Минобрнауки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Кафедра информационной безопасности

Теория систем и системный анализ

Практическая работа № 4

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

ТУЛА 2023

Цель работы: знакомство с основами статистического моделирования систем различного типа.

Краткие теоретические положения

1. Понятие о статистическом моделировании

Статистическое моделирование — базовый метод моделирования, заключающийся в том, что модель испытывается множеством случайных сигналов с заданной плотностью вероятности. Целью является статистическое определение выходных результатов. В основе статистического моделирования лежит метод Монте-Карло. Напомним, что имитацию используют тогда, когда другие методы применить невозможно.

2. Метод Монте-Карло

Рассмотрим метод Монте-Карло на примере вычисления интеграла, значение которого аналитическим способом найти не удается.

Задача 1. Найти значение интеграла:

$$y = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

На рис.1 представлен график функции $f(x)$. Вычислить значение интеграла этой функции — значит, найти площадь под этим графиком.

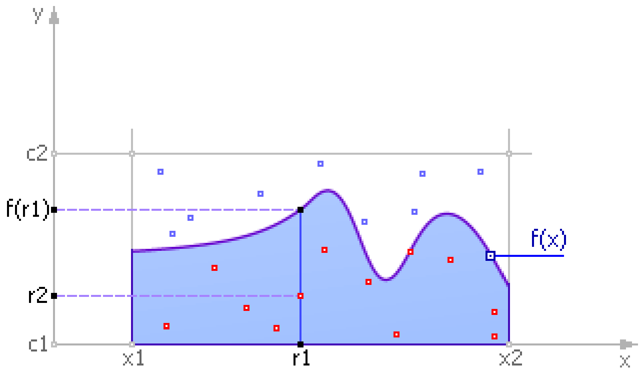


Рис. 1. Определение значения интеграла методом Монте-Карло

Ограничиваем кривую сверху, справа и слева. Случайным образом распределяем точки в прямоугольнике поиска. Обозначим через N_1 количество точек, принятых для испытаний (то есть попавших в прямоугольник, эти точки изображены на рис. 1 красным и синим цветом), и через N_2 — количество точек под кривой, то есть попавших в закрашенную площадь под функцией (эти точки изображены на рис. 1 красным цветом). Тогда естественно предположить, что количество точек, попавших под кривую по отношению к общему числу точек пропорционально площади под кривой (величине интеграла) по отношению к площади испытуемого прямоугольника. Математически это можно выразить так:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{y}{(x_2 - x_1)(c_2 - c_1)}$$

Рассуждения эти, конечно, статистические и тем более верны, чем большее число испытуемых точек мы возьмем.

Фрагмент алгоритма метода Монте-Карло в виде блок-схемы выглядит так, как показано на рис. 2.

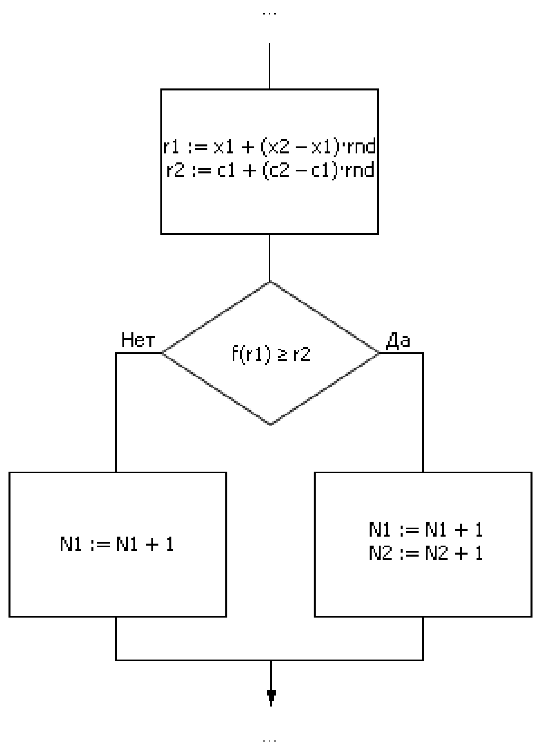


Рис. 2. Фрагмент алгоритма реализации метода Монте-Карло

Значения r_1 и r_2 на рис. 2 являются равномерно распределенными случайными числами из интервалов (x_1; x_2) и (c_1; c_2) соответственно.

