

Laboratorio di Calcolo Numerico

Quadratura numerica

Ángeles Martínez Calomardo

[http://www.math.unipd.it/~acalomar/DIDATTICA/
angeles.martinez@unipd.it](http://www.math.unipd.it/~acalomar/DIDATTICA/angeles.martinez@unipd.it)

Laurea in Informatica
A.A. 2018–2019

Quadratura numerica

Il problema della quadratura numerica consiste nell'approssimare l'*integrale definito* di una funzione f in un intervallo avente estremi di integrazione a, b cioè

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx$$

con

$$I_{n+1}(f) := \sum_{k=0}^n w_k f(x_k)$$

I termini w_i e $x_i \in [a, b]$ sono detti rispettivamente **pesi** e **nodi**.

NOTA BENE: $n + 1$ è il numero di nodi.

Definizione Se $I(p_r) = I_n(p_r)$ per ogni polinomio p_r di grado r , ed esiste un polinomio q di grado $r + 1$ per cui si abbia $I(q) \neq I_n(q)$ allora si dice che la formula ha **grado di precisione** r .

Formule di Newton-Cotes

Formule semplici

Si supponga $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} .

Le *regole* di tipo *Newton-Cotes* si ottengono integrando l'interpolante di f , $P_n(x)$, calcolato su $n + 1$ nodi equispaziati con passo $h = \frac{(b-a)}{n}$

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n.$$

$$I(f) \approx \int_a^b P_n(x) \, dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

Esempi:

- $n=1$, **Formula del trapezio**, **g.d.p.=1**: $I(f) \approx I_T(f) := \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$
- $n=2$, **Formula di Cavalieri-Simpson**, **g.d.p.=3**:
 $I(f) \approx I_S(f) := \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$

