Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

В.П. БАРАНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 1

МНОЖЕСТВА. АЛГЕБРА ЛОГИКИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

Тула
Издательство ТулГУ
2021

УДК 517.5

Баранов В.П. **Сборник задач по дискретной математике.** Часть 1: **Множества. Алгебра логики и ее приложения**: Учеб. пособие. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2021. – 162 с.

В пособии представлены задачи и упражнения по теории множеств, алгебре логики и ее приложениям (минимизации булевых функций и их реализации схемами из функциональных элементов и контактными схемами).

Предназначено для студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», других направлений и специальностей с углубленной математической подготовкой, а также может быть полезно преподавателям университетов и технических вузов, в которых изучается дискретная математика.

Табл. 11. Ил. 33. Библиогр.: 14 назв.

Печатается по решению библиотечно-издательского совета Тульского государственного университета

Рецензенты: кафедра алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л.Н. Толстого (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Н.М. Добровольский);

зав. кафедрой вычислительной механики и математики Тульского государственного университета, д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Глаголев

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 3

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА 4

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», но может быть полезно также студентам других направлений и специальностей с углубленной математической подготовкой, применяющим методы и конструкции дискретной математики. Преподаватели могут использовать его при подготовке к практическим занятиям.

В сборнике четыре главы. В первой главе представлены задачи по теории множеств. Основное внимание в сборнике уделено задачам по алгебре логики, которые приведены во второй главе. В качестве приложений алгебры логики рассмотрены методы минимизации булевых функций (третья глава) и задачи по реализации булевых функций схемами из функциональных элементов и контактными схемами (четвертая глава).

Для удобства читателя каждый параграф сопровождается необходимым теоретическим материалом. В качестве примеров приведены решения различных задач. Кроме того, многие предлагаемые в сборнике задачи и упражнения снабжены ответами, указаниями и решениями. Библиографические источники, которые могут быть полезными при работе над различными главами, указаны в списке литературы.

ГЛАВА 1
МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ФУНКЦИИ

§ 1. Множества

1. Основные понятия. Понятие *множества* является первичным и поэтому формально не может быть определено. Обычно множество объясняют, следуя основателю теории множеств Г. Кантору, как совокупность объектов произвольной природы, рассматриваемую, как единое целое.

Объекты, составляющие множество, называют его *элементами*. Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита (X, Y, ...), элементы множеств – строчными буквами (x, y, ...). Утверждение «элемент x принадлежит множеству X» записывается следующим образом: $x \in X$ ($\in$ – символ принадлежности). В противном случае – $x \notin X$ (или $x \overline{\in} X$).

Факт принадлежности элемента x множеству X можно указать с помощью *характеристической функции множества*:

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

На рис. 1.1 показана принадлежность точек отрезка $[a,\ b]$ множеству X. В более общем случае, предложенном Л. Заде, функция $\mu_X(x)$ отражает частичную принадлежность элемента x множеству X, принимая значения из интервала $(0,\ 1]$.

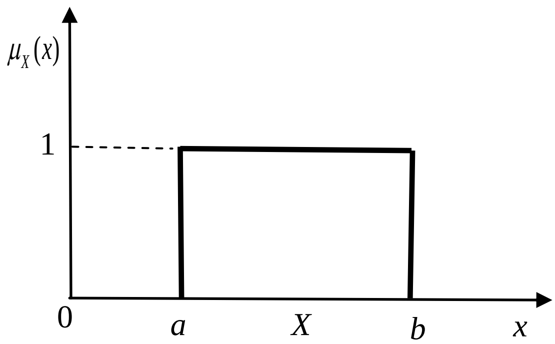


Рис. 1.1. Характеристическая функция множества X на отрезке $[a,\ b]$

Если каждый элемент множества X входит в множество Y, то X называется *подмножеством* Y. При этом пишут: $X \subseteq Y$ или $Y \supseteq X$. Если

$X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то пишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$. Здесь $\subseteq, \subset$, $\supseteq$, $\supset$ – символы включения. Множества X и Y равны, если они состоят из одних и тех же элементов, иначе говоря, если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначается $\varnothing$). Множество называется *истинным*, если оно не пустое.

Из определения подмножества следует, что каждое множество является подмножеством самого себя: $X \subseteq X$. Кроме того, считают, что пустое множество есть подмножество любого множества X: $\varnothing \subset X$.

Различают два вида подмножеств множества X: само X и $\varnothing$ называют *несобственными* подмножествами; все остальные подмножества, если они существуют, – *собственными*.

В теории множеств для удобства и краткости записей используют специальные обозначения:

$\forall$ – квантор общности (означающий «любой», «для всех», «каков бы ни был»);

$\exists$ – квантор существования (означающий «существует», «найдется», «можно найти»);

$\Rightarrow$ – импликация (символ следствия, означающий «влечет за собой).

С помощью этих символов условие $X \subset Y$ запишется так:

$$\forall x : x \in X \Rightarrow x \in Y .$$

Множество X называется *эквивалентным* множеству Y (обозначается $X \sim Y$), если между элементами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие. Различают *конечные* и *бесконечные* множества. Число элементов множества X называется его *мощностью* или *кардинальным числом* и обозначается $|X|$ или $\operatorname{card} X$ (англ. *cardinality* – мощность). Таким образом, конечное множество, содержащее n элементов, имеет мощность $|X| = n$. Если X эквивалентно множеству натуральных чисел N, то его называют *счетным* и его мощность обозначается через

N_0. Множество X, эквивалентное множеству действительных чисел R, называется *континуальным*, а его кардинальное число c – *мощностью континуума*.

2. Способы задания. Для задания множества существуют различные способы. Множество считают заданным, если о каждом элементе можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет.

1) Использование общепринятых обозначений. Для числовых множеств имеем: N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; P – множество простых чисел, Q – множество рациональных чисел; R – множество действительных чисел; R^+ – множество действительных положительных чисел; чисел; R_0 – множество действительных неотрицательных чисел; C – множество комплексных чисел.

2) Перечислительный способ. Множество задается *перечислением* его элементов:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Этот способ применим к заданию конечных множеств. Согласно принципу равенства множеств по их объему (содержимому) порядок элементов множества несущественен.

Пример 1.1. $X_1 = \{a, b, c\}$, $X_2 = \{b, c, a\}$, $X_1 = X_2$. □

Множество, допускающее включение одного и того же элемента несколько раз, называется *мультимножеством*. Число повторений элемента называется его *кратностью*. В сокращенной записи мультимножества вместе с элементом x_i указывается его кратность m_i. Кратность $m_i = 1$ может опускаться.

Пример 1.2. Представить мультимножеством простые множители числа 720. Этими множителями являются: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Они образуют мультимножество $X = \{2, 2, 2, 2, 3, 3, 5\}$, которое в сокращенной записи имеет вид

$$X = \{(2,4),\ (3,2),\ 5\}$$

или в другой записи:

$$X = \{(4/2),\ (2/3),\ 5\},$$

где $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$. □

3) Описательный способ. Этот способ применим для конечных и бесконечных множеств. Он состоит в задании характеристического свойства $P(x)$ (одноместного предиката), которым обладают все элементы x множества X и только они. Тогда имеет место следующая запись

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

или

$$X = \{x : P(x)\}.$$

Пример 1.3. Отрезок [0, 1] действительной прямой можно определить следующим образом

$$[0,\ 1] = \{x \mid x \in R,\ 0 \le x \le 1\}. \ \square$$

Пример 1.4. $X = \{x \mid x \in N,\ x \bmod 2 = 0\}$ – множество всех натуральных четных чисел. □

4) Рекурсивный способ.

1°. Указываются некоторые исходные элементы, входящие в множество.

2°. Описывается механизм получения новых элементов из исходных.

3°. Объявляется, что в множестве нет никаких других элементов кроме тех, которые можно получить из исходных, применяя описанный в п. 2° механизм.

Пример 1.5. Множество $X = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots\} \subset N$ можно задать рекурсивно:

1°. $x = 1 \in X$.

2°. $\forall x \in X \Rightarrow 2x \in X$.

3°. X – наименьшее подмножество натурального ряда, удовлетворяющее условиям 1° и 2°.

Условие 3° определяет X как пересечение всех множеств, удовлетворяющих условиям 1° и 2°. □

В дальнейшем при рекурсивном задании множеств последний пункт, как правило, не указывается, но всякий раз это требование подразумевается.

П р и м е р 1.6. Рассмотрим совокупность всех слов в алфавите $X=\{x_1, x_2,..., x_m\}$, элементы которого будем называть буквами, а элементы определяемого множества X^* – словами.

1°. Каждая буква является словом: $x_i \in X^*$, $i=1, 2, ..., m$.

2°. Результат приписывания к слову любой буквы является словом:

$$\forall x \in X^* \Rightarrow xx_1 \in X^*, xx_2 \in X^*, ..., xx_m \in X^*.$$

Например, если $X=\{0, 1\}$, то X^* содержит следующие элементы:

0, 1 (согласно 1°);

00, 01, 10, 11 (согласно 2°);

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 (согласно 2°) и так далее. □

Теория множеств, рассматриваемая без ограничений на способы задания множеств, называется *наивной теорией множеств*. В этой теории еще при жизни ее создателя Г. Кантора были обнаружены многочисленные парадоксы. Приведем один из известных парадоксов Б. Рассела, открытый им в 1903 г.

Пусть M – множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли множество M само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению M, оно не должно быть элементом M – противоречие. Если нет – то, по определению M, оно должно быть элементом M – вновь противоречие.

Для преодоления противоречий в наивной теории множеств было предложено несколько возможных ее аксиоматизаций, в рамках которых утверждение о существовании *множества всех множеств* было бы невыводимым.

