Risoluzione di sistemi di equazioni lineari
Metodi Iterativi

Ángeles Martínez Calomardo
http://www.math.unipd.it/~acalomar/DIDATTICA/
angeles.martinez@unipd.it

Laurea in Informatica
A.A. 2018–2019

Matrici in formato sparso

Si chiamano matrici *sparse* quelle in cui il numero di elementi diversi da zero (nonzeri) è proporzionale ad n invece che a n^2, essendo n l'ordine della matrice.
Esempio: data la matrice sparsa F

```
F =

     1     4     0    -3     0
     0     2     0     0     0
     0     0     2     0     0
    -3    12     0    -7     0
     0     0     0     0     2
```

è possibile memorizzarne solo i nonzeri.

La conversione dalla memorizzazione in formato pieno alla memorizzazione in formato sparso avviene con il comando `sparse`:

```
>> S = sparse(F);
```

Matrici in formato sparso

Si noti la differente occupazione di memoria nei due formati di memorizzazione della matrice.

```
>> whos F
Variables in the current scope:

  Attr Name        Size                     Bytes  Class
  ==== ====        ====                     =====  =====
       F           5x5                        200  double

Total is 25 elements using 200 bytes

>> whos S
Variables in the current scope:

  Attr Name        Size                     Bytes  Class
  ==== ====        ====                     =====  =====
       S           5x5                        132  double

Total is 9 elements using 132 bytes
```

Per matrici di dimensioni maggiori la differenza di occupazione di memoria diventa ancora più significativa. Oltre ad un risparmio nell'occupazione di memoria, il formato sparso può risultare vantaggioso anche considerando la velocità di esecuzione in quanto tutte le operazioni che coinvolgerebbero gli elementi uguali a zero, non vengono realizzate quando la matrice è memorizzata in formato sparso.

Fattorizzazione LU di matrici sparse

fill–in

Per matrici sparse la fattorizzazione LU non viene utilizzata per il fatto che i fattori L ed U di una matrice sparsa possono essere densi (cioè con pochi elementi nulli) o comunque molto meno sparsi della matrice di partenza.
Per renderci conto di ciò costruiamo una matrice sparsa in MATLAB/OCTAVE nel seguente modo:

```
n = 100;
A = 4*diag(ones(n,1))-diag(ones(n-1,1),-1)-diag(ones(n-1,1),1);
A(1,:) = ones(1,n);
A(:,1) = ones(n,1);
```

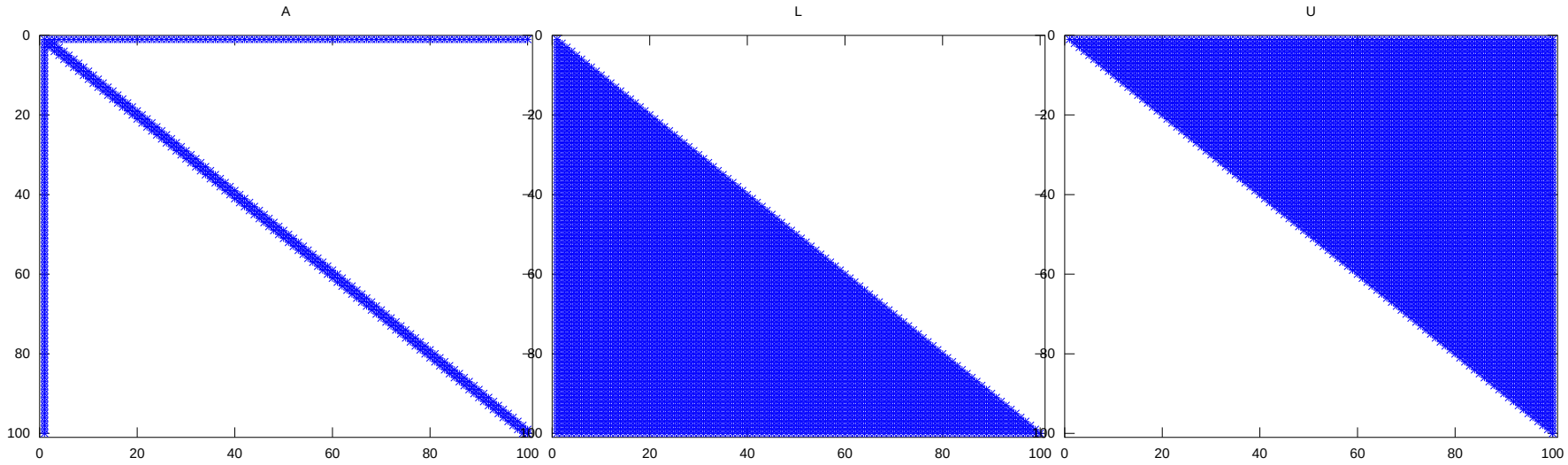
Il *pattern* di sparsità (posizione dei nonzeri) si può visualizzare così:

```
figure; spy(A); title('A');
```

La fattorizzazione LU riempie i fattori triangolari come si vede dal loro *pattern*.

```
[L,U,P] = lu(A);
figure; spy(L); title('L');
figure; spy(U); title('U');
```

Fattorizzazione LU di matrici sparse



La soluzione di sistemi lineari sparsi motiva l'uso di metodi alternativi ai metodi diretti: i metodi **iterativi**.

