השלמה הרצאה 2

תרגיל:

יש לנו מטבעות של 2 שקלים ושל 3 שקלים. הראו שניתן לשלם איתם כל סכום שהוא גדול שווה מ-2.

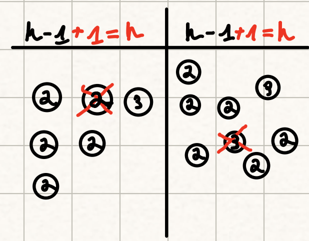
טענה: כל מספר $n\ge 2$ אפשר לרשום כסכום של מחוברים 2 ו/או 3.

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $n=2$ אפשר לרשום עם מחובר בודד $=2$ ✓

נניח שנכונות הטענה עבור $n-1$ גוררת את נכונות הטענה עבור n.

הנחת האינדוקציה: כל מספר $n-1$ אפשר לרשום כסכום של מחוברים 2 ו/או 3.



אם בפתרון ל-$n-1$ השתמשנו במטבע של 3 אז נוריד 3 ונוסיף 2 מטבעות של 2 ובכך נגיע ל-n. אחרת, השתמשנו עבור $n-1$ רק במטבעות של 2, והשתמשנו לפחות במטבע אחד של 2 (כי $n-1\ge 2$) אז נוריד מטבע של 2 ונחליף אותו במטבע של 3, ובכך נגיע ל-n. ולכן אפשר לשלם כל סכום ≥ 2 עם מטבעות של 2 ו/או 3.

תרגיל:

טענה: $n^2<2^n$ לכל $n\ge 5$.

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: עבור $n=5$: $5^2<2^5$

$25<32$ ✓

הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$ כלומר מתקיים $(n-1)^2<2^{n-1}$.

נראה שהטענה מתקיימת גם עבור n כלומר $n^2<2^n$:

$$(n-1)^2<2^{n-1} \quad /\cdot 2$$

$$2(n-1)^2<2\cdot 2^{n-1}$$

$$2(n-1)^2<2^n$$

$$n^2\le 2(n-1)^2<2^n \longleftarrow \text{צריך להראות}$$

$$n^2<2(n-1)^2$$

$$n^2<2(n^2-2n+1)$$

$$n^2<2n^2-4n+2$$

$$n^2-4n+2\ge 0 \longrightarrow (n-\sqrt2)(n-2\sqrt2)\ge 0$$

$n<\sqrt2$, $n\ge 2\sqrt2$

$\Downarrow$

מתקיים לכל $n\ge 5$.

$$n^2<2(n-1)^2<2^n$$

$$\Downarrow$$

$$n^2<2^n \ ✓$$

עיקרון אינדוקציה מתמטית מלאה

תהי $P(n)$ טענה שתלויה במספר הטבעי n, אם קיים מספר $a\in\mathbb{N}$ כך שמתקיימים 2 התנאים:

1. בסיס האינדוקציה: הטענה $P(a)$ נכונה.
2. צעד: לכל $n>a$, נכונות הטענה לכל $a<k\le n-1$ גוררת את נכונות הטענה עבור $P(n)$.

אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n\ge a$.

תרגיל:

הסדרה a_n מוגדרת בצורה הבאה:

נתון
$$\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_2 = 79 \\ a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2} \end{cases}$$

הוכיחו: $a_n = 3\cdot 5^n + (-2)^n$

נוכיח באינדוקציה מלאה:

בסיס:
$$a_1 = 3\cdot 5^1 + (-2)^1 = 13 \quad \checkmark$$
$$a_2 = 3\cdot 5^2 + (-2)^2 = 79$$

צעד: נניח שהנוסחה נכונה עבור ערכים קטנים מ- n ונוכיח את נכונות הנוסחה עבור n.

