Laboratorio di Calcolo Numerico

Quadratura numerica

Ángeles Martínez Calomardo
http://www.math.unipd.it/~acalomar/DIDATTICA/
angeles.martinez@unipd.it

Laurea in Informatica
A.A. 2018–2019

Quadratura numerica

Il problema della quadratura numerica consiste nell'approssimare l'*integrale definito* di una funzione f in un intervallo avente estremi di integrazione a, b cioè

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx$$

con

se metto i pesi in un vettore ed i nodi in un altro, questa for

$$I_{n+1}(f) := \sum_{k=0}^{n} w_i f(x_i)$$

formula di quadratura

la scelta dei pesi determina la formula di quadratura

I termini w_i e $x_i \in [a,b]$ sono detti rispettivamente pesi e nodi.
NOTA BENE: $n+1$ è il numero di nodi.

Definizione Se $I(p_r) = I_n(p_r)$ per ogni polinomio p_r di grado r, ed esiste un polinomio q di grado $r+1$ per cui si abbia $I(q) \neq I_n(q)$ allora si dice che la formula ha grado di precisione r.

grado di precisione: dice quale puo' essere il grado massimo di polinomi che possono essere integrati esattamente (con "precisione") nella formula.

Formule di Newton-Cotes

Formule semplici

Si supponga $[a,b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Si sostituisce la funzione integranda con il suo interpolante di grado n

Le *regole* di tipo *Newton-Cotes* si ottengono integrando l'interpolante di f, $P_n(x)$, calcolato su $n+1$ nodi equispaziati con passo $h = \dfrac{(b-a)}{n}$

$$x_k = a + kh, \ k = 0, \dots, n.$$

$$I(f) \approx \int_a^b P_n(x)\ dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

Esempi:

g.d.p = grado di precisione

- n=1, Formula del trapezio, g.d.p.=1: $I(f) \approx I_T(f) := \frac{(b-a)\,(f(a)+f(b))}{2}$

formula per base trapez

- n=2, Formula di Cavalieri-Simpson, g.d.p.=3:
  $I(f) \approx I_S(f) := \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right]$