Метод Монте-Карло чрезвычайно эффективен, прост, но необходим «хороший» генератор случайных чисел. Вторая проблема применения метода заключается в определении объема выборки, то есть количества точек, необходимых для обеспечения решения с заданной точностью. Эксперименты показывают: чтобы увеличить точность в 10 раз, объем выборки нужно увеличить в 100 раз; то есть точность примерно пропорциональна корню квадратному из объема выборки:

$$\text{точность} \cong \sqrt{\text{объем выборки}}$$

3. Схема использования метода Монте-Карло при исследовании систем со случайными параметрами

Построив модель системы со случайными параметрами, на ее вход подают входные сигналы от генератора случайных чисел (ГСЧ), как показано на рис. 3. ГСЧ устроен так, что он выдает *равномерно распределенные* случайные числа $r_{рр}$ из интервала [0; 1]. Так как одни события могут быть более вероятными, другие — менее вероятными, то равномерно распределенные случайные числа от генератора подают на преобразователь закона случайных чисел (ПЗСЧ), который преобразует их в *заданный* пользователем закон распределения вероятности, например, в нормальный или экспоненциальный закон. Эти преобразованные случайные числа x подают на вход модели. Модель отрабатывает входной сигнал x по некоторому закону $y = \varphi(x)$ и получает выходной сигнал y, который также является случайным.

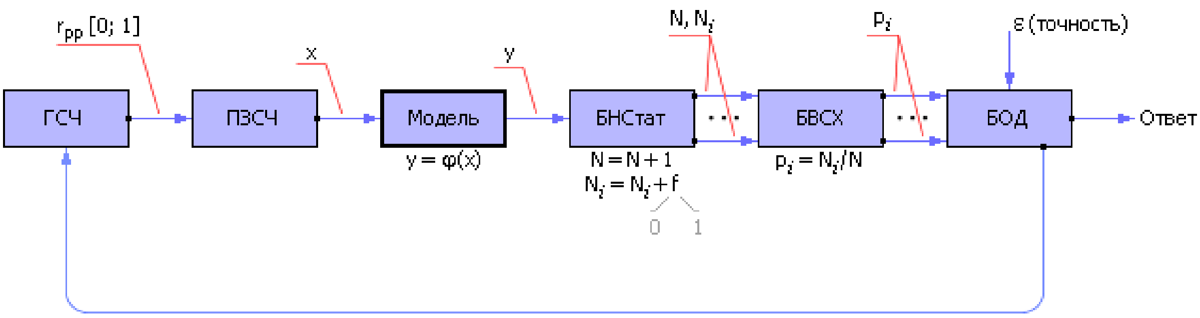


Рис. 3. Общая схема метода статистического моделирования

В блоке накопления статистики (БНСтат) установлены фильтры и счетчики. Фильтр (некоторое логическое условие) определяет по значению *y*, реализовалось ли в конкретном опыте некоторое событие (выполнилось условие, $f = 1$) или нет (условие не выполнилось, $f = 0$). Если событие реализовалось, то счетчик события увеличивается на единицу. Если событие не реализовалось, то значение счетчика не меняется. Если требуется следить за несколькими разными типами событий, то для статистического моделирования понадобится несколько фильтров и счетчиков N_i. Всегда ведется счетчик количества экспериментов — N.

Далее отношение N_i к N, рассчитываемое в блоке вычисления статистических характеристик (БВСХ) по методу Монте-Карло, дает оценку вероятности p_i появления события i, то есть указывает на частоту его выпадения в серии из N опытов. Это позволяет сделать выводы о статистических свойствах моделируемого объекта.

Например, событие А совершилось в результате проведенных 200 экспериментов 50 раз. Это означает, согласно методу Монте-Карло, что вероятность совершения события равна: $p_A = 50/200 = 0.25$. Вероятность того, что событие не совершится, равна, соответственно, $1 – 0.25 = 0.75$.

Обратите внимание: когда говорят о вероятности, полученной экспериментально, то ее называют **частостью**; слово **вероятность** употребляют, когда хотят подчеркнуть, что речь идет о теоретическом понятии.

При большом количестве опытов N частота появления события, полученная экспериментальным путем, стремится к значению теоретической вероятности появления события.

В блоке оценки достоверности (БОД) анализируют степень достоверности статистических экспериментальных данных, снятых с модели (принимая во внимание точность результата ε, заданную пользователем) и определяют необходимое для этого количество статистических испытаний. Если колебания значений частоты появления событий относительно теоретической вероятности меньше заданной точности, то экспериментальную частоту принимают в качестве ответа, иначе генерацию случайных входных воздействий продолжают, и процесс моделирования повторяется. При малом числе испытаний результат может оказаться недостоверным. Но чем более испытаний, тем точнее ответ, согласно центральной предельной теореме.

Заметим, что оценивание ведут по худшей из частот. Это обеспечивает достоверный результат сразу по всем снимаемым характеристикам модели.

Пример 1. Решим простую задачу. Какова вероятность выпадения монеты орлом кверху при падении ее с высоты случайным образом?