Formule di Newton-Cotes

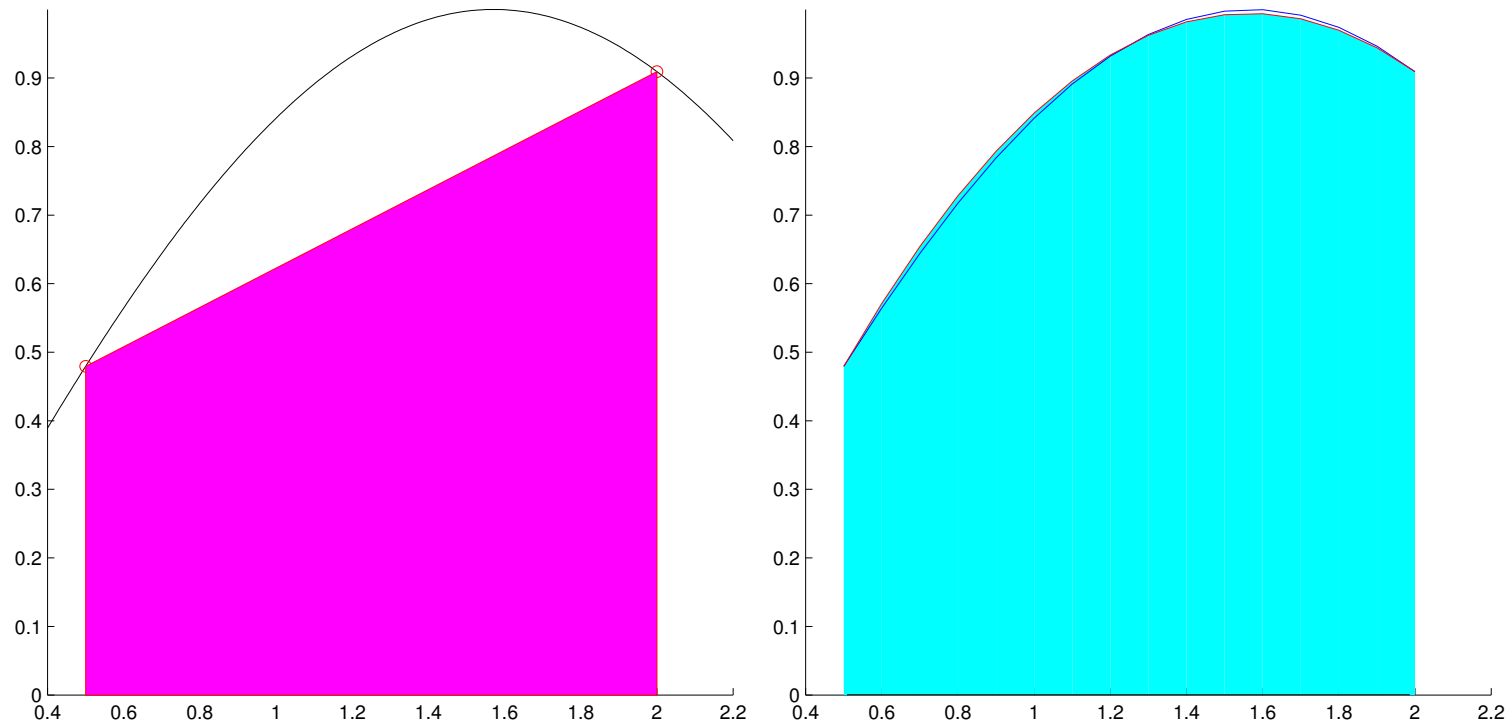


Figura: Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

Errori formule di Newton-Cotes

Formule semplici

Denotiamo con \mathbb{P}_k lo spazio dei polinomi di grado k . Valgono le seguenti formule d'errore:

- **Formula del trapezio**, g.d.p.=1:

$$E_T(f) := I(f) - I_T(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi) \quad \text{per qualche } \xi \in (a,b)$$

- **Formula di Cavalieri-Simpson**, g.d.p.=3:

$$E_S(f) := I(f) - I_S(f) = \frac{-(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \text{per qualche } \xi \in (a,b)$$

Si noti il legame tra l'ordine di derivata che compare nella formule dell'errore e il grado di precisione (g.d.p.) della formula:

- nel caso della formula dei trapezi, se $f \in \mathbb{P}_2$, allora potrebbe essere $f^{(2)}(\xi) \neq 0$, mentre se $f \in \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) = 0$;
- nel caso della formula di Cavalieri-Simpson, se $f \in \mathbb{P}_4$, allora potrebbe essere $f^{(4)}(\xi) \neq 0$, mentre se $f \in \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) = 0$.

Formule di Newton-Cotes composte

Si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in N **subintervalli** $T_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, \dots, N$, definiti dagli $N + 1$ punti equidistanti $x_i = a + ih$ con $h = (b - a)/N$, e $i = 0, \dots, N$, dove $a = x_0$ e $b = x_N$,

e si calcola l'integrale su $[a, b]$ come **somma degli integrali su tali subintervalli**:

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) \, dx = \int_a^{x_1} f(x) \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) \, dx.$$

Su ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, per $k = 1, \dots, N$, approssimiamo l'integrale della f mediante la formula di quadratura SEMPLICE (Trapezi o Simpson).

Formule di Newton-Cotes

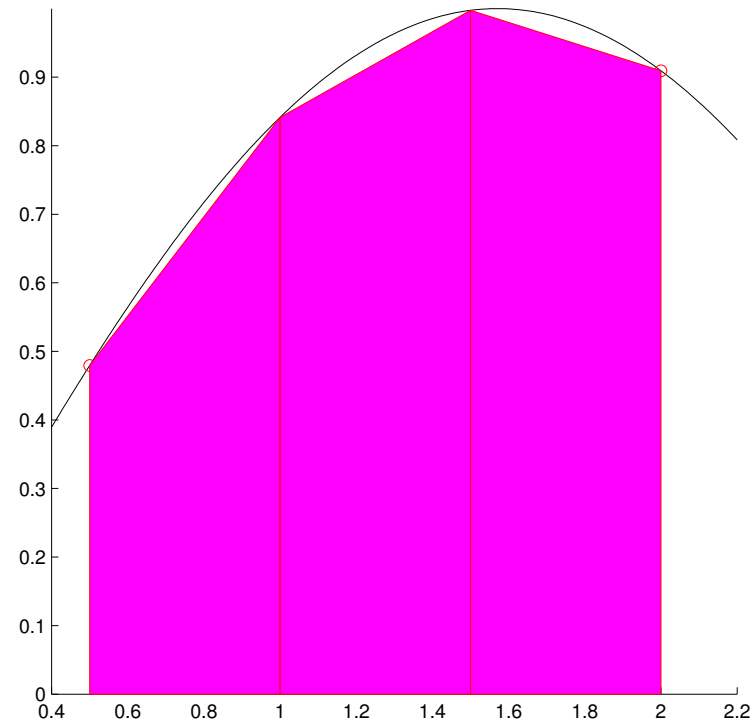


Figura: Formula dei trapezi composta $\int_{0.5}^2 \sin(x) dx$.

