Bài giảng chương 7: Giá trị riêng và vector riêng

TS. Nguyễn Bích Vân
nbvan@math.ac.vn

21st May 2021

"Tạm dừng đến trường, không dừng học."

7.1. Giá trị riêng và vector riêng

Định nghĩa 7.1

Cho A là 1 ma trận vuông cấp n. Số (thực) λ được gọi là một ***giá trị riêng (eigenvalue)*** *của A, nếu tồn tại vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.*
Khi đó $\mathbf{x}$ được gọi là một ***vector riêng(eigenvector)*** *của A, tương ứng với giá trị riêng λ.*

Chú ý 7.1

Vector riêng phải khác vector không. Bởi vì hiển nhiên $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ với $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.
Giá trị riêng có thể bằng 0 (xem Ví dụ 7.1)

Ví dụ 7.1

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Chứng minh rằng* $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *là các vector riêng của* A. *Tìm các giá trị riêng tương ứng của chúng.*

Giải: $A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\mathbf{x}_1 \implies \mathbf{x}_1$ là 1 vector riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 0$.

$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\mathbf{x}_2 \implies \mathbf{x}_2$ là 1 vector riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 1$.

Không gian riêng

Định lý 7.1

Nếu A là một ma trận vuông cấp n, thì tập hợp

$$\mathbb{R}^n_\lambda(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

là một không gian con của $\mathbb{R}^n$. Không gian con này được gọi là ***không gian riêng (eigenspace)*** *của A tương ứng với giá trị riêng λ.*

Chứng minh.

Vì $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} \implies \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_\lambda(A) \implies \mathbb{R}^n_\lambda(A) \neq \emptyset$.
Giả sử $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_\lambda(A), c \in \mathbb{R}$. Khi đó $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \implies$
$A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \implies \mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_\lambda(A)$.
$A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}) \implies c\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_\lambda(A)$.
Vậy $\mathbb{R}^n_\lambda(A)$ là 1 không gian con của $\mathbb{R}^n$. $\square$

Cách tìm giá trị riêng, các vector riêng và không gian riêng tương ứng

Ta thấy $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \lambda I_n\mathbf{x} \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm không tầm thường $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow |\lambda I_n - A| = 0$.
Dễ thấy rằng $|\lambda I_n - A|$ là 1 đa thức bậc n với biến λ. Đa thức này được gọi là **đa thức đặc trưng (characteristic polynomial)** của A và được kí hiệu là $\chi_A(\lambda)$.

Như vậy, ta có

Định lý 7.2

Cho A là 1 ma trận vuông cấp n. Khi đó:

1. *Các giá trị riêng của A là các nghiệm (thực) của phương trình* $|\lambda I_n - A| = 0$.
2. *Không gian riêng của A tương ứng với giá trị riêng* λ *là tập nghiệm của hệ thuần nhất* $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = 0$.
3. *Các vector riêng của A tương ứng với giá trị riêng* λ *là các nghiệm không tầm thường của hệ thuần nhất* $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = 0$.

Như vậy, để tìm giá trị riêng, vector riêng và không gian riêng của ma trận A vuông cấp n ta thực hiện các bước sau:

1. Viết đa thức đặc trưng $\chi_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$
2. Tìm tất cả các nghiệm thực của đa thức đặc trưng. Chúng chính là tất cả các giá trị riêng của A.
3. Với mỗi giá trị riêng λ_i, giải hệ thuần nhất $(\lambda_i I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ để tìm các vector riêng và không gian riêng tương ứng.

Định nghĩa 7.2

Nếu λ_i là nghiệm bội k của $\chi_A(\lambda)$, thì ta nói λ_i là giá trị riêng bội k của A.

Ví dụ 7.2

Tìm tất cả các giá trị riêng, vector riêng và cơ sở của không gian riêng tương ứng của ma trận sau $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là $\chi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 12 \\ -1 & \lambda + 5 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 2)(\lambda + 5) + 12 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ $\chi_A(\lambda)$ có 2 nghiệm thực là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$.

Với $\lambda_1 = -1$: xét hệ phương trình

$((-1)I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Ta có $\begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_2 \to R_1; R_1 \leftrightarrow R_2; -R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Hệ phương trình mới là $x_1 - 4x_2 = 0$. Đặt $x_2 = t \implies x_1 = 4t$.

Vậy không gian riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ là $\mathbb{R}^2_{-1}(A) = \{ \begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R}\} = \{t \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$. Do đó 1 cơ sở của $\mathbb{R}^2_{-1}$ là $\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \}$. Các vector riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -1$ có dạng $\begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0$.

