלות בין לעבור את המבחן בהסתברות לבין לעבור את המבחן באלגוריתמים?
אם נסמן ב- A את המאורע לעבור את המבחן בהסתברות
ואם נסמן ב- B את המאורע לעבור את המבחן באלגוריתמים
לפי הנתונים:

$$0.55 = P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B) = 0.54$$

מתקיים $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ ולכן המאורעות תלויים.

## תלות בין יותר משני מאורעות

נתחיל משלושה מאורעות, נגדיר, ואז נדבר על המקרה הכללי.
אם כן, יהיו A,B,C מאורעות באותו מרחב מדגם. נאמר שהמאורעות A,B,C הם <u>בלתי תלויים בזוגות</u>, אם כל שני מאורעות הם בלתי תלויים, כלומר:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \qquad P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C) \qquad P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$

כעת, המאורעות A,B,C נקראים בלתי תלויים אם הם בלתי תלויים בזוגות ובנוסף לכך: $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

**דוגמה :**

מטילים שתי קוביות סטנדרטיות (אחת אדומה ואחת כחולה)
נסמן ב- A את המאורע סכום התוצאות הוא 7.
נסמן ב- B את המאורע בקוביה הכחולה יצא 3.
נסמן ב- C את המאורע בקוביה האדומה יצא 4.
נבדוק האם הם ב"ת בזוגות והאם הם ב"ת?

<u>פתרון:</u>

$$A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} \qquad A\cap B=\{(4,3)\} \qquad A\cap B\cap C=\{(4,3)\}$$

$$B=\{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3)\} \qquad A\cap C=\{(4,3)\}$$

$$C=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\} \qquad B\cap C=\{(4,3)\}$$

במרחב המדגם $\Omega$ יש 36 זוגות (6 אפשרויות לרכיב הראשון, 6 אפשרויות לרכיב השני) לכן:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \qquad P(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{1}{36} \qquad P(A\cap B\cap C)=\frac{|A\cap B\cap C|}{|\Omega|}=\frac{1}{36}$$

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \qquad P(A\cap C)=\frac{|A\cap C|}{|\Omega|}=\frac{1}{36}$$

$$P(B\cap C)=\frac{|B\cap C|}{|\Omega|}=\frac{1}{36}$$

לכן:

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{36}$$

כלומר המאורעות בלתי תלויים בזוגות כי ההסתברות של חיתוך של שני מאורעות שווה למכפלת ההסתברויות של אותם מאורעות.

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(A\cap B)$$

$$P(A)\cdot P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(A\cap C)$$

$$P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(B\cap C)$$

עם זאת, את התנאי הנוסף של אי תלות הם לא מקיימים, שהרי:

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{36}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=P(A)P(B)P(C)$$

ולכן בסה"כ המאורעות $A,B,C$ תלויים (על אף שהם בת"ל בזוגות)

כעת, איך נגדיר תלות בין מספר כללי של מאורעות $A_1,\dots,A_n$?

מה שדרשנו בפועל במקרה של 3 מאורעות הוא שההסתברות של כל חיתוך שאפשר לייצר מהמאורעות האלה תהיה שווה למכפלת המאורעות שמשתתפים בחיתוך.

כך גם במקרה הכללי - אנו אומרים שמאורעות $A_1,\dots,A_n$ הם בלתי תלויים, אם ההסתברות של כל חיתוך של מאורעות מתוך הרשימה $A_1,\dots,A_n$ שווה למכפלת ההסתברויות של המאורעות שמשתתפים בחיתוך.

בניסוח מעט יותר פורמלי - לכל קבוצת אינדקסים $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ מתקיים: $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\dots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k})$

למשל אם המאורעות $A_1,A_2,A_3,A_4$ בלתי תלויים, פירוש הדבר הוא:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$$
$$P(A_1\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_3)$$
$$P(A_1\cap A_4)=P(A_1)\cdot P(A_4)$$
$$P(A_2\cap A_3)=P(A_2)\cdot P(A_3)$$
$$P(A_2\cap A_4)=P(A_2)\cdot P(A_4)$$
$$P(A_3\cap A_4)=P(A_3)\cdot P(A_4)$$
$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$
$$P(A_1\cap A_2\cap A_4)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_4)$$
$$P(A_1\cap A_4\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_4)\cdot P(A_3)$$
$$P(A_4\cap A_2\cap A_3)=P(A_4)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$
$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4)$$

## משתנה מקרי בדיד

פורמלית, משתנה מקרי $X$ על מרחב מדגם $\Omega$ הוא פונקציה מ-$\Omega$ לממשיים $\mathbb{R}$ - כך שלכל תוצאה $a$ של הניסוי מותאם מספר ממשי $X(a)$. אפשר לרשום: $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

למשל, נניח שהניסוי האקראי הוא הטלת קוביה סטנדרטית פעם אחת. במרחב המדגם $\Omega$ יש 6 תוצאות - $a_1,\dots,a_6$ כאשר $a_i$ היא התוצאה שבה יצא $i$.