Formula dei trapezi composta

Fissati

- il numero N di applicazioni della formula semplice, con $N = m$, e
- $m+1$ punti $x_i = a + ih$, con $i = 0, \dots, m$, dove $h = \frac{b-a}{m}$ è la separazione tra punti

la **Formula composta dei trapezi** è definita da

$$I_T^{(C)} := h \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2} \right] \quad (1)$$

L'errore che si commette usando questa formula è :

$$E_T^{(C)}(f) := I(f) - I_T^{(C)}(f) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

per qualche $\xi \in (a, b)$;

IMPORTANTE: L'ordine di accuratezza della formula dei Trapezi composta è pari a 2, perchè l'errore tende a 0, per $h \rightarrow 0$ come h^2 .

Formula trapezi composta

Implementazione in MATLAB/OCTAVE

La funzione `trapezi_composta` calcola i nodi e i pesi della omonima formula composta

$$I_T^{(C)} := h \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right]$$

e restituisce il valore approssimato dell'integrale.

```
function [x,w,ltrap]=trapezi_composta(N,a,b,f)

h=(b-a)/N;                                % PASSO INTEGRAZIONE.
x=a:h:b;  x=x';                            % NODI INTEGRAZIONE.
w=ones(N+1,1);                             % PESI INTEGRAZIONE.
w(1)=0.5;  w(N+1)=0.5;
w=w*h;

fx=feval(f,x);                            % VALUTAZIONE DELLA FUNZIONE NEI NODI
ltrap=w'*fx;                              % VALORE APPROSSIMATO DALLA FORMULA
end
```

Formula trapezi composta

Esempio

Se vogliamo approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^1 x^{20} dx$$

con la Formula dei Trapezi composta possiamo usare le istruzioni poste all'interno dello script [demotrapezi.m](#) che per $N = 501$ restituisce:

```
>> demotrapezi  
ltrap = 0.095291211051609  
  
valore vero dell'integrale definito  
lvero = 0.095238095238095  
  
Errore relativo  
Etrap = 5.577160418947999e-04
```

Formula di Cavalieri-Simpson composta

Fissati:

- il numero N di applicazioni della formula semplice ($N = \frac{m}{2}$, e quindi m **PARI**),
e
- $m + 1$ punti $x_i = a + ih$ con $i = 0, \dots, 2N = m$, dove $h = \frac{b-a}{m}$

la **Formula composta di Cavalieri-Simpson** è:

$$I(f) \approx I_S^{(C)}(f) = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + f(x_{2N}) \right] \quad (2)$$

L'errore che si commette usando questa formula è :

$$E_3^{(C)}(f) := I(f) - I_S^{(C)}(f) = \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

per qualche $\xi \in (a, b)$.

IMPORTANTE: L'ordine di accuratezza della formula di Cavalieri-Simpson composta è pari a 4, perchè l'errore tende a 0, per $h \rightarrow 0$ come h^4 .

Formula Cavalieri-Simpson composta

Implementazione in MATLAB/OCTAVE

Per scrivere la funzione `simpson_composta` che implementa la formula di quadratura appena esposta

$$I(f) \approx I_S^{(C)}(f) = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + 2 \sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + f(x_{2N}) \right]$$

occorre considerare che:

- Il numero di applicazioni della formula è pari a N .
- $h = \frac{b-a}{2N}$.
- Il numero di nodi che usa la formula è pari a $2N + 1 = m + 1$.

Ad esempio, per $N = 4$

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_{c_1} & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_{c_2} & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & x_{c_3} & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & x_{c_4} & x_4 \end{bmatrix}$$

dove gli x_{ci} , $i = 1, \dots, 4$ sono i punti medi degli $N = 4$ subintervalli.

- Per calcolare i **pesi** si possono usare le seguenti istruzioni:

```
w=ones(2*N+1,1);  
w(2:2:2*N,1)=4;  
w(3:2:2*N-1,1)=2;  
w=w*h/3;
```

Esempio 1

Vogliamo approssimare l'integrale $\int_{-1}^1 x^{20} dx = 2/21 \approx 0.09523809523810$ tramite le formule composte dei trapezi e Cavalieri-Simpson. Perchè il paragone sia veritiero, decidiamo che il numero di nodi e quindi di valutazioni della funzione integranda sia uguale per entrambe le formule. Scriviamo l'M-file