Với $\lambda_2 = -2$: xét hệ phương trình
$((-2)I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ta có
$\begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 4R_2 \to R_1; R_1 \leftrightarrow R_2; -R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Hệ phương trình mới : $x_1 - 3x_2 = 0$. Đặt $x_2 = t \implies x_1 = 3t$. Vậy không gian riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ là
$\mathbb{R}^2{}_{-2}(A) = \{ \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} | t \in R \} = \{ t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \}$. Do đó 1 cơ sở của $\mathbb{R}^2{}_{-1}$ là $\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \}$. Các vector riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ có dạng $\begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix}, t \neq 0$.

Các giá trị riêng của 1 ma trận tam giác

Định lý 7.3

Nếu A là một ma trận tam giác, thì các giá trị riêng của nó chính là các hệ số trên đường chéo chính.

Chứng minh.

Giả sử A là một ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow |\lambda I_n - A| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\dots(\lambda - a_{nn}).$$

Vậy tất cả các giá trị riêng của A là

$\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \dots, \lambda_n = a_{nn}.$

Ví dụ 7.3

Tìm tất cả các giá trị riêng của

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Giải: a) A là ma trận tam giác dưới, nên các giá trị riêng của nó là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$.
b)B là ma trận đường chéo, nên các giá trị riêng của nó là $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -4, \lambda_5 = 3$.

Giá trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa 7.3

Cho $T : V \to V$ là 1 ánh xạ tuyến tính. Số thực λ được gọi là 1 giá trị riêng của T, nếu $\exists \mathbf{x} \in V, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sao cho $T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$. Khi đó vector $\mathbf{x}$ được gọi là vector riêng của T tương ứng với giá trị riêng λ.

Không gian riêng của T tương ứng với giá trị riêng λ là $V_\lambda(T) = \{\mathbf{x} \in V | T(x) = \lambda \mathbf{x}\}$

Định lý 7.4

Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận chuẩn tắc là A. Khi đó các giá trị riêng và vector riêng của T chính là các giá trị riêng, vector riêng và không gian riêng tương ứng của A.

Chứng minh.

λ là 1 giá trị riêng của T khi và chỉ khi $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho $T(x) = \lambda \mathbf{x}$, mà $T(x) = A\mathbf{x}$, do đó $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ $\square$

Ví dụ 7.4

Cho $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 3y, 3x + y, -2z)$. Tìm các giá trị riêng, vector riêng và không gian riêng tương ứng của T.

Giải: Ma trận chuẩn tắc của T là $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Đa thức đặc trưng của A là

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda + 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)((\lambda - 1)^2 - 9) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$$

Vậy T có các giá trị riêng $\lambda_1 = -2$ (bội 2) và $\lambda_2 = 4$ (bội 1).

Với $\lambda_1 = -2$: xét hệ phương trình

$$((-2)I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1 \to R_2, -1/3R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình mới $x_1 + x_2 = 0$. Đặt $x_2 = s, x_3 = t \implies x_1 = -t$. Các vector riêng của T tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -2$ có dạng

$$\begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s^2 + t^2 \neq 0.$$

1 cơ sở của không gian riêng của T tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = -2$ là $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Với $\lambda_2 = 4$: xét hệ phương trình

$$(4I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1\to R_2;\frac{1}{3}R_1\to R_1;1/6R_3\to R_3;R_2\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình mới

$$x_1 - x_2 = 0 \tag{7.1}$$

$$x_3 = 0 \tag{7.2}$$

Các vector riêng của A tương ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 4$ là

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s \neq 0.$$

1 cơ sở của không gian riêng của T tương ứng với giá trị riêng

$$\lambda_2 = 4 \text{ là } \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

7.2. Chéo hóa ma trận

Định nghĩa 7.4

*Ma trận A vuông cấp n được gọi là **ma trận chéo hóa được (diagonalizable matrix)**, nếu nó đồng dạng với 1 ma trận đường chéo, tức là tồn tại 1 ma trận đường chéo D và 1 ma trận khả nghịch P sao cho $P^{-1}AP = D$.*

Định lý 7.5

Các ma trận đồng dạng có cùng các giá trị riêng.

Chứng minh.

