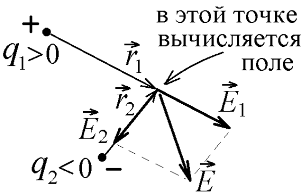
Задание практического занятия №1. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1) Расчет электростатических полей точечных зарядов; 2) Расчет электростатических полей распределенных зарядов

Задание: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).

Если задана система двух или нескольких **точечных** электрических зарядов, то на расстояниях r_1 и r_2 от зарядов их потенциалы складываются с учетом знака заряда, $\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} + \dfrac{-|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}}$.

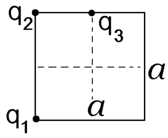
Напряженности складываются векторно, $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2}$, где величины векторов (поля точечных зарядов) $\boxed{E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}}$, $\boxed{E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}}$. Надо помнить, что вектор $\vec{E}_1$ поля положительного заряда $+q_1$ направлен от заряда, а вектор $\vec{E}_2$ поля отрицательного заряда $-q_2$ направлен к заряду, как показано на рисунке (линии $\vec{E}$ начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность). В этих формулах $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная, $\varepsilon -$ диэлектрическая постоянная среды, в которой находятся заряды (для воздуха $\varepsilon \cong 1$) Постоянная $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.



На любой точечный заряд q, внесенный в это поле, будет действовать сила Кулона, равная $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$, а энергия внесенного заряда равна $\boxed{W = q\varphi}$.

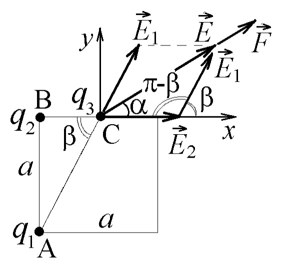
Пример решения задач:

1. Точечные заряды q_1 = +5 мкКл и q_2 = = +1 мкКл находятся в вершинах квадрата со стороной a = 3 м, а заряд q_3 = +2 мкКл – в середине его стороны (см.рисунок). Найти:
а) величину кулоновской силы, действующей на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2;
б) угол между вектором этой силы и стороной квадрата;
в) энергию заряда q_3. Как изменятся результаты, если заряд q_1 поменяет знак?



Решение.

Аккуратно делайте рисунок, отмечая на нем заданные в условии углы и направления векторов. Правильно сделанный рисунок – это 30-50% успешного решения задачи. Как видно из рисунка величины напряженностей $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2}$;



$E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot BC^2}$, где $BC = \dfrac{a}{2}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a/2$. Проекции векторов на оси x и y равны $E_{1x} = E_1 \cos\beta$; $E_{1y} = E_1 \sin\beta$; $E_{2x} = E_2$; $E_{2y} = 0$. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что $\cos\beta = BC/AC = 1/\sqrt{5}$; $\sin\beta = AB/AC = 2/\sqrt{5}$.

Проекции результирующего вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ в точке C равны $E_x = E_{1x} + E_{2x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_2}{a^2}$; $E_y = E_{1y} + E_{2y} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Сила Кулона, действующая на заряд q_3 равна $F = q_3 E = q_3\sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$

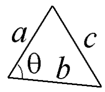
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4q_3}{a^2}\sqrt{\left(\frac{q_1}{5\sqrt{5}} + q_2\right)^2 + \left(\frac{2q_2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2}\sqrt{\left(\frac{5}{5\sqrt{5}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot 10^{-6} = = 0{,}0136 \text{ Н}.$$

Чтобы не запутаться в вычислениях, все величины при подстановке переводите в систему СИ, и выносите общие множители и степени, как это сделано выше.

Угол α между направлением вектора силы $\vec{F}$ (или вектора $\vec{E}$) и осью x можно найти из соотношения

$$\mathrm{tg}\,\alpha = E_y / E_x = 2q_1 \Big/ \left(q_1 + 5\sqrt{5}q_2\right) = 0{,}0856\text{, откуда } \alpha = 4{,}89^{\mathrm{o}}.$$

Складывать векторы намного проще, не вычисляя их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны a *и* b *треугольника и угол* θ *между ними, то противоположная сторона равна* $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$.



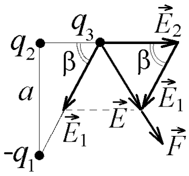
Из рисунка видно, что векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}$ образуют треугольник с углом $\pi - \beta$. Поэтому величина результирующей напряженности сразу следует из теоремы косинусов, где величины напряженностей каждого из зарядов $E_1 = \dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 5a^2} = 4000$ В/м, $E_2 = \dfrac{4q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a^2} = 4000$ В/м. Отсюда

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \beta)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\beta} \text{ и } F = q_3E = 13{,}6 \text{ мН}.$$

Результирующий потенциал зарядов найти много проще, так как он будет суммой скалярных, а не векторных функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{a}\left(\frac{q_1}{\sqrt{5}} + q_2\right) = 1{,}94 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

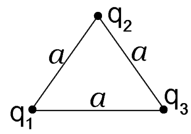
Энергия заряда q_3 в электростатическом поле зарядов q_1 и q_2 будет равна $W = q_3\varphi = q_3(\varphi_1 + \varphi_2) = 0{,}0388$ Дж.



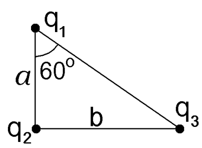
Внимательно следите за знаками зарядов в условиях!

Если заряд q_1 *изменит знак, то вектор* $\vec{E}_1$ *поменяет направление (рисунок справа). Тогда по теореме косинусов* $F = q_3E = q_3\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\beta} = 8{,}41$ мН. *Потенциал заряда* q_1 *изменит знак:* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-|q_1|}{AC} + \dfrac{q_2}{BC}\right) = -7{,}42 \cdot 10^3$ В *и* $W = q_3\varphi = -0{,}0148$ Дж.

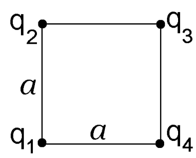
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



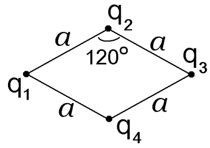
2. Имеющие разные знаки точечные заряды $q_1 = q_3 = 2$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся в вершинах равностороннего треугольника. На заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 действует электрическая сила величиной $F = 0{,}01$ Н. Найти длину a стороны треугольника.



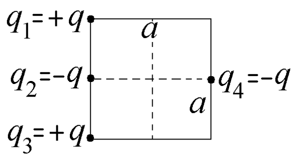
3. Точечные заряды одного знака $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл и q_3 находятся в вершинах прямоугольного треугольника с углом 60^{o} и с прилежащим катетом $a = 1$ м. Определить величину заряда q_3, если величина электрической силы, действующей на него со стороны двух других зарядов q_1 и q_2, равна $F = 6$ мН. Определить величину энергии заряда q_3.



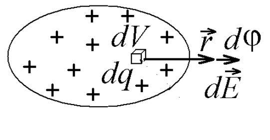
4. Точечные заряды разного знака q_1, q_2, q_3 и q_4 находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 2$ м. Определить величину положительного заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на него со стороны трёх других зарядов q_2, q_3. и q_4., равен $F = 0{,}2$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4 в точке, где находится заряд q_1. Учесть, что $q_2 = q_4 = -2$ мкКл, $q_3 = +6$ мкКл.



5. Точечные заряды разного знака $q_1 = q_3 = +3$ мкКл, $q_2 = q_4 = -2$ мкКл находятся в вершинах ромба с углом 120^{o} и с длиной каждой из сторон $a = 1$ м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q_3 со стороны трёх других зарядов q_1, q_2. и q_4. Найти энергию заряда q_3 в поле трех остальных зарядов.



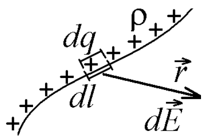
6. Точечные заряды q_1, q_2, q_3. и q_4. имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны a =3 м, как показано на рисунке. Определить величину заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на заряд q_4 со стороны трёх зарядов q_1, q_2. и q_3. равен $F = 1$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4. в точке расположения заряда q_1.



Если заряд распределен непрерывно по объему с плотностью ρ, то его можно разбить на крошечные участки dV, заряды которых можно считать **точечными**

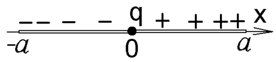
$dq = \rho dV$. Созданные ими напряженности $d\vec{E}$ и потенциалы $d\varphi$ суммируются. Для бесконечно малых величин такая сумма превращается в интеграл: $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Чтобы избежать интегрирования по объему, в задачах контрольной работы рассматривается заряд, распределенный вдоль прямых линий или окружностей с линейной плотностью ρ [Кл/м]. На бесконечно малом участке линии длиной dl находится заряд $\boxed{dq = \rho dl}$, создающий в вакууме на удалении r потенциал $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ и напряженность $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Интегрировать надо по всем участкам, на которых находится ненулевой заряд $\rho \neq 0$, причем векторы $d\vec{E}$ надо складывать с учетом направления.



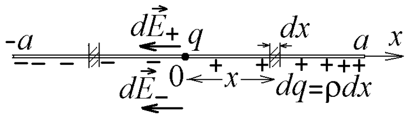
Примеры решения задач:

7. Электрический заряд распределен по очень тонкому стержню длины $2a$ = = 1 м, вытянутому вдоль оси x Линейная плотность кэтого заряда меняется с координатой x по степенному закону $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (x/a)^3 \text{ при } -a \le x \le a, \\ 0 \quad \text{при } |x| > a, \end{cases}$ где ρ_0 = 4 мкКл/м. В центре стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён точечный заряд q = 3 мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд стержня действует на заряд q. Найти потенциал, который заряд на стержне создает в точке 0.



Решение.

Положительный заряд $dq = \rho(x)dx$, находящийся на расстоянии x справа от точки 0, создает в этой точке напряженность $d\vec{E}_+$, направленную от заряда против оси x, как показано на рисунке. Так как по условию положительный и отрицательный заряд распределены симметрично, то такую же по величине напряженность $d\vec{E}_-$, направленную в ту же сторону, создает симметрично расположенный отрицательный заряд $-|dq|$ слева от точки 0.



Используйте условия симметрии в распределении заряда. Достаточно вычислить поле заряда только одного знака.

Положительный и отрицательный заряды создадут в точке 0 одинаковые поля:

$$E_- = E_+ = \int dE_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \left(\rho_0 \frac{x^3}{a^3}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{2a}.$$

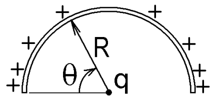
Поэтому суммарная напряженность поля, созданного зарядом на стержне в точке 0 равна $\vec{E} = 2\vec{E}_+$, а проекция силы, действующей на заряд q, $F_x = qE_x = \rho_0 q/(4\pi\varepsilon_0 a) = -0{,}216$ Н.

Нетрудно сообразить, что потенциалы симметрично расположенных положительного и отрицательного зарядов должны компенсировать друг друга,

$$\varphi_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\rho dx}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{3} = -\varphi_-.$$

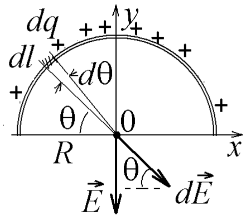
Суммарный потенциал в точке 0 равен нулю.

8. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см неравномерно с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2\theta$, где ρ_0 = 7,08 мкКл/м, а угол θ указан на рисунке. Найти величину электрической силы, с которой этот заряд действует на другой точечный заряд q = 6 мкКл, находящийся в центре полукольца. Найти потенциал, который заряд на полукольце создает в его центре.



Решение.

При решении подобных задач на полукольце выделяют крошечную дугу длины $dl = Rd\theta$, опирающуюся на бесконечно малый угол $d\theta$. На этом участке находится точечный заряд $dq = \rho dl$, создающий в центре 0 полукольца напряженность $dE = dq/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$. Из-за симметрии распределения заряда слева и справа от верти-



кальной оси y, суммарная напряженность $\vec{E}$ направлена против оси y, т.е. надо суммировать проекции на эту ось:

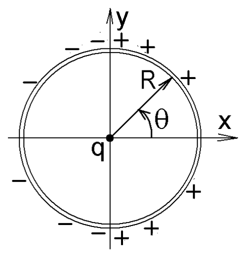
$$E = \int dE \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\theta)\cdot R d\theta}{R^2} \sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{\pi} \rho_0 \sin^2\theta \cdot \sin\theta d\theta$$

При решении подобных задач часто встречаются интегралы вида $\int f(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ *или* $\int f(\sin\theta)\cos\theta d\theta$*, которые легко привести к простому виду заменой переменной* $z = \cos\theta$, $\sin\theta d\theta = -dz$ или $z = \sin\theta$, $\cos\theta d\theta = dz$. *При этом* $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Делая замену переменной $z = \cos\theta$ в полученном выше интеграле и меняя местами пределы интегрирования, чтобы убрать знак “–”, получаем $E = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-1}^{1}\left(1 - z^2\right)dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\rho_0}{3R}$, откуда

$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q\rho_0}{3R} = \, = 0,288$ Н – это сила, действующая на заряд q в точке 0.

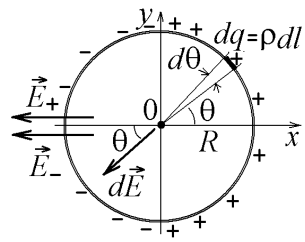
Потенциал, созданный зарядом полукольца в его центре, вычисляется интегрированием. Так как $\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi_0 = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \int_0^{\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot Rd\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi}\rho_0\sin^2\theta d\theta = \frac{\rho_0}{8\varepsilon_0 R} = 200$ кВ.



9. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса R = 60 см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0/\cos\theta$, где ρ_0 = = 1,18 мкКл/м. В центре кольца помещён точечный электрический заряд q, на который заряд кольца действует с силой $F = 1$ Н. Найти величину заряда q.

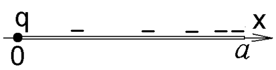
Решение.

Выделяем на кольце крошечный участок дуги $dl = Rd\theta$ с точечным зарядом $dq = \rho dl = \rho R d\theta$, который создает в центре 0 кольца напряженность $d\vec{E}$. Из-за симметрии в распределении заряда и положительный заряд на правой половине кольца, и отрицательный заряд на левой половине создают в точке 0 одинаковые напряженности $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$, направленные против оси x. Их сумма (сумма проекций $d\vec{E}$ на ось x) имеет величину $E = E_+ + E_- = 2E_+ = 2\int dE\cdot\cos\theta = 2\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta =$

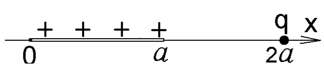


$= 2\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2}\frac{\rho R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{2\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\theta = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R}$. Величина силы, действующей на заряд q в точке 0 $F = qE = q\rho_0/(2\varepsilon_0 R)$, откуда $q = 2\varepsilon_0 RF/\rho_0 = 9$ мкКл.

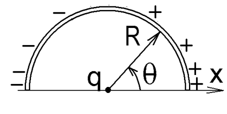
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



10. По тонкому стержню длины a = 2 м, направленному вдоль оси x, неравномерно распределен отрицательный электрический заряд, линейная плотность которого меняется с координатой x по закону $\rho = \rho_0\cdot(x/a)^3$, где ρ_0 = **–2** мкКл/м. На левом краю стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён положительный точечный заряд q = +2 мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд на стержне действует на заряд q, а также потенциал, созданный зарядом на стержне в точке 0.



11. Тонкий стержень длины a направлен вдоль оси x. По стержню равномерно с линейной плотностью ρ = 0,2 мкКл/м распределен положительный электрический заряд. На расстоянии a от правого конца стержня на оси x находится точечный заряд q = 0,5 мкКл того же знака (см. рисунок). Заряд на стержне действует на заряд q с силой F = 0,9 Н. Найти длину a стержня, а также энергию заряда q.

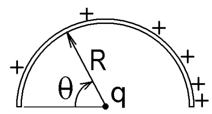


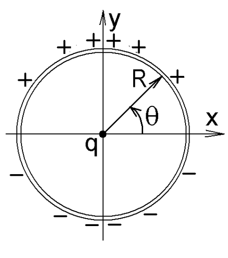
12. Положительный точечный заряд q = 7 мкКл находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью $\rho = \rho_0\cdot\cos\theta$, где ρ_0 =

$= 1{,}77$ мкКл/м, распределен другой электрический заряд (угол θ указан на рисунке). Найти радиус R полукольца, если заряд на нём действует на заряд q с силой, величина проекции которой на ось x равна $|F_x| = 0{,}5$ Н.

13. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса $R = 40$ см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0 \cdot \sin\theta$, где $\rho_0 =$
$= +2{,}95$ мкКл/м. В центре кольца помещён другой точечный заряд $q = +24$ мкКл. Найти величину электрической силы, с которой заряд на кольце действует на заряд q.

14. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса $R = 50$ см с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\theta/\pi\right)^3$, где $\rho_0 = 7{,}08$ мкКл/м, а угол θ меняется в пределах $0 \le \theta \le \pi$. Найти энергию точечного заряда $q = 6$ мкКл, находящийся в центре полукольца.



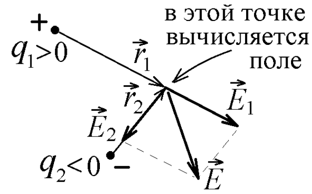


Задание практического занятия №1. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1) Расчет электростатических полей точечных зарядов; 2) Расчет электростатических полей распределенных зарядов

<u>Задание</u>: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).

Если задана система двух или нескольких **точечных** электрических зарядов, то на расстояниях r_1 и r_2 от зарядов их потенциалы складываются с учетом знака заряда, $\boxed{\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} + \dfrac{-|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}}$.

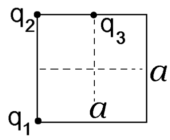
Напряженности складываются векторно, $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2}$, где величины векторов (поля точечных зарядов) $\boxed{E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}}$, $\boxed{E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}}$. Надо помнить, что вектор $\vec{E}_1$ поля положительного заряда $+q_1$ направлен от заряда, а вектор $\vec{E}_2$ поля отрицательного заряда $-q_2$ направлен к заряду, как показано на рисунке (линии $\vec{E}$ начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность). В этих формулах $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная, $\varepsilon -$ диэлектрическая постоянная среды, в которой находятся заряды (для воздуха $\varepsilon \cong 1$) Постоянная $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.



На любой точечный заряд q, внесенный в это поле, будет действовать сила Кулона, равная $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$, а энергия внесенного заряда равна $\boxed{W = q\varphi}$.

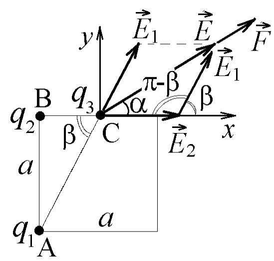
Пример решения задач:

1. Точечные заряды q_1 = +5 мкКл и q_2 = = +1 мкКл находятся в вершинах квадрата со стороной a = 3 м, а заряд q_3 = +2 мкКл – в середине его стороны (см.рисунок). Найти:
а) величину кулоновской силы, действующей на заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2;
б) угол между вектором этой силы и стороной квадрата;
в) энергию заряда q_3. Как изменятся результаты, если заряд q_1 поменяет знак?



Решение.

Аккуратно делайте рисунок, отмечая на нем заданные в условии углы и направления векторов. Правильно сделанный рисунок – это 30-50% успешного решения задачи. Как видно из рисунка величины напряженностей $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC^2}$; $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot BC^2}$, где $BC = \dfrac{a}{2}$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}a/2$. Проекции векторов на оси x и y равны $E_{1x} = E_1 \cos\beta$; $E_{1y} = E_1 \sin\beta$; $E_{2x} = E_2$; $E_{2y} = 0$. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что $\cos\beta = BC/AC = 1/\sqrt{5}$; $\sin\beta = AB/AC = 2/\sqrt{5}$.