pesi

Formule di Newton-Cotes

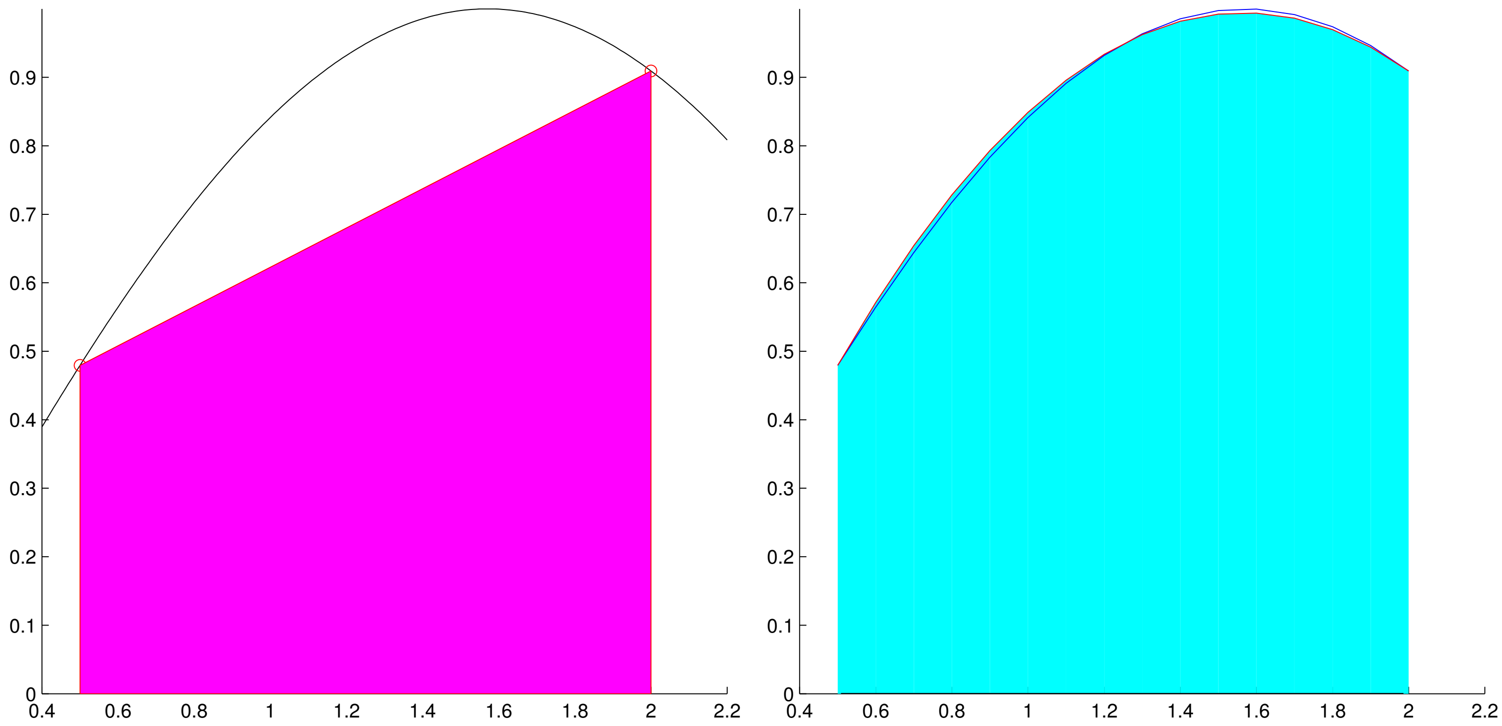

Figura: Regola del trapezio e di Cavalieri-Simpson per il calcolo di $\int_{0.5}^{2} \sin(x)\,dx$ (rispettivamente area in magenta e in azzurro).

Errori formule di Newton-Cotes

Formule semplici

Denotiamo con $\mathbb{P}_k$ lo spazio dei polinomi di grado k. Valgono le seguenti formule d'errore:

- Formula del trapezio, g.d.p.=1:

derivata seconda

$$E_T(f) := I(f) - I_T(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi) \quad \text{per qualche} \quad \xi \in (a,b)$$

val vero - approssimato

- Formula di Cavalieri-Simpson, g.d.p.=3:

$$E_S(f) := I(f) - I_S(f) = \frac{-(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi), \quad \text{per qualche} \quad \xi \in (a,b)$$

Si noti il legame tra l'ordine di derivata che compare nella formule dell'errore e il grado di precisione (g.d.p.) della formula:

- nel caso della formula dei trapezi, se $f \in \mathbb{P}_2$, allora potrebbe essere $f^{(2)}(\xi) \neq 0$, mentre se $f \in \mathbb{P}_1$, allora $f^{(2)}(\xi) = 0$;
- nel caso della formula di Cavalieri-Simpson, se $f \in \mathbb{P}_4$, allora potrebbe essere $f^{(4)}(\xi) \neq 0$, mentre se $f \in \mathbb{P}_3$, allora $f^{(4)}(\xi) = 0$.

Formule di Newton-Cotes composte

Le formula nel lucido sopra non convergono a 0, l'unico modo

#volte per cui si applichera' la formula semplice.

Si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in N subintervalli $T_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, \ldots, N$, definiti dagli $N+1$ punti equidistanti $x_i = a + ih$ con $h = (b-a)/N$, e $i = 0, \ldots, N$, dove $a = x_0$ e $b = x_N$,

e si calcola l'integrale su $[a, b]$ come somma degli integrali su tali subintervalli:

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x)\, dx \quad = \quad \int_a^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\, dx.$$

Su ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, per $k = 1, \ldots, N$, approssimiamo l'integrale della f mediante la formula di quadratura SEMPLICE (Trapezi o Simpson).