Giả sử B đồng dạng với A. Khi đó tồn tại ma trận P khả nghịch sao cho $B = P^{-1}AP$. Do đó
$\chi_B(\lambda) = |\lambda I_n - B| = |\lambda I_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP| = |P^{-1}||\lambda I_n - A||P| = |P^{-1}||P||\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - A| = \chi_A(\lambda)$
Vì các giá trị riêng là các nghiệm của đa thức đặc trưng nên ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Điều kiện cần và đủ để ma trận chéo hóa được

Định lý 7.6

Ma trận A vuông cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi nó có n vector riêng độc lập tuyến tính.

Các bước để chéo hóa ma trận vuông cấp n:

1. Tìm tất cả các giá trị riêng của A.
2. Với mỗi giá trị riêng bội k của A, tìm k vector riêng độc lập tuyến tính. Nếu không thể tìm được, ta kết luận A không chéo hóa được. Nếu tìm được, gọi tất cả các vector riêng độc lập tuyến tính mà ta tìm được là $\mathbf{p}_1, p_2, ..., \mathbf{p}_n$, trong đó p_i tương ứng với giá trị riêng λ_i. Lưu ý rằng các giá trị riêng có thể bằng nhau.
3. Lấy ma trận P là ma trận có các vector cột $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$. Khi đó $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$

Chú ý

Khi chéo hóa ma trận, ta không cần tìm P^{-1}.

Ví dụ 7.5

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. *Tìm 1 ma trận P khả nghịch và 1 ma trận đường chéo D sao cho* $P^{-1}AP = D$.

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2\to R_1}{=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ 3 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} - (\lambda -$$

$$2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-6) = (\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3).$$

Vậy A có các giá trị riêng: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$.

Với $\lambda_1 = 2$: $2I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1 \to R_2; R_3 - 3R_1 \to R_3}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3; -1/4R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Vậy hệ phương trình $(2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tương đương với

$$x_1 + x_3 = 0 \tag{7.3}$$
$$x_2 = 0 \tag{7.4}$$

Do đó $x_2 = 0, x_3 = t, x_1 = -t$. Lấy $t = 1$ ta được vector riêng

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự như trên:

Với $\lambda_2 = -2$:

$-2I_3 - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{phép khử Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ta có $x_3 = 4t, x_2 = -t, x_1 = t$. Lấy $t = 1$ ta được vector riêng

$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Với $\lambda_3 = 3$:

$3I_3 - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{phép khử Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta chọn được vector riêng $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lấy $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Ví dụ 7.6

Chứng minh rằng ma trận sau không chéo hóa được $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Giải: Vì ma trận A là ma trận tam giác trên, nên các giá trị riêng của nó chính là các hệ số trên đường chéo chính. Như vậy, A chỉ có 1 giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 2).

Với $\lambda_1 = 1$: Xét $1I_2 - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1/2R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Do đó hệ phương trình $(1I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tương đương với $x_2 = 0$.
Như vậy,$x_1 = t, x_2 = 0$. Vậy

$$\mathbb{R}^2{}_{-1}(A) = \{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R}\} = span(\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}) \implies dim(\mathbb{R}^2{}_{-1}(A)) = 1.$$

Do đó ta không thể tìm được 2 vector riêng của A mà độc lập tuyến tính. Vậy A không chéo hóa được.

Định lý 7.7

Cho A là 1 ma trận vuông cấp n. Khi đó các vector riêng của A tương ứng với các giá trị riêng khác nhau độc lập tuyến tính.

Giải: Giả sử $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ là các vector riêng của A tương ứng với các giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Giả sử chúng phụ thuộc tuyến tính. Bằng cách đánh số lại các vector, ta có thể giả sử $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m, m \leq k$ là 1 cơ sở của $span(\{\mathbf{v}_1, ..., v_k\})$. Khi đó $\mathbf{v}_{m+1}$ có thể viết dưới dạng:

$$\mathbf{v}_{m+1} = c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_m\mathbf{v}_m. \tag{7.5}$$

Nhân cả 2 vế của (7.5) với λ_{m+1}, ta có:

$$\lambda_{m+1}\mathbf{v}_{m+1} = c_1\lambda_{m+1}\mathbf{v}_1 + ... + c_m\lambda_{m+1}\mathbf{v}_m. \tag{7.6}$$

Mặt khác, từ (7.5) ta cũng có

$$A\mathbf{v}_{m+1} = c_1A\mathbf{v}_1 + ... + c_mA\mathbf{v}_m \Leftarrow \lambda_{m+1}\mathbf{v}_{m+1} = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + ... + c_m\lambda_m\mathbf{v}_m \tag{7.7}$$

Lấy phương trình (7.6) trừ đi (7.7) ta được:

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + ... + c_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m)\mathbf{v}_m.$$