Проекции результирующего вектора $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ в точке C равны $E_x = E_{1x} + E_{2x} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_2}{a^2}$; $E_y = E_{1y} + E_{2y} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4q_1}{5a^2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Сила Кулона, действующая на заряд q_3 равна $F = q_3 E = q_3\sqrt{E_x^2 + E_y^2} =$

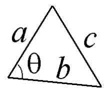
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4q_3}{a^2}\sqrt{\left(\frac{q_1}{5\sqrt{5}} + q_2\right)^2 + \left(\frac{2q_2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3^2}\sqrt{\left(\frac{5}{5\sqrt{5}} + 1\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot 10^{-6} = = 0{,}0136 \text{ Н}.$$

Чтобы не запутаться в вычислениях, все величины при подстановке переводите в систему СИ, и выносите общие множители и степени, как это сделано выше.

Угол α между направлением вектора силы $\vec{F}$ (или вектора $\vec{E}$) и осью x можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg}\alpha = E_y / E_x = 2q_1 \Big/ \left(q_1 + 5\sqrt{5} q_2\right) = 0{,}0856 \text{, откуда } \alpha = 4{,}89^{\circ}.$$

Складывать векторы намного проще, не вычисляя их проекции на оси координат, а используя теорему косинусов: если известны две стороны a *и* b *треугольника и угол* θ *между ними, то противоположная сторона равна* $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}}$.



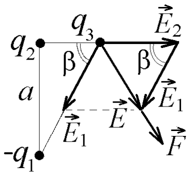
Из рисунка видно, что векторы $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}$ образуют треугольник с углом $\pi - \beta$. Поэтому величина результирующей напряженности сразу следует из теоремы косинусов, где величины напряженностей каждого из зарядов $E_1 = \dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 5a^2} = 4000$ В/м, $E_2 = \dfrac{4q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a^2} = 4000$ В/м. Отсюда

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos(\pi - \beta)} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\beta} \text{ и } F = q_3E = 13{,}6 \text{ мН}.$$

Результирующий потенциал зарядов найти много проще, так как он будет суммой скалярных, а не векторных функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot AC} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot BC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{a}\left(\frac{q_1}{\sqrt{5}} + q_2\right) = 1{,}94 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

Энергия заряда q_3 в электростатическом поле зарядов q_1 и q_2 будет равна $W = q_3\varphi = q_3(\varphi_1 + \varphi_2) = 0{,}0388$ Дж.

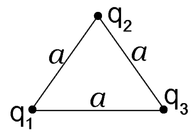


Внимательно следите за знаками зарядов в условиях!

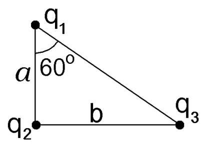
Если заряд q_1 *изменит знак, то вектор* $\vec{E}_1$ *поменяет направление (рисунок справа). Тогда по теореме косинусов* $F = q_3E = q_3\sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\beta} = 8{,}41$ мН. *Потенциал заряда* q_1 *изменит знак:* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{-|q_1|}{AC} + \dfrac{q_2}{BC}\right) = -7{,}42 \cdot 10^3$ В *и* $W = q_3\varphi = -0{,}0148$ Дж.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

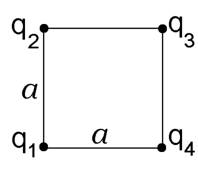
2. Имеющие разные знаки точечные заряды $q_1 = q_3 = 2$ мкКл и $q_2 = -1$ мкКл находятся в вершинах равностороннего треугольника. На заряд q_3 со стороны зарядов q_1 и q_2 действует электрическая сила величиной $F = 0{,}01$ Н. Найти длину a стороны треугольника.



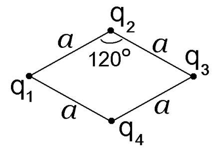
3. Точечные заряды одного знака $q_1 = 1$ мкКл, $q_2 = 2$ мкКл и q_3 находятся в вершинах прямоугольного треугольника с углом 60° и с прилежащим катетом $a = 1$ м. Определить величину заряда q_3, если величина электрической силы, действующей на него со стороны двух других зарядов q_1 и q_2, равна $F = 6$ мН. Определить величину энергии заряда q_3.



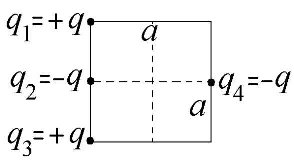
4. Точечные заряды разного знака q_1, q_2, q_3 и q_4 находятся в вершинах квадрата со стороной $a = 2$ м. Определить величину положительного заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на него со стороны трёх других зарядов q_2, q_3. и q_4., равен $F = 0{,}2$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4 в точке, где находится заряд q_1. Учесть, что $q_2 = q_4 = -2$ мкКл, $q_3 = +6$ мкКл.



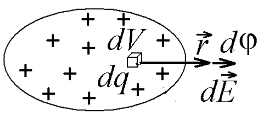
5. Точечные заряды разного знака $q_1 = q_3 = +3$ мкКл, $q_2 = q_4 = -2$ мкКл находятся в вершинах ромба с углом 120° и с длиной каждой из сторон $a = 1$ м. Найти величину электрической силы, действующей на заряд q_3 со стороны трёх других зарядов q_1, q_2. и q_4. Найти энергию заряда q_3 в поле трех остальных зарядов.



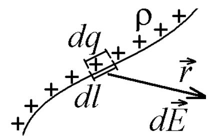
6. Точечные заряды q_1, q_2, q_3. и q_4. имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны a =3 м, как показано на рисунке. Определить величину заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на заряд q_4 со стороны трёх зарядов q_1, q_2. и q_3. равен $F = 1$ мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4. в точке расположения заряда q_1.



Если заряд распределен непрерывно по объему с плотностью ρ, то его можно разбить на крошечные участки dV, заряды которых можно считать **точечными**

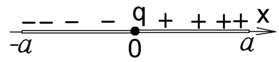


$dq = \rho dV$. Созданные ими напряженности $d\vec{E}$ и потенциалы $d\varphi$ суммируются. Для бесконечно малых величин такая сумма превращается в интеграл: $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$.



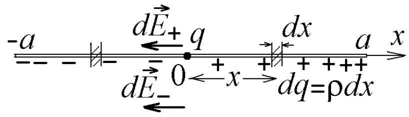
Чтобы избежать интегрирования по объему, в задачах контрольной работы рассматривается заряд, распределенный вдоль прямых линий или окружностей с линейной плотностью ρ [Кл/м]. На бесконечно малом участке линии длиной dl находится заряд $\boxed{dq = \rho dl}$, создающий в вакууме на удалении r потенциал $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ и напряженность $dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Интегрировать надо по всем участкам, на которых находится ненулевой заряд $\rho \neq 0$, причем векторы $d\vec{E}$ надо складывать с учетом направления.

Примеры решения задач:



7**.** Электрический заряд распределен по очень тонкому стержню длины $2a$ = = 1 м, вытянутому вдоль оси x Линейная плотность кэтого заряда меняется с координатой x по степенному закону $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (x/a)^3 \text{ при } -a \le x \le a, \\ 0 \quad \text{при } |x| > a, \end{cases}$ где ρ_0 = 4 мкКл/м. В центре стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён точечный заряд q = 3 мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд стержня действует на заряд q. Найти потенциал, который заряд на стержне создает в точке 0.

Решение.



Положительный заряд $dq = \rho(x)dx$, находящийся на расстоянии x справа от точки 0, создает в этой точке напряженность $d\vec{E}_+$, направленную от заряда против оси x, как показано на рисунке. Так как по условию положительный и отрицательный заряд распределены симметрично, то такую же по величине напряженность $d\vec{E}_-$, направленную в ту же сторону, создает симметрично расположенный отрицательный заряд $-|dq|$ слева от точки 0.

Используйте условия симметрии в распределении заряда. Достаточно вычислить поле заряда только одного знака.

Положительный и отрицательный заряды создадут в точке 0 одинаковые поля:

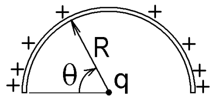
$$E_- = E_+ = \int dE_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \left(\rho_0 \frac{x^3}{a^3}\right)\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{2a}.$$

Поэтому суммарная напряженность поля, созданного зарядом на стержне в точке 0 равна $\vec{E} = 2\vec{E}_+$, а проекция силы, действующей на заряд q, $F_x = qE_x = \rho_0 q/(4\pi\varepsilon_0 a) = -0{,}216$ Н.

Нетрудно сообразить, что потенциалы симметрично расположенных положительного и отрицательного зарядов должны компенсировать друг друга,

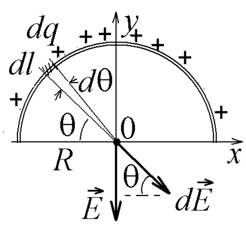
$$\varphi_+ = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{\rho dx}{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_0}{a^3}\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_0}{3} = -\varphi_-.$$

Суммарный потенциал в точке 0 равен нулю.



8. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см неравномерно с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \sin^2\theta$, где ρ_0 = 7,08 мкКл/м, а угол θ указан на рисунке. Найти величину электрической силы, с которой этот заряд действует на другой точечный заряд q = 6 мкКл, находящийся в центре полукольца. Найти потенциал, который заряд на полукольце создает в его центре.

Решение.



При решении подобных задач на полукольце выделяют крошечную дугу длины $dl = Rd\theta$, опирающуюся на бесконечно малый угол $d\theta$. На этом участке находится точечный заряд $dq = \rho dl$, создающий в центре 0 полукольца напряженность $dE = dq/(4\pi\varepsilon_0 R^2)$. Из-за симметрии распределения заряда слева и справа от вертикальной оси y, суммарная напряженность $\vec{E}$ направлена против оси y, т.е. надо суммировать проекции на эту ось:

$$E = \int dE \sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\theta)\cdot Rd\theta}{R^2} \sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{\pi} \rho_0 \sin^2\theta \cdot \sin\theta d\theta$$

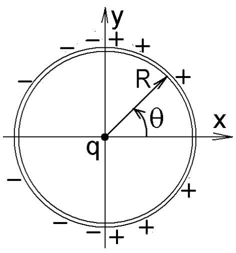
При решении подобных задач часто встречаются интегралы вида $\int f(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ *или* $\int f(\sin\theta)\cos\theta d\theta$*, которые легко привести к простому виду заменой переменной* $z = \cos\theta$, $\sin\theta d\theta = -dz$ или $z = \sin\theta$, $\cos\theta d\theta = dz$. *При этом* $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Делая замену переменной $z = \cos\theta$ в полученном выше интеграле и меняя местами пределы интегрирования, чтобы убрать знак “–”, получаем $E = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-1}^{1}\left(1 - z^2\right)dz = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\rho_0}{3R}$, откуда

$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q\rho_0}{3R} = \; = 0,288$ Н – это сила, действующая на заряд q в точке 0.

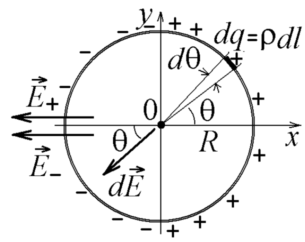
Потенциал, созданный зарядом полукольца в его центре, вычисляется интегрированием. Так как $\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2}$, то $\varphi_0 = \int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \int_0^{\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\cdot Rd\theta}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi}\rho_0\sin^2\theta d\theta = \frac{\rho_0}{8\varepsilon_0 R} = 200$ кВ.

9. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса R = 60 см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0/\cos\theta$, где ρ_0 = = 1,18 мкКл/м. В центре кольца помещён точечный электрический заряд q, на который заряд кольца действует с силой $F = 1$ Н. Найти величину заряда q.



Решение.

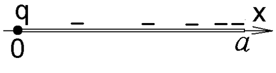
Выделяем на кольце крошечный участок дуги $dl = Rd\theta$ с точечным зарядом $dq = \rho dl = \rho Rd\theta$, который создает в центре 0 кольца напряженность $d\vec{E}$. Из-за симметрии в распределении заряда и положительный заряд на правой половине кольца, и отрицательный заряд на левой половине создают в точке 0 одинаковые напряженности $\vec{E}_+ = \vec{E}_-$, направленные против оси x. Их сумма (сумма проекций $d\vec{E}$ на ось x) имеет величину $E = E_+ + E_- = 2E_+ = 2\int dE\cdot\cos\theta = 2\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta =$



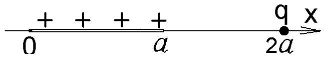
$= 2\int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2}\frac{\rho Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{2\rho_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}d\theta = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 R}$. Величина силы, действующей на заряд q в точке 0 $F = qE = q\rho_0/(2\varepsilon_0 R)$, откуда $q = 2\varepsilon_0 RF/\rho_0 = 9$ мкКл.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

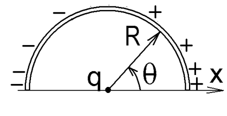
10. По тонкому стержню длины a = 2 м, направленному вдоль оси x, неравномерно распределен отрицательный электрический заряд, линейная плотность которого меняется с координатой x по закону $\rho = \rho_0\cdot(x/a)^3$, где ρ_0 = **—2** мкКл/м. На левом краю стержня, совпадающем с началом координат 0, закреплён положительный точечный заряд q = +2 мкКл (см. рисунок). Найти проекцию на ось x электрической силы, с которой заряд на стержне действует на заряд q, а также потенциал, созданный зарядом на стержне в точке 0.



11. Тонкий стержень длины a направлен вдоль оси x. По стержню равномерно с линейной плотностью ρ = 0,2 мкКл/м распределен положительный электрический заряд. На расстоянии a от правого конца стержня на оси x находится точечный заряд q = 0,5 мкКл того же знака (см. рисунок). Заряд на стержне действует на заряд q с силой F = 0,9 Н. Найти длину a стержня, а также энергию заряда q.



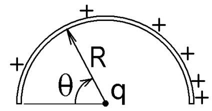
12. Положительный точечный заряд q = 7 мкКл находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью $\rho = \rho_0\cdot\cos\theta$, где ρ_0 =

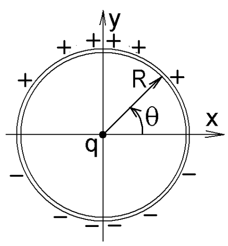


= 1,77 мкКл/м, распределен другой электрический заряд (угол θ указан на рисунке). Найти радиус R полукольца, если заряд на нём действует на заряд q с силой, величина проекции которой на ось x равна $|F_x|$ = 0,5 Н.

13. Электрический заряд распределён по тонкому кольцу радиуса R = 40 см так, что его линейная плотность меняется с углом θ по закону $\rho = \rho_0 \cdot \sin\theta$, где ρ_0 =
= +2,95 мкКл/м. В центре кольца помещён другой точечный заряд q = +24 мкКл. Найти величину электрической силы, с которой заряд на кольце действует на заряд q.

14. Электрический заряд распределён по тонкому полукольцу радиуса R = 50 см с линейной плотностью $\rho = \rho_0 \left(\theta/\pi\right)^3$, где ρ_0 = 7,08 мкКл/м, а угол θ меняется в пределах $0 \le \theta \le \pi$. Найти энергию точечного заряда q = 6 мкКл, находящийся в центре полукольца.





Задание практического занятия №2. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1) Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей; 2) Связь напряженности и потенциала электростатического поля; 3) Энергия электрического поля и конденсаторы.

<u>Задание</u>: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).

В том случае, когда можно выбрать замкнутую поверхность, которую линии напряженности $\vec{E}$ или линии электрической индукции $\vec{D}$ пересекают под прямым углом, для расчета поля удобно использовать теорему Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов $\sum q$ (с учетом их знака!), находящихся **внутри этой поверхности**, деленной на $\varepsilon\varepsilon_0$:

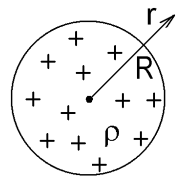
$$\boxed{\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \sum q/\varepsilon\varepsilon_0}\,.$$

Для вектора электрической индукции $\vec{D}$ такая же теорема имеет вид $\boxed{\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \sum q}$.

Используйте теорему Гаусса в том случае, когда заряд распределен симметрично по шару, по длинному цилиндру, по нити или равномерно распределен по плоскости или плоскому слою.

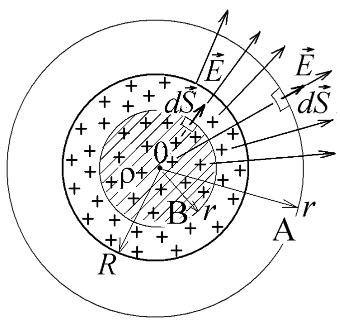
Примеры решения задач:

1. По шару радиуса R равномерно с плотностью ρ распределен электрический заряд. На расстояниях r_1 = 15 см и r_2 = 60 см от центра шара величина напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом, равна, соответственно, E_1 = 24 В/м и E_2 = 12 В/м. Чему равен радиус шара R, если известно, что $r_1 < R < r_2$?



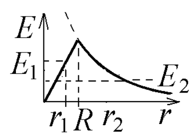
Решение.

Линии $\vec{E}$ начинаются на всех зарядах внутри шара и направлены радиально (рисунок справа). Охватим шар сферической замкнутой поверхностью А с радиусом $r > R$. Если вектор $\vec{E}$ составляет угол θ с вектором элементарной площадки $d\vec{S}$, то $\vec{E}d\vec{S} = E\cos\theta dS$. В нашей задаче элементы площади $d\vec{S}$ направлены параллельно линиям $\vec{E}$, а величина E в силу симметрии одинакова во всех точках сферы. Поэтому поток $\vec{E}$ через замкнутую сферу равен произведению E на площадь поверхности сферы $4\pi r^2$, которую линии E пересекают нормально: $\oint \vec{E}d\vec{S} = E\cos 0^{\circ}\oint dS = . = E\cdot 4\pi r^2 = \sum q/\varepsilon_0$. Сумма зарядов внутри сферы равна заряду шара $\sum q = \rho\cdot V_{\text{шара}} = \rho\cdot 4\pi R^3/3$. Вне шара напряженность $E_{\text{вне}} = \rho R^3/3\varepsilon_0 r^2$ совпадает с напряженностью поля заряда, собранного в центр шара.



Вторую сферическую поверхность В с радиусом $r < R$ выберем внутри шара. Внутри неё находится заряд заштрихованного на рисунке шара радиуса r: $\sum q = \rho\cdot 4\pi r^3/3$. Применение теоремы Гаусса дает $E\cdot 4\pi r^2 = \sum q/\varepsilon_0 = \rho\cdot 4\pi r^3/3\varepsilon_0$.

Поле внутри шара растет пропорционально расстоянию r: $E_{\text{внутри}} = \rho r/3\varepsilon_0$.



Согласно условию, на расстояниях r_1 и r_2 величины напряженностей различаются в два раза: $E_1 = \rho r_1/3\varepsilon_0 = 2E_2 = 2\rho R^3/3\varepsilon_0 r_2^2$, откуда $R = \sqrt[3]{r_1 r_2^2/2} = 30$ см.

Если плотность заряда является функцией расстояния r, то данное решение не меняется, но сумма зарядов внутри сферы радиуса r вычисляется по формуле

$$\sum q = \int \rho(r)\,dV = \int \rho(r)\cdot 4\pi r^2 dr\,.$$

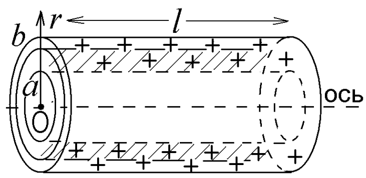
2. По шару радиуса R = 50 см из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ распределён электрический заряд, причём объёмная плотность такого заряда меняется с расстоянием r от центра шара по закону $\rho = \rho_0\cdot(r/R)^2$, где ρ_0 = const. На расстоянии r = 5 см от центра заряд создаёт электрическое поле с величиной напряжённости
E = 20 В/м. Найти величину ρ_0.