I metodi iterativi cercano la soluzione del sistema generando una successione di vettori che sotto certe condizioni converge alla soluzione "esatta".

Metodi iterativi stazionari

Sotto la condizione che A sia non singolare e che inoltre $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \ldots, n$, scrivendo

$$A = M - N,$$

con M invertibile, il sistema lineare $Ax = b$ si può dunque riformulare come segue:

$$\begin{array}{ccccc} (M-N)x = b & \Longrightarrow & Mx - Nx = b & \Longrightarrow & \\ \boxed{Mx = Nx + b} & \Longrightarrow & x = M^{-1}Nx + M^{-1}b & \Longrightarrow & x = Bx + q \end{array}$$

La matrice $B = M^{-1}N$ definita nell'ultima equazione si definisce **matrice di iterazione**. Abbiamo ottenuto il metodo iterativo:

$$\begin{array}{lll} \boxed{Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b} & & k = 0, 1, \ldots \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b & & k = 0, 1, \ldots \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + q & & k = 0, 1, \ldots \end{array} \qquad (1)$$

Metodi iterativi stazionari

Per caratterizzare i singoli metodi iterativi, si parte dal fatto che A si può scrivere come

$$A = -E + D - F$$

dove:

$$-F = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad -E = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

I metodi iterativi stazionari si ottengono definendo opportunamente N ed M in funzione di $-E, D, -F$:

1. **Metodo di Jacobi**. $M = D$; $N = (E + F)$.
2. **Metodo di Gauss-Seidel**. $M = D - E$; $N = F$.
3. **Metodo SOR**. $M = D - \omega E$; $N = (1-\omega)D + \omega F$, con $\omega \in (0,2)$ parametro reale (per $\omega = 1$ il metodo SOR coincide con quello di Gauss-Seidel).

Convergenza dei metodi iterativi

Esiste una condizione necessaria e sufficiente di convergenza che accomuna tutti i succitati metodi iterativi:

Teorema

Un metodo iterativo stazionario $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + q$ *converge per ogni scelta del vettore iniziale* $x^{(0)}$ *se e solo se tutti gli autovalori della matrice di iterazione* B *sono in modulo minori di 1, ovvero se* $\rho(B) < 1$.

Esercizio

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Calcolare il raggio spettrale delle matrici di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel.*
2. *Quale dei due metodi convergerà più velocemente alla soluzione di* $Ax = b$*?*

Convergenza dei metodi iterativi

Risoluzione

```
>> A = [4 -1 0 0 ; -1 4 -1 0 ; 0 -1 4 -1; 0 0 -1 4];
>> D = diag(diag(A));
>> E = -tril(A,-1);
>> F = -triu(A,1);
>> B_J = inv(D)*(E+F);
>> B_S = inv(D-E)*F
>> eig(B_J)'
ans =

   -0.40451   -0.15451    0.15451    0.40451

>> eig(B_S)'
ans =

    0.00000    0.16363    0.02387   -0.00000

>> rho_J = max(abs(eig(B_J)))
rho_J =  0.40451
>> rho_S = max(abs(eig(B_S)))
rho_S =  0.16363
```

In questo caso entrambi i metodi sono convergenti come si poteva vedere anche dall'esame della matrice che risulta essere **strettamente diagonale dominante**.

Implementazione del Metodo iterativo di Jacobi

Si scriva una function `jacobi.m` che implementi il metodo iterativo di Jacobi:

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \qquad \text{con} \qquad M = D \qquad N = -(L+U).$$

La function deve avere come dati di ingresso:

- la matrice A,
- il termine noto del sistema b,
- il vettore iniziale $x^{(0)}$,
- il numero massimo di iterazioni `itmax` e
- la tolleranza `tol`.

Si usi il test sulla norma dello scarto come criterio di arresto del metodo iterativo di Jacobi:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \texttt{tol}.$$

La function dovrà restituire il vettore soluzione finale, il numero di iterazioni effettuate e il vettore delle norme degli scarti calcolati ad ogni iterazione.