3. Операции над множествами. Во многих случаях удается избежать противоречий наивной теории множеств, если выбрать некоторое так называемое *универсальное множество* U (*универсум*) и ограничиться рассмотрением только его подмножеств. Если некоторые множества взять в качестве исходных, то из них можно получить новые с помощью следующих операций.

Объединением множеств X и Y (обозначение $X \bigcup Y$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или Y:

$$X \bigcup Y = \{x | x \in X \vee x \in Y\}.$$

Вместо символа объединения *U* используется также символ +.

Пересечением множеств X и Y (обозначение $X \bigcap Y$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств X и Y:

$$X \bigcap Y = \{x | x \in X \wedge x \in Y\}.$$

Для операции пересечения используются также другие обозначения:

$$X \bigcap Y = X \cdot Y = XY.$$

Аналогично определяются объединение и пересечение произвольной совокупности множеств X_α, $\alpha \in A$. Здесь A – множество индексов. Если A – множество n первых натуральных чисел, то употребляются обозначения $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ и $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$, а в случае если $A = N$, то будем писать $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$.

Разностью множеств X и Y (обозначение $X \setminus Y$) называется множество, состоящее из всех элементов X, не принадлежащих Y:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}.$$

В отличие от двух предыдущих операций разность некоммутативна: $X \setminus Y \neq Y \setminus X$. Если $X \setminus Y = \varnothing$, то $X \subseteq Y$.

Симметрической разностью множеств X и Y (обозначение $X \Delta Y$) называется множество элементов X и Y, которые содержатся только в одном из этих множеств:

$$X \Delta Y = \{x \mid x \in (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X)\}.$$

Дополнением к множеству X (обозначение $\bar{X}$) относительно универсального множества U называется множество:

$$\bar{X} = U \setminus X \text{ или } \bar{X} = \{x \mid x \notin X\}.$$

Операции объединения, пересечения и дополнения часто называют *булевыми операциями* над множествами. Так как операция разности не обладает свойством ассоциативности, то ее выражают через другие операции, например, операции дополнения и пересечения:

$$A \setminus B = A \cdot \bar{B}.$$

Универсальное множество позволяет геометрически изображать множества и операции над ними с помощью *диаграмм Венна* (рис. 1.2).

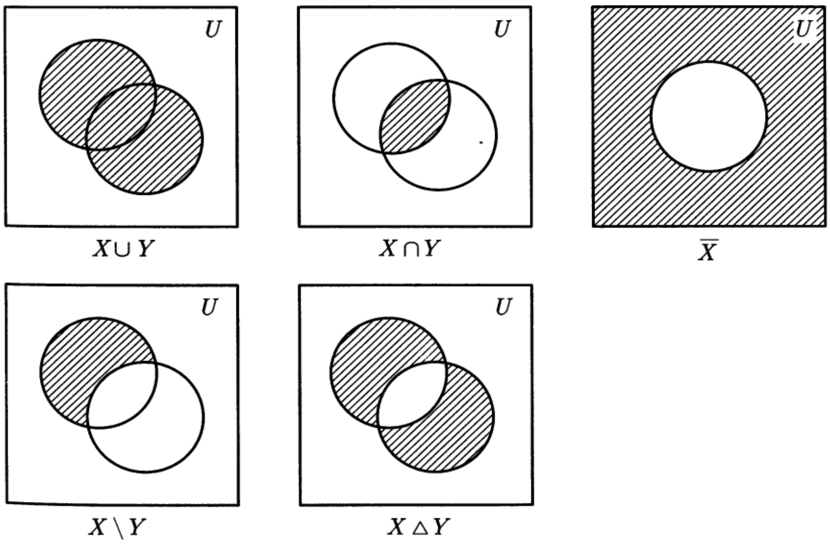


Рис. 1.2. Диаграммы Венна

4. Теоретико-множественные тождества. Для $\forall X,\ Y,\ Z \subset U$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z) \\ 2.\ (X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z) \end{array}\right\}$$ – ассоциативность объединения и пересечения.

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ X \bigcup Y = Y \bigcup X \\ 4.\ X \bigcap Y = Y \bigcap X \end{array}\right\}$$ – коммутативность объединения и пересечения.

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ (X \bigcup Y) \bigcap Z = (X \bigcap Z) \bigcup (Y \bigcap Z) \\ 6.\ (X \bigcap Y) \bigcup Z = (X \bigcup Z) \bigcap (Y \bigcup Z) \end{array}\right\}$$ – дистрибутивность объединения и пересечения.

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ X \bigcup X = X \\ 8.\ X \bigcap X = X \end{array}\right\}$$ – идемпотентность.

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ \overline{X \bigcup Y} = \bar{X} \bigcap \bar{Y} \\ 10.\ \overline{X \bigcap Y} = \bar{X} \bigcup \bar{Y} \end{array}\right\}$$ – законы де Моргана.

$$\left.\begin{array}{l} 11.\ X \bigcup \bar{X} = U \\ 12.\ X \bigcap \bar{X} = \varnothing \end{array}\right\}$$ – дополнимость.

13. $\bar{\bar{X}} = X$ – закон двойного дополнения.

$$\left.\begin{array}{l} 14.\ X \bigcup \varnothing = X \\ 15.\ X \bigcup U = U \\ 16.\ X \bigcap \varnothing = \varnothing \\ 17.\ X \bigcap U = X \end{array}\right\}$$ – существование универсальных границ.

$$\left.\begin{array}{l} 18.\ \bar{U} = \varnothing \\ 19.\ \bar{\varnothing} = U \end{array}\right\}$$ – законы дополнения.

Справедливость равенств 1 – 19 можно установить, используя *принцип равнообъёмности*, согласно которому нужно доказать, что множества, стоящие в левой и правой частях равенства состоят из одних и тех же элементов.

П р и м е р 1.7. Приведем доказательство равенства 9. Имеем:

$$x\in\overline{X\bigcup Y}\Rightarrow x\notin X\bigcup Y\Rightarrow x\notin X\wedge x\notin Y\Rightarrow x\in\bar{X}\wedge x\in\bar{Y}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in\bar{X}\bigcap\bar{Y}\Rightarrow\overline{X\bigcup Y}\subseteq\bar{X}\bigcap\bar{Y};$$

$$x\in\bar{X}\bigcap\bar{Y}\Rightarrow x\in\bar{X}\wedge x\in\bar{Y}\Rightarrow x\notin X\wedge x\notin Y\Rightarrow x\notin X\bigcup Y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in\overline{X\bigcup Y}\Rightarrow\bar{X}\bigcap\bar{Y}\subseteq X\bigcup Y. \square$$

Пример 1.8. Доказать тождество:

$$A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C).$$

Решение. Первый способ (принцип равнообъёмности):

$$x\in A\setminus(B\bigcup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\bigcup C\Rightarrow x\in A\wedge(x\in\bar{B}\wedge x\in\bar{C})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x\in A\wedge x\in\bar{B})\wedge(x\in A\wedge x\in\bar{C})\Rightarrow(x\in A\setminus B)\wedge(x\in A\setminus C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)\Rightarrow A\setminus(B\bigcup C)\subseteq(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C);$$

$$x\in(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in\bar{B})\wedge(x\in A\wedge x\in\bar{C})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\bigcup C\Rightarrow x\in A\wedge x\in\overline{B\bigcup C}\Rightarrow x\in A\setminus(B\bigcup C).$$

Второй способ (с использованием формул):

$$A\setminus(B\bigcup C)=A\bigcap\overline{B\bigcup C}=A\bigcap A\bigcap\bar{B}\bigcap\bar{C}=(A\bigcap\bar{B})\bigcap(A\bigcap\bar{C})=$$
$$=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C). \square$$

Рассмотрим далее различные способы решения систем теоретико-множественных соотношений.

Пример 1.9. Доказать, что:

$$A\bigcap B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}\bigcup C.$$

Решение. Пусть $A\bigcap B\subseteq C\wedge x\in A$. Если $x\in B$, то $x\in A\bigcap B\subseteq C$, т. е. $x\in\bar{B}\bigcup C$. Если $x\notin B$, то $x\in\bar{B}\bigcup C$.

Пусть $A\subseteq\bar{B}\bigcup C\wedge x\in A\bigcap B$. Тогда $x\in A\wedge x\in B$. Значит, $A\bigcap B\subseteq C$. $\square$

Пример 1.10. Решить систему соотношений относительно множества X:

$$\begin{cases}A\bigcap X=B,\\ A\bigcup X=C,\\ B\subseteq A\subseteq C.\end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения: $A\bigcap X=B\Rightarrow B\subseteq X\subseteq\bar{A}\bigcup B$; из второго уравнения: $A\bigcup X=C\Rightarrow C\bigcap\bar{A}\subseteq X\subseteq C$. Отсюда

$$B\bigcup C\bigcap \bar{A}\subseteq X\subseteq(\bar{A}\bigcup B)\bigcap C=\bar{A}\bigcap C\bigcup B\bigcap C=\bar{A}\bigcap C\bigcup B.$$

Ответ: $X=(C\setminus A)\bigcup B$. □

Пример 1.11. Решить систему соотношений относительно множества X и указать условия ее совместности:

$$\begin{cases} B\Delta C=X\bigcap A, \\ X\setminus C=A\bigcap B, \\ C\subseteq A\bigcap B. \end{cases}$$

Решение. Построим диаграмму для произвольных множеств A, B, X и множества $C\subseteq A\bigcap B$ (рис. 1.3). Введем обозначения: 1 –элементы множества A, не входящих ни в одно из множеств B, C, X; 2 –элементы, которые входят в множества A, B и X и не входят в множество C; …; 9 – элементы множества X, не входящие ни в одно из множеств A, B, C. Имеем: $A=\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, $B=\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $C=\{3, 7\}$, $X=\{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Найдем $B\Delta C=\{2, 4, 6, 8\}$, $X\bigcap A=\{5, 6, 7\}$. Из первого уравнения системы следует, что элементы множеств 2, 4, 5, 7 и 8 отсутствуют. Тогда $A=\{1, 3, 6\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{3\}$, $X=\{6, 9\}$.