Решение.

Как и в предыдущей задаче, поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую сферическую поверхность радиуса r, находящуюся **внутри** шара, равен $E \cdot 4\pi r^2 = \sum q / \varepsilon_0 \varepsilon$ (надо учесть диэлектрическую проницаемость среды). Объем внутри $V = 4\pi r^3 / 3$, элемент объема $dV = 4\pi r^2 dr$.

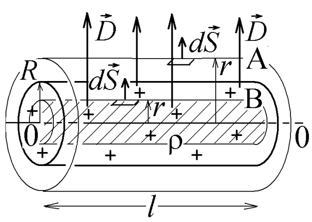
Заряд внутри поверхности $\sum q = \int \rho dV = \int\limits_0^r \rho_0 \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \dfrac{4\pi\rho_0}{R^2} \int\limits_0^r r^4 dr = \dfrac{4\pi\rho_0 r^5}{5R^2}$.

Так как $\varepsilon = 2$, то $E = \dfrac{\rho_0 r^3}{10\varepsilon_0 R^2}$ и $\rho_0 = \dfrac{10\varepsilon_0 \varepsilon R^2 E}{r^3} = 7{,}08$ мкКл/м^3.



3. Две очень длинные цилиндрические поверхности с радиусами a = 1 м и b = 5 м с общей осью О ограничивают равномерно заряженный цилиндрический слой. Плотность электрического заряда в нём ρ = 4 мКл/м^3. Найти величину вектора электрической индукции $\boldsymbol{D}$ на расстоянии r = 4 м от оси О.

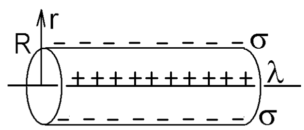
Решение.



Рассмотрим вначале равномерно заряженный с плотностью ρ=const сплошной цилиндр. Окружим его соосной цилиндрической поверхностью А длины l и большего радиуса $r > R$. Как и линии $\vec{E}$, линии индукции $\vec{D}$ направлены по радиусам к общей оси 0 и пересекают боковую поверхность $S_{\text{бок}} = 2\pi rl$ нормально (рисунок справа). Внутри этой поверхности находится заряд из вырезанного поверхностью участка заряженного цилиндра $\sum q = \rho \cdot V_{\text{цилиндра}} = \rho \cdot \pi R^2 l$. Согласно теореме Гаусса $\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 2\pi rl = \sum q$. Поэтому вне цилиндра $D_{\text{вне}} = \rho R^2 / 2r$.

Цилиндрическая поверхность В меньшего радиуса $r < R$, охватывает заштрихованный на рисунке участок цилиндра с зарядом $\sum q = \rho \cdot \pi r^2 l$. Теорема Гаусса для этой поверхности дает $D \cdot 2\pi rl = \sum q = \rho\pi r^2 l$ / Поэтому внутри цилиндра $D_{\text{внутри}} = \rho r / 2$.

В нашей задаче проводим замкнутую цилиндрическую поверхность радиуса $r < b$ и длины l внутри цилиндрического слоя. Она охватывает заштрихованный на рисунке из условия задачи участок с объемом $V = \pi r^2 l - \pi a^2 l$, имеющий заряд $\sum q = \rho V$. Теорема Гаусса позволяет просто определить индукцию D на этой поверхности: $D = \dfrac{\sum q}{2\pi rl} = \rho\left(r^2 - a^2\right) / 2r = 7{,}5$ мКл/м^2.

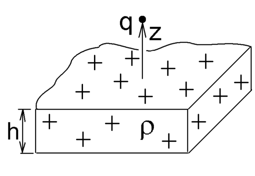


4. Поверхностная плотность электрического заряда, равномерно распределенного по бесконечно длинной цилиндрической поверхности радиуса R = = 30 см, равна σ = –2 мкКл/м^2. По её оси протянута нить, равномерно заряженная с линейной плотностью λ = 4 мкКл/м. На каком удалении r от оси напряженность электрического поля, созданного этими зарядами будет равна $E = 1$ кВ/м?

Решение.

Как и в предыдущей задаче, охватим эту систему зарядов замкнутой цилиндрической поверхностью длины l и радиуса $r > R$. Она охватывает участок цилиндра с зарядом $q_{\text{ц}} = \sigma \cdot 2\pi Rl$ и участок нити с зарядом $q_{\text{н}} = \lambda \cdot l$. Линии $\vec{E}$ расходятся вдоль радиусов и перпендикулярны к выбранной поверхности. Согласно теореме Гаусса $E \cdot 2\pi rl = \sum q / \varepsilon_0 = \left(q_{\text{ц}} + q_{\text{н}}\right) / \varepsilon_0$, откуда $r = \dfrac{2\pi R\sigma + \lambda}{2\pi\varepsilon_0 E} = 4{,}14$ м.

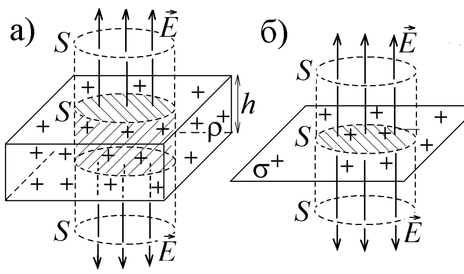
При $r < R$ поле создает только заряд нити. Одна нить создаёт слишком большое поле $E_{\text{нити}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, не удовлетворяющее условиям задачи.



5. На удалении z = 1 м от бесконечного плоского слоя, заряженного равномерно с плотностью заряда ρ = 5 мкКл/м^3, находится точечный заряд q = 4 мкКл. Найти толщину слоя h, если он действует на заряд q с электрической силой F = 0,02 Н.

Решение.

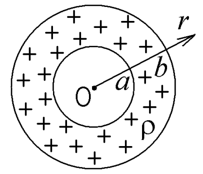
И в случае равномерно заряженного с плотностью ρ слоя (рисунок а), и в случае равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ плоскости (рисунок б), линии напряженности $\vec{E}$ выходят нормально и пересекают только имеющие площадь S основания цилиндрической замкнутой поверхности, охватывающей заряды на заштрихованных участках. По теореме Гаусса поток $\vec{E}$ через эту поверхность $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2S = \sum q / \varepsilon_0 \varepsilon$. Сумма зарядов на заштрихованных участках $\sum q = \rho \cdot hS$ для слоя и $\sum q = \sigma \cdot S$ для плоскости. Поэтому $E_{\text{слоя}} = \dfrac{\rho h}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$ и $E_{\text{плоскости}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$.



Величина E не зависит от расстояния до бесконечного слоя (или плоскости). Действующая на заряд q сила $F = qE$, и по условиям задачи ($\varepsilon = 1$) толщина слоя $h = 2\varepsilon_0 F / q\rho = 1{,}77$ см.

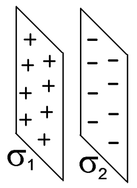
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

6. Заряд с плотностью ρ =3,75 мКл/м^3 равномерно распределён по шаровому слою, ограниченному двумя сферическими поверхностями с общим центром О и с радиусами a и b. Найти радиус a, если b = = 9 м, а на расстоянии r = 5 м от центра О величина вектора электрической индукции поля, созданного этим зарядом, равна D = 6,2 мКл/м^2?

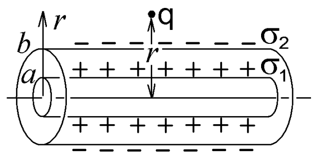


7. Очень длинный цилиндр радиуса R = 4 см равномерно с плотностью ρ = const заряжен по объёму. На расстоянии r_1 = 3 см от оси цилиндра напряжённость электрического поля, имеет величину E_1 = 24 В/м, а на расстоянии $r_2 > r_1$ от оси E_2 = 16 В/м. Найти расстояние r_2.

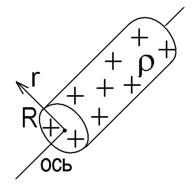
8. По двум параллельным бесконечным плоскостям равномерно распределены электрические заряды с поверхностными плотностями σ_1 = +8 мкКл/м^2 и σ_2 = —4 мкКл/м^2 разного знака. Во сколько раз величина вектора электрической индукции ***D*** между заряженными плоскостями больше величины вектора ***D*** слева от обеих плоскостей?



9. Электрический заряд разного знака, равномерно распределён по двум бесконечно длинным цилиндрическим поверхностям с общей осью, которые имеют радиусы a = 5 см и b = 10 см. Поверхностные плотности таких зарядов σ_1 = —5,9 нКл/м^2 и σ_2 = +4,72 нКл/м^2. Чему равна величина точечного заряда q, находящегося на расстоянии r = 20 см от оси, если со стороны заряженных поверхностей на него действует электрическая сила F = 3 мН?



10. Электрический заряд распределён в пространстве неравномерно: его плотность изменяется с расстоянием r от центра О по закону: $\rho = \begin{cases} \rho_0 \cdot (R/r)^3 \text{ при } r \ge R; \\ 0 \quad \text{ при } r < R, \end{cases}$ где R = = 50 см; ρ_0 = 2,36 нКл/м^3. Найти величину напряжённости электрического поля, созданного этим зарядом на расстоянии r = 1 м от центра О. ε =1.



При решении задач проще использовать дифференциальные операторы (производные). Например, напряженность поля можно определить, зная его потенциал: $\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \equiv -\vec{i}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \vec{j}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \vec{k}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}$.

Зная напряженность, вычисляют плотность заряда, создающего электрическое поле:

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)}.$$

Примеры решения задач:

11. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x) + \sin(\beta y) + \sin(\gamma z))$, где φ_0 = 100 В, α=β=γ= π/2 рад/м. Найти плотности ρ электрического заряда в той точке, в которой потенциал поля равен φ = 100 В, а также величину напряженности в точке $x = y = z = 2$ м. Диэлектрическая проницаемость среды ε = 1.

Решение.

Находим проекции вектора $\vec{E}$: $E_x = -\partial \varphi / \partial x = -\alpha \varphi_0 \cos(\alpha x)$;

$E_y = -\partial\varphi/\partial y = -\beta\varphi_0\cos(\beta y)$; $E_z = -\partial\varphi/\partial z = -\gamma\varphi_0\cos(\gamma z)$. Плотность заряда пропорциональна дивергенции этого вектора и, так как $\alpha = \beta = \gamma$, во всех точках пропорциональна потенциалу:

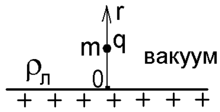
$$\rho = \varepsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \varepsilon_0\left(\alpha^2\varphi_0\sin(\alpha x) + \beta^2\varphi_0\sin(\beta y) + \gamma^2\varphi_0\sin(\gamma z)\right) = \varepsilon_0\alpha^2\varphi = 2{,}18 \text{ нКл/м}^3.$$

Величина напряженности:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\varphi_0^2\cos^2\pi} = \sqrt{3}\alpha\varphi_0 = 544 \text{ В/м}.$$

12. Бесконечная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью $\rho_л$ = = 2 мкКл/м. Покоившаяся первоначально на расстоянии r_1 = 1 м от нити частица с зарядом q = 5 мкКл и с массой m = 0,8 г удаляется от нити под действием электрической силы. На каком расстоянии r_2 от нити частица будет иметь скорость v = 30 м/с?



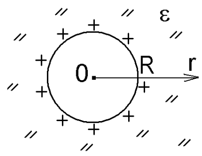
Решение.

Работу по перемещению частицы с зарядом q из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле можно вычислить с помощью силы Кулона: $A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 q\vec{E}d\vec{r}$. Но проще найти её с помощью потенциала. Эта работа идет на изменение кинетической энергии заряженной частицы:

$$\boxed{A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m\text{v}_2^2}{2} - \frac{m\text{v}_1^2}{2}}.$$

Однако в данной задаче можно использовать известное выражение для напряженности поля нити $E_{нити} = \dfrac{\rho_л}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Поэтому $\dfrac{m\text{v}^2}{2} = A_{1\to2} = \displaystyle\int_{r_1}^{r_2} qEdr = \frac{q\rho_л}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{q\rho_л}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$. Избавиться от логарифма можно вычислив экспоненту от обеих частей уравнения: $\exp\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) \equiv \dfrac{r_2}{r_1} = \exp\left(\dfrac{\pi\varepsilon_0 m\text{v}^2}{q\rho_л}\right)$, откуда $r_2 = 7{,}40$ м.

13. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε = 4 заполняет все пространство вокруг заряженного металлического шара радиуса R = 3 см. Чему равна величина заряда q на шаре, если энергия созданного им электрического поля равна W = 60 Дж.



Решение.

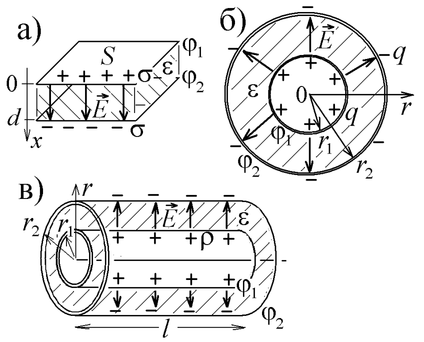
Внутри металлического шара поле отсутствует, а вне шара совпадает с полем точечного заряда, собранного в центр шара: $E = q/\left(4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2\right)$, при $r \geq R$. Плотность энергии электрического поля (или энергия единицы объема поля) $\boxed{\text{w}_{эл} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2}$. Энергия поля в объеме V вычисляется как $\boxed{W = \int \text{w}_{эл}dV}$. Поэтому энергия поля вне шара $W = \displaystyle\int\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}dV = \int_R^\infty \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr =$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R}.$$ Отсюда $q = \sqrt{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 WR} = 40$ мкКл.

Вместо энергии поля иногда проще найти энергию системы зарядов, создающих данное поле. Эти энергии одинаковы.

Энергия заряда выражается через емкость проводника C и его потенциал φ: $W = C\varphi^2/2$, где $q = C\varphi$. Емкость уединенного шара $C_{шара} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, его потенциал $\varphi = q/\left(4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R\right)$. Подставляя, получаем уже найденную формулу для энергии W.

Заряд q и емкость C конденсатора связаны с разностью потенциалов $U = \Delta\varphi$ на его обкладках: $\boxed{q = CU}$. Энергия заряженного конденсатора $\boxed{W = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}$. Емкость вычисляют, с помощью формулы, связывающей напряженность и потенциал поля: $\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{r}}$.



В **плоском конденсаторе** (рисунок а) с площадью пластин *S*, расстоянием между пластинами *d*, заполненном диэлектриком с проницаемостью ε, напряженность поля между пластинами $\boxed{E_{\text{конд}} = \sigma/\varepsilon\varepsilon_0}$, где $\sigma = q/S$ - поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов на пластинах $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E_{\text{конд}}dx = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}d = \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S}$. Ёмкость плоского конденсатора $\boxed{C_{\text{плоск}} = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$.

В **сферическом конденсаторе** (рисунок б) пространство между металлическими сферами с радиусами r_1 и r_2 заполнено диэлектриком с $\varepsilon = \text{const}$. Поле между ними создано зарядом q на внутренней сфере: $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$. Тогда $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{C}$

Ёмкость сферического конденсатора $C_{\text{сфер}} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 r_2 \big/ \left(r_2 - r_1\right)$.

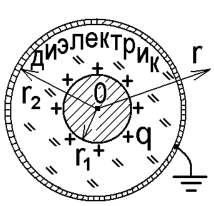
Аналогичным вычислением покажите, что емкость **цилиндрического конденсатора** (две соосные цилиндрические поверхности с радиусами r_1 и r_2 большой длины *l*, рисунок в) равна $C_{\text{цилин}} = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$.

14. Заряженный плоский конденсатор заполнен твердым диэлектриком и имеет энергию *W* = 0,2 Дж. Расстояние между его пластинами *d* = 2 мм. Найти силу, притягивающую одну пластину к другой.

Решение.

На пластину плоского конденсаторас зарядом *q* может действовать только заряд другой пластины, создающий поле $E = \sigma\big/\left(2\varepsilon\varepsilon_0\right)$ (поле заряженной плоскости). Заряд конденсатора можно выразить через его энергию: $q^2 = 2CW = 2W\,\varepsilon\varepsilon_0 S/d$. Подставляя этот результат в формулу для силы $F = qE = q\sigma\big/\left(2\varepsilon\varepsilon_0\right) = q^2\big/\left(2\varepsilon\varepsilon_0 S\right)$, получаем $F = W/d = 100$ Н.

15. Пространство между заряженным металлическим шаром радиуса r_1 = 2 см и металлической заземленной сферой с радиусом r_2 = 4 см заполнено неоднородным диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого меняется с расстоянием *r* от общего центра О по закону ε = α/*r*, где α = 6 см. Найти заряд *q* шара, если энергия такой системы заряженных проводников равна *W* = 0,2 Дж.



Решение.

На внутренней поверхности заземленной сферы окажется заряд $-q$, на котором будут заканчиваться все силовые линии $\vec{E}$, не проникая в металл. Система будет сферическим конденсатором, для которого разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

Его энергия, $W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{8\pi\alpha\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$, и $q = \sqrt{\frac{8\pi\alpha\varepsilon_0 W}{\ln\left(r_2/r_1\right)}} = 1{,}96$ мкКл.

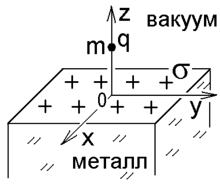
Ёмкость этого конденсатора не совпадает с ёмкостью конденсатора, заполненного однородным диэлектриком.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

16. Потенциал электростатического поля зависит от координат по закону $\varphi = \alpha \cdot xyz$, где $\alpha = \text{const}$. Величина напряженности такого поля в точке с координатами $x_1 = y_1 = z_1 = 1$ м равна $E_1 = 30$ В/м. Найти величину напряжённости этого поля в точке с координатами $x_2 = 1$ м, $y_2 = 2$ м, $z_2 = 3$ м.

17. Потенциал электростатического поля зависит от координат x, y по закону $\varphi = \varphi_0 \cdot (\sin(\alpha x)+\cos(\beta y))$, где $\varphi_0 = 100$ В, $\alpha = 2$ рад/м, $\beta = 3$ рад/м. Найти величину напряженности поля, а также плотность электрического заряда в точке с координатами $x = y = 1$ м.

18. Частица с зарядом $q = 3$ мкКл и с массой $m = 0{,}2$ г покоилась на расстоянии $z_1 = 1$ см от очень большой плоской поверхности металла, по которой с поверхностной плотностью $\sigma = 3{,}54$ нКл/м^2 распределен электрический заряд того же знака. Какую скорость приобретёт частица, удалившись на расстояние $z_2 = 4$ см от поверхности металла под действием электрической силы.



19. Однородная среда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$ заполняет пространство между металлическим шаром и заземленной металлической сферой радиуса $r_2 = 8$ м. На шар помещен заряд q = = 6 мкКл, а потенциал электростатического поля в общем центре О шара и сферы имеет величину φ_0 = 2,4 кВ. Чему равен радиус r_1 шара?

20. Металлический шар с зарядом $q = 4$ мкКл окружен заземленной металлической сферой радиуса $r_2 = 5$ см. Между ними находится диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого убывает с расстоянием r от общего центра О по закону $\varepsilon = b/r^3$, где $b = 150$ см^3. Энергия этой системы заряженных проводников равна $W = 0{,}36$ Дж. Найти радиус шара r_1.

Задание практического занятия №3. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1) Законы квазистационарного тока; 2) Разветвленные электрические цепи и правила Кирхгофа.

Задание: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).

Ток, протекающий по участку цепи с сопротивлением *R*, создает на нем падение напряжения $\boxed{U = IR}$. Мощность тока $\boxed{P = UI = I^2R}$, а величина силы тока зависит от величины заряда, протекшего через сечение проводника за единицу времени: $\boxed{I = dq/dt}$. Величина заряда, протекшего по цепи за время $0 \le t \le \tau$ будет равна $\boxed{q = \int_0^\tau I(t)\,dt}$, а величина выделившегося тепла $\boxed{Q = \int_0^\tau I^2(t)\,Rdt}$.