הערה: בהרצאות הקודמות היינו רושמים בפשטות $\Omega=\{1,2,\dots,6\}$. עם זאת, כשרוצים לנסח את הדברים פורמלית עד הסוף, צריך להבדיל בין מספר לבין התוצאה של הניסוי האקראי.

רק להתגבר על הפער הזה באים לעזרתנו משתנים מקריים. בדוגמה שלנו, למשל, נוכל להגדיר משתנה מקרי $X$ באופן הבא: $X(a_i)=i$, כלומר $X$ הוא המספר שיצא בהטלה.

כמובן, אפשר להגדיר משתנים מקריים אחרים. נניח שאנחנו משחקים משחק - מטילים קוביה, מכפילים את התוצאה ב-2 ומחסרים 6. אם המספר חיובי - מי שהטיל מרוויח אותו, ואם הוא שלילי - מי שהטיל מפסיד אותו. את סכום הזכיה אפשר לתאר באמצעות המשתנה המקרי הבא: $Y=2X-6$

דוגמאות נוספות:

① מטילים מטבע 3 פעמים, $\Omega$ הוא מרחב כל התוצאות האפשריות, יש 8 כאלו. נסמן ב-$X$ את המשתנה המקרי "כמה פעמים יצא עץ".
כלומר:

$$X(TTT)=3$$
$$X(TTH)=2$$
$$X(THT)=2$$
$$X(HTT)=2$$
$$X(HHT)=1$$
$$X(HTH)=1$$
$$X(THH)=1$$
$$X(HHH)=0$$

② באותו מרחב מדגם, נסמן ב-$Y$ את המשתנה המקרי שמוגדר כך- אם "יצא בדיוק פעמיים עץ" אז $Y=1$ אחרת $Y=0$.
כלומר:

$$Y(TTT)=0$$
$$Y(TTH)=1$$
$$Y(THT)=1$$
$$Y(HTT)=1$$
$$Y(HHT)=0$$
$$Y(HTH)=0$$
$$Y(THH)=0$$
$$Y(HHH)=0$$

הערה:
ויזואלית אפשר לרשום בטבלה, במקום בטור:

| תוצאה | TTT | TTH | THT | HTT | HTH | HHT | THH | HHH |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

אנחנו מחלקים את המשתנים המקריים לשני סוגים - בדידים ורציפים.

משתנה מקרי בדיד הוא משתנה שבתמונה שלו יש מספר בן מניה של ערכים שונים. תכלס, משתנה מקרי בדיד הוא משתנה שבו קבוצת הערכים המתקבלת היא סופית, או $\mathbb{N}$ או $\mathbb{Z}$ (או תת קבוצה שלהם).

משתנה מקרי רציף הוא משתנה שבתמונה שלו מספר לא בן מניה של ערכים שונים, בפועל מדובר ב-$\mathbb{R}$ או בקטע שמוכל ב-$\mathbb{R}$.

## פונקציית הסתברות:

הדרך המקיפה ביותר לתאר משתנה מקרי היא פונקציית הסתברות.

פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי $X$ מסומנת $P_X$, והיא מוגדרת כך: $P_X(x) = P(X = x)$, כלומר מחשבת את ההסתברות שהערך של $X$ יהיה $x$.

למשל, נניח שהמשתנה המקרי שלנו הוא "כמה פעמים יצא עץ" כאשר מטילים מטבע 3 פעמים:

$$X(TTT) = 3$$
$$X(TTH) = 2$$
$$X(THT) = 2$$
$$X(HTT) = 2$$
$$X(HHT) = 1$$
$$X(HTH) = 1$$
$$X(THH) = 1$$
$$X(HHH) = 0$$

$X$ יכול להיות שווה ל-4 ערכים אפשריים: $0,1,2,3$. מה ההסתברות לכל אחד מהם?

$$P_X(0) = P(X=0) = \frac{1}{8}$$

$$P_X(1) = P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$P_X(2) = P(X=2) = \frac{3}{8}$$

$$P_X(3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$$

ויזואלית אפשר לתאר זאת באמצעות טבלה:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P_X$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