Formule di Newton-Cotes

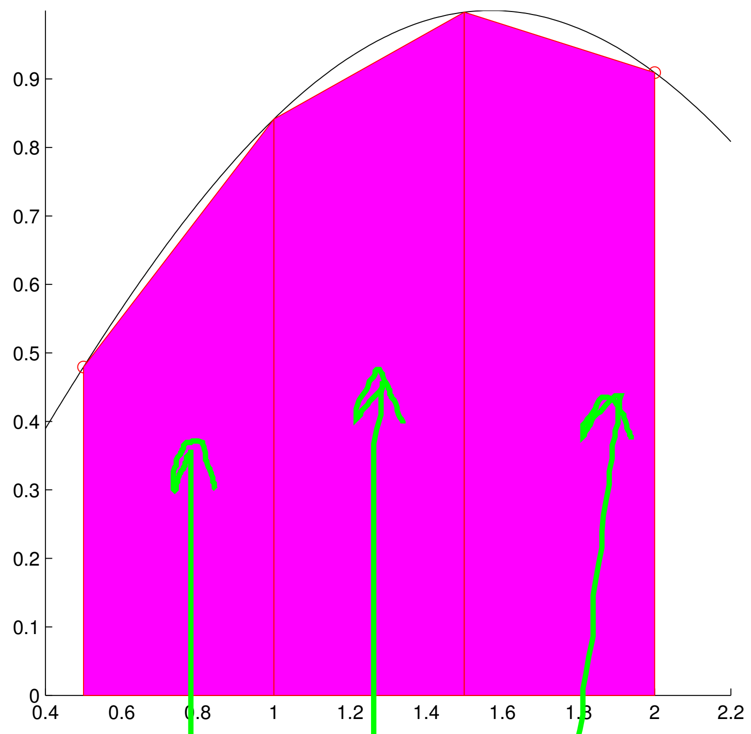

Figura: Formula dei trapezi composta $\int_{0.5}^{2} \sin(x)\, dx$.

applica la formula semplice

Formula dei trapezi composta

Fissati

- il numero N di applicazioni della formula semplice, con $N = m$, e
- m+1 punti $x_i = a + ih$, con $i = 0, \dots, m$, dove $h = \dfrac{b-a}{m}$ è la separazione tra punti

la Formula composta dei trapezi è definita da

$$I_T^{(C)} := h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right] \tag{1}$$

L'errore che si commette usando questa formula è :

$$E_T^{(C)}(f) := I(f) - I_T^{(C)}(f) = \frac{-(b-a)}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

per qualche $\xi \in (a,b)$;
IMPORTANTE: L'ordine di accuratezza della formula dei Trapezi composta è pari a 2, perchè l'errore tende a 0, per $h \to 0$ come h^2.

Formula trapezi composta

Implementazione in MATLAB/OCTAVE

La funzione `trapezi_composta` calcola i nodi e i pesi della omonima formula composta

$$I_T^{(C)} := h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2}\right]$$

e restituisce il valore approssimato dell'integrale.

Per trapezi N coincide con il numero di p

```
function [x,w,Itrap]=trapezi_composta(N,a,b,f)

h=(b-a)/N;                    % PASSO INTEGRAZIONE.
x=a:h:b; x=x';                % NODI INTEGRAZIONE.
w=ones(N+1,1);                % PESI INTEGRAZIONE.
w(1)=0.5; w(N+1)=0.5;
w=w*h;

fx=feval(f,x);                % VALUTAZIONE DELLA FUNZIONE NEI NODI
Itrap=w'*fx;                  % VALORE APPROSSIMATO DALLA FORMULA
end
```

Formula trapezi composta

Esempio

Se vogliamo approssimare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} x^{20} dx$$

con la Formula dei Trapezi composta possiamo usare le istruzioni poste all'interno dello script `demotrapezi.m` che per $N = 501$ restituisce:

```
>> demotrapezi
Itrap = 0.095291211051609

valore vero dell'integrale definito
Ivero = 0.095238095238095

Errore relativo
Etrap = 5.577160418947999e-04
```