Vì $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m$ độc lập tuyến tính nên ta suy ra $c_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1) = ... = c_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = 0$. Vì $\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}$ khác nhau, nên ta có $c_1 = ... = c_m = 0$. Do đó theo (7.5) $\mathbf{v}_{m+1} = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $\mathbf{v}_{m+1}$ là 1 vector riêng của A.$\square$

Vấn đề: Cho $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Có tồn tại 1 cơ sở B của $\mathbb{R}^n$ sao cho ma trận của T đối với cơ sở B là ma trận đường chéo?
Cách giải:

1. Tìm ma trận chuẩn tắc A của T.
2. Xét xem A có chéo hóa được hay không. Giả sử A chéo hóa được, khi đó n vector riêng độc lập tuyến tính của A tạo thành cơ sở B cần tìm. Ma trận của T đối với cơ sở B là ma trận đường chéo với các giá trị trên đường chéo chính là các giá trị riêng tương ứng của A.
   Nếu A không chéo hóa được, thì ta kết luận không tồn tại 1 cơ sở B để ma trận của T đối với B là ma trận đường chéo.

Ví dụ 7.7

Xét ánh xạ T được cho trong Ví dụ 7.4:
$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 3y, 3x + y, -2z)$.
Tìm 1 cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ sao cho ma trận của T đối với B là 1 ma trận đường chéo.

Giải: Từ Ví dụ 7.4 ta tìm được 3 vector riêng độc lập tuyến tính của T là: $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Chúng tạo thành cơ sở B cần tìm. Ma trận của T đối với cơ sở B là $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

7.3. Chéo hóa trực giao

Định lý 7.8

Nếu A là 1 ma trận vuông cấp n, đối xứng, thì:

1. *A chéo hóa được.*
2. *Tất cả các nghiệm của đa thức đặc trưng của A đều là số thực.*
3. *Nếu λ là 1 giá trị riêng bội k của A, thì $dim(\mathbb{R}^n_\lambda(A)) = k$ (tức là A có k vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với λ).*

Ma trận trực giao

Định nghĩa 7.5

1 ma trận P vuông cấp n được gọi là ma trận trực giao, nếu $PP^T = P^TP = I_n$ (tức là $P^T = P^{-1}$.)

Định lý 7.9

Ma trận P vuông cấp n trực giao $\Leftrightarrow$ các vector cột của P tạo thành 1 cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh: Gọi $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ là các vector cột của P, trong đó

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \dots \\ p_{ni} \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$P^TP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \dots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \dots & p_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1n} & p_{2n} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1.\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1.\mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_1.\mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2.\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2.\mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_2.\mathbf{p}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{p}_n.\mathbf{p}_1 & p_n.\mathbf{p}_2 & \dots & \mathbf{p}_n.\mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

-Nếu $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n$ là 1 cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$, thì chúng độc lập tuyến tính $\implies rank(P) = n \implies det(P) \neq 0 \implies P$ khả nghịch. Hơn nữa, $\mathbf{p}_i.\mathbf{p}_j = 0, i \neq j$, $\mathbf{p}_i.\mathbf{p}_i = 1$. Do đó theo (7.8) $P^TP = I_n \implies P^TPP^{-1} = I_nP^{-1} \implies P^T = P^{-1}$.
-Ngược lại, nếu P là ma trận trực giao thì $P^TP = I_n$. Theo (7.8) ta suy ra $\mathbf{p}_i.\mathbf{p}_j = 0, i \neq j$, $\mathbf{p}_i.\mathbf{p}_i = 1$. Như vậy, $\{\mathbf{p}_1, p_2, ..., \mathbf{p}_n\}$ là 1 tập trực chuẩn. Do đó chúng tạo thành 1 cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^n$. Vậy P là 1 ma trận trực giao. □

Ví dụ 7.8

Chứng minh rằng ma trận P sau đây trực giao:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Giải: Các vector cột của P là

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Ta có $\mathbf{p}_1.\mathbf{p}_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{5}} + (-\frac{2}{3\sqrt{5}})(-\frac{4}{3\sqrt{5}}) = \frac{2}{9} - \frac{2}{5} + \frac{8}{45} = 0.$

$\mathbf{p}_1.\mathbf{p}_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{5}} \times 0 - \frac{2}{3\sqrt{5}} \times \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{9}\frac{10}{45} = 0.$

$\mathbf{p}_2.\mathbf{p}_3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times 0 - \frac{4}{3\sqrt{5}} \times \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{9} - \frac{20}{45} = 0.$

$\mathbf{p}_1.\mathbf{p}_1 = (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{\sqrt{5}})^2 + (-\frac{2}{3\sqrt{5}})^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{5} + \frac{4}{45} = 1.$
$\mathbf{p}_2.\mathbf{p}_2 = (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2 + (-\frac{4}{3\sqrt{5}})^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{5} + \frac{16}{45} = 1.$
$\mathbf{p}_3.\mathbf{p}_3 = (\frac{2}{3})^2 + 0^2 + (\frac{5}{3\sqrt{5}})^2 = \frac{4}{9} + \frac{25}{45} = 1.$
Vậy $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ là 1 cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$.