דוגמה נוספת - $Y$ הוא משתנה מקרי בדיד שערכו 0 אם לא יצא עץ בדיוק פעמיים וערכו 1 אם כן יצא עץ בדיוק פעמיים.

$$Y(TTT) = 0$$
$$Y(TTH) = 1$$
$$Y(THT) = 1$$
$$Y(HTT) = 1$$
$$Y(HHT) = 0$$
$$Y(HTH) = 0$$
$$Y(THH) = 0$$
$$Y(HHH) = 0$$

ל-Y יש 2 ערכים אפשריים 0,1. מה ההסתברות לכל אחד מהם?

$$P_Y(0) = P(Y=0) = \frac{5}{8}$$

$$P_Y(1) = P(Y=1) = \frac{3}{8}$$

בטבלה:

| $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P_Y$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |

**תכונות של פונקציית ההסתברות:**

(א) לכל ערך x של המשתנה X מתקיים $0 \le P_X(x) \le 1$

(ב) אם סוכמים את כל ההסתברויות $P_X(x)$ מקבלים 1, כלומר: $\sum P_X(x) = 1$ כאשר הסכום רץ על כל הערכים האפשריים של המשתנה המקרי X. התכונה הזאת נקראת תכונת הנרמול.

**דוגמה:**

מטילים שתי קוביות הוגנות. נסמן ב- X את סכום התוצאות של שתי הקוביות.
ראשית, הערכים האפשריים של X הם $2,3,4,\dots,12$ (סכום התוצאות המינימלי הוא 2, מתקבל כאשר התוצאות הן 1,1 וסכום התוצאות המקסימלי הוא 12, מתקבל כאשר התוצאות הן 6,6).
שני נחשב את ההסתברויות. יש לנו 36 תוצאות אפשריות, ונחשב את ההסתברויות בהתאם.

$$P(X=2) = \frac{|\{(1,1)\}|}{36} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=3) = \frac{|\{(1,2),(2,1)\}|}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=4) = \frac{|\{(2,2),(3,1),(1,3)\}|}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=5) = \frac{|\{(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}|}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(X=6) = \frac{|\{(3,3),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2)\}|}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=7) = \frac{|\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}|}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P(X=8) = \frac{|\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}|}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(X=9) = \frac{|\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}|}{36} = \frac{4}{36}$$

$$P(X=10) = \frac{|\{(5,5),(6,4),(4,6)\}|}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(X=11) = \frac{|\{(5,6),(6,5)\}|}{36} = \frac{2}{36}$$

$$P(X=12) = \frac{|\{(6,6)\}|}{36} = \frac{1}{36}$$

**דוגמה:**

בכיתה יש 9 סטודנטים - 4 במסלול בוקר, 3 במסלול ערב ו-2 ממסלול אב"ג. מוציאים מהכיתה 4 סטודנטים ללא החזרה. נסמן ב- $X$ את מספר הסטודנטים ממסלול בוקר שיצאו מהכיתה.

ראשית - הערכים האפשריים של $X$ הם $0,1,2,3,4$. 0 פירושו שאף אחד מהסטודנטים שיצאו איננו ממסלול בוקר, 1 פירושו ש- 1 מתוך ה-4 הוא ממסלול בוקר וכו'...

שנית, נחשב את ההסתברות.

הגודל של מרחב המדגם - בכמה אופנים שונים ניתן להוציא 4 סטודנטים מכיתה עם 9 תלמידים? $|\Omega| = \binom{9}{4}$

כעת, מהו הגודל של המאורע $X=k$? במדגם כזה, מתוך 4 סטודנטי הבוקר "יצאו" $k$, ומתוך 5 האחרים "יצאו" השאר שהם $4-k$. יש $\binom{4}{k}$ אופנים לבחור את סטודנטי הבוקר שיוצאים ו- $\binom{5}{4-k}$ אופנים לבחור את שאר הסטודנטים שיוצאים.

שתי הבחירות הן חלקים בבחירה כוללת ולכן נכפיל: $\binom{4}{k}\binom{5}{4-k}$ ולכן:

$$P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{9}{4}}$$

ועבור, כל ערך של $k$ נקבל:

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{5}{4-0}}{\binom{9}{4}} = \frac{5}{126}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{4-1}}{\binom{9}{4}} = \frac{40}{126}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{4-2}}{\binom{9}{4}} = \frac{60}{126}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{4-3}}{\binom{9}{4}} = \frac{20}{126}$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{126}$$

## פונקציית התפלגות מצטברת

נקראת גם פונקציית הצטברות.