Formula di Cavalieri-Simpson composta

Fissati:

- il numero N di applicazioni della formula semplice ($N = \frac{m}{2}$, e quindi m **PARI**), e
- $m+1$ punti $x_i = a + ih$ con $i = 0, \ldots, 2N = m$, dove $h = \frac{b-a}{m}$

la Formula composta di Cavalieri-Simpson è:

$$I(f) \approx I_S^{(C)}(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + 2\sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + f(x_{2N})\right] \qquad (2)$$

L'errore che si commette usando questa formula è :

$$E_3^{(C)}(f) := I(f) - I_S^{(C)}(f) = \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

per qualche $\xi \in (a,b)$.
IMPORTANTE: L'ordine di accuratezza della formula di Cavalieri-Simpson composta è pari a 4, perchè l'errore tende a 0, per $h \to 0$ come h^4.

Formula Cavalieri-Simpson composta

Implementazione in MATLAB/OCTAVE

Per scrivere la funzione `simpson_composta` che implementa la formula di quadratura appena esposta

$$I(f) \approx I_S^{(C)}(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{s=0}^{N-1} f(x_{2s+1}) + 2\sum_{r=1}^{N-1} f(x_{2r}) + f(x_{2N})\right]$$

occorre considerare che:

- Il numero di applicazioni della formula è pari a N.
- $h = \frac{b-a}{2N}$.
- Il numero di nodi che usa la formula è pari a $2N+1 = m+1$.
  Ad esempio, per $N = 4$

  $$[x_0 \quad x_{c_1} \quad x_1]\,[x_1 \quad x_{c_2} \quad x_2]\,[x_2 \quad x_{c_3} \quad x_3]\,[x_3 \quad x_{c_4} \quad x_4]$$

  dove gli x_{ci}, $i = 1,\ldots,4$ sono i punti medi degli $N = 4$ subintervalli.
- Per calcolare i **pesi** si possono usare le seguenti istruzioni:

```
w=ones(2*N+1,1);
w(2:2:2*N,1)=4;
w(3:2:2*N-1,1)=2;
w=w*h/3;
```

Esempio 1

Vogliamo approssimare l'integrale $\int_{-1}^{1} x^{20} dx = 2/21 \approx 0.09523809523810$ tramite le formule composte dei trapezi e Cavalieri-Simpson. Perchè il paragone sia veritiero, decidiamo che il numero di nodi e quindi di valutazioni della funzione integranda sia uguale per entrambe le formule. Scriviamo l'M-file `democomposte.m`

```
f=@(x) x.^20;
a=-1; b=1;
Ivero=2/21; % Valore vero dell'integrale
fprintf('\n %8s %15s %16s %15s %18s ','NODI', 'I_TRAP',...
'ERR. REL' ,'I_SIMPSON','ERR. REL' );
nval=11; % Numero di nodi
% NUMERO SUBINTERVALLI PER TRAPEZI COMPOSTA.
m=nval-1;
N_trap=m
[x_trap,w_trap, I_trap]=trapezi_composta(N_trap,a,b,f);
% NUMERO SUBINTERVALLI PER CAV.SIMPSON COMPOSTA.
N_simpson=m/2;
[x_simp,w_simp, I_simp]=simpson_composta(N_simpson,a,b,f);
% CALCOLO DEGLI ERRORI ASSOLUTI
E_trap = abs(Ivero - I_trap);
E_simp = abs(Ivero - I_simp);
%  STAMPA DEI VALORI APPROSSIMATI E DEGLI ERRORI RELATIVI!
fprintf(' \n %7d %20.14f %12.3E  %18.14f %13.3E',nval,I_trap,E_trap/Ivero,
     I_simp,E_simp/Ivero);
fprintf(' \n');
```

Esempio 1

Sapendo che il valore vero dell'integrale definito è $\dfrac{2}{21}$ circa 0.09523809523810, otteniamo i seguenti risultati, per un numero di valutazioni della funzione integranda pari a $11, 51, 101, 301$ e 501:

NODI	I_TRAP	ERR. REL	I_SIMPSON	ERR. REL
11	0.20462631505024	1.149E+00	0.13949200364447	4.647E−01
NODI	I_TRAP	ERR. REL	I_SIMPSON	ERR. REL
51	0.10052328836742	5.549E−02	0.09542292188917	1.941E−03
NODI	I_TRAP	ERR. REL	I_SIMPSON	ERR. REL
101	0.09656839642996	1.397E−02	0.09525009911748	1.260E−04
NODI	I_TRAP	ERR. REL	I_SIMPSON	ERR. REL
301	0.09538620586618	1.555E−03	0.09523824514571	1.574E−06
NODI	I_TRAP	ERR. REL	I_SIMPSON	ERR. REL
501	0.09529142370793	5.599E−04	0.09523811468402	2.042E−07

Esercizio Proposto 1

Esempio quadquad(f,a,b,1e-15)non dimenticare di

quad e' un comando di matlab per fare q

Si vuole approssimare il seguente integrale definito:

$$\int_1^3 \exp(x-2)\cdot\sin(x)\,dx$$

1. Si calcoli la soluzione "vera" I utilizzando il comando `quad` di MATLAB/OCTAVE con tolleranza $1e-14$.
2. Si calcolino i valori approssimati $\mathrm{I\_TRAP}$ dell'integrale con la formula dei trapezi composta utilizzando un numero di nodi pari a `nval= 11:10:201`. Per ogni valore si calcoli l'errore assoluto $\varepsilon^{(trap)} = |I - I\_TRAP|$ e quello relativo $\varepsilon_R^{(trap)}$.
3. Si calcolino i valori approssimati $\mathrm{I\_SIMP}$ dell'integrale con la formula di Cavalieri-Simpson composta utilizzando lo stesso numero di nodi usato per la formula dei Trapezi. Per ogni valore si calcoli l'errore assoluto $\varepsilon^{(simp)} = |I - I\_SIMP|$ e quello relativo $\varepsilon_R^{(simp)}$.
4. Si produca una tabella (prima a video e poi in maniera definitiva sul file `tabproposto1.ris` che riporti per ciascun valore di $nval$:

$nval \quad I\_TRAP \quad \varepsilon_R^{(trap)} \quad I\_SIMP \quad \varepsilon_R^{(simp)}$

Esercizio 1 seconda parte

Grafici dell'errore

1. Si modifichi lo script precedente in modo che gli errori relativi commessi per ogni numero di nodi (`nval`) e per entrambi i metodi vengano salvati in due vettori chiamati rispettivamente: `err_rel_t` e `err_rel_s`;
2. Usando i vettori precedenti si faccia un grafico logaritmico (con il comando `loglog`) degli errori relativi in funzione del numero di punti `nval` (una curva per ogni metodo, ma le due curve nella stessa finestra grafica).
3. Per verificare l'ordine di accuratezza delle formule composte di trapezi e di Cavalieri-Simpson, si faccia in una seconda finestra grafica (`figure(2)`) un grafico logaritmico degli errori relativi in funzione, questa volta, di h (ampiezza dei subintervalli). Si confrontino le rette ottenute nello stesso grafico con il plot delle funzioni h^2 e h^4 (grafico risultante come figura 3).