Định lý 7.10

Nếu A là 1 ma trận vuông cấp n đối xứng, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ là 2 vector riêng của A tương ứng lần lượt với các giá trị riêng λ_1, λ_2, trong đó $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Khi đó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ trực giao với nhau.

Chứng minh: Theo giả thiết ta có $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$.

Giả sử $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \dots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{bmatrix}$. Khi đó $\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2 =$

$$x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + \dots + x_{n1}x_{n2} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2.$$

$\lambda_1(\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2) = (\lambda_1\mathbf{x}_1).\mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1).\mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_2 = x_1^T(A^T\mathbf{x}_2) \overset{A^T=A}{=}$
$\mathbf{x}_1^T(A\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1^T(\lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2) \implies$
$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2) = 0$, mà $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nên $\mathbf{x}_1.\mathbf{x}_2 = 0$. $\square$

Định nghĩa 7.6

Ta nói ma trận A vuông cấp n ***chéo hóa trực giao được (orthogonally diagonalizable)*** *nếu tồn tại 1 ma trận trực giao P và 1 ma trận đường chéo D sao cho* $P^T AP = D$.

Định lý 7.11

Cho A là 1 ma trận vuông cấp n. Khi đó ma trận A chéo hóa trực giao được khi và chỉ khi A đối xứng.

Quá trình chéo hóa trực giao 1 ma trận đối xứng

Cho A là 1 ma trận vuông cấp n đối xứng. Để tìm 1 ma trận trực giao P và 1 ma trận đường chéo D sao cho $P^TAP = D$, ta thực hiện các bước:

1. Tìm tất cả các giá trị riêng của A và bội của chúng.
2. Với mỗi giá trị riêng bội 1, ta tìm 1 vector riêng tương ứng với nó và chuẩn hóa.
3. Với mỗi giá trị riêng bội $k \geq 2$: ta tìm tập hợp gồm k vector riêng độc lập tuyến tính tương ứng với giá trị riêng đó. Dùng quá trình trưc chuẩn hóa Gram-Schmidt để biến chúng thành 1 tập trực chuẩn.
4. Gọi tất cả các vector riêng ta tìm được ở bước 2 và bước 3 là $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$,trong đó p_i tương ứng với giá trị riêng λ_i. Gọi P là ma trận với các vector cột $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$. Khi đó

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 7.9

Tìm 1 ma trận trực giao P và 1 ma trận đường chéo D sao cho $P^T AP = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Giải: Đa thức đặc trưng của A là

$$\chi_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} \overset{R_2+R_3 \to R_2}{=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 2 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} - (\lambda -$$

$$3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda-18) = (\lambda-3)^2(\lambda+6).$$

Vậy A có 2 giá trị riêng : $\lambda_1 = 3$ (bội 2) và $\lambda_2 = -6$ (bội 1).

Với $\lambda_1 = 3$:
$$3I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1\to R_2; R_3-2R_1\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$ Do đó hệ phương trình $(3I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tương đương với $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$. Đặt $x_2 = s, x_3 = t \implies x_1 = 2s - 2t$. Như vậy, các vector riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 3$ có dạng
$$\begin{bmatrix} 2s - 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s^2 + t^2 \neq 0.$$
Chọn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quá trình trực chuẩn hóa Gram-Schmidt:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2.\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1.\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Tương tự như trên: Với
$\lambda_2 = -6 : -6I_3 - A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{phép khử Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$
Hệ thuần nhất $(-6I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tương đương với

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 2x_3 = 0 \tag{7.9}$$

$$x_2 + x_3 = 0 \tag{7.10}$$

Đặt $x_3 = 2t \implies x_2 = -2t, x_1 = t$. Lấy $t = 1$, ta được vector riêng $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Lấy $\mathbf{p}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

Lấy ma trận P với các vector cột $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ đã tìm được ở trên:

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -2/3 \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & 2/3 \end{bmatrix} \implies P \text{ trực giao và}$$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = D.$$