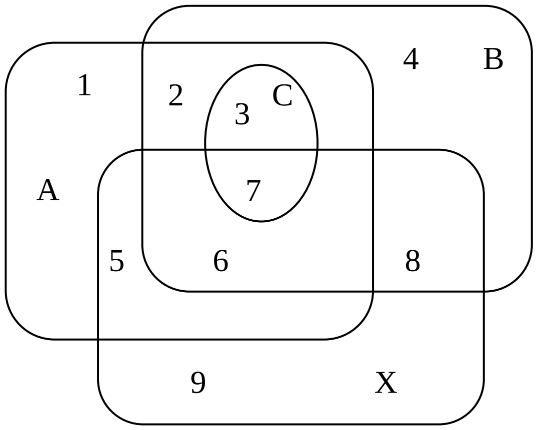


Рис. 1.3

Найдем $X\setminus C=\{6, 9\}$, $A\bigcap B=\{3, 6\}$. Из второго уравнения системы следует, что элементы множеств 3 и 9 отсутствуют. Имеем:

$$A=\{1, 6\},\ B=\{6\},\ C=\varnothing,\ X=\{6\}.$$

Ответ: $X=B$, $B\subseteq A$, $C=\varnothing$. □

Пример 1.12. Решить систему уравнений относительно множества X и указать условия совместности системы или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} A\Delta X = B\setminus C, \\ C\bigcap X = A\bigcup X, \\ B\setminus X = A\setminus X. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим всевозможные расположения множеств A, B, C, X относительно универсального множества U. Всего имеем 16 вариантов, которые представим двоичными наборами размерности 4 (табл. 1.1).

Номера наборов обозначают: 1 – список элементов, не входящих ни в одно из множеств A, B, C, X; 2 – список элементов, не входящих в A, B и C, но принадлежащих X; …; 16 – список элементов, принадлежащих всем множествам A, B, C, X. Имеем:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\},$$

$$A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\},\ B = \{5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16\},$$

$$C = \{3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16\},\ X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}.$$

Найдем $A\Delta X = \{2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15\}$, $B\setminus C = \{5, 6, 13, 14\}$.

В силу первого уравнения системы списки элементов 2, 4, 5, 8, 9, 11, 14 и 15 пусты. Получим: $A = \{10, 12, 13, 16\}$, $B = \{6, 7, 13, 16\}$, $C = \{3, 7, 12, 16\}$, $X = \{6, 10, 12, 16\}$.

Найдем $C\bigcap X = \{12, 16\}$, $A\bigcup X = \{6, 10, 12, 13, 16\}$.

Данные множества равны в силу второго уравнения системы, следовательно, списки элементов 6, 10, 13 пусты, и множества примут вид:

$$A = \{12, 16\},\ B = \{7, 16\},\ C = \{3, 7, 12, 16\},\ X = \{12, 16\}.$$

В третьем уравнении системы $B\setminus X = \{7\}$, $A\setminus X = \varnothing$, поэтому список 7 пуст, и множества примут окончательный вид:

$$A = \{12, 16\} = X,\ B = \{16\},\ C = \{3, 12, 16\},\ U = \{1, 3, 12, 16\}.$$

Ответ: $X = A,\ B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$. □

5. Представление множества в виде суммы конституент. Система тождеств 1 – 19, которые называются *булевыми* по имени Дж. Буля, полна в том смысле, что любое соотношение между множествами является следствием этих тождеств. Основная задача, решаемая в алгебре высказываний, сводится к следующей: совпадают ли два множества, построенные из исходных множеств $A_1, ..., A_n$ при помощи операций объединения, пересечения и дополнения?

Таблица 1.1

№	A	B	C	X
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Рассмотрим алгоритм решения поставленной задачи, допускающий его компьютерную реализацию. Составим различные пересечения, составленные из исходных множеств и их дополнений. На основании тождеств 8, 12 и 16 можно считать, что каждое множество или его дополнение входит в пересечение не более одного раза. Пользуясь тождеством 4 будем располагать множества в порядке возрастания их номеров. Такие пересечения назовем *конституентами* (составляющими), то есть конституента – это произведение, в котором:

1) ровно n сомножителей;

2) i-й сомножитель – либо A_i, либо – $\bar{A}_i$, $i = 1, ..., n$.

Представление множества в виде суммы конституент в силу его единственности может быть использовано в качестве алгоритма для проверки теоретико-множественных тождеств.

П р и м е р 1.13. Проверить тождество $U_1 = U_2$, где

$$U_1 = \overline{(A_1 + \bar{A}_2)(A_2 + \bar{A}_3)(A_3 + \bar{A}_1)},\ U_2 = (A_1 + A_2 + A_3)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3).$$

Решение. Для U_1 и U_2 с помощью тождеств 4, 9, 10, 12 и 13 получим выражения вида «сумма произведений»:

$$\begin{aligned} U_1 &= \overline{(A_1 + \bar{A}_2)(A_2 + \bar{A}_3)(A_3 + \bar{A}_1)} = \overline{A_1 + \bar{A}_2} + \overline{A_2 + \bar{A}_3} + \overline{A_3 + \bar{A}_1} = \\ &= \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_2 A_3 + A_1 \bar{A}_3; \end{aligned}$$

$$U_2 = (A_1 + A_2 + A_3)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3) = A_1\bar{A}_2 + A_1\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 + A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_3 + \bar{A}_2 A_3.$$

Если некоторое произведение в сумме содержит менее трех сомножителей, то добавляем недостающие сомножители с помощью тождеств 5, 11 и 17:

$$\begin{aligned} U_1 &= \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_2 A_3 + A_1\bar{A}_3 = \bar{A}_1 A_2 (A_3 + \bar{A}_3) + (A_1 + \bar{A}_1)\bar{A}_2 A_3 + A_1 (A_2 + \bar{A}_2)\bar{A}_3 = \\ &= \bar{A}_1 A_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= A_1\bar{A}_2 + A_1\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 + A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_3 + \bar{A}_2 A_3 = \\ &= A_1\bar{A}_2 A_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + A_1 A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \\ &+ A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3 + A_1\bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов в формуле U_2 (тождество 7) убеждаемся, что тождество

$$\overline{(A_1 + \bar{A}_2)(A_2 + \bar{A}_3)(A_3 + \bar{A}_1)} = (A_1 + A_2 + A_3)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3)$$

справедливо. □

6. Прямое произведение множеств. *Прямым произведением* множеств X и Y называют множество $X \times Y$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $(x,\ y)$, такие, что $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x,\ y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Эта операция над множествами, в отличие от рассмотренных ранее, изменяет природу элементов: в новом множестве элементами являются пары.

Прямое произведение в общем случае не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности: $X \times Y \neq Y \times X$, $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Если $X=Y$, то декартово произведение $X \times X$ называется *декартовым квадратом* и обозначается X^2.

Пусть теперь даны n множеств: $X_1, X_1, ..., X_n$. Упорядоченный набор из n элементов, таких, что $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \ldots$, $x_n \in X_n$, называется *вектором* или *кортежем*. Множество таких векторов представляет собой прямое произведение множеств $X_1, X_1, ..., X_n$:

$$X_1 \times X_2 ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\}.$$

Если $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, то множество $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ называется *степенью* (прямой) множества X и обозначается через X^n.

Проекцией вектора $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на i-ю ось (обозначение $\text{пр}_i v$) называется его i-я компонента. Проекцией вектора v на оси с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ называется вектор $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ длины k (обозначение $\text{пр}_{i_1, i_2, ..., i_k} v$).

Пусть V – множество векторов одинаковой длины. Тогда проекцией множества V на i-ю ось называется множество проекций всех векторов на i-ю ось: $\text{пр}_i V = \{\text{пр}_i v \mid v \in V\}$. Аналогично определяется проекция множества V на несколько осей: $\text{пр}_{i_1, ..., i_k} V = \{\text{пр}_{i_1, ..., i_k} v \mid v \in V\}$.

Пример 1.14. Пусть $X = Y = R$. Тогда прямым произведением $X \times Y = R^2$ является множество точек плоскости, то есть пар вида (x, y), где $x, y \in R$ и являются координатами точек плоскости.

Координатное представление точек плоскости, предложенное французским математиком и философом Р. Декартом, является исторически первым примером прямого произведения. Потому прямое произведение называют также *декартовым*. □

Пример 1.15. $X = (2, 4]$, $Y = [1, 3] \Leftrightarrow X \times Y$ – множество точек прямоугольника без левой стороны. □

Пример 1.16. $X=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $Y=\{1, 2, ..., 8\} \Leftrightarrow X\times Y$ – множество, содержащее обозначения всех 64 клеток шахматной доски. □

Пример 1.17. Доказать тождество:

$$(A\bigcup B)\times C=(A\times C)\bigcup(B\times C).$$

Решение. Пусть $x\in(A\bigcup B)\times C$. Тогда $x=(y, z)$, где $y\in A\bigcup B$, $z\in C$. Отсюда $y\in A$ или $y\in B$. Значит, $(y, z)\in A\times C$ или $(y, z)\in B\times C$. Итак, $(A\bigcup B)\times C\subseteq(A\times C)\bigcup(B\times C)$.

Пусть $x\in(A\times C)\bigcup(B\times C)$. Тогда $x\in A\times C$ или $x\in B\times C$. Это означает, что $x=(y, z)$ и в первом случае $y\in A, z\in C$, а во втором – $y\in B, z\in C$. Значит, $y\in A\bigcup B$, а $x=(y, z)\in(A\bigcup B)\times C$. Итак, $(A\times C)\bigcup(B\times C)\subseteq(A\bigcup B)\times C$. □

7. Задачи и упражнения

1.1. Доказать:

1) $A\bigcap B\subseteq A\subseteq A\bigcup B$; 2) $A\bigcap B\subseteq B\subseteq A\bigcup B$;

3) $A\setminus B\subseteq A$.