`democomposte.m`

```
f=@(x) x.^20;
a=-1; b=1;
Ivero=2/21; % Valore vero dell'integrale
fprintf('\n %8s %15s %16s %15s %18s ', 'NODI', 'I_TRAP', ...
'ERR. REL', 'I_SIMPSON', 'ERR. REL' );
nval=11; % Numero di nodi
% NUMERO SUBINTERVALLI PER TRAPEZI COMPOSTA.
m=nval-1;
N_trap=m
[x_trap, w_trap, I_trap]=trapezi_composta(N_trap, a, b, f);
% NUMERO SUBINTERVALLI PER CAV.SIMPSON COMPOSTA.
N_simpson=m/2;
[x_simp, w_simp, I_simp]=simpson_composta(N_simpson, a, b, f);
% CALCOLO DEGLI ERRORI ASSOLUTI
E_trap = abs(Ivero - I_trap);
E_simp = abs(Ivero - I_simp);
% STAMPA DEI VALORI APPROSSIMATI E DEGLI ERRORI RELATIVI!
fprintf(' \n %7d %20.14f %12.3E %18.14f %13.3E', nval, I_trap, E_trap/Ivero,
I_simp, E_simp/Ivero);
fprintf(' \n');
```

Esempio 1

Sapendo che il valore vero dell'integrale definito è $\frac{2}{21}$ circa 0.09523809523810, otteniamo i seguenti risultati, per un numero di valutazioni della funzione integranda pari a 11, 51, 101, 301 e 501:

NODI	I_TRAP	ERR. REL	I_SIMPSON	ERR. REL
11	0.20462631505024	1.149E+00	0.13949200364447	4.647E-01
51	0.10052328836742	5.549E-02	0.09542292188917	1.941E-03
101	0.09656839642996	1.397E-02	0.09525009911748	1.260E-04
301	0.09538620586618	1.555E-03	0.09523824514571	1.574E-06
501	0.09529142370793	5.599E-04	0.09523811468402	2.042E-07

Esercizio Proposto 1

Si vuole approssimare il seguente integrale definito:

$$\int_1^3 \exp(x-2) \cdot \sin(x) dx$$

- 1 Si calcoli la soluzione “vera” I utilizzando il comando `quad` di MATLAB/OCTAVE con tolleranza $1e-14$.
- 2 Si calcolino i valori approssimati I_TRAP dell’integrale con la formula dei trapezi composta utilizzando un numero di nodi pari a `nval= 11:10:201`. Per ogni valore si calcoli l’errore assoluto $\varepsilon^{(trap)} = |I - I_TRAP|$ e quello relativo $\varepsilon_R^{(trap)}$.
- 3 Si calcolino i valori approssimati I_SIMP dell’integrale con la formula di Cavalieri-Simpson composta utilizzando lo stesso numero di nodi usato per la formula dei Trapezi. Per ogni valore si calcoli l’errore assoluto $\varepsilon^{(simp)} = |I - I_SIMP|$ e quello relativo $\varepsilon_R^{(simp)}$.
- 4 Si produca una tabella (prima a video e poi in maniera definitiva sul file `tabproposto1.ris` che riporti per ciascun valore di `nval`:

$nval$	I_TRAP	$\varepsilon_R^{(trap)}$	I_SIMP	$\varepsilon_R^{(simp)}$
--------	-----------	--------------------------	-----------	--------------------------

Esercizio 1 seconda parte

Grafici dell'errore

- 1 Si modifichi lo script precedente in modo che gli errori relativi commessi per ogni numero di nodi (`nval`) e per entrambi i metodi vengano salvati in due vettori chiamati rispettivamente: `err_rel_t` e `err_rel_s`;
- 2 Usando i vettori precedenti si faccia un grafico logaritmico (con il comando `loglog`) degli errori relativi in funzione del numero di punti `nval` (una curva per ogni metodo, ma le due curve nella stessa finestra grafica).
- 3 Per verificare l'ordine di accuratezza delle formule composte di trapezi e di Cavalieri-Simpson, si faccia in una seconda finestra grafica (`figure(2)`) un grafico logaritmico degli errori relativi in funzione, questa volta, di h (ampiezza dei subintervalli). Si confrontino le rette ottenute nello stesso grafico con il plot delle funzioni h^2 e h^4 (grafico risultante come figura 3).