Начнем подбрасывать монетку и фиксировать результаты каждого броска (см. табл. 1).

Таблица 1.Результаты испытаний бросания монеты

Количество опытов N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Значение счетчика выпадения орла N_o	0	0	1	1	2	3	4	…	…	…	…	…	…	…
Значение счетчика выпадения решки N_p	1	2	2	3	3	3	3	…	…	…	…	…	…	…
Частость выпадения орла $P_o = N_o/N$	0	0	0.33	0.25	0.4	0.5	0.57	…	…	…	…	…	…	…
Частость выпадения решки $P_p = N_p/N$	1	1	0.66	0.75	0.6	0.5	0.43	…	…	…	…	…	…	…

Будем подсчитывать частость выпадения орла как отношение количества случаев выпадения орла к общему числу наблюдений. Посмотрите в табл. 1. случаи для $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ — сначала значения частости нельзя назвать достоверными. Попробуем построить график зависимости P_o от N — и посмотрим, как меняется частость выпадения орла в зависимости от количества проведенных опытов. Разумеется, при различных экспериментах будут получаться разные таблицы и, следовательно, разные графики. На **рис. 4** показан один из вариантов.

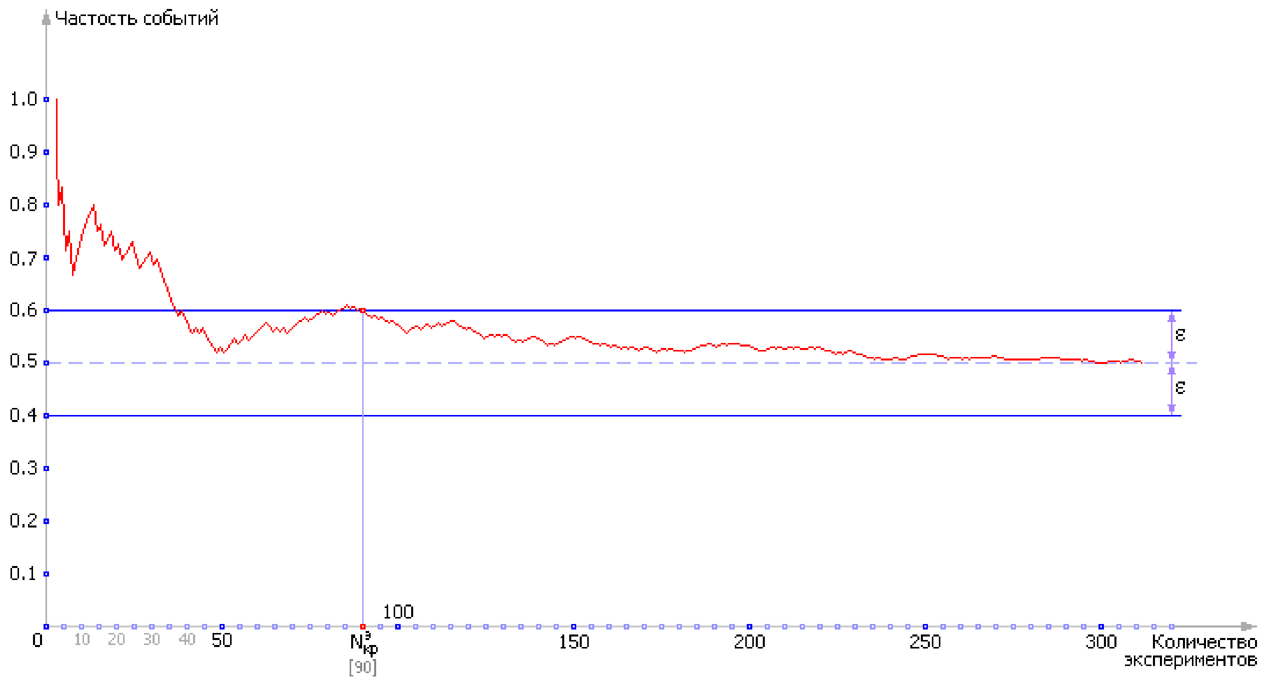


Рис. 4. Экспериментальная зависимость частости появления случайного события от количества наблюдений и ее стремление к теоретической вероятности

Сделаем некоторые выводы.