נניח שמתקיים
$$a_{n-1} = 3\cdot 5^{n-1} + (-2)^{n-1}$$
$$a_{n-2} = 3\cdot 5^{n-2} + (-2)^{n-2}$$

נתון:
$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}$$
$$a_n = 3\left(3\cdot 5^{n-1} + (-2)^{n-1}\right) + 10\left(3\cdot 5^{n-2} + (-2)^{n-2}\right)$$
$$a_n = 9\cdot 5^{n-1} + 3\cdot(-2)^{n-1} + 30\cdot 5^{n-2} + 10(-2)^{n-2}$$
$$a_n = 9\cdot 5^{n-1} + 3(-2)^{n-1} + 6\cdot 5^1\cdot 5^{n-2} + 10(-2)^{n-2}$$
$$a_n = 9\cdot 5^{n-1} + 3(-2)^{n-1} + 6\cdot 5^{n-1} + 10(-2)^{n-2}$$
$$a_n = 15\cdot 5^{n-1} + 3(-2)^{n-1} + 5\cdot 2\cdot(-2)^{n-2}$$
$$a_n = 15\cdot 5^{n-1} + 3(-2)^{n-1} + (-5)\cdot(-2)\cdot(-2)^{n-2}$$
$$a_n = 15\cdot 5^{n-1} + 3(-2)^{n-1} + (-5)\cdot(-2)^{n-1}$$
$$a_n = 15\cdot 5^{n-1} - 2(-2)^{n-1}$$
$$a_n = 5^1\cdot 5^{n-1}\cdot 3 - 2\cdot(-2)^{n-1}\cdot 1$$
$$a_n = 3\cdot 5^n - (2)^n$$

ולכן הנוסחה נכונה לכל $n \geq 1$.

נחזור לתורת הקבוצות:

הגדרה: נאמר כי A תת קבוצה של B אם כל איברי A הם גם איברי B.

$A \subseteq B$ סימון של A תת קבוצה של B.

תרגיל: כמה תתי קבוצות יש לקבוצה סופית בגודל n

מספר תתי קבוצות	תתי קבוצות	כמה איברים	קבוצה
1	$\emptyset$	0	$\emptyset$
2	$\emptyset \quad \{1\}$	1	$\{1\}$
4	$\emptyset\ \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$	2	$\{1,2\}$
8	$\emptyset\ \{1\}\ \{2\}\ \{3\}$ $\{1,2\}\ \{1,3\}, \{2,3\}$ $\{1,2,3\}$	3	$\{1,2,3\}$

טענה: 2^n = מספר תתי הקבוצות לקבוצה A בגודל n.

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $n=0$ מספר תתי הקבוצות של הקבוצה הריקה הוא $2^0=1$ כלומר $\emptyset \subseteq \emptyset$.

צעד: נניח שנכונות הטענה עבור $n-1$ גוררת את נכונות הטענה עבור n.

הנחת האינדוקציה:

$$\{1,2,\ldots,n-1\}$$

מס תתי הקבוצות לקבוצה זו $= 2^{n-1}$

נוכיח שלקבוצה $A=\{1,\ldots,n-1,n\}$ יש 2^n תתי קבוצות.

נוכיח שלקבוצה $A=\{1,2,\ldots,n-1,n\}$ יש 2^n תתי קבוצות

יש 2^{n-1} תתי קבוצות שלא מכילות את n (מהנחת האינדוקציה).

אם כן, כמה תתי קבוצות כן מכילות את n?

נחלק ל-2 את תתי הקבוצות של A: או שהאיבר ה-n שייך לקבוצה או שלא.

מספר כל הקבוצות ש-n לא שייך אליהם $= 2^{n-1}$.

ואם נוסיף לכל קבוצה כזו את האיבר ה-n אז נקבל את כל הקבוצות המכילות את n.

כמה קבוצות כאלה יש? 2^{n-1}.

אז בסה"כ יש: $\underbrace{2^{n-1}}_{\text{תתי קב' בלי A}}+\underbrace{2^{n-1}}_{\text{תתי קב' עם n}}=\underbrace{2^n}_{\text{תתי קב' ל-A}}$

הגדרה רקורסיבית של קבוצה:

① נגדיר תת קבוצה של הקבוצה אותה אנו רוצים להגדיר.

② נגדיר איברים נוספים לקבוצה באמצעות איברים שכבר נמצאים בקבוצה.

דוגמאות:

(א) קבוצת המספרים הזוגיים האי שליליים = A

1. $0\in A$
2. אם $a\in A$, אז $a+2\in A$.

(ב) קבוצת מספרים טבעיים = A

1. $1\in A$
2. אם $a\in A$ אז $a+1\in A$.

(ג) $A=\{2^n \mid n\geq 0\}$

1. $1\in A$
2. אם $a\in A$ אז $2a\in A$.