Ordine di accuratezza

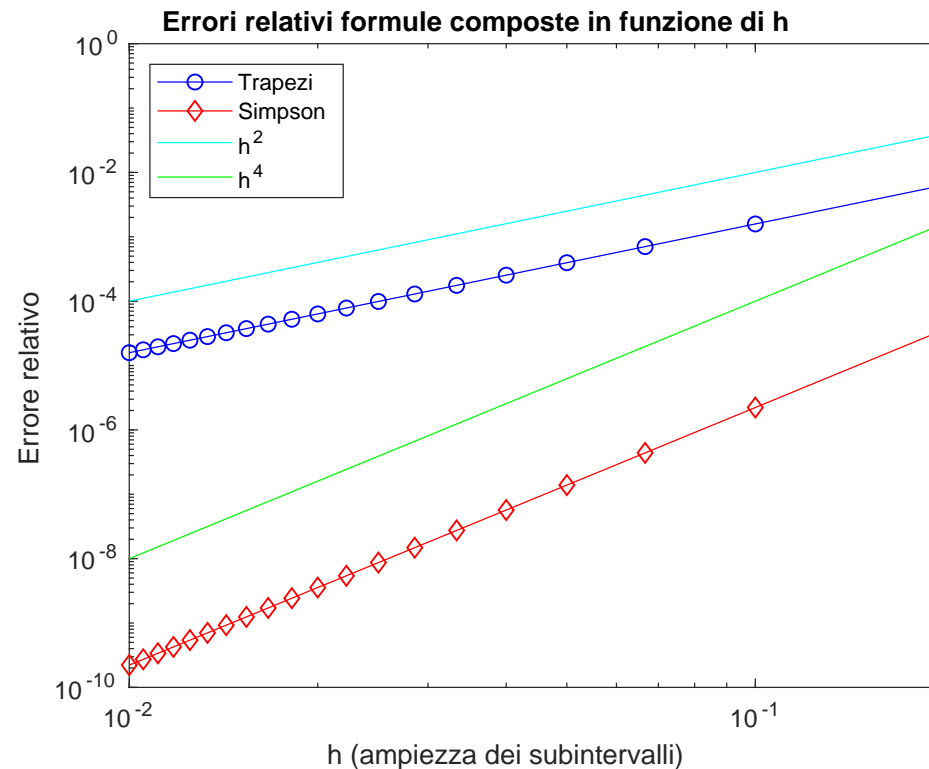


Figura: 3. Grafico logaritmico degli errori relativi in funzione di h (ampiezza dei subintervalli) fissato lo stesso numero di valutazioni della funzione integranda.

Esercizio proposto 2

Si studi il rapporto tra gli errori assoluti commessi con le regole di Trapezi e Cavalieri-Simpson per l'approssimazione dell'integrale

$$I = \int_1^4 \exp(x-2) \cdot \sin(\sqrt{x}) dx$$

raddoppiando ogni volta il NUMERO DI APPLICAZIONI DELLA FORMULA, N , da 2 fino a 512. Si usino le istruzioni:

```
vet=[1:9]; n=length(vet);  
NSUB=2.^vet; % numero di subintervalli  
for k=NSUB  
    ....  
end
```

Si scrivano a video i rapporti $\frac{E_N(f)}{E_{2N}(f)}$, dove $E_N(f) = |I - I_N|$, calcolati mediante le istruzioni:

```
rappt=err_t(1:n-1)./err_t(2:n)  
rapps=err_s(1:n-1)./err_s(2:n)
```

Si spieghi, a partire dalla formula dell'errore, perchè tali rapporti tendono a 4 e 16 rispettivamente.

Si ripeta l'esercizio cambiando l'intervallo di integrazione in $[0, 1]$. Che cosa si osserva? Perché?

Esercizio proposto 3

Si descriva come decresce l'errore assoluto commesso con la Formula dei Trapezi per l'approssimazione dell'integrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(\cos(x)) dx$$

raddoppiando ogni volta il NUMERO DI SUBINTERVALLI usati, m , da 2 fino a 512. Si descriva inoltre l'andamento dei rapporti $\frac{E_m(f)}{E_{2m}(f)}$ dove $E_m(f) = |I - I_m|$. Si scrivano a video i rapporti ottenuti mediante l'istruzione:

```
rappt=err_t(1:m-1)./err_t(2:m)
```

MOLTO IMPORTANTE:

Si ripeta l'esercizio cambiando l'intervallo di integrazione in $[-\pi, \pi]$.

Che cosa si osserva? Come si confronta l'errore ottenuto con ogni numero di suddivisioni con la maggiorazione corrispondente ottenuta dalla formula dell'errore? Si provi a dare una spiegazione del comportamento osservato.