1. Видно, что при малых значениях N, например, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ ответу

вообще доверять нельзя. Например, $P_о$ = 0 при N = 1, то есть вероятность выпадения орла при одном броске равна нулю! Хотя всем хорошо известно, что это не так. То есть пока мы получили очень грубый ответ. Однако, посмотрите на график: в процессе **накопления** информации ответ медленно, но верно приближается к правильному (он выделен пунктирной линией). К счастью, в данном конкретном случае правильный ответ нам известен: в идеале, вероятность выпадения орла равна 0.5 (в других, более сложных задачах, ответ нам, конечно, будет неизвестен). Допустим, что ответ нам надо знать с точностью ε = 0.1. Проведем две параллельные линии, отстоящие от правильного ответа 0.5 на расстояние 0.1 (см. **рис. 4**). Ширина образовавшегося коридора будет равна 0.2. Как только кривая $P_о(N)$ войдет в этот коридор так, что уже никогда его не покинет, можно остановиться и посмотреть, для какого значения N это произошло. Это и есть **экспериментально вычисленное критическое значение** необходимого количества опытов $N_{кр}^{э}$ для определения ответа с точностью ε = 0.1; ε-окрестность в наших рассуждениях играет роль своеобразной трубки точности. Заметьте, что ответы $P_о(91)$, $P_о(92)$ и так далее уже не меняют сильно своих значений (см. **рис. 4**); по крайней мере, у них не изменяется первая цифра после запятой, которой мы обязаны доверять по условиям задачи.

2. Причиной такого поведения кривой является действие **центральной предельной теоремы** . Пока здесь мы сформулируем ее в самом простом варианте «Сумма случайных величин есть величина неслучайная». Мы использовали среднюю величину $P_о$, которая несет в себе информацию о сумме опытов, и поэтому постепенно эта величина становится все более достоверной.
3. Если проделать еще раз этот опыт сначала, то, конечно, его результатом будет другой вид случайной кривой. И ответ будет другим, хотя примерно таким же. Проведем целую серию таких экспериментов (см. **рис. 5**). Такая серия называется **ансамблем реализаций**. Какому же ответу в итоге следует верить? Ведь они, хоть и являются близкими, все же разнятся. На практике поступают по-разному. Первый вариант — вычислить среднее значение ответов за несколько реализаций (см. табл. 2).

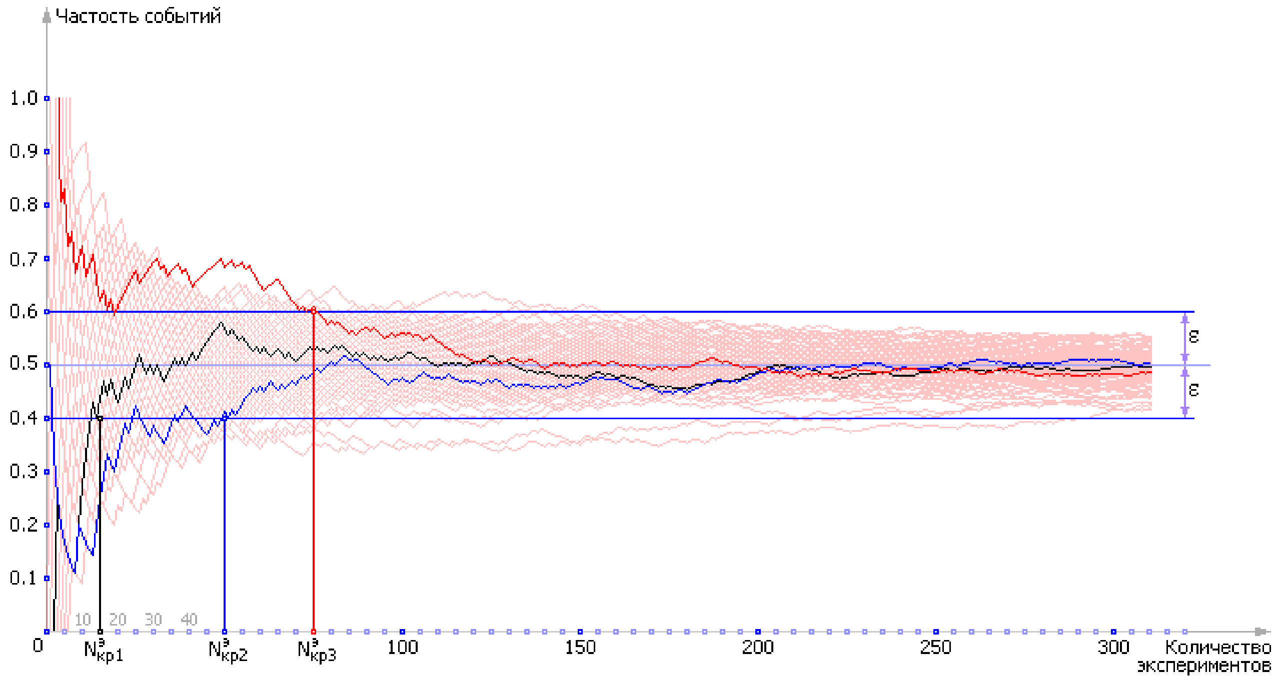


Рис. 5. Экспериментально снятый ансамбль случайных зависимостей частости появления случайного события от количества наблюдений

Мы поставили несколько экспериментов и определяли каждый раз, сколько необходимо было сделать опытов, то есть $N_{кр}^{э}$. Было проделано 10 экспериментов, результаты которых были сведены в табл. 2. По результатам 10-ти экспериментов было вычислено среднее значение $N_{кр}^{э}$.