Примеры решения задач:

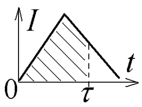
1. Ток, текущий по проводнику, возрастает прямо пропорционально времени *t*: $I = \alpha \cdot t$, где $\alpha = \text{const}$. Чему равно сопротивление *R* проводника, если за промежуток времени $0 \le t \le \tau$, где $\tau = 4$ с, через поперечное сечение проводника протекает заряд $q = 5$ Кл, а в проводнике выделяется джоулево тепло $Q = 80$ Дж?

Решение.

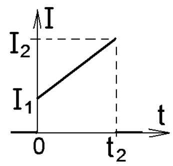
Так как $q = \int_0^\tau Idt = \int_0^\tau \alpha tdt = \dfrac{\alpha\tau^2}{2}$; $Q = \int_0^\tau I^2Rdt = \int_0^\tau \alpha^2t^2Rdt = \dfrac{\alpha^2\tau^3R}{3}$, то $\dfrac{q^2}{Q} = \dfrac{3\tau}{4R}$ (исключили неизвестную α). Поэтому $R = \dfrac{3\tau Q}{4q^2} = 9{,}6\ \text{Ом}$.

Если зависимость силы тока от времени задана с помощью графика (в задачах обычно задана линейная зависимость), то её надо выразить линейной функцией: $I = a + bt$. *Параметры a и b этой зависимости определяют подстановкой числовых данных на осях графика.*

Надо также помнить, что интеграл равен площади под графиком подынтегральной функции. Например, протекший за время τ *заряд будет равен заштрихованной площади под графиком тока.*



2. По проводнику с сопротивлением $R = 2$ Ом течёт ток, величина которого за интервал времени $0 \le t \le t_2 = 3$ с меняется по линейному закону от $I_1 = 2$ А до $I_2 = 5$ А (см. рисунок). Чему равно тепло *Q*, которое выделится в проводнике за указанный интервал времени $0 \le t \le t_2$ с, а также заряд *q*, который протечет по проводнику за это время?

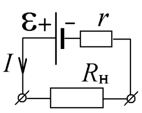


Решение.

Так как $I = a + bt$, то при $t = 0$ имеем $I_1 = a$, а при $t = t_2$ $I_2 = a + bt_2$. Отсюда $b = (I_2 - I_1)/t_2 = 1$ А/с; $a = I_1 = 2$ А. Поэтому $Q = \int I^2Rdt = \int (a+bt)^2 Rdt = R\left(a^2\int_0^{t_2} dt + 2ab\int_0^{t_2} tdt + b^2\int_0^{t_2} t^2dt\right) =$

$= R\left(a^2t_2 + abt_2^2 + b^2t_2^3/3\right) = 78$ Дж. Протекший заряд $q = \int Idt$ равен площади под графиком тока:

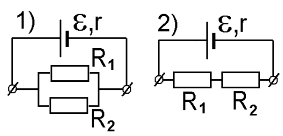
$q = \dfrac{1}{2}(I_1 + I_2)t_2 = 10{,}5$ Кл.



В случае, когда к источнику тока с **постоянной** ЭДС ε подключена внешняя нагрузка с сопротивлением $R_н$, по цепи протекает постоянный ток $I = \varepsilon/(R_н + r)$. Помните: у каждого источника тока есть внутреннее сопротивление *r* !

В этом случае за время Δt на нагрузке выделяется тепло $Q = I^2R\Delta t$.

3. К клеммам источника постоянного тока с внутренним сопротивлением $r = 40$ Ом сначала подключали нагрузку из двух одинаковых сопротивлений $R_1 = R_2 = R$, соединенных параллельно (рис.1), а потом соединённых последовательно (рис.2). В цепи на рис.1 за одну минуту на нагрузке выделялось тепло $Q_1 = 3{,}6$ кДж, а в цепи на рис.2 за то же время на нагрузке выделялось тепло



Q_2 = 2,5 кДж. Чему равно каждое из сопротивлений R_1 или R_2? Какой заряд протекает через нагрузку в обоих случаях?

Решение.

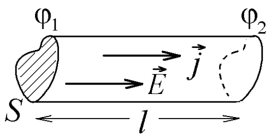
При параллельном соединении резисторов сопротивление нагрузки равно $R_{н1} = R_1R_2/(R_1+R_2) = R/2$, а при последовательном – $R_{н2} = R_1 + R_2 = 2R$. Поэтому $Q_1 = I_1^2 R_{н1}\Delta t = \left(\dfrac{\varepsilon}{r+R/2}\right)^2 \dfrac{R}{2}\Delta t$;

$Q_2 = I_2^2 R_{н2}\Delta t = \left(\dfrac{\varepsilon}{r+2R}\right)^2 2R\Delta t$. Отсюда $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{36}{25} = \dfrac{(r+2R)^2}{4(r+R/2)^2}$, или $\dfrac{r+2R}{r+R/2} = \dfrac{12}{5}$ и $R = \dfrac{7r}{4} = 70$ Ом.

Зная сопротивления, можно вычислить величину ЭДС, величину токов $I_1 = \sqrt{2Q_1/R\Delta t}$; $I_2 = \sqrt{Q_2/2R\Delta t}$, а также определить протекший за время Δt заряд:

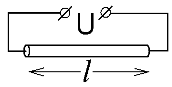
$$q_1 = I_1\Delta t = \sqrt{\frac{2Q_1\Delta t}{R}} = 111 \text{ Кл}; \; q_2 = I_2\Delta t = \sqrt{\frac{Q_2\Delta t}{2R}} = 46{,}3 \text{ Кл}.$$

Если в условии задачи приведены удельное сопротивление проводника ρ *или его удельная проводимость* $\sigma = 1/\rho$*, то можно использовать закон Ома в локальной форме:* $\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$.



Здесь $\vec{E}$ - напряженность стороннего электрического поля, создающего ток, а $j = dI/dS$ - плотность тока, текущего через поперечное сечение S проводника, которое может иметь произвольную форму. Величина силы тока, текущего по проводнику $\boxed{I = \int jdS}$. Если плотность тока во всех точках сечения S одинакова, то $I = jS$, а падение напряжения на проводнике длины l равно $\varphi_1 - \varphi_2 = \int Edl = \boxed{U = El}$.

Подстановкой j и E из закона Ома в локальной форме легко получить обычную запись закона Ома $U = IR$, где сопротивление участка однородного проводника $\boxed{R = \rho l/S = l/\sigma S}$.



4. Когда проволока длины l_1 была подключена к источнику постоянного напряжения U, в ней каждую минуту выделялось джоулево тепло Q_1 = 729 Дж. Затем эту проволоку растянули до длины l_2 и подключили к тому же источнику напряжения U. Теперь каждую минуту в проволоке начало выделяться тепло Q_2 = 625 Дж. Во сколько раз была увеличена длина проволоки?

Решение.

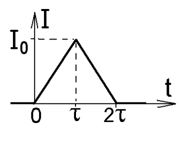
Текущий по проволоке ток $I = U/R$ постоянен. Меняется сопротивление $R_1 = \rho l_1/S_1 \to R_2 = \rho l_2/S_2$, где S –сечение проволоки, уменьшающееся при её растяжении. Поэтому

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U^2}{R_1}\Delta t \bigg/ \frac{U^2}{R_2}\Delta t = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2S_1}{l_1S_2}.$$

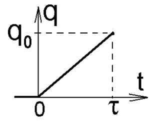
Но при растяжении не меняется объём проволоки $V = l_1S_1 = l_2S_2$. Отсюда $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{l_2}{l_1}$ и $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \left(\dfrac{l_2}{l_1}\right)^2$.

Длина проволоки меняется в $l_2/l_1 = \sqrt{Q_1/Q_2} = 1{,}08$ раз.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

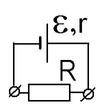


5. По проводнику течёт ток, величина которого меняется со временем t, как показано на рисунке, где I_0 = 0,6 А, τ = 3 с. Заряд какой величины q протечет через сечение проводника за интервал времени $0 \le t \le 2\tau$?

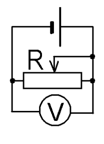


6. В начальный момент t = 0 по проводнику с сопротивлением R = 8 Ом начинает течь ток, причем величина протекшего через поперечное сечение проводника заряда q линейно растёт со временем t (см.рисунок). Найти величину заряда q_0 протекшего к моменту времени τ = 3 с, если за промежуток времени $0 \le t \le \tau$ в проводнике выделится джоулево тепло Q = 24 Дж?

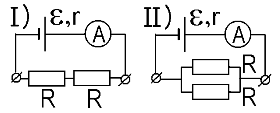
7. К клеммам источника постоянного тока подключена нагрузка с сопротивлением R = = 30 Ом. За какой промежуток времени Δt в нагрузке выделится джоулево тепло Q = 15 Дж, если за это же время по цепи протечёт заряд q = 5 Кл?

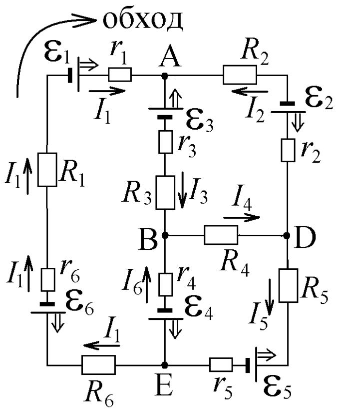


8. Вначале сопротивление реостата, подключенного к источнику постоянного тока с эдс ε = 36 В, было равно R_1 = 100 Ом. Движком реостата увеличили его сопротивление в 4 раза, и при этом падение напряжения на нем в возросло в k = 1,5 раз. Какое джоулево тепло стало после этого выделяться на реостате каждую секунду?



9. Два одинаковых резистора с сопротивлением R = 8 Ом каждый подключены к источнику постоянного тока сначала последовательно (рис.I), а потом параллельно (рис.II). Во втором случае ток, показываемый амперметром, в 2,5 раз больше, чем в первом. По цепи, изображённой на правом рис.II за время Δt =2 мин протекает заряд q_{II} = 48 Кл. Чему равна величина эдс данного источника тока?

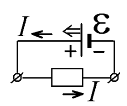




При решении задач с разветвленными цепями делайте следующие действия, которые автоматически приведут Вас к правильному решению (для примера показана схема на рисунке слева).

1) Аккуратно нарисуйте схему разветвленной цепи и жирными точками обозначьте все узлы – точки, где соединяются три и более проводника (точки A, B, D, E на рисунке);

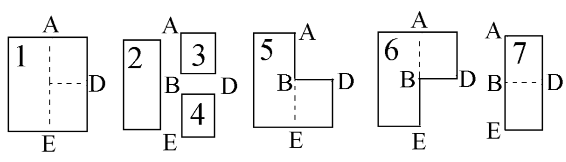
2) **Рядом** с каждым источником ЭДС ε_i поставьте его внутреннее сопротивление r_i. На каждом источнике обозначьте стрелку =>, выходящую из его плюсовой клеммы. Эта стрелка показывает направление тока I_i, создаваемое источником ε_i в неразветвленной цепи.



3) В каждой ветви – участке цепи между двумя узлами – стрелкой обозначьте направление текущего тока. На рассматриваемой схеме видно 6 ветвей и 6 токов $I_1 - I_6$. Старайтесь проставить индексы токов такими же, как индексы сопротивлений, по которым они текут. Вдоль одной ветви ток не должен менять ни величину, ни направление, как показано для тока I_1. Не думайте, в какую сторону действительно течет ток. Если Вы ошиблись с направлением, то в ответе получите этот ток с правильной величиной, но со знаком "минус".

4) Для каждого узла можно записать первое правило Кирхгофа: $\sum I_i = 0$: токи, входящие в узел записывайте со знаком"+", а выходящие – со знаком "-". Число токов равно числу проводников, соединяющихся в узле: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ для узла A; $I_3 + I_6 - I_4 = 0$ для узла B; $I_4 - I_2 - I_5 = 0$ для узла D и.т.п.

5) Выберите направление обхода (например, по часовой стрелке, как показано на рисунке) и запишите второе правило Кирхгофа для любого замкнутого контура цепи: $\sum U_i = \sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i$ (алгебраическая сумма падений напряжения в замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС в этом же замкнутом контуре). В рассматриваемой цепи имеется семь **разных** замкнутых контуров (рисунок справа).



Если выбранное направление стрелки тока совпадает с направлением обхода, то этот ток в сумме берется со знаком "+", если не совпадает – со знаком "-". Если стрелка ЭДС => совпадает с направлением обхода, то эта ЭДС входит в сумму со знаком "+", если не совпадает – со знаком "-". Менять направление уже поставленных стрелок нельзя. Идите по направлению обхода и записывайте падения напряжения **только для тех сопротивлений, которые Вы встретите в выбранном контуре**. Пройдя по контуру второй раз, запишите все встреченные ЭДС с соответствующими знаками:

Например, $I_1R_6 + I_1r_6 + I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 + I_5R_5 + I_5r_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6$ для контура 1;

$I_1R_6 + I_1r_6 + I_1R_1 + I_1r_1 - I_2R_2 - I_2r_2 - I_4R_4 - I_6r_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \varepsilon_6$ для контура 6 и.т.п.

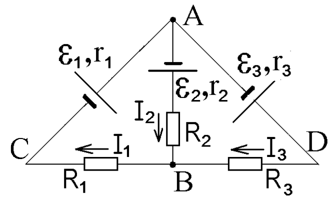
6) Число возможных уравнений (1-е правило Кирхгофа для 4 узлов и 2-е правило для 7 контуров в цепи на рис.1.17) превышает число неизвестных токов $I_1 - I_6$. Эти уравнения будут линейно зависимыми.

Линейно независимыми для цепи с N узлами будут уравнения 1-го правила Кирхгофа для любых $N-1$ узлов и уравнения 2-го правила Кирхгофа для самых маленьких контуров, пустых внутри. Для рассматриваемой цепи это, например, узлы A, B и D, и контуры 2, 3 и 4. Остается без ошибок решить записанную систему линейных уравнений.

Как правило, в задаче контрольной работы надо рассчитать цепь с двумя узлами. В этом случае решается простая система из трех уравнений.

Примеры решения задач:

10. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1= r_2= r_3=$ 1 Ом. Найти величину сопротивления R_3, если известно, что R_1= 2 Ом; R_2= 3 Ом; ε_1= 12 В; ε_2= 8 В; ε_3=10 В; I_2 = 2 А.



Решение.

Линейно независимой будут уравнения системы из 1-го правила Кирхгофа, записанного для узла B: $I_2 + I_3 - I_1 = 0$, и двух 2-х правил Кирхгофа, записанных для треугольных контуров CAB и BAD:

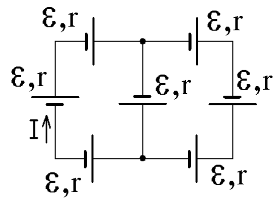
$$I_1R_1 + I_1r_1 + I_2R_2 + I_2r_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2\,; \qquad I_3R_3 + I_3r_3 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2\,.$$

(направление обхода – по часовой стрелке). Эта система из трех уравнений содержит три неизвестные величины I_1, I_3 и R_3.

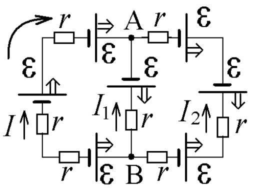
Решать такую систему в буквенных обозначениях всё ещё слишком громоздко. Если Вы уверены в записанных уравнениях – подставьте все числовые значения из условия в системе СИ. Тогда ответ также получится в системе СИ. Уравнения станут простыми, но проверить размерности Вы уже не сможете.

Из второго уравнения находим единственную не заданную в нем величину $I_1 = 4$ А. Подставляя её в первое уравнение, находим $I_3 = I_1 - I_2 = 2$ А. Последнюю неизвестную R_3 находим из последнего уравнения, подставляя все найденные величины: $R_3 = 4$ Ом.

11. Семь одинаковых источников тока с внутренним сопротивлением r = =1 Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину ЭДС ε каждого из источников если по левому проводнику протекает ток I = 3,2 А.



Решение.



Направим стрелки токов I_1 и I_2 вверх, как и стрелку тока I. Все токи сходятся в узле A (рисунок слева) $I + I_1 + I_2 = 0$. Это означает, что направление каких-то токов указано неверно и в процессе вычисления эти токи будут иметь разный знак. Для контуров слева и справа от линии AB 2-е правило Кирхгофа имеет вид:

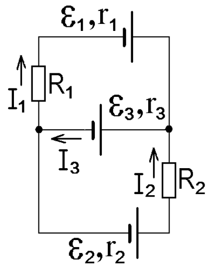
$$Ir + Ir + Ir - I_1r = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon\,, \qquad I_1r - I_2r - I_2r - I_2r = \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon\,.$$

Получили систему с тремя неизвестными I_1, I_2 и ε:

$\begin{cases} I_1 + I_2 = -I, \\ 2\varepsilon + I_1r = 3Ir, \\ I_1r - 3I_2r = 0. \end{cases}$ Из последнего уравнения $I_2 = \dfrac{I_1}{3}$, из первого $I_1 = -\dfrac{3}{4}I$, из второго уравнения

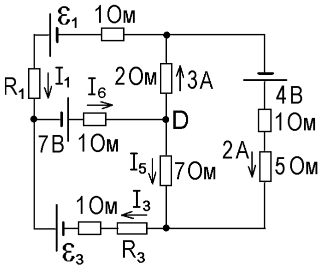
$\varepsilon = \dfrac{(3I - I_1)r}{2} = \dfrac{15Ir}{8} = 6$ В. Токи $I_1 = -2{,}4$ А и $I_2 = -0{,}8$ А имеют правильную величину, но направления их мы не угадали.

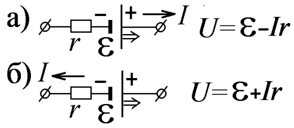
12. Три источника тока с одинаковыми внутренними сопротивлениями $r_1= r_2=r_3=$ = 1 Ом включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке. Найти величину падения напряжения U_3 на клеммах источника тока с ЭДС ε_3= 9 В и внутренним сопротивлением r_3, если R_1= 2 Ом; R_2= 3 Ом; ε_1= 16 В; ε_2= 25 В.



Решение.

Направления токов на рисунке уже заданы. 1-е правило Кирхгофа для левого узла имеет вид $I_3 - I_1 - I_2 = 0$. 2-е правило Кирхгофа для верхнего маленького контура $I_1R_1 + I_1r_1 + I_3r_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$, для нижнего маленького контура $-I_3r_3 - I_2R_2 - I_2r_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ (обход – по часовой стрелке). После подстановки числовых данных в СИ имеем простую систему: $\begin{cases} I_3 - I_1 - I_2 = 0, \\ 3I_1 + I_3 = 7, \\ I_3 + 4I_2 = 16. \end{cases}$ Решение этой системы дает $I_1 = 1$ А; $I_2 = 3$ А; $I_3 = 4$ А.

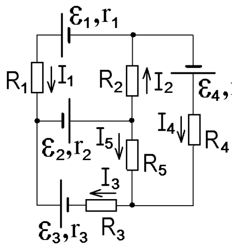




Помните, что если ток I **разряжает** батарею с ЭДС ε и с внутренним сопротивлением *r* (рисунок а), то падение напряжения на её клеммах $\boxed{U = \varepsilon - Ir}$. Если же ток **заряжает** батарею (рисунок б), то $\boxed{U = \varepsilon + Ir}$. Величина $U > \varepsilon$, иначе ток не потечет против источника ЭДС.

В нашей задаче, как видно из рисунка, ток I_3 направлен против источника ЭДС ε_3, и напряжение на его клеммах $U_3 = \varepsilon_3 + I_3 r = 13$ В.