1.2. Какие из указанных свойств верны? Привести обоснование:

1) $A\subseteq A\bigcup(B\bigcap A)$; 2) $A\subseteq(A\bigcap B)\bigcup B$;

3) $A\bigcup B\subseteq B$; 4) $B\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(\bar{A}\bigcap B)$;

5) $A\subseteq A\bigcap B\bigcup\bar{A}\bigcap B$; 6) $(A\bigcap B)\bigcup(B\bigcap C)\subseteq A\bigcup C$;

7) $A\bigcup(A\bigcap B)\subseteq B$; 8) $(A\bigcap\bar{B})\bigcup B\subseteq B\bigcup A$.

1.3. Доказать тождества:

1) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;

2) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

3) $(A\bigcap B)\bigcup(C\bigcap D)=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)\bigcap(A\bigcup D)\bigcap(B\bigcup D)$.

4) $\overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$; 5) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$;

6) $A\setminus(A\setminus B)=A\bigcap B$;   7) $A\setminus B=A\setminus(A\bigcap B)$;

8) $A\bigcap(B\setminus C)=(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)=(A\bigcap B)\setminus C$.

9) $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;   10) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)$;

11) $A\bigcup B=(A\oplus B)\bigcup(A\bigcap B)$;   12) $A\setminus B=A\oplus(A\bigcap B)$.

1.4. Доказать:

1) $A\bigcup B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq C$;

2) $A\subseteq B\bigcap C\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\subseteq C$;

3) $A\subseteq B\bigcup C\Leftrightarrow A\bigcap\overline{B}\subseteq C$;

4) $(A\bigcap B)\bigcup C=A\bigcap(B\bigcup C)\Leftrightarrow C\subseteq A$;

5) $A\subseteq B\Rightarrow(C\setminus B)\subseteq(C\setminus A)$;   6) $A\subseteq B\Rightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

1.5. Упростить:

1) $A\bigcap B\bigcap C\bigcup A\bigcap\overline{B}\bigcup B\bigcap\overline{C}\bigcup\overline{A}\bigcap C$;

2) $(A\bigcup B\bigcup C)\bigcap(\overline{B}\bigcup C)\bigcap(B\bigcup\overline{C})\bigcap(\overline{A}\bigcup B)$.

1.6. Какое из отношений ($X\subset Y$, $X\supset Y$, $X=Y$, никакое из предыдущих) имеет место для множеств X и Y:

1) $X=A\bigcup B\setminus C,\ Y=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$;

2) $X=A\setminus(B\bigcup C),\ Y=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;

3) $X=(A\setminus B)\setminus C,\ Y=A\setminus(B\setminus C)$;

4) $X=A\setminus(B\bigcap C),\ Y=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$;

5) $X=(A\bigcup B)\setminus C,\ Y=(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$;

6) $X=A\bigcup(B\bigcap C),\ Y=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

7) $X=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A),\ Y=(A\bigcup B\bigcup C)\setminus(A\bigcap B\bigcap C)$;

8) $X=A\setminus(B\bigcup C),\ Y=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$;

9) $X=A\setminus(B\bigcap C),\ Y=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;

10) $X=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus C)\bigcup(C\setminus A),\ Y=(B\setminus A)\bigcup(C\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$;

11) $X=(A\setminus B)\bigcap C,\ Y=(A\setminus C)\bigcup B$;

12) $X=\overline{A\oplus B},\ Y=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$;

13) $X=(A\oplus B)\cap C,\ Y=(A\oplus C)\cap(B\oplus C)$;

14) $X=\overline{A\cap B\cap C},\ Y=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

15) $X=(A\times B)\cap(C\times D),\ Y=(A\cup C)\times(B\cup D)$;

16) $X=(A\times B)\cap(C\times D),\ Y=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

1.7. Решить системы соотношений относительно множества X и указать условия их совместности:

1) $\begin{cases} A\setminus X=B, \\ X\setminus A=C, \\ B\subseteq A,\ A\cap C=\varnothing; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A\setminus X=B, \\ A\cup X=C, \\ B\subseteq A\subseteq C; \end{cases}$

3) $\begin{cases} B\Delta C=C\setminus X, \\ X\cup A=C, \\ A\subseteq B\subseteq C; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} C\setminus A=X\Delta B, \\ X\cap A=B\cap C, \\ A\cup B\subseteq C; \end{cases}$

5) $\begin{cases} X\cup(B\setminus A)=C, \\ C\setminus X=A\cap B, \\ A\cup B\subseteq C; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} C\setminus X=A\cap(X\setminus B), \\ A\cup X=B, \\ A\cup B\subseteq C. \end{cases}$

1.8. Решить системы уравнений относительно множества X и указать условия совместности системы или доказать ее несовместность:

1) $\begin{cases} A\cup X=B\cap X, \\ A\cap X=C\cup X; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} A\setminus X=X\setminus B, \\ X\setminus A=C\setminus X; \end{cases}$

3) $\begin{cases} A\cap X=B\setminus X, \\ C\cup X=X\setminus A; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A\cup X=B\setminus X, \\ X\setminus B=C\cup X, \\ \bar{A}\setminus C=X\setminus A; \end{cases}$

5) $\begin{cases} X\setminus C=A\setminus B, \\ A\setminus C=A\cap B, \\ (B\setminus X)\setminus A=A\setminus C; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} B\setminus X=X\setminus C, \\ X\setminus B=A\setminus X, \\ \bar{C}\cap\bar{X}=X\setminus B. \end{cases}$

1.9. Представить множество в виде суммы конституент:

1) $A\oplus(B\cup C)$; 2) $\overline{(A\setminus B)\setminus C}$;

3) $(B\cup\bar{C})\cap\overline{A\cap B}\cap(A\cup C)$; 4) $\overline{A\oplus(B\oplus C)}$.

1.10. Доказать:

1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

2) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;

3) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

4) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

5) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

§ 2. Отношения и функции

1. Бинарные отношения. *Бинарным отношением* между множествами X и Y называется тройка (X, Y, α), где $\alpha \subseteq X \times Y$. α называется *графиком* отношения, X – *областью отправления*, Y – *областью прибытия*. Для бинарных отношений обычно используется *инфиксная* форма записи:

$$x\alpha y = (x, y) \in \alpha \subseteq X \times Y.$$

Если x и y не вступают в отношение α, то будем писать $x\bar{\alpha}y$ или $(x, y) \notin \alpha$.

Областью определения отношения α называется множество

$$\delta_\alpha = \{x \in X \mid \exists y \in Y : x\alpha y\},$$

а *областью значений* – множество

$$\gamma_\alpha = \{y \in Y \mid \exists x \in X : x\alpha y\}.$$

Если $X = Y$, то говорят, что α есть *бинарное отношение на множестве* X.

Рекурсивно можно ввести понятие n*-мерного* (n*-арного*) отношения: $\alpha \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$. Если $X_1 = \ldots = X_n = X$, то $\alpha \subseteq X^n$ – n*-мерное отношение на множестве* X.

Пусть $\alpha \subseteq X \times Y$. Введем следующие понятия:

1) *дополнение* отношения: $\bar{\alpha} = (X \times Y) \setminus \alpha$;

2) *обратное* отношение: $\alpha^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in \alpha\}$;

3) *композиция* отношений α и β:

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \mid \exists c : (x, c) \in \alpha \wedge (c, y) \in \beta\};$$

4) *тождественное* отношение (*диагональ* множества X^2):

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X^2;$$

5) *универсальное* отношение: $U = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = X \times Y$;

6) *степень* отношения: $\alpha^n = \underbrace{\alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{n \text{ раз}}$;

7) *ядро* отношения: $\ker \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$.

Пусть $\alpha \subseteq X^2$. Свойства отношений:

1) *рефлексивность*: $\forall x \in X : x\alpha x$;

2) *антирефлексивность*: $\forall x \in X : x\bar{\alpha}x$;

3) *симметричность*: $\forall x, y \in X : x\alpha y \Rightarrow y\alpha x$;

4) *антисимметричность*: $\forall x, y \in X : (x\alpha y) \,\&\, (y\alpha x) \Rightarrow x = y$;

5) *транзитивность*: $\forall x, y, z \in X : (x\alpha y) \,\&\, (y\alpha z) \Rightarrow x\alpha z$;

6) *связность*: $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow x\alpha y \vee y\alpha x$;

7) *линейность*: $\forall x, y \in X : x = y \vee x\alpha y \vee y\alpha x$.

Эти свойства можно определить с помощью графиков отношений:

$$1)\ \Delta_X \in \alpha,\ 2)\ \Delta_X \cap \alpha = \varnothing,\ 3)\ \alpha = \alpha^{-1},\ 4)\ \alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_X,$$

$$5)\ \alpha \circ \alpha = \alpha,\ 6)\ X^2 \setminus \Delta_X \subseteq \alpha \cup \alpha^{-1},\ 7)\ \Delta_X \cup \alpha \cup \alpha^{-1} \subseteq X^2.$$

Операции над отношениями $\Phi = (X, \alpha)$ и $\Psi = (X, \beta)$ сводятся к операциям над их графиками:

$$\Phi \cup \Psi = (X, \alpha \cup \beta),\ \Phi \cap \Psi = (X, \alpha \cap \beta),\ \bar{\Phi} = (X, X^2 \setminus \alpha),$$

$$\Phi \setminus \Psi = (X, \alpha \setminus \beta),\ \Phi \Delta \Psi = (X, \alpha \Delta \beta).$$

Далее для записи отношений будем указывать только их графики.