Таблица 2. Экспериментальные данные необходимого количества бросков монеты для достижения точности $\varepsilon = 0.1$ при вычислении вероятности выпадения орла

Опыт	**$N_{кр}^{э}$**
1	288
2	95
3	50
4	29
5	113
6	210
7	30
8	42
9	39
10	48
Среднее $N_{кр.}^{э}$	**94**

Таким образом, проведя 10 реализаций разной длины, мы определили, что достаточно **в среднем** было сделать 1 реализацию длиной в 94 броска монеты.

Еще один важный факт. Внимательно рассмотрите график на **рис. 5**. На нем нарисовано 100 реализаций — 100 красных линий. Отметьте на нем абсциссу $N = 94$ вертикальной чертой. Есть какой-то процент красных линий, которые не успели пересечь ε-окрестность, то есть ($P^{эксп} - \varepsilon \leq P^{теор} \leq P^{эксп} + \varepsilon$), и войти в коридор точности до момента $N = 94$. Обратите внимание, таких линий 5. Это значит, что 95 из 100, то есть 95%, линий достоверно вошли в обозначенный интервал.

Таким образом, проведя 100 реализаций, мы добились примерно 95%-ного доверия к полученной экспериментально величине вероятности выпадения орла, определив ее с точностью 0.1. Для сравнения полученного результата вычислим теоретическое значение $N_{кр}^{т}$ теоретически. Однако для этого придется ввести понятие доверительной вероятности Q_F, которая показывает, насколько мы готовы верить ответу. Например, при $Q_F = 0.95$ мы готовы верить ответу в 95% случаев из 100. Формула теоретического расчета числа экспериментов имеет вид: $N_{кр}^{т} = k(Q_F) \cdot p \cdot (1 - p)/\varepsilon^2$, где $k(Q_F)$ — коэффициент Лапласа, p — вероятность выпадения орла, ε — точность (доверительный интервал). В табл. 21.3 показаны значения теоретической величины количества необходимых опытов при разных Q_F (для точности $\varepsilon = 0.1$ и вероятности $p = 0.5$).

Таблица 3. Теоретический расчет необходимого количества бросков монеты для достижения точности $\varepsilon = 0.1$ при вычислении вероятности выпадения орла

Доверительная вероятность Q_F	**Коэффициент Лапласа $k(Q_F)$**	**Требуемое число опытов $N_{кр}^{т} = k(Q_F) \cdot p \cdot (1 - p)/\varepsilon^2$**
0.90	2.72	68
0.95	3.84	96
0.99	6.66	167

Как видите, полученная нами оценка длины реализации, равная 94 опытам очень близка к теоретической, равной 96. Некоторое несовпадение объясняется тем, что, видимо, 10 реализаций недостаточно для точного вычисления $N_{кр}^{э}$. Если вы решите, что вам нужен результат, которому следует доверять больше, то измените значение доверительной вероятности. Например, теория говорит нам, что если опытов будет 167, то всего 1-2 линии из ансамбля не войдут в предложенную трубку точности. Но имейте в виду, количество экспериментов с ростом точности и достоверности растет очень быстро.

Второй вариант, используемый на практике — провести **одну** реализацию и **увеличить полученное для нее $N_{кр}^{э}$ в 2 раза**. Это считают хорошей гарантией точности ответа (см. **рис. 6**).