Если цепь содержит больше двух узлов и линейно независимых уравнений слишком много, расставьте все числовые данные задачи на схеме и определите узлы или контуры, для которых уравнения правил Кирхгофа включают только одну неизвестную величину.



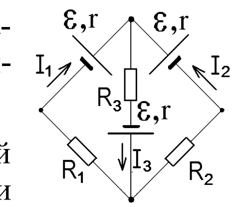
13. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$ Ом. Найти величину падения напряжения на клеммах источника ε_2, если известно, что $\varepsilon_2 = 7$ В; $\varepsilon_4 = 4$ В; $R_2 = 2$ Ом; $R_4 = 5$ Ом; $R_5 = 7$ Ом; $I_2 = 3$ А; $I_4 = 2$ А.

Решение.

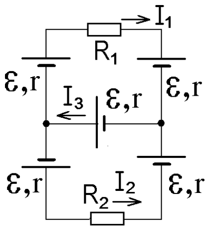
Обозначим все числовые данные задачи на схеме (рисунок слева). Теперь видно, что в уравнение 2-го правила Кирхгофа для правого контура входит единственная неизвестная величина – ток I_5: $I_2 R_2 + I_4 \left(R_4 + r_4\right) - I_5 R_5 = \varepsilon_4$, откуда легко найти $I_5 = 2$ А.

Далее из уравнения 1-го правила Кирхгофа для узла D на этом рисунке находим величину тока $I_6 = I_2 + I_5 = 5$ А. Этот ток будет разряжать источник ε_2, и падение напряжения на его клеммах согласно равно $U_2 = \varepsilon_2 - I_6 r_2 = 4$ В.

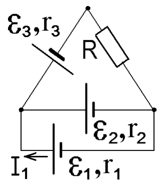
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



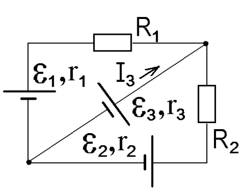
14. Три одинаковых источника тока с внутренним сопротивлением *r* = 1 Ом каждый включены в разветвленную цепь, изображённую на рисунке справа. Найти величину ЭДС ε каждого из источников тока, если $R_1 = 1$ Ом; $R_2 = 2$ Ом; $R_3 = 3$ Ом; $I_3 = 5$ А.



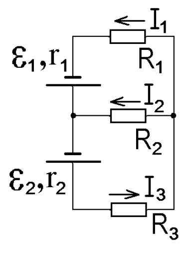
15. Пять одинаковых источников тока с ЭДС ε=11 В каждый включены в разветвленную цепь, показанную на рисунке слева. Найти величину внутреннего сопротивления *r* источника тока, если $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = 6$ Ом; $I_1 = 1$ А.



16. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину тока I_1, текущего через источник ε_1, если известно, что $R = 5$ Ом; $\varepsilon_1 = 8$ В; $\varepsilon_2 = 4$ В; $\varepsilon_3 = 32$ В.



17. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке слева одинаковы: $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом. Найти величину ЭДС ε_3, , если известно, что $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 4$ Ом; $\varepsilon_1 = 2$ В; $\varepsilon_2 = 10$ В; $I_3 = 2$ А.



18. Внутренние сопротивления двух источников тока, приведенных на рисунке справа одинаковы: $r_1 = r_2 = 1$ Ом. Найти величину сопротивления R_2, если известно, что $R_1 = 2$ Ом; $R_3 = 2$ Ом; $\varepsilon_1 = 9$ В; $\varepsilon_2 = 36$ В; $I_2 = 3$ А.

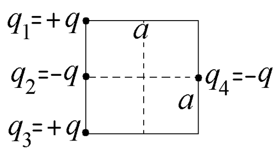
Задание практического занятия №4. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1-я контрольная работа.

Условия вариантов контрольной работы будут сообщены каждому студенту группы в индивидуальном порядке.

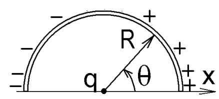
Ниже для ознакомления приводится демонстрационный пример такого варианта.

1-я контрольная работа. Демонстрационный вариант.

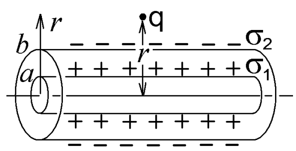
1. Точечные заряды q_1, q_2, q_3. и q_4. имеющие одинаковую величину и разный знак, расположены в двух вершинах и в серединах двух сторон квадрата с длиной стороны a =3 м, как показано на рисунке. Определить величину заряда q_1, если модуль электрической силы, действующей на заряд q_4 со стороны трёх зарядов q_1, q_2. и q_3. равен F = 1 мН. Найти потенциал, созданный зарядами q_2, q_3 и q_4. в точке расположения заряда q_1.



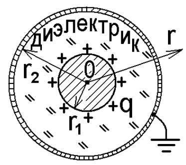
2. Положительный точечный заряд q = 7 мкКл находится в центре тонкого полукольца, по которому неравномерно, с линейной плотностью ρ = ρ$_0$·cosθ, где ρ$_0$ = = 1,77 мкКл/м, распределен другой электрический заряд (угол θ указан на рисунке). Найти радиус R полукольца, если заряд на нём действует на заряд q с силой, величина проекции которой на ось x равна $|F_x|$ = 0,5 Н.



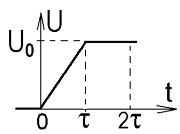
3. Электрический заряд разного знака, равномерно распределён по двум бесконечно длинным цилиндрическим поверхностям с общей осью, которые имеют радиусы a = 5 см и b = 10 см. Поверхностные плотности таких зарядов σ_1 = −5,9 нКл/м^2 и σ_2 = +4,72 нКл/м^2. Чему равна величина точечного заряда q, находящегося на расстоянии r = 20 см от оси, если со стороны заряженных поверхностей на него действует электрическая сила F = 3 мН?



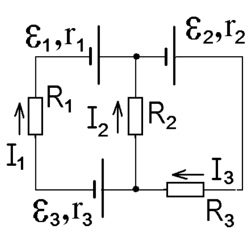
4. Металлический шар радиуса r_1 = 2 см и заземленная металлическая сфера радиуса r_2 = 3 см имеют общий центр О. Диэлектрическая проницаемость непроводящей среды, заполняющей пространство между шаром и сферой, убывает с расстоянием r от центра О по закону ε = a/r, где a = 4 см. Найти ёмкость такой системы проводников (в пФ).



5. Падение напряжения на участке проводника с сопротивлением R = 24 Ом вначале линейно возрастает со временем t, а потом постоянно и равно U_0 = 12 В (см. рисунок, где τ = 1 мин). Какое джоулево тепло выделится в проводнике за промежуток времени $0 \le t \le 2\tau$?



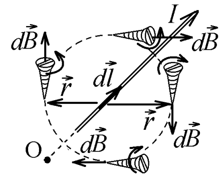
6. Внутренние сопротивления всех источников тока, приведенных на рисунке одинаковы: r_1= r_2= r_3= 1 Ом. Найти величину тока I_2, текущего через сопротивление R_2 , если известно, что R_1= R_3= 3 Ом; R_2= 2 Ом; ε$_1$= 12 В; ε$_2$= 14 В; ε$_3$= 4 В.



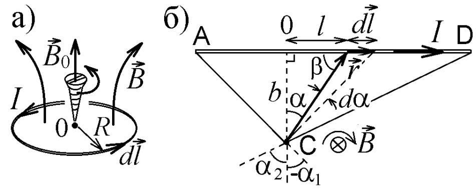
Задание практического занятия №5. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1) Расчет магнитных полей, созданных линейными токами; 2) Расчет магнитных полей с помощью теоремы о циркуляции.

Задание: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).

Элемент тока I длины $d\vec{l}$, направленный по току, создает на расстоянии $\vec{r}$ магнитное поле с индукцией $\boxed{d\vec{B}=\dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\dfrac{\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}}$, линии которой охватывают элемент тока, как показано на рисунке, направление которой легко определить с помощью правила винта. Здесь $\mu -$ магнитная проницаемость среды ($\mu=1$ в вакууме или воздухе), $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная.



В задачах очень важно правильно определить направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ в любой точке. Для этого надо поставить винт перпендикулярно току и радиус-вектору $\vec{r}$, проведенному в эту точку. Если вращать винт ближней стороной по направлению тока, как показано на рисунке, то направление его поступательного движения покажет направление вектора $\vec{B}$. Замкнутые линии $\vec{B}$ охватывают проводник с током.



Чтобы найти индукцию $\vec{B}$ всего тока надо взять интеграл по длине проводника: $\vec{B}=\int d\vec{B}$. В задачах контрольной работы встречаются токи, текущие по круговому или по прямому проводнику.

В центре 0 кругового витка радиуса R с током I (рисунок а) получаем $B_0=\dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{rdl\sin 90^{\circ}}{r^3}=\dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2}\underbrace{\oint dl}_{=2\pi R}=\dfrac{\mu\mu_0 I}{2R}$.

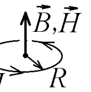
Для точки С, находящейся на расстоянии b от прямого отрезка с током I, как видно из треугольника на рисунке б, выполняются соотношения $r=b/\cos\alpha$; $l=b\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $dl=bd\left(\mathrm{tg}\,\alpha\right)=bd\alpha/\cos^2\alpha$. Угол β между радиус-вектором $\vec{r}$ и элементом тока $Id\vec{l}$ равен $\beta=90^{\circ}-\alpha$. Поэтому

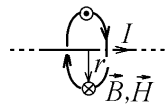
$$B_C=\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{rdl\sin\beta}{r^3}=\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha d\alpha=\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b}\left(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2\right).$$

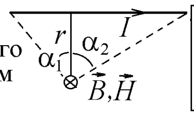
Пределы интегрирования $-\alpha_1$ и α_2 соответствуют граничным точкам A и D отрезка с током (точка 0 на рисунке б соответствует углу $\alpha=0$). Для бесконечного прямого проводника с током $\alpha_1,\alpha_2\to 90^{\circ}$ и $B_C=\dfrac{\mu\mu_0}{2\pi b}$.

Помимо индукции $\vec{B}$ магнитное поле можно описать вектором напряженности $\vec{H}$, которая в неферромагнитной среде имеет вид $\vec{H}=\vec{B}/\mu\mu_0$.

Все полученные для индукции $\vec{B}$ формулы будут справедливыми и для напряженности $\vec{H}$ магнитного поля, если в них убрать множитель $\mu\mu_0$:

в центре кругового тока  $\boxed{B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{2R},\ H=\dfrac{I}{2R}}$

для бесконечного прямого тока  $\boxed{B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{2\pi r},\ H=\dfrac{I}{2\pi r}}$

для прямолинейного отрезка с током  $\boxed{B=\dfrac{\mu\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)\quad H=\dfrac{I}{4\pi r}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)}$

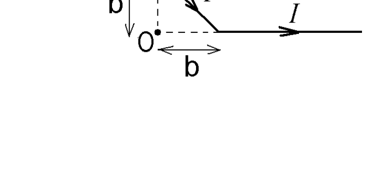
В задачах контрольной работы линейные токи состоят из отдельных участков круговых токов, прямолинейных отрезков с токами и прямых бесконечных проводников с токами.

Необходимо разбить систему на такие участки, определить величину **и правильное направление** вектора $\vec{B}$ или $\vec{H}$, созданного током, текущим по каждому участку, а затем сложить все эти векторы.

Учтите, что на продолжении прямого тока поле не создается: $B_O=0$.

Примеры решения задач:

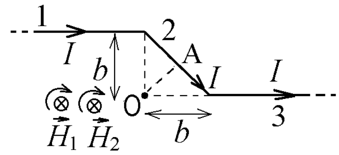
1. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых проводников, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину напряжен-



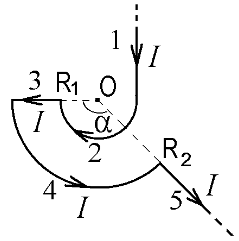
ности магнитного поля, создаваемого этим током в точке О, если b = 40 см.

Решение.

Разбиваем систему на отдельные прямолинейные участки 1, 2 и 3 (см.рисунок). Участок 1 – это полубесконечный ток, создающий в точке О напряженность $H_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{I}{2\pi b}$. Участок 2 – прямолинейный отрезок, находящийся на расстоянии $r = \mathrm{OA} = b\cos 45^{\mathrm{o}}$ от точки О. Его концы видны из этой точки под углами $\alpha_1 = \alpha_2 = 45^{\mathrm{o}}$.Он создает напряженность $H_2 = \frac{I}{4\pi r}\cdot 2\sin 45^{\mathrm{o}} = \frac{I}{2\pi b}$. Точка О находится на продолжении прямого участка 3, и этот участок поля в ней не создает: $H_3 = 0$. Как видно из рисунка, направления векторов $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ совпадают и их сумма $H_{\mathrm{O}} = H_1 + H_2 = 3I/4\pi b = 1{,}79$ А/м.



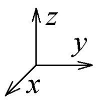
2. По бесконечному проводнику, согнутому в виде прямых полубесконечных линий, двух дуг с радиусами R_1 = 1 м и R_2 = 2 м (внешняя дуга имеет угол α = 135$^{\mathrm{o}}$) и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре 0 дуг.



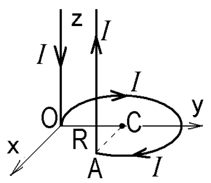
Решение.

Прямые участки 3 и 5 на рисунке не создают полей в точке О на их продолжении. Поэтому $\vec{B}_{\mathrm{O}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4$. Индукция полубесконечного тока 1 $B_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ и индукция половины кругового тока 2 $B_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R_1}$ направлены в одну сторону, а индукция, созданная участком 4, являющимся частью окружности, $B_4 = \frac{135^{\mathrm{o}}}{360^{\mathrm{o}}}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R_2}$, направлена противоположно. Так как $R_2 = 2R_1$, то в точке О $B_{\mathrm{O}} = \left|B_1 + B_2 - B_4\right| = \frac{\mu_0 I}{4R_1}\left|\frac{1}{\pi} + 1 - \frac{3}{8}\right| = 0{,}889$ мкТл.

Если векторы $\vec{B}$ или $\vec{H}$ направлены под углом друг к другу, то удобно указать их направления в трех осях декартовой системы координат.

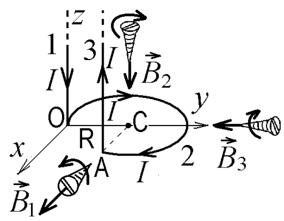


3. Бесконечный проводник согнут так, что текущий по нему ток I = 3 А вначале течет против оси z, затем поворачивает в начале координат О, образуя дугу окружности с углом 270$^{\mathrm{o}}$ и с радиусом R = 1 м, лежащую в плоскости xy, а затем снова поворачивает в точке А и течет по прямой линии, направленной параллельно оси z. Найти величину индукции магнитного поля в центре дуги С.



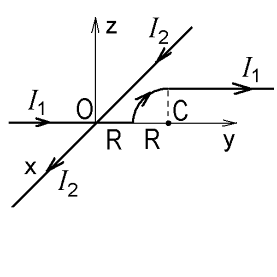
Решение.

Определяем направления полей, созданных отдельными участками с помощью винтов, острия которых должны находиться в точке С, как показано на рисунке слева. Направление вращения винтов связаны с направлением токов. Как видно, вектор индукции поля полубесконечного тока 1 имеет величину $B_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ и направлен вдоль оси x; вектор индукции, созданный 3/4 кругового тока 2, и имеющий величину $B_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{\mu_0 I}{2R}$ направлен против оси z; вектор индукции полубесконечного тока 3, $B_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, направлен против оси y. Все эти векторы взаимно перпендикулярны, а их векторная сумма имеет в точке С величину



$$B_{\mathrm{C}} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} = \frac{\mu_0 I}{4R}\sqrt{\frac{1}{\pi^2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{\pi^2}} = 1{,}48 \text{ мкТл}.$$

4. Ток I_1 = 1 А течёт по бесконечному проводнику, вначале совпадающему с осью y, затем образующему дугу в четверть окружности с радиусом R = 1 м, лежащую в плоскости yz. Далее проводник продолжается в виде прямой линии, па-



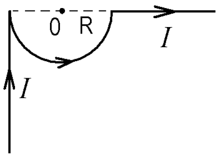
раллельной оси y. Расстояние от центра дуги C до начала координат O равно $2R$. Второй ток I_2 = 3 А течет по бесконечному проводнику вдоль оси x (см. рисунок). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого токами в центре дуги C.

Решение.

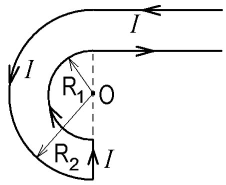
В точке C первый ток создает напряженность $H_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{I_1}{2R} + \frac{1}{2}\cdot\frac{I_1}{2\pi R}$, вектор которой направлен против оси x (это поле 1/4 кругового тока, протекающего по дуге и поле половины бесконечного прямого тока). Второй ток, находящийся на расстоянии $2R$ от точки C, создает напряженность $H_2 = \frac{I_2}{2\pi\cdot 2R}$, вектор которой направлен вдоль оси z. Величина суммы этих векторов

$$H_C = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = \frac{1}{4R}\sqrt{\left(\frac{I_1}{2} + \frac{I_1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{\pi}\right)^2} = 0{,}314\ \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

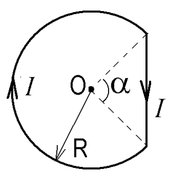
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



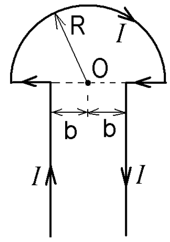
5. По бесконечному проводнику, согнутому, как показано на рисунке, течет ток I = 3 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре 0 дуги с радиусом R = 20 см.



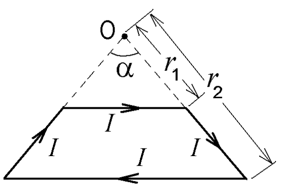
6. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных прямых линий, двух полуокружностей с радиусами R_1 = 50 см и R_2 = 1 м и соединяющего их отрезка, как показано на рисунке, течет ток I = 5 А. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре O полуокружностей.



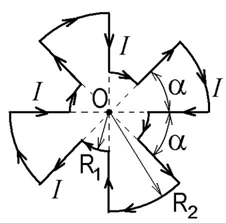
7. По замкнутому проводнику, согнутому в виде дуги с радиусом R = 20 см и соединяющей её концы хорды (см. рисунок слева), течет ток I = 3 А. Найти величину напряженности магнитного поля в центре O дуги, если угол α = 90°.



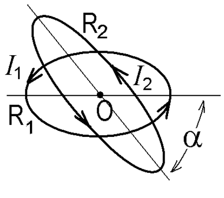
8. По бесконечному проводнику, согнутому в виде полуокружности с радиусом R = 60 см, двух прямых отрезков и двух параллельных линий, течет ток I = 4 А. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре O полуокружности (см. рисунок справа), если b = 30 см.



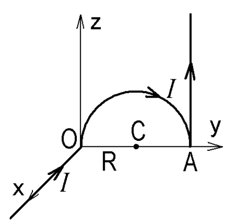
9. По проводнику, согнутому в виде симметричной трапеции, течет ток I = 3 А. Размеры приведены на рисунке слева, где r_1 = = 20 см, r_2 = 50 см, α = 90°. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в точке O.



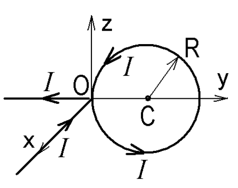
10. По проводнику, согнутому в виде восьми круговых дуг с одинаковыми углами α = 45° и с радиусами R_1 = 40 см и R_2 = 80 см, а также восьми соединяющих их прямых отрезков, как показано на рисунке справа, течет ток I = 5 А. Найти величину индукции магнитного поля в общем центре дуг O.