Пример 1.18. Найти δ_α, γ_α, α^{-1}, α^2, $\alpha \circ \alpha^{-1}$, $\alpha^{-1} \circ \alpha$ для бинарного отношения $\alpha = \{(x, y) \mid x, y \in N \,\&\, (x \text{ делит } y)\}$.

Решение. $\delta_\alpha = \gamma_\alpha = N$, так как $(x, x) \in \alpha$.

$\alpha^{-1} = \{(x, y) \mid x, y \in N \,\&\, (y \text{ делит } x)\}$. $\alpha^2 = N$. $\alpha \circ \alpha^{-1} = N^2$, так как $(x, y) \in \alpha \circ \alpha^{-1} \Leftrightarrow \exists z \mid (x \text{ делит } z) \,\&\, (y \text{ делит } z)$; например, $z = x \cdot y$.

$\alpha^{-1} \circ \alpha = N^2$, так как $(x, y) \in \alpha \circ \alpha^{-1} \Leftrightarrow \exists z \mid (z \text{ делит } x) \,\&\, (z \text{ делит } y)$; например, $z = 1$ для любых x и y. □

Пример 1.19. Доказать для произвольных отношений α и β утверждение «*Если отношения α и β транзитивны, то отношение $\alpha \mathbin{\overline{\circ}} \beta$ антитранзитивно*».

Решение. Пусть $\circ \equiv \setminus$, $\alpha = \{(x, y)\}$, $\beta = \{(y, z)\}$. Тогда $\alpha \setminus \beta = \{(x, z)\}$, $\alpha \mathbin{\overline{\setminus}} \beta = X^2 \setminus (\alpha \setminus \beta) = X^2 \setminus \{(x, z)\} = \{(x, x), (x, y), (y, x),$ $(y, y), (z, x), (y, z), (z, y), (z, z)\}$.

Отношение $\alpha \mathbin{\overline{\circ}} \beta$ не транзитивно, так как оно содержит пары (x, y) и (y, z), но не содержит пару (x, z). □

Пример 1.20. Пусть X – множество команд, участвующих в турнире по футболу, в котором каждая команда должна сыграть с каждой два матча, а $x\alpha y$ означает, что x обыграла y по результатам личных встреч. Требуется выяснить, какими из свойств, указанных в п. 2.1, обладает отношение α, и установить отношения $\alpha \circ \alpha$ и $\alpha \circ \alpha^{-1}$:

Решение. Отношение α:

1) антирефлексивно, так как команды не играют сами с собой;

2) антисимметрично, так как если x обыграла y, то y обязательно не обыграла x;

3) не транзитивно, так как x может обыграть y, y – z, а z – x;

4) связно, так как любая пара команд должна сыграть между собой и выявить победителя;

5) не линейно, так как ничейный результат исключается.

Установим отношение $\alpha \circ \alpha$. По определению композиции: $x(\alpha \circ \alpha)y \Rightarrow \exists z:(x\alpha z)\circ(z\alpha y)$, то есть в отношение $\alpha \circ \alpha$ будут вступать такие пары команд x и y, для которых найдется команда z, которая проиграла x и обыграла y.

По аналогии, в отношение $\alpha \circ \alpha^{-1}$ будут вступать такие пары команд x и y, для которых найдется команда z, которая проиграла x и y. □

2. Отношение эквивалентности. Отношение α на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Отношение эквивалентности часто обозначают знаком $\sim$ или $\equiv$.

Смежным классом (*классом эквивалентности*) элемента x по эквивалентности α называется множество

$$[x]_\alpha = x/\alpha = \{y \mid x\alpha y\}.$$

Любой элемент $y \in [x]_\alpha$ называется *представителем* этого класса.

Множество классов эквивалентности элементов множества X по эквивалентности α называется *фактор-множеством X по α* и обозначается X/α.

С каждым отношением эквивалентности связано разбиение множества на непересекающиеся подмножества, которое лежит в основе всевозможных классификаций.

Разбиением множества X называется всякое представление этого множества в виде суммы непересекающихся подмножеств:

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i, \; i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing.$$

Здесь I – множество индексов, которое может быть конечным, счетным или несчетным. Множества X_i называют *слоями* разбиения. Мощность фактор-множества X/α называется *индексом разбиения*, порожденного отношением α.

Пример 1.21. Пусть α_1 и α_2 – эквивалентности. Доказать, что $\alpha_1 \cup \alpha_2$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_2$.

Решение. Необходимость. Пусть $\alpha_1 \cup \alpha_2$ – эквивалентность. Тогда

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq (\alpha_1 \cup \alpha_2) \circ (\alpha_1 \cup \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \cup \alpha_2,$$

$$\alpha_1 \cup \alpha_2 = (\alpha_1 \circ \Delta_X) \cup (\Delta_X \circ \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \circ \alpha_2.$$

Достаточность. Пусть $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_2$. Тогда

$$\alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} = (\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = (\alpha_1 \cup \alpha_2)^{-1} = \alpha_1 \cup \alpha_2,$$

$$(\alpha_1 \cup \alpha_2) \circ (\alpha_1 \cup \alpha_2) = (\alpha_1 \circ \alpha_1) \cup (\alpha_2 \circ \alpha_1) \cup (\alpha_1 \circ \alpha_2) \cup (\alpha_2 \circ \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \cup \alpha_2,$$

т. е. $\alpha_1 \cup \alpha_2$ транзитивно.

Рефлексивность и симметричность $\alpha_1 \cup \alpha_2$ очевидны. □

Пример 1.22. Доказать, что каждая эквивалентность $\alpha \subseteq A^2$ соответствует некоторому разбиению множества A на непересекающиеся классы.

Решение. Рассмотрим смежный класс произвольного элемента $a \in A$: $[a] = \{x \mid x\alpha a\}$.

Из рефлексивности α следует, что $a \in [a]$. Далее, если $b \in [a]$ (то есть $b\alpha a$), то $\forall x \in [b] \Rightarrow x\alpha b$. Из транзитивности имеем, что $x\alpha a$, то есть $x \in [a]$. Таким образом, $[b] \subseteq [a]$. В силу симметричности отношения $b\alpha a \Rightarrow a\alpha b$, то есть $a \in [b]$. Повторяя рассуждения, получим, что $[a] \subseteq [b]$. Следовательно, $[a] = [b]$. Таким образом, каждый элемент $a \in [a]$ входит в некоторый класс ($[a]$) и различные классы не пересекаются, то есть классы образуют разбиение множества A, отвечающее отношению эквивалентности α. □

3. Отношение порядка. Бинарное отношение на множестве X называется *предпорядком* на X, если оно рефлексивно и транзитивно. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение на множестве X

называется *отношением нестрогого порядка* на X. Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется *отношением строгого порядка*. Элементы $x, y \in X$ называются *сравнимыми* по отношению порядка β, если $x\beta y$ или $y\beta x$, в противном случае – *несравнимыми*.

Порядок называется *линейным*, если любые два элемента сравнимы. В противном случае говорят о *частичном* порядке. Множество A с заданным на нем порядком (частичным или линейным) называется *упорядоченным* (частично или линейно).

П р и м е р 1.23. 1) Отношения $\le$ и $\ge$ на множестве чисел являются отношениями нестрогого порядка, а отношения $<$ и $>$ – строгого порядка. Оба отношения линейно упорядочивают множества N и R.

2) Определим отношения $\le$ и $<$ на R^n: $(a_1, ..., a_n) \le (b_1, ..., b_n)$, если $a_i \le b_i$, $i = 1, ..., n$; $(a_1, ..., a_n) < (b_1, ..., b_n)$, если $(a_1, ..., a_n) \le$ $\le (b_1, ..., b_n) \,\&\, \exists i : a_i < b_i$. Эти отношения определяют частичный порядок на R^n.

3) На множестве слов конечного алфавита X определим *отношение предшествования*, которое называется *лексикографическим упорядочением* слов. Слово $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \ldots \alpha_m$ предшествует слову $\tilde{\beta} = \beta_1 \ldots \beta_n$ (обозначение $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$), если либо $\tilde{\alpha} = \gamma\alpha_i\delta$, $\tilde{\beta} = \gamma\beta_i\lambda$ и $\alpha_i \prec \beta_i$ (γ, δ, λ – некоторые слова, возможно, пустые; α_i, β_i – буквы), либо $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}\gamma$ (γ – непустое слово).

Наиболее известным примером лексографического упорядочения является упорядочивание слов в словарях. Например, кол $\prec$ корт (случай 1 определения: γ = ко, α_3 = л $\prec$ β_3 = р, $\delta = \varnothing$, λ = т), кол $\prec$ колесо (случай 2 определения: γ = есо). □

Элемент a частично упорядоченного множества X называется *максимальным* (*минимальным*), если из того, что $a \le x$ ($x \le a$) следует $a = x$.

Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x \le a$ $(a \le x)$ для $\forall x \in X$.

Верхней (нижней) гранью подмножества Y частично упорядоченного множества X называется такой элемент $x \in X$, что

$$\forall y \in Y \Rightarrow y \le x \ (\forall y \in Y \Rightarrow x \le y).$$

Точной *верхней (нижней) гранью подмножества* $Y \subseteq X$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для Y. Точная верхняя и точная нижняя грани обозначаются соответственно $\sup Y$ и $\inf Y$.

Линейный нестрогий порядок на множестве X называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества X имеет наименьший элемент. В этом случае множество X называется *вполне упорядоченным*.

Частично упорядоченное множество X называется *решёткой*, или *структурой*, если для любых двух элементов $x, y \in X$ существует точная нижняя $x \bigcap y$ и точная верхняя $x \bigcup y$ грани.