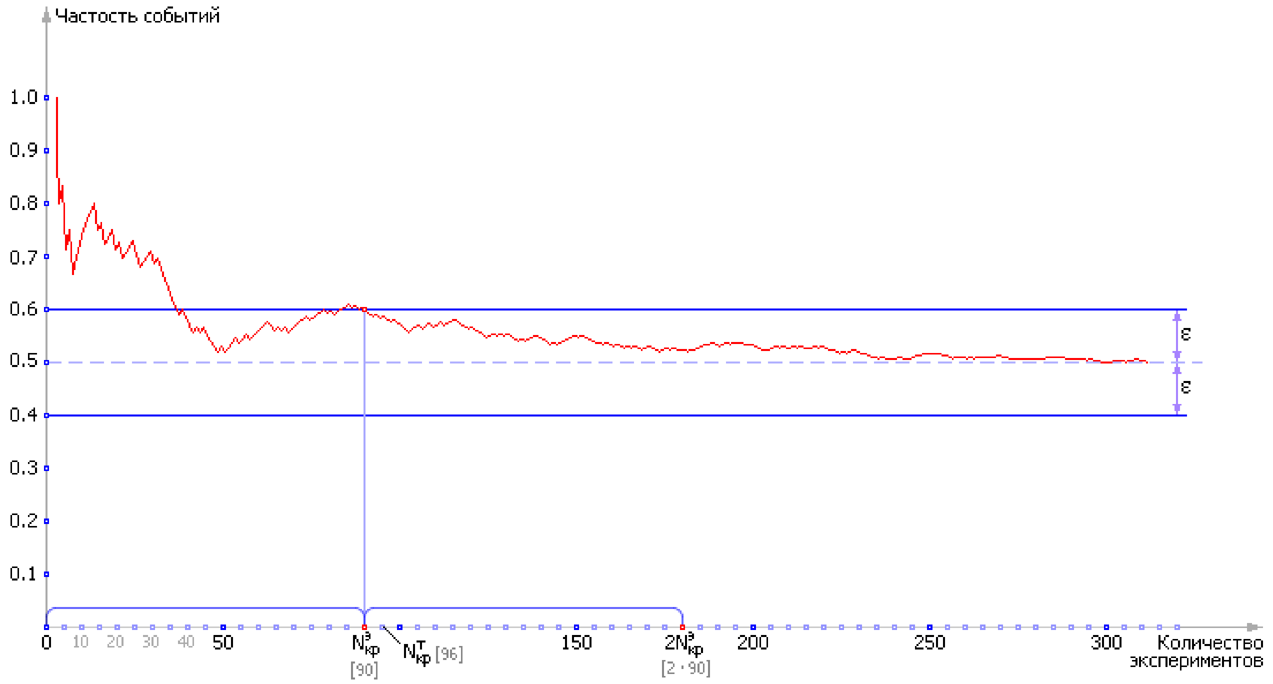
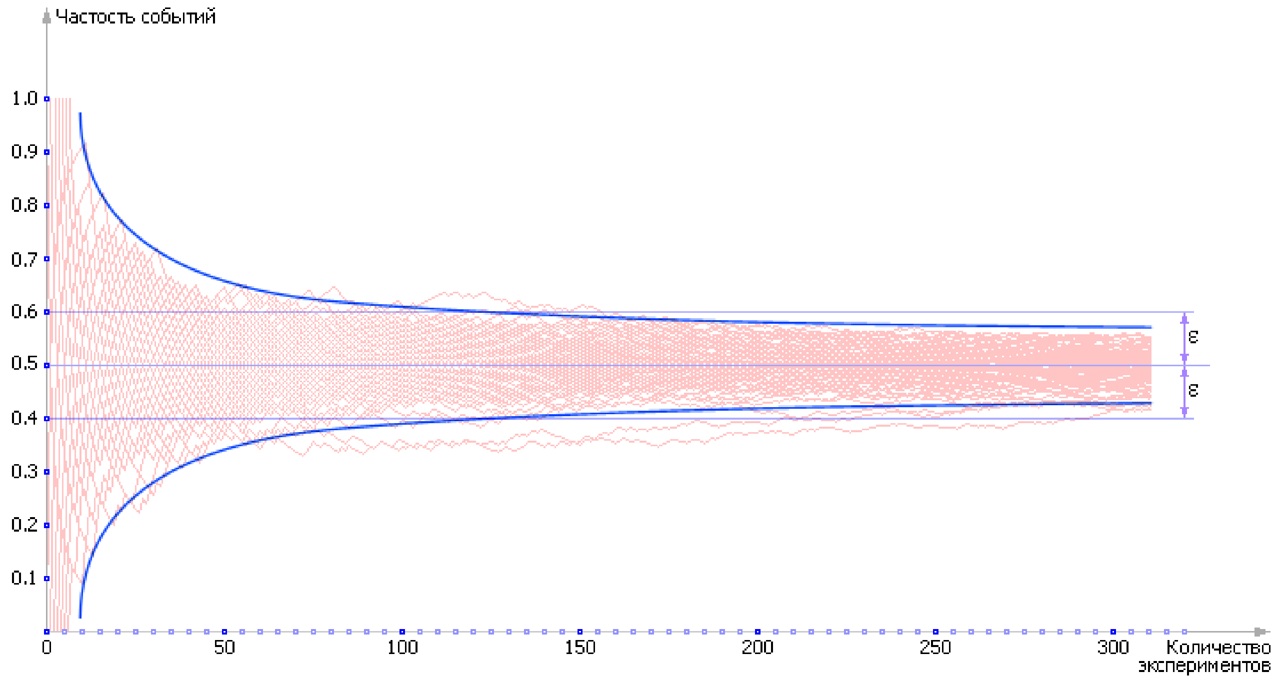


Рис. 6. Иллюстрация экспериментального определения $N_{кр}^{э}$ по правилу «умножь на два»

Если присмотреться к **ансамблю случайных реализаций**, то можно обнаружить, что сходимость частости к значению теоретической вероятности происходит по кривой, соответствующей обратной квадратичной зависимости от числа экспериментов (см. **рис. 7**).