Ordine di accuratezza

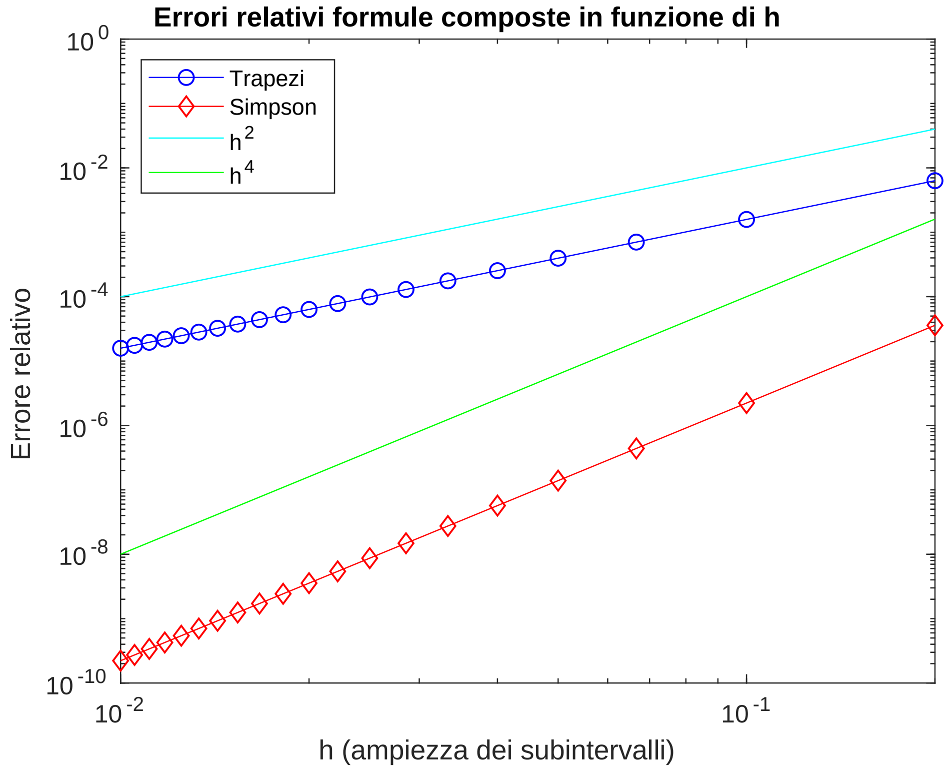

Figura: 3. Grafico logaritmico degli errori relativi in funzione di h (ampiezza dei subintervalli) fissato lo stesso numero di valutazioni della funzione integranda.

Esercizio proposto 2

Si studi il rapporto tra gli errori assoluti commessi con le regole di Trapezi e Cavalieri-Simpson per l'approssimazione dell'integrale

$$I = \int_1^4 \exp(x-2)\cdot\sin(\sqrt{x})\,dx$$

raddoppiando ogni volta il NUMERO DI APPLICAZIONI DELLA FORMULA,N, da 2 fino a 512. Si usino le istruzioni:

```
vet=[1:9]; n=length(vet);
NSUB=2.^vet; % numero di subintervalli
for k=NSUB
  ....
end
```

Si scrivano a video i rapporti $\frac{E_N(f)}{E_{2N}(f)}$, dove $E_N(f) = |I - I_N|$, calcolati mediante le istruzioni:

```
rappt=err_t(1:n-1)./err_t(2:n)
rapps=err_s(1:n-1)./err_s(2:n)
```

Si spieghi, a partire dalla formula dell'errore, perchè tali rapporti tendono a 4 e 16 rispettivamente.

Si ripeta l'esercizio cambiando l'intervallo di integrazione in $[0,1]$. Che cosa si osserva? Perché?

Esercizio proposto 3

Si descriva come decresce l'errore assoluto commesso con la Formula dei Trapezi per l'approssimazione dell'integrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp(\cos(x))\, dx$$

raddoppiando ogni volta il NUMERO DI SUBINTERVALLI usati, m, da 2 fino a 512. Si descriva inoltre l'andamento dei rapporti $\frac{E_m(f)}{E_{2m}(f)}$ dove $E_m(f) = |I - I_m|$. Si scrivano a video i rapporti ottenuti mediante l'istruzione:

```
rappt=err_t(1:m-1)./err_t(2:m)
```

MOLTO IMPORTANTE:
Si ripeta l'esercizio cambiando l'intervallo di integrazione in $[-\pi, \pi]$.
Che cosa si osserva? Come si confronta l'errore ottenuto con ogni numero di suddivisioni con la maggiorazione corrispondente ottenuta dalla formula dell'errore? Si provi a dare una spiegazione del comportamento osservato.