Решетка X называется *дистрибутивной*, если

$$\forall x, y, z \in X: \ (x \bigcup y) \bigcap z = (x \bigcap z) \bigcup (y) \bigcap z), \ (x \bigcap y) \bigcup z = (x \bigcup z) \bigcap (y) \bigcup z).$$

Дистрибутивная решетка X называется *булевой алгеброй*, если

$$\forall x \in X \exists \bar{x}: \ \forall y \in X: \ (x \bigcup \bar{x}) \bigcap y = y, \ (x \bigcap \bar{x}) \bigcup y = y.$$

Семейство подмножеств S данного множества X называется *алгеброй подмножеств*, если S замкнуто относительно операций объединения, пересечения и дополнения:

$$\forall X, \ Y \in S: \ (X \bigcup Y) \in S, \ (X \bigcap Y) \in S, \ \bar{X} \in S.$$

Пример 1.24. Выполнить следующие действия для отношения

$$\Phi = (X, \ \alpha) = (\{(1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5), \ (1, \ 2), \ (1, \ 3), \ (5, \ 4)\}):$$

1. Изобразить Φ графом.

2. Достроить Φ до отношения эквивалентности, указать фактор-множество.

3. Достроить Φ до отношения частичного порядка, указать максимальные, минимальные элементы, а также пары несравнимых элементов.

4. Достроить Φ до отношения линейного порядка, указать наибольший и наименьший элементы.

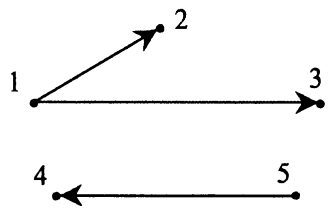


Рис. 1.4, а

5. Достроить Φ до отношения строгого порядка.

6. Достроить Φ до отношения строгого линейного порядка.

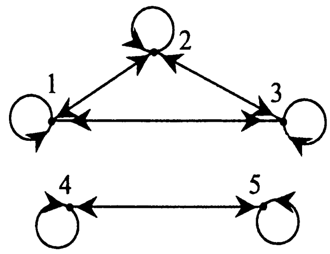


Рис. 1.4, б

Р е ш е н и е. 1. Изобразим граф отношения Φ (рис. 1.4, а).

2. Достроим Φ до отношения эквивалентности Φ_1, добавляя минимальное количество ребер. Обозначим график полученного отношения через α_1:

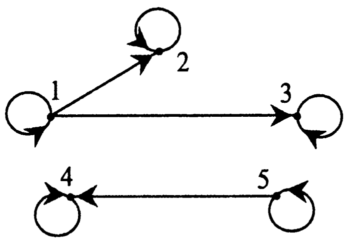


Рис. 1.4, в

$$\alpha_1 = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (5,\ 4),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)\}.$$

Изобразим граф отношения Φ_1 (рис. 1.4, б).

Фактор-множество для $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ по отношению Φ_1 имеет вид: $X / \alpha_1 = \{\{1,\ 2,\ 3\},\ \{4,\ 5\}\}$.

Индекс разбиения множества X равен двум.

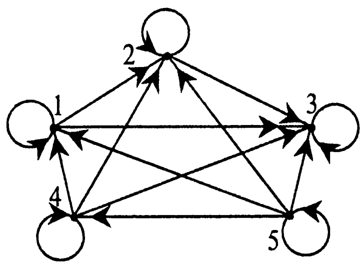


Рис. 1.4, г

3. Достроим Φ до отношения частичного порядка Φ_2, обозначив график этого отношения через α_2:

$$\alpha_2 = \{(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (1,\ 2),\\ (1,\ 3),\ (5,\ 4)\}.$$

Изобразим граф отношения Φ_2 (рис. 1.4, в).

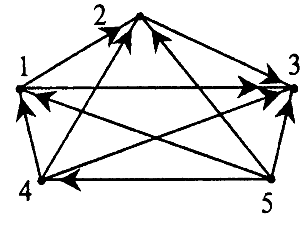


Рис. 1.4, д

Минимальными элементами являются 1 и 5, максимальными элементами – 2, 3 и 4. Пары несравнимых элементов:

$$\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{2, 3\}.$$

4. Достроим Φ до отношения линейного порядка Φ_3, обозначив график этого отношения через α_3:

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cup \{(2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

Изобразим граф отношения Φ_3 (рис. 1.4, г).

Наибольшим элементом является 3, наименьшим – 5.

5. Исходное отношение Φ является отношением строгого порядка, поэтому достраивать его нет необходимости.

6. Достроим Φ до отношения строгого линейного порядка Φ_4, обозначив график этого отношения α_4:

$$\alpha_4 = \alpha_3 \setminus \Delta_x = \{(5, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (4, 1), (4, 3), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\}.$$

Изобразим граф отношения Φ_4 (рис. 1.4, д). □

4. Функции. Рассмотрим функции, отображающие одно конечное множество объектов в другое конечное множество. Термин «отображение» будем считать синонимом термина «функция» с учетом контекста употребления. Термин «функция» используется в тех случаях, когда элементы отображаемых множеств не имеют структуры или она не важна. Термин «отображение» применяется, напротив, только в тех случаях, когда структура отображаемого множества имеет первостепенное значение. Например, мы говорим «булева функция», но «отображение групп».

Функцией из X в Y (из X на Y) называется *функциональное* (*однозначное*) отношение f (обозначение $f : X \to Y$), для которого выполняется условие

$$\forall x \in X : xfy \,\&\, xfz \Rightarrow y = z .$$

Поскольку функция является отношением, для функции $f: X \to Y$ можно использовать уже введенные понятия областей отправления X, прибытия Y, определения δ_f и значений γ_f. Если $\delta_f = X$, то функция называется *полностью определенной* или *тотальной*, а если $\delta_f \neq X$, то – *частичной*.

Множество всех функций из X в Y обозначается через Y^X.

Функция $f: X \to Y$ называется:

инъективной, или *инъекцией*, если $y = f(x_1) \,\&\, y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

сюръективной, или *сюръекцией*, если $\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$;

биективной, или *биекцией*, если она инъективна и сюръективна.

На рис. 1.5 приведены примеры отображений: f – сюръективно, g – инъективно, h – биективно.

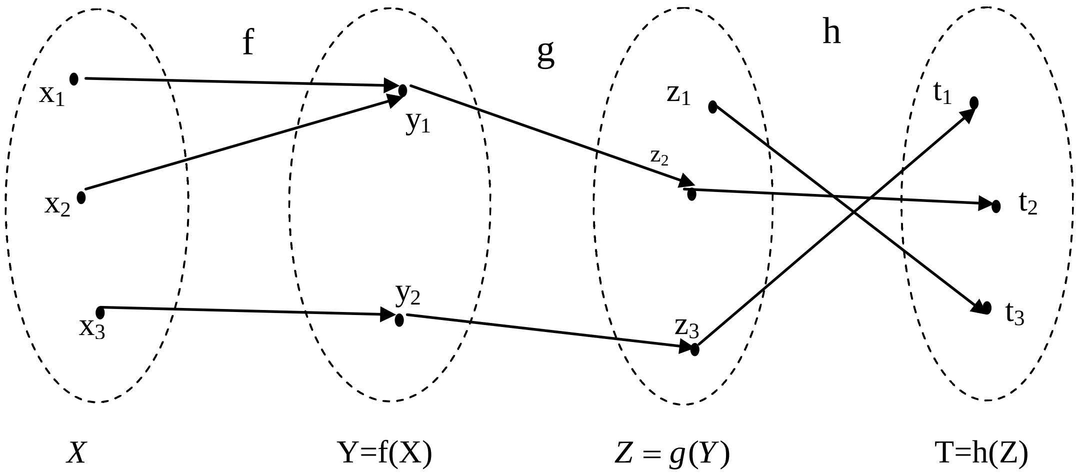


Рис. 1.5

П р и м е р 1.25. Обозначим через $R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$. Рассмотрим следующие три отображения

$$f: R \to R^+;\ g: R^+ \to R;\ h: R^+ \to R^+,$$

которые зададим одной формулой: $f(x)=x^2$; $g(x)=x^2$; $h(x)=x^2$. Они различны, так как различны исходные множества. При этом f является сюръективным, но не инъективным; g – инъективно, но не сюръективно; h – биективно. □

Образом подмножества $A\subseteq X$ при отображении f называется множество

$$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}.$$

Прообразом подмножества $B\subseteq Y$ при отображении f называется множество

$$f^{-1}(B)=\{x\in A|\,f(x)\in B\}.$$

Отображения вида $X\to X$ называются *преобразованиями* множества X. Преобразование e_X называется *тождественным*, если $\forall x\in X:\ e_X(x)=x$.

Пусть $f:\ X\to Y$ и $g:\ Y\to Z$ – некоторые функции. Композиция этих функций обозначается $g\circ f: X\to Z$ и называется *суперпозицией*:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Операция суперпозиции ассоциативна: $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$, где $f:\ X\to Y$, $g:\ Y\to Z$, $h:\ Z\to V$ – функции.

Пусть $f:\ X\to Y$ и $g:\ Y\to X$. Функция g называется *обратной* к функции f (а функция f *обратной* к g), если

$$f\circ g=e_Y,\ g\circ f=e_X.$$

Обратная функция обозначается f^{-1}. Если обратная функция существует, то она единственна.

П р и м е р 1.26. Доказать, что функция $f:\ X\to Y$ имеет обратную тогда и только тогда, когда она биективна.

Р е ш е н и е. Необходимость. Пусть $\exists f^{-1} = g: Y \to X$. Тогда для любого y существует его прообраз x: $\forall y \in Y \,\&\, x = g(y) \Rightarrow f(x) = f(g(y)) = y$, т. е. f сюръективна. Далее, если $x, x_1 \in X$, причем $f(x) = f(x_1)$, то $g(f(x)) = g(f(x_1))$. Следовательно, $e_X(x) = e_X(x_1)$, т. е. $x = x_1$ и f инъективна. Отсюда f биективна, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть f биективна. Определим функцию $g: Y \to X$ следующим образом. Положим $g(y) = x$, если $f(x) = y$. В силу биективности f функция g определена на всем Y, и $g = f^{-1}$. □

5. Задачи и упражнения.