Это действительно так получается и теоретически. Если изменять задаваемую точность ε и исследовать количество экспериментов, требуемых для обеспечения каждой из них, то получится табл. 4.

Таблица 4. Теоретическая зависимость количества экспериментов, необходимых для обеспечения заданной точности при Q_F = 0.95

Точность ε	**Критическое число экспериментов $N_{кр}^{т}$**
0.1	96
0.01	9600
0.001	960000

Построим по табл. 4 график зависимости $N_{кр}^{т}(\varepsilon)$ (см. **рис. 8**).

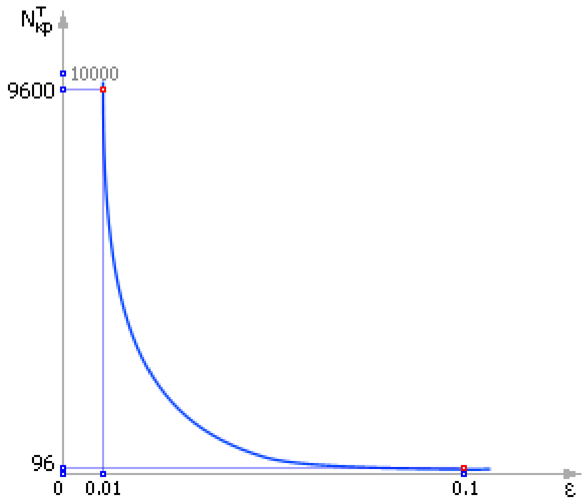


Рис. 8. Зависимость числа экспериментов, требуемых для достижения заданной точности ε при фиксированном Q_F = 0.95

Итак, рассмотренные графики подтверждают приведенную выше оценку:

$\text{точность} \cong \sqrt{\text{объем выборки}}$

Заметим, что оценок точности может быть несколько.

Пример 2. Нахождение площади фигуры методом Монте-Карло. Определите методом Монте-Карло площадь пятиугольника с координатами углов (0, 0), (0, 10), (5, 20), (10, 10), (7, 0).

Нарисуем в двухмерных координатах заданный пятиугольник, вписав его в прямоугольник, чья площадь, как нетрудно догадаться, составляет (10 – 0) · (20 – 0) = 200 (см. **рис. 9**).

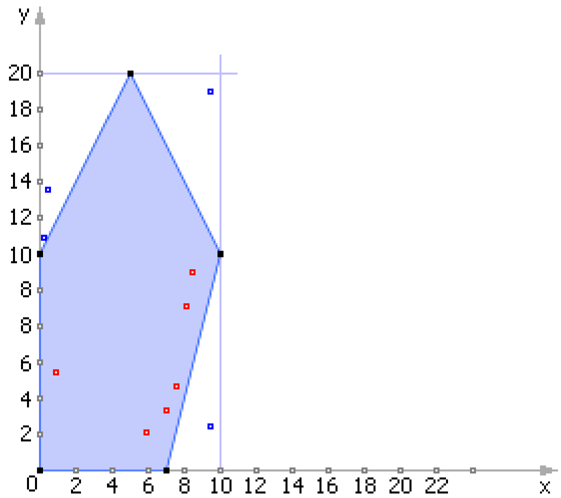


Рис. 9. Иллюстрация к решению задачи о площади фигуры методом Монте-Карло

Используем таблицу случайных чисел для генерации пар чисел *R*, *G*, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1. Число *R* будет имитировать координату *X* ($0 \leq X \leq 10$), следовательно, $X = 10 \cdot R$. Число *G* будет имитировать координату *Y* ($0 \leq Y \leq 20$), следовательно, $Y = 20 \cdot G$. Сгенерируем по 10 чисел *R* и *G* и отобразим 10 точек (*X*; *Y*) на **рис. 9** и в табл. 5.