11. По замкнутым круговым проводникам с радиусами $R_1 = R_2$ = 1 м текут одинаковые токи $I_1 = I_2$ = 3 А. Угол между плоскостями проводников α = 60°. Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого токами в общем центре O этих круговых проводников.

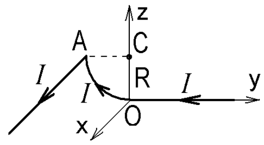


12. Бесконечный проводник согнут так, что образованная им полуокружность с радиусом R = 40 см расположена в плоскости yz. Направление текущего по нему тока I = 3 А указано на рисунке справа. Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого током в центре C полуокружности.



13. Бесконечный проводник согнут так, что ток I = 4 А течет по нему против оси x, поворачивает в начале координат O, протекая по окружности с радиусом R = 30 см, расположенной в плоскости yz, а затем течет против оси y (см.рисунок слева). Найти величину напряженности магнитного поля, создаваемого этим током в центре C окружности.

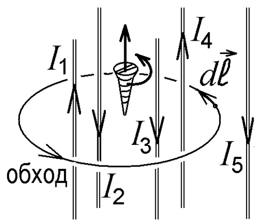
14. Ток $I = 3$ А течет по согнутому бесконечному проводнику против оси y, поворачивает в начале координат O, протекая по дуге окружности с углом 90° и с радиусом $R = 50$ см, расположенной в плоскости yz, снова поворачивает в точке A и течет по прямой линии, направленной вдоль оси x (см.рисунок справа). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого этим током в центре дуги C.



Циркуляцией вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру называется интеграл $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$. Циркуляция вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля равна произведению $\mu\mu_0$ на **алгебраическую** сумму токов, охватываемых контуром: $\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I_i}$ (для вектора напряженности $\vec{H}$ циркуляция по замкнутому контуру равна $\boxed{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_i}$).

Чтобы определить знак тока в этой сумме, расположите винт перпендикулярно плоскости контура и вращайте его по направлению обхода контура. Если направление тока совпадает с направлением поступательного движения винта, то этот ток входит в сумму с положительным знаком. Если ток направлен противоположно движению винта, то он входит в сумму со знаком "минус".

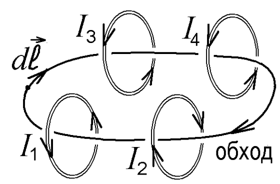
Например, изображенный на рисунке винт, вращающийся по направлению обхода контура, движется вверх. В эту сторону направлены токи I_1 и I_4, охватываемые контуром, а противоположно – токи I_2 и I_3. Согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \left(I_1 - I_2 - I_3 + I_4\right)$. Ток I_5 создает поле, но не охватывается контуром, и в сумму не входит.



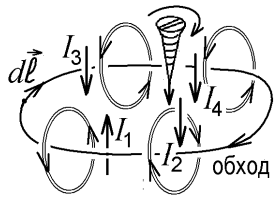
Внимательно следите на рисунке, сколько раз линия замкнутого контура **охватывает** каждый ток. Если ток охватывается N раз, то в сумму он также входит N раз.

Примеры решения задач:

15. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами I_1= 2 А, I_2= 1 А, I_3= 4 А и I_4. Направление обхода контура и направления токов указаны на рисунке. Циркуляция вектора индукции магнитного поля $\oint \vec{B}d\vec{l}$ по этому контуру равна 5 мкТл·м. Найти величину тока I_4.



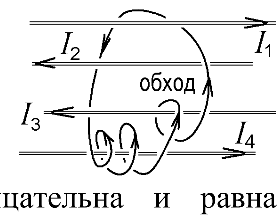
Решение.



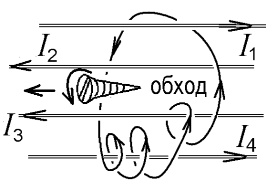
На рисунке слева дополнительными стрелками указаны направления токов I_i **внутри** охватывающего их замкнутого контура. Винт, вращаемый по направлению обхода контура, движется вниз. В эту сторону направлены токи I_2, I_3, I_4. Здесь $\mu = 1$. Поэтому $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(-I_1 + I_2 + I_3 + I_4\right)$ и

$$I_4 = I_1 - I_2 - I_3 + \oint \vec{B}d\vec{l} \big/ \mu_0 = 0{,}979 \text{ А.}$$

16. На рисунке показан замкнутый контур, направление его обхода и прямолинейные проводники с токами I_1= 3 А, I_2, I_3= 1 А, I_4= 2 А. Циркуляция созданного токами вектора индукции магнитного поля по указанному контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = -4$ мкТл·м. Найти величину тока I_2.



Решение.

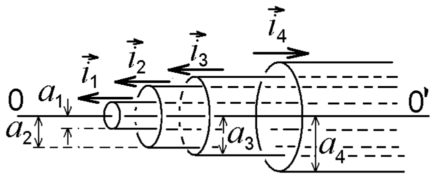


Приглядитесь к рисунку внимательно! Линия контура проходит за током I_1, не охватывая его. Перед током I_4 эта линия проходит три раза, т.е. ток I_4 охватывается 3 раза, ток I_3 - 2 раза, ток I_2 - один раз.

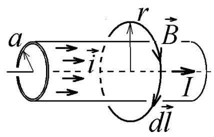
Вращаемый по направлению обхода винт движется налево, вдоль токов I_2 и I_3. Поэтому, согласно теореме о циркуляции $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \left(I_2 + 2I_3 - 3I_4\right)$, откуда $I_2 = 3I_4 - 2I_3 - \left|\oint \vec{B}d\vec{l}\right| \big/ \mu_0 = 0{,}817$ А.

Теорему о циркуляции удобно применять для расчета магнитного поля токов с симметричным распределением плотности тока $\vec{j}$ или поверхностной плотности тока $\vec{i}$.

17. По четырем тонким и очень длинным цилиндрическим проводящим поверхностям, имеющим радиусы a_1= 1 см, a_2= 2 см, a_3= 3 см и a_4=4 см протекают токи с поверхностными плотностями i_1= 3 А/м, i_2= = 4 А/м, i_3=5 А/м и i_4=6 А/м соответственно. Направления токов показаны на рисунке. На каком расстоянии r от общей оси 00’ проводников величина индукции магнитного поля B = 0,5 мкТл, при условии, что $r > a_4$?



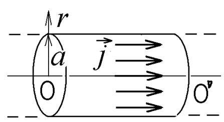
Решение.



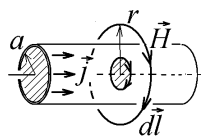
Поверхностная плотность тока задается формулой $\boxed{i = dI/dl}$, где dI – это ток, протекающий по полоске поверхности ширины dl. Поэтому величина тока, текущего по цилиндрической поверхности радиуса a равна $I = i \cdot 2\pi a$. Окружим цилиндр круговым замкнутым контуром радиуса $r > R$, совпадающим с линией индукции $\vec{B}$ магнитного поля, созданного током I внутри контура. По теореме о циркуляции $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot \oint dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$. Хотя ток и распределен в пространстве, он создает такое же поле, как и линейный ток I, проходящий по оси цилиндра. Подставив I, получим $B = \mu_0 i a / r$.

В нашей задаче круговой контур радиуса r охватит четыре проводника, по которым токи i_1, i_2, i_3 текут в одну сторону, а ток i_4 - в другую. Циркуляция $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 2\pi\left(i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 - i_4 a_4\right)$, откуда $r = \mu_0\left(i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 - i_4 a_4\right)/B = 5{,}03$ см.

18. По длинному прямому цилиндрическому проводнику радиуса a течёт постоянный ток с однородной плотностью $\vec{j} = \text{const}$. Величина напряжённости магнитного поля на расстоянии r_1 = 4,8 мм от оси проводника ОО’ в полтора раза больше величины напряженности на расстоянии r_2 = 0,8 мм от оси. Найти радиус a проводника, если $r_2 < a < r_1$.



Решение.

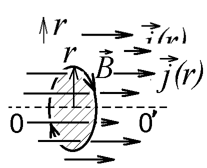


Снова окружим проводник круговым замкнутым контуром радиуса $r > a$ (см. рисунок), который охватит ток $I = j \cdot \pi a^2$, протекающий через все поперечное сечение проводника. Согласно теореме о циркуляции: $\oint \vec{H}d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = I$. Поэтому вне проводника, при $r > a$, его поле совпадает с полем линейного тока $H_{\text{вне}} = \dfrac{I}{2\pi r} = \dfrac{ja^2}{2r}$.

Внутри проводника, при $r < a$, линии $\vec{H}$ также образуют круговой контур, но он охватывает только ток $I = j \cdot \pi r^2$, протекающий через меньшее, заштрихованное на рисунке сечение. Поэтому $H_{\text{внутри}} = I/2\pi r = jr/2$.

По условию $\dfrac{H_{\text{вне}}(r_1)}{H_{\text{внутри}}(r_2)} = \dfrac{ja^2}{2r_1} \cdot \dfrac{2}{jr_2} = \dfrac{a^2}{r_1 r_2} = \dfrac{3}{2}$. Радиус проводника $a = \sqrt{3r_1 r_2/2} = 2{,}4$ мм.

19. В среде с $\mu = 1$ вдоль выделенной оси ОО’ течёт постоянный ток, плотность которого меняется с расстоянием r от оси по закону $j = j_0 \cdot \sqrt{b/r}$, где b = 0,5 м, j_0 = = 3000 А/м^2. Найти величину индукции B магнитного поля, созданного этим током на расстоянии r = 2 м от оси ОО’.



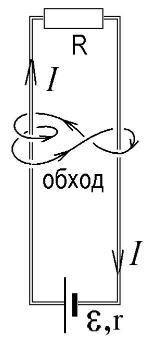
Решение.

Если плотность тока $\vec{j}$ симметрична относительно оси ОО’, то линии вектора $\vec{B}$, созданного этим током, охватывают ось ОО’ по кругу. Запишем теорему о циркуляции для контура радиуса r, совпадающего с одной из линий $\vec{B}$: $\oint \vec{B}d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I$. Величина тока, охватываемого этим контуром

$$\sum I = \int_0^r j dS = \int_0^r j d\left(\pi r^2\right) = \int_0^r j \cdot 2\pi r dr .$$

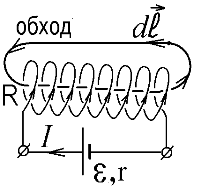
Подставляя заданную зависимость $j = j(r)$, находим $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^r j_0 \sqrt{\dfrac{b}{r}} \cdot 2\pi r dr =$

$= 2\pi\mu_0 j_0 \sqrt{b} \int_0^r \sqrt{r}dr = 2\pi\mu_0 j_0 \sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} r^{3/2}$, откуда $B = 2\mu_0 j_0 \sqrt{br}/3 = 2{,}51$ мТл .



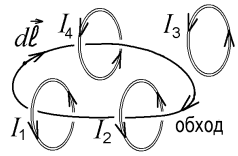
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

20. Резистор с сопротивлением R = 10 Ом подключен длинными проводами к источнику тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r = 2 Ом. Циркуляция вектора $\vec{B}$, созданного протекающим по цепи током I, по замкнутому контуру, направление обхода которого показано на рисунке справа, равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = 3$ мкТл·м. Найти величину ЭДС ε.

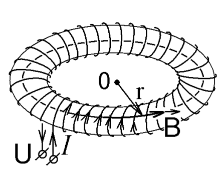


21. Источник тока с эдс ε = 24 В подключен к катушке из N =8 витков, имеющей омическое сопротивление R = 10 Ом. По катушке течёт постоянный ток, а циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру, показанному на рисунке, равна $\oint \vec{H}d\vec{l}$ = -30 А. Чему равно внутреннее сопротивление r источника тока?

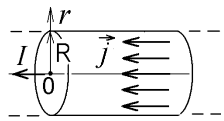
22. Замкнутый контур проходит по оси нескольких замкнутых круговых проводников с токами I_1= 1 А, I_2= 2 А, I_3= 3 А и I_4 (см. рисунок). Циркуляция вектора индукции магнитного поля по этому контуру отрицательна и равна $\oint \vec{B}d\vec{l} = -2$ мкТл·м. Найти величину тока I_4.



23. Провод с сопротивлением R = 30 Ом равномерно навит на тороидальный сердечник из материала с магнитной проницаемостью μ = 25. Ток I, текущий по виткам получившейся катушки, имеющей N = 600 витков, создаёт в сердечнике на удалении r = 9 см от центра катушки О магнитное поле с индукцией B = 0,05 Тл. Чему равно напряжение U, приложенное к концам провода?



24. Ток I = 1 А протекает по длинному цилиндрическому проводнику радиуса R = 1 см и имеет однородную плотность $\vec{j} = \text{const}$. Чему равна величина индукции $\vec{B}$ магнитного поля на расстоянии r = 5 мм от оси проводника?



Задание практического занятия №6. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 1) Движение заряженной частицы в электрическом и магнитном полях; 2) Явление электромагнитной индукции и самоиндукции.

Задание: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).

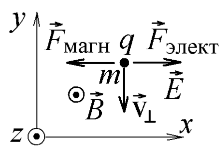
В электромагнитном поле с напряженностью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$ на частицу с зарядом q и с массой m, движущуюся со скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ действует сила Лоренца $\boxed{\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = q\vec{E} + q\left[\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}\right]}$, являющаяся суммой электрической и магнитной сил.

Чтобы решить задачу о движении частицы, аккуратно нарисуйте направления векторов $\vec{E}, \vec{B}$ и $\vec{\mathrm{v}}$ в декартовой системе координат, правильно укажите направления сил и сообразите, по какой траектории будет двигаться частица под действием этих сил.

Примеры решения задач:

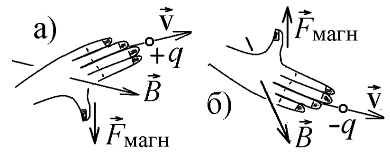
1. Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью $\vec{\mathrm{v}}$ в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Найти минимальную величину скорости частицы, если $E = 100$ В/м, $B = 0{,}01$ Тл.

Решение.



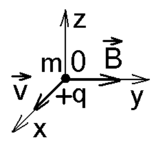
Так как по условию $\vec{\mathrm{v}}=\text{const}$, то $\vec{F} = \vec{F}_{\text{элект}} + \vec{F}_{\text{магн}} = 0$. Направим вектор $\vec{E}$ вдоль оси x, а вектор $\vec{B}$ - вдоль оси z. Магнитная составляющая силы Лоренца компенсирует электрическую составляющую: $F_{\text{элект}} = qE = F_{\text{магн}} = q\mathrm{v}_\perp B$. Из рисунка видно, что вектор скорости частицы $\vec{\mathrm{v}}_\perp$ направлен против оси y.

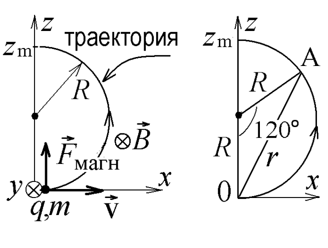
Определить направление $\vec{F}_{\text{магн}} = q\left[\vec{\mathrm{v}}, \vec{B}\right]$ (векторного произведения) для частицы с положительным зарядом проще с помощью "правила левой руки": если направить четыре пальца по первому вектору $\vec{\mathrm{v}}$, а второй вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, то большой палец показывает направление $\vec{F}_{\text{магн}}$ (рисунок а). Для частицы с отрицательным зарядом используйте "правило правой руки" (рисунок б).



Скорость $\mathrm{v}_\perp = E/B = 10^4$ м/с будет минимальной скоростью, так как частица может иметь любую проекцию скорости v_z на ось z, параллельную вектору $\vec{B}$. Это не изменит решения, так как не изменит ни величину, ни направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$.

2. Частица с положительным зарядом q и с массой m движется в магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена вдоль оси y. В начальный момент $t_0 = 0$ она находилась в точке 0 начала координат и имела скорость $\vec{\mathrm{v}}$, направленную вдоль оси x. В момент времени $t_1 = 3$ мс координата z частицы в первый раз становится максимальной и равной $z_{\text{m}} = 10$ см. Найти расстояние частицы от точки 0 в момент времени $t_2 = 2$ мс.





Решение.

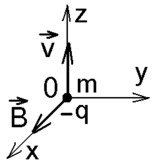
Если скорость $\vec{\mathrm{v}} \perp \vec{B}$, то, в однородном магнитном поле, как показано на рисунке слева, частица движется по окружности, радиус R которой можно найти, подставляя нормальное ускорение $a_n = \mathrm{v}^2/R$ в уравнение динамики: $ma_n = F_{\text{магн}}$ или $m\mathrm{v}^2/R = q\mathrm{v}B$, откуда $\boxed{R = m\mathrm{v}/qB}$.

Период обращения частицы по этой окружности $\boxed{T = \dfrac{2\pi R}{\mathrm{v}} = \dfrac{2\pi m}{qB}}$.

Нарисовав направления векторов и траекторию согласно условиям задачи, видим, что $R = \dfrac{z_{\text{m}}}{2}$.

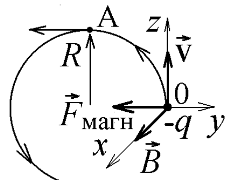
Время $t_1 = \dfrac{T}{2} = 3$ с. За это время частица пройдет половину окружности с углом 180°. А за время $t_2 = 2$ с она опишет дугу окружности с углом 120^{o} и будет находиться в точке А на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 120^{\text{o}}} = \sqrt{3}R = \sqrt{3}z_{\text{m}}/2 = 8{,}66$ см от точки 0.

3. Частица с отрицательным удельным зарядом $q/m = 2 \cdot 10^9$ Кл/кг, ускоренная разностью потенциалов $\Delta\varphi = 1$ кВ, в начальный момент $t_0 = 0$ находится в точке 0 (см. рисунок) и движется со скоростью v = 200 м/с, направленной вдоль оси z в однородном магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого направлена вдоль оси x. В момент времени $t = 5$ мкс её скорость в первый раз будет направлена против оси y. На каком удалении от точки 0 частица окажется в этот момент времени, и какой путь она пройдет за время t?



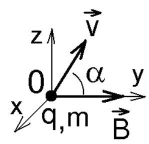
Решение.

Работа, совершаемая ускоряющим напряжением $U = \Delta\varphi$, идет на изменение кинетической энергии частицы: $A = q\Delta\varphi = m\text{v}^2/2$. Поэтому, проходя ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$, частица приобретает скорость $\boxed{\text{v} = \sqrt{2q\Delta\varphi/m}}$.



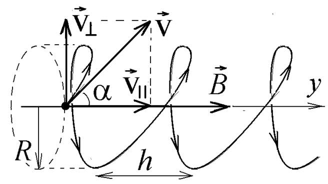
Указывая направление силы $\vec{F}_{\text{магн}}$ и рисуя круговую траекторию частицы , видим, что скорость будет направлена против оси y в точке А, когда частица пройдет четверть окружности за время $t = \dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi m}{qB}$. Отсюда $B = \dfrac{\pi m}{qt}$. Подставляя найденное выражение для v, находим радиус траектории: $R = \dfrac{m\text{v}}{qB} = \dfrac{t}{\pi}\sqrt{\dfrac{2q\Delta\varphi}{m}} = \ = 3{,}18$ м. За время t частица проделает путь $2\pi R / 4 = 5$ м и удалится от точки 0 на расстояние $\text{AO} = \sqrt{2}R = 4{,}50$ м.

4. Частица с зарядом q и массой m движется в однородном магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль оси y, по винтовой траектории, у которой шаг равен радиусу. Найти угол α между векторами скорости $\vec{\text{v}}$ частицы и индукции $\vec{B}$?