2.1. Найти δ_α, γ_α, α^{-1}, $\alpha \circ \alpha$, $\alpha \circ \alpha^{-1}$, $\alpha^{-1} \circ \alpha$ для бинарных отношений:

1) $\alpha = \{(x, y) \mid x, y \in N \,\&\, (y \text{ делит } x)\}$;

2) $\alpha = \{(x, y) \mid x, y \in R \,\&\, (x + y \le 0)\}$;

3) $\alpha = \{(x, y) \mid x, y \in R \,\&\, (2x \ge 3y)\}$;

4) $\alpha = \left\{(x, y) \mid x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \&\, (y \ge \sin x)\right\}$.

2.2. Доказать, что для любых бинарных отношений**:**

1) $\alpha \cup \alpha = \alpha \cap \alpha = \alpha$; 2) $\left(\alpha^{-1}\right)^{-1} = \alpha$;

3) $(\alpha_1 \cup \alpha_2)^{-1} = \alpha_1^{-1} \cup \alpha_2^{-1}$; 4) $(\alpha_1 \cap \alpha_2)^{-1} = \alpha_1^{-1} \cap \alpha_2^{-1}$;

5) $\overline{\alpha^{-1}} = \bar{\alpha}^{-1}$; 6) $\alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_3) = (\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_3$;

7) $(\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1}$.

2.3. Пусть X и Y – конечные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$.

1) Сколько существует бинарных отношений между элементами множеств X и Y?

2) Сколько имеется функций из X в Y?

3) При каких m и n существует биекция между X и Y?

2.4. Проверить для отношений α и β справедливость следующих утверждений:

1) «*если отношения* α и β *рефлексивны, то отношение* $\alpha \bigcup \beta$ *также рефлексивно*»;

2) «*если отношения* α и β *антирефлексивны, то отношение* $\alpha \bigcap \beta$ *также антирефлексивно*»;

3) «*если отношения* α и β *симметричны, то отношение* $\alpha \Delta \beta$ *также симметрично*»;

4) «*если отношения* α и β *антирефлексивны, то отношение* $\alpha \setminus \beta$ *также антифлексивно*»;

5) «*если отношения* α и β *транзитивны, то отношение* $\alpha \bigcap \beta$ *также транзитивно*»;

6) «*если отношения* α и β *связны, то отношение* $\alpha \bigcup \beta$ *также связно*»;

7) «*если отношения* α и β *линейны, то отношение* $\alpha \setminus \beta$ *также линейно*».

2.5. Выяснить, какими из свойств, указанных в п. 2.1, обладают следующие отношения, и установить отношения $\alpha \circ \alpha$ и $\alpha \circ \alpha^{-1}$:

1) X – множество студентов вуза, $x\alpha y \Leftrightarrow x$ и y учатся на одном курсе;

2) X – множество окружностей на плоскости, $x\alpha y \Leftrightarrow x$ касается y;

3) X – множество прямых в пространстве, $x\alpha y \Leftrightarrow x$ и y имеют хотя бы одну общую точку;

4) $X = N$, $x\alpha y \Leftrightarrow x$ и y имеют одинаковый остаток при делении на 3;

5) $X = R$, $x\alpha y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$;

6) X – множество векторов на плоскости, $\overline{x}\alpha\overline{y} \Leftrightarrow |\overline{x}| = |\overline{y}|$.

2.6. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ – биекция. Доказать, что:

1) φ^{-1} – биекция между Y и X;

2) $\varphi^{-1} \circ \varphi = e_Y$;

3) $\varphi \circ \varphi^{-1} = e_X$.

2.7. Доказать, что для того, чтобы отношение $\alpha \subseteq X \times Y$ было биекцией между X и Y, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha \circ \alpha^{-1} = e_X$ и $\alpha^{-1} \circ \alpha = e_Y$.

2.8. Доказать, что объединение (пересечение) двух функций f_1 и f_2 из X в Y является функцией из X в Y тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$.

2.9. Доказать, что для любой функции f:

1) $f(X \bigcup Y) = f(X) \bigcup f(Y)$; 2) $f(\bigcup\limits_{i \in I} X_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f(X_i)$;

3) $f(X \bigcap Y) \subseteq f(X) \bigcap f(Y)$; 4) $f(\bigcap\limits_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} f(X_i)$.

2.10. Доказать, что если отношения α_1 и α_2 рефлексивны, то рефлексивны отношения: $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$, $\alpha_1 \bigcap \alpha_2$, α_1^{-1}, $\alpha_1 \circ \alpha_2$.

2.11. Доказать, если отношения α_1 и α_2 иррефлексивны, то иррефлексивны отношения: $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$, $\alpha_1 \bigcap \alpha_2$, α_1^{-1}. Показать, что произведение $\alpha_1 \circ \alpha_2$ иррефлексивных отношений может не быть иррефлексивным.

2.12. Доказать, что если α_1 и α_2 симметричны, то симметричны отношения: $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$, $\alpha_1 \bigcap \alpha_2$, α_1^{-1}, $\alpha_1 \circ \alpha_1^{-1}$.

2.13. Доказать, что суперпозиция $\alpha_1 \circ \alpha_2$ симметричных отношений α_1 и α_2 симметрична тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1$.

2.14. Доказать для антисимметричных отношений α_1 и α_2:

1) антисимметричность $\alpha_1 \bigcap \alpha_2$ и α_1^{-1};

2) $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$ антисимметрично тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \circ \alpha_2^{-1} \subseteq e_X$.

2.15. Построить бинарное отношение:

1) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

2) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

3) рефлексивное, антисимметричное, транзитивное;

4) не рефлексивное, антисимметричное, транзитивное.

2.16. Доказать, что любое отношение α, симметричное и антисимметричное одновременно, является транзитивным.

2.17. Пусть X – множество всех прямых на плоскости. Являются ли эквивалентностями следующие отношения:

1) параллельность прямых;

2) перпендикулярность прямых?

2.18. На множестве R задано отношение: $x\alpha y \Leftrightarrow (x-y)$ – рациональное число. Доказать, что α – эквивалентность.

2.19. Доказать, что объединение $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$ двух эквивалентностей α_1 и α_2 является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \bigcup \alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_2$.

2.20. Доказать, что произведение $\alpha_1 \circ \alpha_2$ двух эквивалентностей α_1 и α_2 является эквивалентностью, когда $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1$.

ГЛАВА 2

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

§ 1. Элементы булева куба. Элементарные функции алгебры логики

1. Основные определения. Набор $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,\ 1\}$, $1 \le i \le n$ называется *булевым* или *двоичным набором* (*вектором*). Элементы набора называют *компонентами* или *координатами*. Число n называется длиной набора $\tilde{\alpha}^n$. *Весом* (или *нормой*) набора $\tilde{\alpha}^n$ (обозначение $\|\tilde{\alpha}^n\|$) называют число его координат, равных 1, т. е. $\|\tilde{\alpha}^n\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Множество всех двоичных наборов длины n образует n*-мерный булев* (или *двоичный*) *куб*, который называют также *единичным* n*-мерным кубом* и обозначают B^n (или E_2^n). Применяя геометрическую терминологию, наборы $\tilde{\alpha}^n \in B^n$ называют *вершинами куба* B^n. Множество всех вершин куба B^n, имеющих вес k, называется k*-м слоем куба* B^n (обозначается B_k^n). Каждому двоичному набору $\tilde{\alpha}^n$ можно сопоставить число $\nu(\tilde{\alpha}^n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}$ – *номер набора* $\tilde{\alpha}^n$. Набор $\tilde{\alpha}^n$ является двоичным разложением своего номера $\nu(\tilde{\alpha}^n)$.

Расстоянием Хемминга между вершинами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ куба B^n называется число $\rho(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$; оно равно числу координат, в которых наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ отличаются друг от друга. Расстояние Хемминга является метрикой, а куб B^n – *метрическим пространством*.

Наборы $\tilde{\alpha}^n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}^n = (\beta_1,\ \beta_2,\ ...,\ \beta_n)$ из B^n называются *соседними*, если $\rho(\tilde{\alpha}^n,\ \tilde{\beta}^n) = 1$, и *противоположными*, если $\rho(\tilde{\alpha}^n,\ \tilde{\beta}^n) = n$. Говорят, что набор $\tilde{\alpha}^n$ *предшествует* набору $\tilde{\beta}^n$ (обозначение $\tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\beta}^n$), если $\forall i$: $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1,\ ...,\ n$. Если $\tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\beta}^n$ и $\tilde{\alpha}^n \neq \tilde{\beta}^m$, то говорят, что набор $\tilde{\alpha}^n$ *строго предшествует* набору $\tilde{\beta}^n$ и обозначают $\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n$. Наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ называют *сравнимыми*, если либо $\tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\beta}^n$, либо $\tilde{\beta}^n \preccurlyeq \tilde{\alpha}^n$. В случае, когда ни одно из этих отношений не выполняется, наборы $\tilde{\alpha}^n$ и $\tilde{\beta}^n$ называются *несравнимыми*. Говорят, что набор $\tilde{\alpha}^n$ непосредственно предшествует набору $\tilde{\beta}^n$, если $\tilde{\alpha}^n \prec \tilde{\beta}^n$ и $\rho(\tilde{\alpha}^n,\ \tilde{\beta}^n) = 1$. *Отношение предшествования* $\preccurlyeq$ является *частичным порядком* на множестве B^n. На рис. 2.1 приведены диаграммы частично упорядоченных множеств B^2, B^3 и B^4.