Таблица 5. Решение задачи методом Монте-Карло

Номер точки	**R**	**G**	**X**	**Y**	**Точка (X; Y) попала в прямоугольник?**	**Точка (X; Y) попала в пятиугольник?**
1	0.8109	0.3557	8.109	7.114	Да	Да
2	0.0333	0.5370	0.333	10.740	Да	Нет
3	0.1958	0.2748	1.958	5.496	Да	Да
4	0.6982	0.1652	6.982	3.304	Да	Да
5	0.9499	0.1090	9.499	2.180	Да	Нет
6	0.7644	0.2194	7.644	4.388	Да	Да
7	0.8395	0.4510	8.395	9.020	Да	Да
8	0.0415	0.6855	0.415	13.710	Да	Нет
9	0.5997	0.1140	5.997	2.280	Да	Да
10	0.9595	0.9595	9.595	19.190	Да	Нет
Всего:					10	6

Статистическая гипотеза заключается в том, что количество точек, попавших в контур фигуры, пропорционально площади фигуры: 6:10 = *S*:200. То есть, по формуле метода Монте-Карло, получаем, что площадь *S* пятиугольника равна: $200 \cdot 6/10 = 120$.

Проследим, как менялась величина *S* от опыта к опыту (см. табл. 6).

Таблица 21.6. Оценка точности ответа

Количество испытаний N	**Оценка вероятности попадания случайной точки в испытуемую область**	**Оценка площади S методом Монте-Карло**
1	1/1 = 1.00	200
2	1/2 = 0.50	100
3	2/3 = 0.67	133
4	3/4 = 0.75	150
5	3/5 = 0.60	120
6	4/6 = 0.67	133
7	5/7 = 0.71	143
8	5/8 = 0.63	125
9	6/9 = 0.67	133
10	6/10 = 0.60	120

Поскольку в ответе все еще меняется значение второго разряда, то возможная неточность составляет пока больше 10%. Точность расчета может быть увеличена с ростом числа испытаний (см. **рис. 10**).

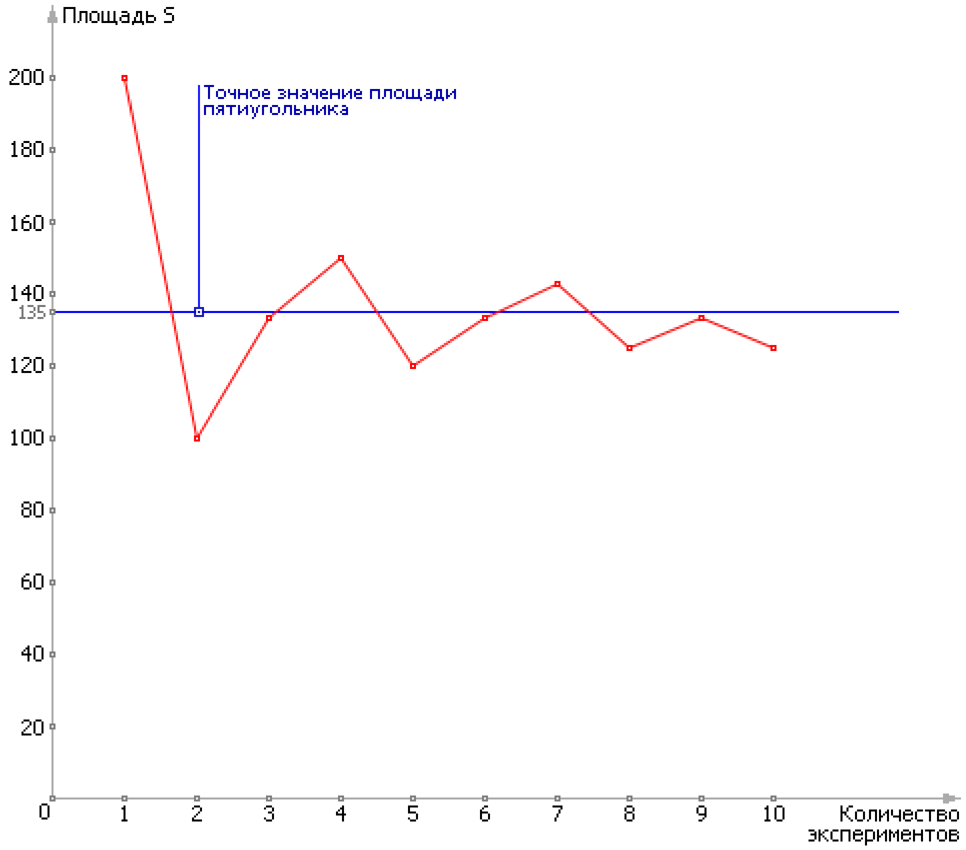


Рис. 10. Иллюстрация процесса сходимости определяемого экспериментально ответа к теоретическому результату

Задание на работу

1. Построить на плоскости фигуру с 7-мью углами.
2. Найти площадь фигуры методом Монте-Карло. Точность расчета должна составлять более 90%.
3. Оформить отчет по работе.