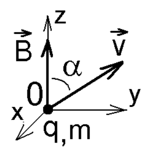
Решение.

Разложим скорость $\vec{\text{v}}$ частицы на две составляющие $\vec{\text{v}} = \vec{\text{v}}_\perp + \vec{\text{v}}_{||}$. Со скоростью $\text{v}_\perp$, перпендикулярной к направлению $\vec{B}$, частица будет вращаться по кругу радиуса $R = m\text{v}_\perp/qB$ вокруг линий $\vec{B}$. А так как скорость $\vec{\text{v}}_{||}$ параллельна $\vec{B}$, то $\vec{F} = q\left[\vec{v}_{||}, \vec{B}\right] = 0$, и частица движется с постоянной скоростью $\text{v}_{||}$ вдоль направления $\vec{B}$.



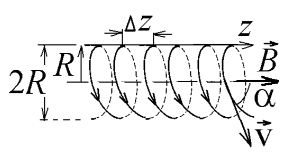
Сумма двух движений – винтовая линия, показанная на рисунке. Так как $\text{v}_\perp = \text{v}\sin\alpha$, $\text{v}_{||} = \text{v}\cos\alpha$, то радиус траектории $R = m\text{v}\sin\alpha/qB$, а её шаг h - это расстояние, которое частица пролетает со скоростью $\text{v}_{||}$ за один период обращения по окружности: $h = \text{v}_{||}T = 2\pi m \cdot \text{v}\cos\alpha/qB$. По условию их отношение $R/h = \text{tg}\,\alpha/2\pi = 1$ и $\alpha = \text{arctg}(2\pi) = 89{,}95^{\text{o}}$.

5. Частица с удельным зарядом $q/m = 3 \cdot 10^8$ Кл/кг ускорена разностью потенциалов Δφ и движется в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл, направленной вдоль оси z. Скорость $\vec{\text{v}}$ частицы направлена под углом $\alpha = 45^{\text{o}}$ к оси z. При этом частица периодически пересекает ось z через равные интервалы $\Delta z = 5$ см. Найти величину разности потенциалов Δφ.

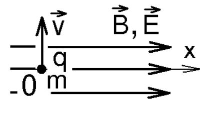


Решение.

Движение частицы происходит по винтовой линии. Вращаясь вокруг линий $\vec{B}$, она периодически то пересекает ось z, то удаляется от неё на максимальное расстояние $2R$. Интервал Δz – это шаг h, выражение которого получили в предыдущей задаче: $\Delta z = h = \dfrac{2\pi m \cdot \text{v}\cos\alpha}{qB}$, где $\text{v} = \sqrt{\dfrac{2q\Delta\varphi}{m}}$ – скорость, приобретаемая частицей после ускорения. Отсюда $\Delta\varphi = \dfrac{q}{2m}\left(\dfrac{\Delta z B}{2\pi\cos\alpha}\right)^2 = 3{,}04$ кВ.

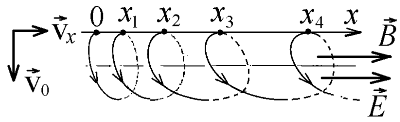


6. Вылетев из точки О на оси x с начальной скоростью v_0, направленной перпендикулярно к оси x , частица с зарядом $q = 20$ мкКл движется в электрическом и магнит-



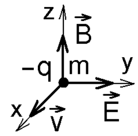
ном полях с напряжённостью E = 20 В/м и индукцией B = 0,8 Тл соответственно. Эти поля направлены вдоль оси x (см. рисунок). Чему равна масса m частицы, если совершив N = 8 полных витков траектории, она окажется на расстоянии x = 400 м от точки О?

Решение.

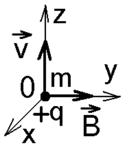


Под действием электрического поля частица приобретает постоянное ускорение $a_x = F_{\text{элект}}/m = qE/m$. Поэтому со временем растет проекция её скорости $\mathrm{v}_x = a_x t$, параллельная вектору $\vec{B}$, а траектория движения становится винтовой линией с постоянным радиусом $R = m\mathrm{v}_0/qB$ и с переменным шагом, как показано на рисунке. Частица пересекает ось x через каждый период обращения T в точках с координатами $x_n = a_x t^2/2 = a_x (nT)^2/2$. После восьмого оборота её координата $x = \dfrac{a_x (8T)^2}{2} = \dfrac{qE}{m}\cdot 32\left(\dfrac{2\pi m}{qB}\right)^2 = 128\pi^2 \dfrac{mE}{qB^2}$, откуда получаем величину массы $m = \dfrac{qB^2 x}{128\pi^2 E} = 0,203$ мг .

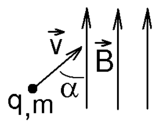
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



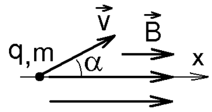
7. Отрицательно заряженная частица с массой m = 0,4 мг двигалась с постоянной скоростью v = 300 м/с вдоль оси x в электрическом поле с напряженностью E = 600 В/м, направленной вдоль оси y, и в магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль оси z. После выключения электрического поля частица продолжила вращение по окружности радиуса R = = 2 м. Чему равна величина заряда частицы?



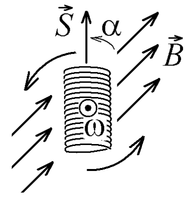
8. Частица с зарядом q = +5 мкКл движется в однородном магнитном поле, индукция B = 3 Тл которого направлена вдоль оси y. В начальный момент частица находилась в точке 0 и двигалась вдоль оси z (см. рисунок). Через промежуток времени Δt = 0,2 с скорость частицы в первый раз окажется направленной вдоль оси x. Чему равна масса m частицы?



9. Частица с массой m = 0,02 мг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 1 кВ и влетела под углом $\alpha = 45^\circ$ в однородное магнитное поле с индукцией B = 2 Тл, после чего начала двигаться по винтовой траектории с шагом h = 2 м. Найти величину заряда частицы.



10. Частица имеет удельный зарядом q/m = 3000 Кл/кг, ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 6 кВ и движется под углом $\alpha = 30^\circ$ к линиям индукции однородного магнитного поля, направленного вдоль оси x, периодически пересекая ось x через равные промежутки времени. Максимальное удаление частицы от оси x равно 2 м. Найти величину индукции B.

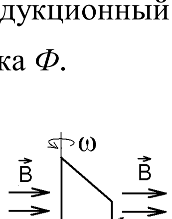


ЭДС электромагнитной индукции возникает в **замкнутом** проводящем контуре, если в нем меняется поток магнитной индукции $\Phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S}$. Пусть контур (например, катушка) состоит из N витков любой формы с площадью S каждый и вращается с угловой скоростью ω в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. В этом случае $\boxed{\Phi = BNS\cos\alpha}$, где $\alpha = \omega t + \alpha_0$ – <u>угол между векторами $\vec{B}$ и $\vec{S}$</u> (вектор площади витка $\vec{S}$ имеет величину, равную площади витка, и направлен перпендикулярно к его плоскости).

Возникает ЭДС индукции $\boxed{\varepsilon_{\text{инд}} = -d\Phi/dt}$, причиной появления которой может быть или изменение величины индукции B, или изменение площади S контура, или изменение угла α между векторами $\vec{B}$ и $\vec{S}$.

Если сопротивление проводящего контура равно R, то при этом в нем возникает индукционный ток $\boxed{I_{\text{инд}} = |\varepsilon_{\text{инд}}|/R}$, направленный в такую сторону, чтобы компенсировать изменение потока Φ.

Примеры решения задач:

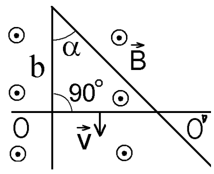


11. Замкнутый проводящий контур из тонкого провода с сопротивлением R = 9 Ом имеет вид равнобедренной трапеции с основаниями a = 12 см, b = 6 см и с высотой h = = 8 см. Контур вращается в магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл вокруг оси, проходящей через бо̀льшее основание трапеции и перпендикулярной к линиям $\vec{B}$. Найти величину угловой скорости вращения ω, если максимальная величина индукционного тока в контуре $I_{\max} = 4$ мА.

Решение.

Контур состоит из одного витка с площадью (площадь трапеции) $S = \dfrac{(a+b)h}{2} = 72\text{ см}^2$. При вращении в витке возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}} = -\dfrac{d\left(BS\cos\omega t\right)}{dt} = BS\omega\sin\omega t$.

Индукционный ток $I_{\text{инд}} = \dfrac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = \dfrac{BS\omega}{R}\sin\omega t$ меняется по гармоническому закону (такая система будет моделью генератора переменного тока). Его амплитуда $I_{\max} = BS\omega/R$, откуда $\omega = I_{\max}R/BS = 25$ рад/с.

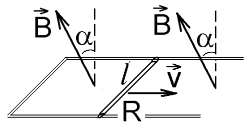


12. Замкнутый проводящий контур образован двумя прямыми проводниками, согнутыми под углом α = 45° и проводником-перемычкой, скользящим со скоростью v = 0,8 м/с (см. рисунок). Перпендикулярно к его плоскости создано магнитное поле. Единица длины каждого из проводников, образующих прямоугольный треугольник, имеет сопротивление $R_1 = 2$ Ом/м. Чему равна величина индукции магнитного поля *B*, если в контуре создаётся индукционный ток *I* = 0,2 А?

Решение.

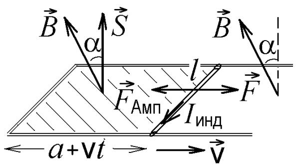
В этой задаче меняется площадь $S = b^2/2$ равнобедренного прямоугольного треугольника, так как меняется его катет $b = b_0 + \text{v}t$. Одновременно меняется поток $\varPhi = BS\cdot\cos 0^{\circ}$ (вектор $\vec{S}$ параллелен вектору $\vec{B}$). Величина индукционного тока $I = \left|\dfrac{1}{R}\dfrac{d\varPhi}{dt}\right| = \dfrac{B}{R}\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{B}{R}b\dfrac{db}{dt} = \dfrac{B}{R}b\text{v}$.

Сумма всех сторон треугольника равна $b + b + \sqrt{2}b$, и его сопротивление $R = R_1\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)b$ меняется вместе с катетом *b*. Подставляя эту величину в формулу для *I*, находим $B = IR_1\left(2+\sqrt{2}\right)/\text{v} = 1{,}71$ Тл.

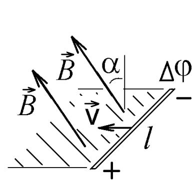


13. Угол между линиями индукции магнитного поля *B* = 0,2 Тл и нормалью к плоскости не имеющей сопротивления проводящей П-образной рамки равен α = 30°. По рамке без трения со скоростью v = 9 м/с скользит проводящая перемычка с сопротивлением *R* = 20 Ом. В ней возникает индукционный ток *I* =60 мА. Найти длину перемычки *l*, а также величину силы, с которой тянут перемычку.

Решение.



При движении перемычки меняется площадь $S = l\left(a+\text{v}t\right)$ проводящего контура, заштрихованная на рисунке справа. Меняется поток магнитной индукции $\varPhi = BS\cos\alpha$ и возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}} = \left|-d\varPhi/dt\right| = B\cos\alpha\cdot dS/dt = B\cos\alpha\cdot l\text{v}$.

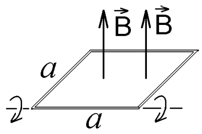


Помните: если линии индукции $\vec{B}$ магнитного поля составляют угол α с нормалью к плоскости движения проводника с поперечным размером l, то на его краях а образуется разность потенциалов, которая будет причиной появления ЭДС индукции $\boxed{\Delta\varphi = \varepsilon_{\text{инд}} = Bl\text{v}\cos\alpha}$.

Величина индукционного тока $I_{\text{инд}} = \varepsilon_{\text{инд}}/R = Bl\text{v}\cos\alpha/R$. Отсюда $l = IR/B\text{v}\cos\alpha = 0{,}770$ м.

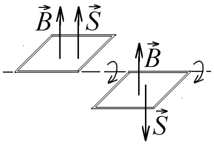
Индукционный ток направлен так, чтобы возникающая сила Ампера $\vec{F}_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}}\left[\vec{l},\vec{B}\right]$ препятствовала изменению потока $\varPhi$ и тормозила перемычку. Чтобы перемычка двигалась с постоянной скоростью, её надо тянуть с силой $F = F_{\text{Амп}} = I_{\text{инд}}lB = B^2l^2\,\text{v}\cos\alpha/R = 9{,}24$ мН.

Индукционный ток связан с величиной электрического заряда *q*, протекающего по замкнутому проводящему контуру при изменении магнитного потока $\varPhi$ в нем: $I_{\text{инд}} = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\varepsilon_{\text{инд}}}{R} = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\varPhi}{dt}$. Интегрируя получившееся уравнение $\int dq = -\dfrac{1}{R}\int d\varPhi$, находим $\boxed{q = \dfrac{1}{R}\left(\varPhi_{\text{начал}} - \varPhi_{\text{конечн}}\right)}$, т.е. протекший заряд пропорционален разности начального и конечного значения магнитного потока.

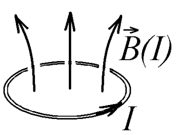


14. Вначале замкнутая проводящая рамка, сделанная в виде квадрата из четырёх одинаковых тонких проводников с сопротивлением $R = 3$ Ом и длиной $a = 15$ см каждый, располагалась в магнитном поле так, что линии его индукции $\vec{B}$ были перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол 180^o вокруг одной из её сторон, по рамке протёк заряд $q = 6$ мКл. Чему равна величина индукции магнитного поля B?

Решение.

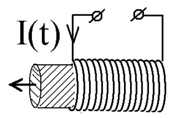


До поворота вектор площади $\vec{S}$ был параллелен вектору $\vec{B}$, и поток магнитной индукции был равен $\Phi_{\text{начал}} = Ba^2 \cos 0^o$. После поворота на 180^o вектор $\vec{S}$ поменял направление, и конечный поток $\Phi_{\text{конечн}} = Ba^2 \cos 180^o$. Суммарное сопротивление всех проводников равно $4R$. Подстановка в формулу для протекшего заряда дает $q = 2Ba^2/4R$, откуда $B = 2qR/a^2 = 1{,}6$ Тл.



Текущий по замкнутому проводящему контуру ток I создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна току: $B \sim I$. Поэтому и поток магнитной индукции будет пропорционален току: $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \sim I$ или $\boxed{\Phi = LI}$. Коэффициент пропорциональности L называют коэффициентом индуктивности.

При изменении тока со временем меняется созданный им поток Φ и возникает ЭДС самоиндукции $\boxed{\varepsilon_{\text{самоинд}} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(LI)}$. Обычно эту формулу записывают в случае $L = \text{const}$. Но причиной появления $\varepsilon_{\text{самоинд}}$ может оказаться меняющаяся со временем величина индуктивности L.

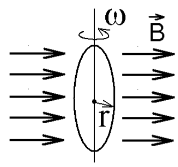


15. Ферромагнитный сердечник извлекают из катушки таким образом, что её индуктивность уменьшается со временем t по закону $L(t) = \alpha/t$, где $\alpha = 4$ Гн·с. При этом ток, текущий по катушке, возрастает со временем: $I(t) = \beta \cdot t^3$, где $\beta = 3$ А/с^3. Найти величину индуктивности катушки в тот момент времени, когда возникающая в ней ЭДС самоиндукции $\varepsilon = 8$ В.

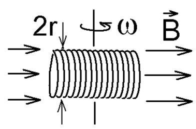
Решение.

Подставляем приведенные в условии зависимости в формулу $\varepsilon = \left| -\dfrac{d}{dt}(LI) \right| = \alpha\beta \dfrac{d}{dt}(t^2) = 2\alpha\beta t$. Указанная величина ЭДС наблюдается в момент времени $t = \dfrac{\varepsilon}{2\alpha\beta}$. В этот момент $L = \dfrac{\alpha}{t} = \dfrac{2\alpha^2\beta}{\varepsilon} = 12$ Гн.

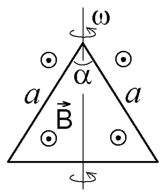
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



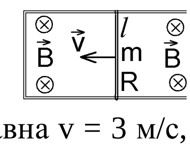
16. Виток из тонкого провода с радиусом $r = 5$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с в магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл. Чему равна величина сопротивления R витка, если ось вращения перпендикулярна к линиям индукции, а в витке создаётся индукционный ток с максимальной величиной $I_{\max} = 4$ мА?



17. Короткозамкнутая катушка из $N = 20$ витков вращается с угловой скоростью $\omega = 15$ рад/с в магнитном поле с индукцией $B = 4$ мТл. Ось вращения перпендикулярна как к линиям индукции, так и к оси катушки. Чему равен радиус витков катушки, если максимальная величина ЭДС электромагнитной индукции в ней $\varepsilon_{\max} = 4$ мВ?

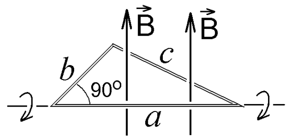


18. В магнитном поле с индукцией $B = 0{,}25$ Тл вращается замкнутый проводящий контур с сопротивлением $R = 6$ Ом имеющий вид равнобедренного треугольника со стороной $a = 8$ см и с углом $\alpha = 30^o$ (см. рисунок). Ось вращения совпадает с биссектрисой угла α и перпендикулярна к линиям индукции $\vec{B}$. Индукционный ток в контуре имеет амплитуду $I_{\max} = 5$ мА. Найти величину угловой скорости вращения ω.

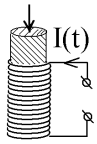


19. Магнитное поле с индукцией $B = 1{,}5$ Тл приложено к П-образной проводящей рамке, не имеющей сопротивления. Линии индукции перпендикулярны к плоскости рамки. По рамке без трения скользит проводящая перемычка длины $l = 40$ см с сопротивлением $R = 15$ Ом. Чему равна масса m перемычки, если в тот момент, когда её скорость равна $v = 3$ м/с, она движется с ускорением $a = 4$ м/с^2?

20. В магнитное поле с индукцией B = 0,4 Тл поместили рамку из тонкого провода с сопротивлением R = 18 Ом, имеющую вид прямоугольного треугольника с катетом b = 15 см. Вначале линии индукции перпендикулярны плоскости рамки. При повороте рамки на угол $\alpha = 60^{o}$ вокруг оси, проходящей через второй катет a, по рамке протёк заряд q = 0,3 мКл. Чему равна длина гипотенузы c треугольника?



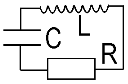
21. Сердечник вдвигают внутрь катушки индуктивности таким образом, что её индуктивность возрастает со временем t по закону $L(t) = \alpha \cdot t$. При этом ток, текущий по катушке, убывает со временем: $I(t) = \beta/t^3$, где β = 16 $\text{А}\cdot\text{с}^3$. Найти величину постоянной α, если в момент времени t = 2 с величина·ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке, была равна ε = 6 В.



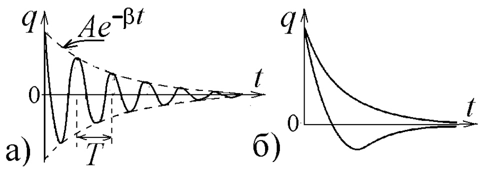
Задание практического занятия №7. Физика. Семестр 3.

Тема занятия: 1) Собственные электрические колебания; 2) Вынужденные электрические колебания. Резонанс.

Задание: изучить методы решения задач на эти темы по следующим примерам (учтите, что подобные задачи вы получите для выполнения контрольной работы).



Электрический колебательный контур – это замкнутая цепь, которая содержит конденсатор ёмкости C и катушку с индуктивностью L. Такая цепь может иметь сопротивление R. В таком случае колебания, например, заряда q на конденсаторе будут затухающими: $\boxed{q(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)}$ (рисунок а). Их амплитуда $Ae^{-\beta t}$ экспоненциально уменьшается со временем t. Циклическая частота собственных затухающих колебаний имеет вид $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$, где $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ – циклическая частота незатухающих колебаний (возникающих при $R = 0$), $\boxed{\beta = R/2L}$ – коэффициент затухания колебаний.