Implementazione del Metodo iterativo di Jacobi

```
function [x,iter,vscarti]=jacobi(A,b,x0,itmax,tol)
% Metodo iterativo di JACOBI
% [x,iter,vscarti]=jacobi(A,b,x0,itmax,tol)
% vettore iniziale x_0
xold = x0;
% partizionamento della matrice
D = diag(diag(A));
E = -tril(A,-1);
F = -triu(A,1);
M = D;
N = (E+F);
% vettore contenente le norme degli scarti
vscarti= [];
scarto = 1;
iter = 0;
% ciclo iterativo M x_k+1 = N x_k + b;
while scarto > tol && iter < itmax
    iter = iter + 1;
    tnoto = N*xold + b;
    x = M\tnoto;
    scarto = norm(x-xold);
    vscarti = [vscarti;scarto];
    xold = x;
end
```

Test della function `jacobi`

Esercizio

Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0.5 \\ 0 & 1 & 2.5 \end{pmatrix},$$

si vuole risolvere il sistema lineare $Ax = b$; *con* $b = A * ones(3,1)$.

1. *Si dica perché il metodo di Jacobi converge.*
2. *Si usi la function* `jacobi` *con una tolleranza pari a* $1e-8$ *per il test di arresto, con vettore iniziale il vettore nullo, e* `itmax = 200`.

Esercizio proposto

Esercizio

Si implementi la function `gauss_seidel` *che risolve un sistema lineare con il metodo iterativo di Gauss–Seidel:*

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \qquad \text{con} \qquad M = L + D \qquad N = -U.$$

Si usi un test di arresto basato sulla norma dello scarto.

Esercizio

Si confrontino i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare dell'esercizio precedente. Si realizzi un unico grafico di convergenza con i profili dei due metodi.

Esercizio proposto 2

1. Si risolva utilizzando la function `jacobi.m` il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   e b è tale che il vettore soluzione ha tutte le componenti pari a 1. Usare `tol` $= 10^{-9}$, `itmax` $= 200$ e il vettore nullo come soluzione iniziale.

2. Si calcoli inoltre la velocità di convergenza del metodo: $R = -\log_{10}(|\lambda_1|)$ essendo $|\lambda_1|$ il raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Jacobi.

3. Si stimi il numero di iterazioni necessarie per ridurre di un fattore 10^{-9} la norma dell'errore iniziale, ovvero: $k = \lceil \frac{9}{R} \rceil$. Confrontare il numero ottenuto con il numero di iterazioni eseguite dalla function `jacobi.m`.

Metodo SOR

Esercizio

A partire dalla function `jacobi.m`*, si scriva una function di nome* `sor.m` *che implementa il metodo di sovrarilassamento (SOR), definito così:*

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + \omega b,$$

dove

$$M = D - \omega E \qquad\qquad N = (1-\omega)D + \omega F$$

essendo $\omega \in (0,2)$ *un parametro reale.*
La function `sor` *dovrà avere come parametri di ingresso la matrice* A*, il termine noto* b*, il* **vettore** *soluzione iniziale* $x^{(0)}$*, il numero massimo di iterazioni* `itmax`*, la tolleranza* `tol` *e il parametro di rilassamento,* ω*. In output la function deve restituire il* **vettore** *soluzione* x*, il numero di iterazioni effettuate e il* **vettore** `vscarti` *contenente le norme degli scarti calcolati ad ogni iterazione. Si usi il test sulla norma dello scarto come criterio di arresto* $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \texttt{tol}$*.*

La sintassi della function deve essere la seguente:

```
function [x,iter,vscarti]=sor(A,b,x0,itmax,tol,omega)
```

Esercizio proposto 3

Metodo SOR

Si produca uno script chiamato `scriptsor.m` che risolva il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e b si ottiene imponendo che la soluzione vera sia $x =$ `ones(5,1)` con i metodi di Jacobi, Gauss-Seidel (SOR per $\omega = 1$) e SOR con $\omega = 1.4$. Usare `tol` $= 10^{-10}$, `itmax` $= 200$ e il vettore nullo come soluzione iniziale. Si riportino in un unico grafico semilogaritmico i profili di convergenza ottenuti con i tre metodi.

Si spieghi perchè si è certi che tutti e tre i metodi convergono alla soluzione di un sistema lineare con questa matrice dei coefficienti.

Stima della velocità asintotica di convergenza

- Si può dimostrare che se $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ allora per $k \to \infty$

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = B\mathbf{e}^{(k)} \approx \lambda_1^{k+1} c_1 \mathbf{v}_1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\|\mathbf{e}^{(k+1)}\|}{\|\mathbf{e}^{(k)}\|} = |\lambda_1|.$$

- Per $k \to \infty$ anche il rapporto tra le norme degli scarti tende a $|\lambda_1|$.
- Alla fine delle iterazioni possiamo calcolare una stima del fattore di convergenza del metodo (stima del modulo dell'autovalore dominante della matrice di iterazione B), come rapporto tra la norma euclidea di due scarti consecutivi:

```
asint=vscarti(2:iter)./vscarti(1:iter-1);
```