בהינתן משתנה מקרי $X$, פונקציית ההצטברות של $X$ מסומנת $F_X$, ומוגדרת כך:

$$F_X(a)=P(X\le a)$$

$$F_X(a)=\sum_{k\le a}P(X=k)$$

כלומר, סכום כל ההסתברויות של הערכים עד ל-$a$.

למשל, בדוגמאות הקודמות:

$$F_X(2.5)=\sum_{k\le 2.5}P(X=k)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{5}{126}+\frac{40}{126}+\frac{60}{126}=\frac{105}{126}$$

### תכונות של פונקציית ההתפלגות המצטברת:

א. $\lim_{x\to\infty}F_X(x)=1$. אם יש מספר סופי של ערכים, הערך המקסימלי ייתן $F_X=1$.

ב. $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$.

ג. אם $x<y$ אז: $F_X(x)\le F_X(y)$

ד. $P(X>x)=1-P(X\le x)=1-F_X(x)$

ה. $P(x\le X\le y)=P(X\le y)-P(X\le x)=F_X(y)-F_X(x)$

## מדדי מיקום של משתנה מקרי

נתחיל עם מדדי מרכז - ערכים מיוחדים ששאר הערכים "מסתובבים" סביבם. אנו מכירים כנראה את הממוצע, נציג אותו ונציג גם את השכיח ואת החציון.

### שכיח

בהינתן משתנה מקרי בדיד $X$ השכיח הוא הערך שלו ההסתברות הגבוהה ביותר. אם יש כמה כאלה - כולם שכיחים.

למשל, אם $X$ הוא המשתנה המקרי "סכום הטלות בהטלת שתי קוביות סטנדרטיות", מבין כל הערכים האפשריים ל-$X$ שהם כזכור $X=2,3,4,\dots,12$, הערך, עם ההסתברות הגבוהה ביותר הוא $X=7$ ולכן 7 הוא השכיח.

### חציון:

אינטואיטיבית, חציון הוא הערך שחצי מהערכים גדולים ממנו וחצי מהערכים קטנים ממנו.

פורמלית: עבור משתנה מקרי $X$ מסומן $Me$, זהו הערך המקיים את שני התנאים הבאים:

א. $P(X<Me)\le\frac{1}{2}$

ב. $P(X\le Me)\ge\frac{1}{2}$

כלומר, עד הערך לא כולל הערך, ההסתברות לא גדולה מחצי. החל מהערך הבא זה כבר לא פחות מחצי מהערכים.

למשל בדוגמה :

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P_X$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

הערך 1 מקיים $P(X<1) \leq \frac{1}{2}$ וגם $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \geq \frac{1}{2}$

לכן 1 מתנהג כאן כמו חציון. כנ"ל לגבי 2.

באופן דומה, האחוזון ה-$p$, שנקרא גם ערך החלוקה ה-$p$, מסומן $M_p$ וזהו הערך שמקיים את שני התנאים.

א. $P(X<M_p) \leq P$

ב. $P(X \leq M_p) \geq P$

למשל, האלפיון העליון הוא הערך שמקיים $P(X<M_p) \leq \frac{999}{1000}$ , $P(X \leq M_p) \geq \frac{999}{1000}$.

## תוחלת

בהינתן משתנה מקרי בדיד $X$, התוחלת של $X$ מסומנת $E(X)$. בגדול התוחלת היא הממוצע המשוקלל של הערכים, כאשר המשקל של כל ערך הוא ההסתברות שלו. כלומר:

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k)$$

למשל, במקרה בו $X$ הוא מה שמתאר את מספר הפעמים שיצא עץ בהטלת מטבע 3 פעמים, התוחלת היא:

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

## תכונות של תוחלת

א) התוחלת היא לינארית, כלומר אם $X_1, X_2$ משתנים ו- $a, b$ קבועים, אז:

$$E(aX_1 + bX_2) = a \cdot E(X_1) + b \cdot E(X_2)$$

ב) התוחלת של מספר קבוע שווה לעצמו: $E(a) = a$

הוכחה:

$$E(a) = \sum_k aP(X=k) = a \underbrace{\sum_k P(X=k)}_{\text{סכום ההסתברויות שווה ל- 1}} = a \cdot 1 = a$$

ג) אם $X, Y$ מ"מ אז: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

ד) אם $X, Y$ מ"מ בלתי תלויים אז: $E(XY) = E(X)E(Y)$