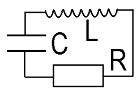


Период собственных затухающих колебаний $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \Big/ \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}$

увеличивается с ростом сопротивления R, и становится бесконечным при критическом сопротивлении $\boxed{R_{\text{кр}} = 2\sqrt{L/C}}$, при котором $\omega \to 0$. При $R \geq R_{\text{кр}}$ колебания не наблюдаются (рисунок б).

Скорость затухания колебаний характеризуют величиной логарифмического декремента затухания колебаний θ – это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени t к амплитуде через период: $\theta = \ln\left(Ae^{-\beta t}\big/Ae^{-\beta(t+T)}\right) = \ln\left(e^{\beta T}\right)$, т.е. $\boxed{\theta = \beta T}$.

Примеры решения задач:

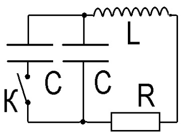


1. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре меняется со временем t по закону U_C=U_0·exp(-at) cos(bt), где U_0 = const; a = 10^4 с$^{-1}$; b = 3·10^4 рад/с. Ёмкость конденсатора C = 4 мкФ. Найти сопротивление R контура.

Решение.

Падение напряжения на конденсаторе $U_C = q/C$ изменяется со временем по тому же приведенному выше закону, что и заряд q на конденсаторе. Поэтому $a = \beta = \dfrac{R}{2L}$, $b = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - a^2}$.

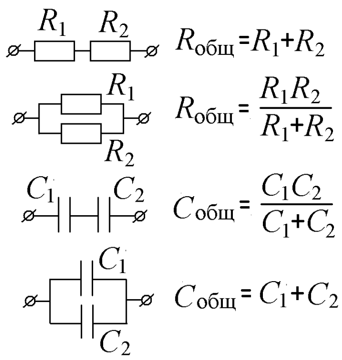
Отсюда $L = \dfrac{1}{C\left(a^2 + b^2\right)}$, и $R = 2La = 2a\big/C(a^2 + b^2) = 5$ Ом.



2. В колебательном контуре, изображённом на рисунке слева, замкнули ключ К. Во сколько раз уменьшился при этом период собственных электрических колебаний?

L= 100 Гн; C= 50 мкФ; R= 1 кОм.

Решение.



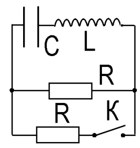
Помните правила вычисления суммарной ёмкости (или суммарного сопротивления) двух конденсаторов (или резисторов), соединенных последовательно или параллельно.

При разомкнутом ключе в цепь был подключен один конденсатор с ёмкостью $C_{\text{I}} = C$. После замыкания ключа подключены два параллельно соединенных конденсатора с общей ёмкостью $C_{\text{II}} = C + C = 2C$. Подставляя формулу для периода колебаний, находим, что он уменьшился в

$$\frac{T_{\text{I}}}{T_{\text{II}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC_{\text{I}}} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} \Bigg/ \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC_{\text{II}}} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{LC_{\text{II}}} - \frac{R^2}{4L^2}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{LC_{\text{I}}} - \frac{R^2}{4L^2}\right)} \text{ раз.}$$

Чтобы не запутаться с приставками и степенями при подстановке числовых данных, делайте сложные вычисления по частям, находя отдельные слагаемые в системе СИ и только потом подставляя их в сложную формулу: $\dfrac{1}{LC_{\mathrm{I}}} = \dfrac{1}{100 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 200$ с$^{-1}$; $\dfrac{1}{LC_{\mathrm{II}}} = 100$ с$^{-1}$; $\dfrac{R^2}{4L^2} = \left(\dfrac{10^3}{2 \cdot 100}\right)^2 = 25$ с$^{-1}$.

Теперь нетрудно найти, что $\dfrac{T_{\mathrm{I}}}{T_{\mathrm{II}}} = \sqrt{\dfrac{200-25}{100-25}} = 1{,}53$ раз.



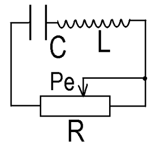
3. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний увеличился в два раза. Чему равна индуктивность L контура? C= 0,8 мкФ; R= 5 кОм.

Решение.

Сопротивление контура после замыкания ключа равно $\dfrac{R \cdot R}{R+R} = \dfrac{R}{2}$. Логарифмический декремент был равен $\theta_1 = \beta_1 T_1 = 2\pi \dfrac{R}{2L} \Big/ \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$. После изменения сопротивления

$$\theta_2 = \beta_2 T_2 = 2\pi \frac{R/2}{2L} \Big/ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(R/2)^2}{4L^2}}.$$

Подставив эти выражения в отношение $\theta_2/\theta_1 = 2$ и возводя в квадрат, чтобы избавиться от корня, получим $\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2} = \dfrac{16}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}$, откуда $L = R^2 C/20 = 1$ Гн.

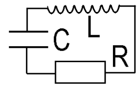


4. Движок реостата “Ре” перемещают слева направо, увеличивая сопротивление R. При нулевом сопротивлении, $R=R_1$ = 0 Ом, циклическая частота собственных электрических колебаний в контуре была равна ω_1. При сопротивлении $R=R_2$ = 15 кОм частота колебаний уменьшилась в два раза: $\omega_2 = \omega_1/2$. При какой величине сопротивления реостата R_3 колебания прекратятся?

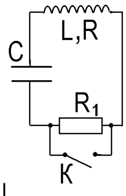
Решение.

При $R = 0$ циклическая частота незатухающих колебаний равна $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При ненулевой величине сопротивления $R = R_2$ частота $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta_2^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta_2^2} = \omega_1/2$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства, находим $\omega_1^2 - \beta_2^2 = \dfrac{\omega_1^2}{4}$, откуда получаем $\beta_2 = \dfrac{R_2}{2L} = \dfrac{\sqrt{3}\omega_1}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{LC}}$ и $\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{R_2}{\sqrt{3}}$. Колебания прекращаются, когда $\omega = \beta$ и сопротивление достигает критической величины $R_3 = R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Поэтому $R_3 = \dfrac{2R_2}{\sqrt{3}} = 17{,}3$ кОм.

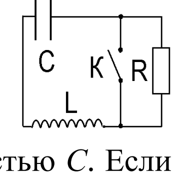
Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:



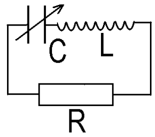
5. В колебательном контуре заряд конденсатора меняется со временем t по закону $q=q_0 \cdot \exp(-bt) \sin(at)$, где q_0, a, b – постоянные. Найти величину отношения b/a, если R = 2 кОм; L = 30 Гн; C = 6 мкФ.



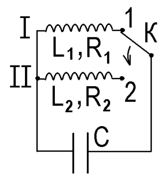
6. В показанном на рисунке контуре замыкают ключ К, закорачивая сопротивление R_1. Во сколько раз уменьшится при этом период собственных электрических колебаний? Соленоид в контуре имеет индуктивность L= 500 Гн и активное сопротивление R= 10 кОм; C= 4 мкФ; R_1= 10 кОм.



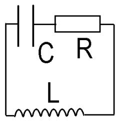
7. В колебательном контуре, изображённом на рисунке, замкнули ключ К. При этом период собственных электрических колебаний уменьшился в полтора раза. Чему равна ёмкость C контура, если L= 27 Гн; R= 2 кОм?



8. В цепь колебательного контура включен резистор с сопротивлением R = 1,5 кОм, катушка с индуктивностью L и конденсатор с переменной ёмкостью C. Если величину ёмкости уменьшить от величины C_1 = 18 мкФ до величины C_2 = 4 мкФ, то циклическая частота собственных затухающих колебаний в контуре увеличивается в n = 3 раза. Чему равна индуктивность L катушки?



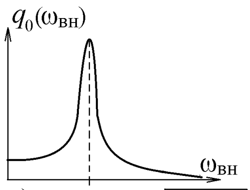
9. Ключом К в колебательный контур с ёмкостью C= 4 мкФ включается или или соленоид I, или соленоид II с одинаковыми активными сопротивлениями $R_1 = R_2 = R$ и с индуктивностями L_1=3 Гн и L_2=3L_1 соответственно. При этом частота собственных электрических колебаний в контуре не меняется. Чему равна величина R?



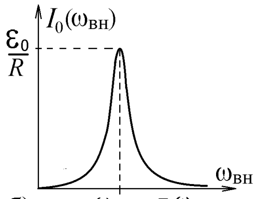
10. Логарифмический декремент затухания собственных электрических колебаний в контуре, изображённом на рисунке, θ = 2. Найти ёмкость C контура, если L= 44 Гн; R= 2 кОм.

Вынужденные колебания возникают, если в контур включена внешняя ЭДС с амплитудой ε_0, меняющаяся, например, по гармоническому закону с циклической частотой $\omega_{\text{вн}}$.

Величины заряда на конденсаторе и тока в цепи будут меняться с той же частотой $\omega_{\text{вн}}$. Амплитуды их колебаний постоянны во времени, но зависят от частоты внешней ЭДС:



а) $\omega_{\text{рез}\,q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$



б) $\omega_{\text{рез}\,I} = \omega_0$

<u>амплитуда заряда</u> $\boxed{q_0(\omega_{\text{вн}}) = \dfrac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{\left(\omega_{\text{вн}}^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{\text{вн}}^2}}}$;

<u>амплитуда тока</u> $\boxed{I_0(\omega_{\text{вн}}) = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega_{\text{вн}}C} - \omega_{\text{вн}}L\right)^2 + R^2}}}$.

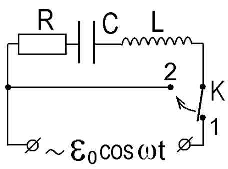
Графики такой зависимости приведены на рисунках справа.

Наблюдается **резонанс** – резкое увеличение амплитуды колебаний, когда частота внешней ЭДС сравнивается с резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$.

Резонансная частота для заряда или для напряжения на конденсаторе $\boxed{\omega_{\text{рез}\,q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}}}$.

Резонансная частота для тока в цепи $\boxed{\omega_{\text{рез}\,I} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. При этой частоте амплитуда тока достигает максимального значения, равного $\boxed{I_{0\,\max} = \varepsilon_0/R}$.

Примеры решения задач:

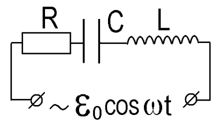


11. Если ключ К находится в положении “1” и подключает к электрическому колебательному контуру источник ЭДС с амплитудой ε_0 и циклической частотой ω, то при частоте $\omega = \omega_1$ в наблюдается резонанс вынужденных колебаний тока, а при частоте $\omega = \omega_2$ - резонанс вынужденных колебаний напряжения на обкладках конденсатора. Когда ключ К переключают в положение “2”, в контуре возникают собственные затухающие колебания с циклической частотой ω_3. Найти отношение частот ω_1/ω_3, если известно отношение частот $\omega_3/\omega_2 = 2$.

Решение.

Резонансная частота тока в цепи $\omega_1 = \omega_0$; резонансная частота напряжения $U = q/C$ на конденсаторе $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; частота собственных затухающих колебаний при положении ключа “2” $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. По условию $\left(\dfrac{\omega_3}{\omega_2}\right)^2 = \dfrac{\omega_0^2 - \beta^2}{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 2^2 = 4$. Находим отсюда, что $\beta^2 = \dfrac{3}{7}\omega_0^2$. Тогда

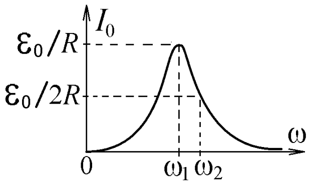
$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 3/7}} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32 .$$



12. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1$=4000 рад/с, а при частоте ω = ω_2=5000 рад/с амплитуда тока уменьшается в два раза. Чему равна ёмкость C контура, если R = 15 кОм ?

Решение.

Из графика зависимости амплитуды тока от частоты внешней ЭДС видно, что при $\omega_1 = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ амплитуда тока максимальна и равна $I_{0\max} = \varepsilon_0/R$, где ε_0 – амплитуда ЭДС. При частоте ω_2 по условию

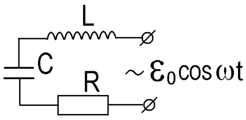


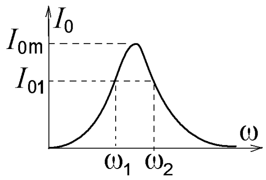
$I_0(\omega_2) = \varepsilon_0 \Big/ \sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 + R^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0}{R}$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $\left(\dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L\right)^2 = 3R^2$.

Помните, что извлекая квадратный корень, Вы получаете два значения: $\sqrt{x^2} = \pm x$. Выбрав неверный знак, можно получить в ответе отрицательную величину сопротивления R, ёмкости C или индуктивности L.

Поэтому, извлекая корень, учтем оба знака: $\dfrac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = \pm\sqrt{3}R$. Индуктивность L подставим из записанной выше формулы $L = 1/\left(\omega_1^2 C\right)$, и находим $C = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}R}\left(\dfrac{1}{\omega_2} - \dfrac{\omega_2}{\omega_1^2}\right)$. После подстановки числовых данных видно, что правильным будет нижний знак, дающий положительное значение $C = 4{,}33$ нФ.

13. На рисунке представлен график зависимости амплитуды тока I_0 от циклической частоты ω внешней ЭДС. Эта амплитуда имеет одинаковую величину $I_{01} = 3I_{0m}/5$ при двух значениях ω_1 и ω_2 частоты , где I_{0m} – максимальное возможное значение амплитуды тока при вынужденных колебаниях. Найти величину разности частот $\omega_2 - \omega_1$. Параметры контура: $\beta = \dfrac{R}{2L} = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 9000$ с$^{-1}$.



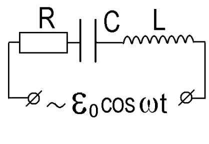


Решение.

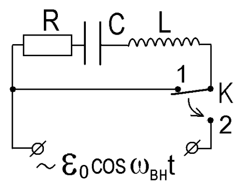
Так как $I_{0m} = \dfrac{\varepsilon_0}{R}$, то амплитуда тока $I_{01} = \varepsilon_0 \Big/ \sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2} = \dfrac{3}{5}\dfrac{\varepsilon_0}{R}$. Возводя в квадрат обе части этого равенства, получим $\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = \dfrac{16}{9}R^2$, откуда $\dfrac{1}{\omega C} - \omega L = \pm\dfrac{4}{3}R$. Последнее уравнение приводится к виду $\omega^2 \pm \dfrac{4}{3}\dfrac{R}{L}\omega - \dfrac{1}{LC} = 0$ или, согласно условию, $\omega^2 \pm \dfrac{8}{3}\omega_0\omega - \omega_0^2 = 0$. Такое квадратное уравнение имеет два положительных корня, если взять нижний знак: $\omega_1 = \omega_0/3$ и $\omega_2 = 3\omega_0$. Поэтому $\omega_2 - \omega_1 = 8\omega_0/3 = 24000$ с$^{-1}$.

Примеры задач контрольной работы для самостоятельной подготовки:

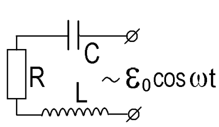
14. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1 = 2000$ с$^{-1}$, а максимум амплитуды тока – при $\omega = \omega_2 = 3000$ с$^{-1}$. Чему равно активное сопротивление R контура, если L = 2 Гн?



15. Вначале ключ К была замкнут в положении “1”, и циклическая частота собственных электрических колебаний в образовавшемся контуре имела величину $\omega_1 = 4000$ с$^{-1}$. Затем ключ К переключили в положение “2” (см. рисунок), подключая внешнюю ЭДС. При какой циклической частоте $\omega_{вн}$ внешней ЭДС амплитуда тока в цепи будет максимальной, если амплитуда напряжения на конденсаторе максимальна при $\omega_{вн} = \omega_2 = 3000$ с$^{-1}$?

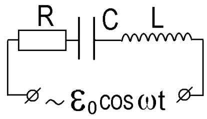


16. В колебательный контур включен источник внешней ЭДС с амплитудой ε_0 и с циклической частотой ω. Наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний напряжения на конденсаторе наблюдается при $\omega = \omega_1 = 1000$ с$^{-1}$. При каком значении частоты ω достигается наибольшая величина амплитуды вынужденных колебаний



тока в цепи? Активное сопротивление контура R = 8 кОм, его индуктивность L = 2 Гн.

17. В цепи, изображённой на рисунке, максимальная амплитуда тока наблюдается при циклической частоте внешней ЭДС $\omega = \omega_1$=2000 рад/с, а при частоте $\omega = \omega_2$= = 3000 рад/с амплитуда тока уменьшается в три раза. Чему равно сопротивление R контура, если C = 2 мкФ ?

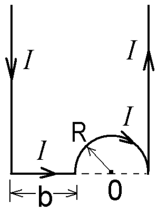


Задание практического занятия №8. Физика. Семестр 3.
Тема занятия: 2-я контрольная работа.

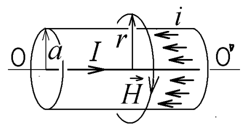
Условия вариантов контрольной работы будут сообщены каждому студенту группы в индивидуальном порядке.

Ниже для ознакомления приводится демонстрационный пример такого варианта.

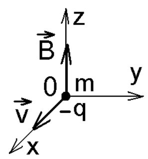
2-я контрольная работа. Демонстрационный вариант.



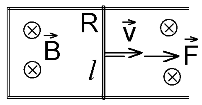
1. По бесконечному проводнику, согнутому в виде двух параллельных линий, полуокружности с радиусом R = = 40 см и прямого отрезка длины b = 50 см, течет ток I = 2 А (см.рисунок). Найти величину индукции магнитного поля, создаваемого током в центре О полуокружности.



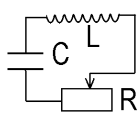
2. По осевому тонкому проводнику-жиле длинного прямого коаксиального кабеля течёт ток I = 3 А. По второму тонкому цилиндрическому проводнику с радиусом a = 4 мм протекает встречный ток с поверхностной плотностью i = 100 А/м. На каком расстоянии r от оси кабеля ОО' напряженность магнитного поля равна H = 3 А/м?



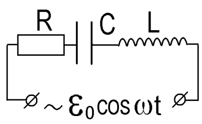
3. Частица с удельным зарядом $q/m= -4\cdot 10^9$ Кл/кг была ускорена разностью потенциалов $\Delta\varphi$ и оказалась в магнитном поле с индукцией B = 5 мТл, направленной вдоль оси z. В начальный момент t_0= 0 частица находилась в точке 0 и двигалась со скоростью **v**, направленной вдоль оси x (см. рисунок). В дальнейшем наибольшее удаление частицы от точки 0 равно 20 см. Чему равна величина ускоряющей разности потенциалов $\Delta\varphi$?



4. Линии индукции магнитного поля с величиной B = 2 Тл перпендикулярны плоскости П-образной проводящей рамки, не имеющей сопротивления. По рамке с постоянной скоростью без трения скользит проводящая перемычка длины l = 60 см с сопротивлением R = 8 Ом. Для этого перемычку тянут с силой F = 0,9 Н. Чему равна скорость перемычки?



5. Собственные электрические колебания в контуре прекращаются при увеличении сопротивления реостата до значения R_0. Чему равен логарифмический декремент затухания θ колебаний при вдвое меньшем сопротивлении $R = R_0/2$?



6. Амплитуда тока в электрическом колебательном контуре оказывается одинаковой при двух значениях циклической частоты внешней ЭДС: ω_1=3000 рад/с и ω_2=4000 рад/с. Чему равна ёмкость C контура, если его индуктивность L = 1 Гн ?