פרק 7: מרחבי עמודה, שורה ופתרונות של מטריצות

עבור מטריצה $A\in F^{m\times n}$ מוגדרים שלושה מרחבים עיקריים:

1. מרחב השורות של מטריצה - המרחב הנפרש ע"י שורות המטריצה: $R(A)=span\{R_1(A),\dots,R_m(A)\}\subseteq F^n$
   לפי תכונות כפל מטריצות, ניתן לתאר מרחב זה גם כווקטורים מהצורה $\{A^t v \mid v\in F^m\}$
2. מרחב העמודות של מטריצה - המרחב הנפרש ע"י עמודות המטריצה: $C(A)=span\{C_1(A),\dots,C_n(A)\}$
   לפי תכונות כפל מטריצות, ניתן לתאר מרחב זה גם כווקטורים מהצורה $\{Av \mid v\in F^n\}$
3. מרחב האפס (הפתרונות) של מטריצה - זהו מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax=0$ ונסמן אותו $N(A)=\{x\in F^n \mid Ax=0\}$

הגדרה: דרגת המטריצה A שווה למספר השורות השונות מאפס בצורה המדורגת שלה, ומספר זה מסומן כ- $rank(A)$.

משפט: $rank(A)=\dim R(A)=\dim C(A)=n-\dim N(A)$

כלומר דרגת המטריצה שווה למספר המשתנים התלויים בעוד מרחב הפתרונות שווה למספר המשתנים החופשיים!

אלגוריתם למציאת מרחבי העמודה, השורה והפתרונות של מטריצה

1. נדרג את המטריצה לצורה קנונית.
2. השורות השונות מאפס בצורה המדורגת הן בסיס למרחב העמודות.
3. העמודות במטריצה המקורית שבהן יש איבר מוביל בצורה המדורגת הן בסיס למרחב העמודות.
4. נציב פרמטרים במקום המשתנים החופשיים.
5. נמצא פתרון כללי בעזרת הפרמטרים החופשיים.
6. נפרק את הפתרון הכללי לצירוף ליניארי של וקטורים קבועים מוכפלים בפרמטרים.
7. הוקטורים הקבועים מהווים בסיס למרחב הפתרונות.

דוגמה 1:

מצאו בסיס למרחב השורות, העמודות והפתרונות של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&3\\1&1&0&2\end{pmatrix}$

ראשית נדרג את המטריצה לצורה קנונית

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\2&1&1&3\\1&1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

המימד של מרחב השורות הוא מספר השורות ששונות מאפס כלומר $\dim R(A)=2$

נמצא את הבסיס של מרחב השורות:

מרחב השורות של המטריצה המקורית נפרש ע"י השורות השונות מ-0 בצורה המדורגת כלומר $R(A)=span\{(1,0,1,1),(0,1,-1,1)\}$

נמצא את הבסיס של מרחב העמודות:

רואים כי במטריצה שהתקבלה אחרי הדירוג, איברים פותחים מופיעים בעמודה הראשונה והשנייה ולכן העמודות הראשונה והשנייה במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודה. כלומר: $C(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

נמצא בסיס למרחב הפתרונות (האפס):

נדרג את המטריצה וקיבלנו שהמשתנים השלישי והרביעי חופשיים. נציב במקומם פרמטרים s,t:

$$N(A)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}:\ \begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}x_1+x_3+x_4=0\Rightarrow x_1=-x_3-x_4\\ x_2-x_3+x_4=0\Rightarrow x_2=x_3-x_4\end{matrix}$$

חופשיים

$x_3,x_4\in\mathbb{R}$

נסמן $x_3=t$ ו- $x_4=s$ ולכן הפתרון הכללי הוא: $(-t-s,\ t-s,\ t,\ s)$

נוכל לרשום זאת כך:

$$t(-1,1,1,0)+s(-1,-1,0,1)$$

והגענו למצב שיש לנו כאן 2 וקטורים קבועים שאנחנו כופלים אותם בפרמטר ולכן:

בסיס של מרחב הפתרונות: $N(A) = \text{span}\{(-1,1,1,0),(-1,-1,0,1)\}$