Функцией алгебры логики (а также *булевой* или *булевской* функцией) n переменных называют функцию $f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$, определенную на множестве $B^n = \{0,\ 1\}^n$ и принимающую значения из множества $B = \{0,\ 1\}$, т. е. отображение $f:\ B^n \to B$.

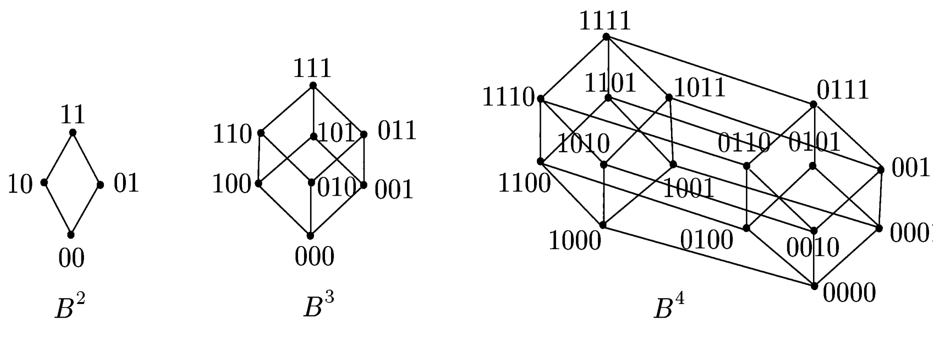


Рис. 2.1

Используем обозначения: $\tilde{x}^n = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$, $X^n = \{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\}$ – набор и множество символов переменных; $P_2(X^n)$, $\left|P_2(X^n)\right| = p_2(n)$ – множество и число всех булевых функций от n переменных;

$N_f = \{\tilde{\sigma}^n \mid \tilde{\sigma}^n \in B^n \;\&\; f(\tilde{\sigma}^n) = 1\}$ – множество всех наборов $\tilde{\sigma}^n$ из B^n, на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в 1.

2. Способы задания булевых функций. Основными способами задания булевых функций являются табличный и аналитический.

Поскольку область определения состоит из конечного числа элементов ($|B^n| = 2^n$), то булеву функцию можно задать при помощи *таблицы истинности* $T(f)$, в которой для каждого набора значений аргументов указывается значение функции (табл. 2.1). Наборы значений аргументов в таблице записывают в естественной форме, то есть i-й по порядку набор представляет собой двоичную запись числа i, i=0, 1, 2, …, $2^n - 1$. Имея в виду такое *стандартное расположение наборов*, булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ удобно задавать вектором ее значений: $\tilde{\alpha}^{2^n} = (\alpha_0,\ \alpha_1,\ ...,\ \alpha_{2^n-1})$.

Таблица 2.1

$x_1\ x_2\ ...\ x_{n-1}\ x_n$	$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n)$
0 0 … 0 0	$f(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0)$
0 0 … 0 1	$f(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$
0 0 … 1 0	$f(0,\ 0,\ \ldots,\ 1,\ 0)$
……………	…………………
1 1 … 1 0	$f(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 0)$
1 1 … 1 1	$f(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1)$

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ при $n \geq 2$ может быть задана прямоугольной таблицей $\Pi_{k,n-k}(f)$ (табл. 2.2), в которой значение $f(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_k,\ \sigma_{k+1},\ ...,\ \sigma_n)$ функции $f(\tilde{x}^n)$ помещается на пересечении «строки» $(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_k)$ и «столбца» $(\sigma_{k+1},\ ...,\ \sigma_n)$.

Числа $p_2(n)=2^{2^n}$ с ростом n быстро растут, поэтому уже при сравнительно небольших значениях n $(n \geq 6)$ перебор функций из данного множества становится практически невозможен. В связи с этим используют другие способы задания функции, среди которых основным является аналитический. При этом способе некоторые функции выделяются и называются *элементарными*, а другие функции строят из элементарных с помощью суперпозиции.

Таблица 2.2

				0	0	…	σ_{k+1}	…	1	x_{k+1}
				0	0	…	σ_{k+2}	…	1	x_{k+2}
				…	…	…	…	…	…	
x_1	x_2	…	x_k	0	1	…	σ_n	…	1	x_n
0	0	…	0							
0	0	…	1							
…	…	…	…							
σ_1	σ_2	…	σ_k				$f(\sigma_n)$			
…	…	…	…							
1	1	…	1							

3. Элементарные булевы функции. Элементарные функции двух аргументов представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

x_1x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Приведем обозначения и названия этих функций.

Нульместные функции (константы).

Тождественный ноль: $f_0(x_1,\ x_2) \equiv 0$.

Тождественная единица: $f_{15}(x_1,\ x_2) \equiv 1$.

Унарные функции.

Функции тождественности:

$$f_3(x_1,\ x_2) = x_1 \text{ или } f_3(x_1,\ x_2) \sim x_1,\ f_5(x_1,\ x_2) = x_2 \text{ или } f_5(x_1,\ x_2) \sim x_2.$$

Отрицание (*инверсия, логическое НЕ*):

$$f_{10}(x_1,\ x_2) = \overline{x}_1 \text{ или } f_{10}(x_1,\ x_2) = \neg x_1,\ f_{12}(x_1,\ x_2) = \overline{x}_2 \text{ или } f_{12}(x_1,\ x_2) = \neg x_2.$$

Читается «не x_1» или «не x_2».

Бинарные функции.

Конъюнкция (*логическое умножение, логическое И*):

$$f_1(x_1,\ x_2) = x_1 \,\&\, x_2 \text{ или } f_1(x_1,\ x_2) = x_1 \wedge x_2.$$

Читается «x_1 и x_2». Так как эта операция совпадает с операцией умножения в элементарной алгебре, то для конъюнкции используют также обозначение $x_1 \cdot x_2$ или $x_1 x_2$.

Дизъюнкция (*логическое сложение, логическое ИЛИ*):

$$f_7(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Читается «x_1 или x_2».

Для конъюнкции и дизъюнкции можно записать

$$x_1 \cdot x_2 = \min\{x_1,\ x_2\},\ x_1 \vee x_2 = \max\{x_1,\ x_2\}.$$

Импликация (*функция логического следования*):

$$f_{13}(x_1,\ x_2) = x_1 \to x_2 \text{ (импликация от } x_1 \text{ к } x_2\text{)}.$$

Читается «если x_1, то x_2», «x_1 влечет x_2», «из x_1 следует x_2». Здесь x_1 – условие импликации, а x_2 – ее заключение.

Аналогично имеем импликацию от x_2 к x_1:

$$f_{11}(x_1,\ x_2) = x_2 \to x_1 .$$

Функция неравнозначности (*сумма по модулю 2, исключающее ИЛИ*):

$$f_6(x_1,\ x_2) = x_1 \oplus x_2 .$$

Читается «либо x_1, либо x_2» или «x_1 не эквивалентно x_2».

Функция эквивалентности (*равнозначности, подобия*):

$$f_9(x_1,\ x_2) = x_1 \sim x_2 ,\ \ f_9(x_1,\ x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2 ,\ \ f_9(x_1,\ x_2) = x_1 \equiv x_2 .$$

Читается «x_1 в том и только том случае, если x_2».

Стрелка Пирса (*функция Вебба, функция Даггера, штрих Лукасевича, антидизъюнкция*):

$$f_8(x_1,\ x_2) = x_1 \downarrow x_2 .$$

Эта функция является отрицанием дизъюнкции и поэтому ее называют также «*НЕ ИЛИ*». Читается «не x_1 и не x_2».

Штрих Шеффера (*антиконъюнкция*):

$$f_{14}(x_1,\ x_2) = x_1 \,|\, x_2 .$$

Эта функция – отрицание конъюнкции и поэтому ее называют также «*НЕ И*». Читается «не x_1 или не x_2».

Функция запрета (*отрицание импликации*):

$$f_2(x_1,\ x_2) = x_1 \Delta x_2 .$$

Читается «x_1, но не x_2». Аналогично

$$f_4(x_1,\ x_2) = x_2 \Delta x_1 .$$

Элементы множества $\sigma = \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \to,\ \oplus,\ \downarrow,\ |,\ \sim,\ \Delta\}$ называются *логическими* или *препозиционными* связками.

4. Задачи и упражнения

1.1. Найти номера следующих двоичных наборов:

1) (1011); 2) (11001); 3) $((11001101)$;

4) (010111101); 5) $(1\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}1)$, $m\ge1$;

6) $(\underbrace{1\ldots1}_{m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{2m\text{ раз}})$, $m\ge1$; 7) $(1\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}1)$, $m\ge1$.

1.2. Найти двоичный набор длины l, являющийся разложением числа n:

1) $l=5,\ n=38$; 2) $l=8,\ n=231$;

3) $l=m+1,\ n=2^m+1\ (m\ge1)$;

4) $l=m,\ n=3\cdot2^{m-2}-1\ (m\ge2)$.

1.3. На множестве наборов A из B^n указать частичный порядок $\preccurlyeq$ Выяснить, есть ли во множестве A соседние и противоположные наборы:

1) $A=\{(00111),\ (01011),\ (00110),\ (11010),\ (01010),\ (11100),\ (11011)\}$;

2) $A=\{(010101),\ (110011),\ (101101),\ (010111),\ (110111),\ (101010),$
$(100010)\}$;

3) $A=\{(1\underbrace{0\ldots0}_{n-2\text{ раз}}1),\ (11\underbrace{0\ldots0}_{n-2\text{ раз}}),\ (11\underbrace{0\ldots0}_{n-3\text{ раз}}1),\ (0\underbrace{1\ldots1}_{n-1\text{ раз}}),\ (\underbrace{0\ldots0}_{n-2\text{ раз}}11),$
$(0\underbrace{1\ldots1}_{n-3\text{ раз}}01)\},\ n\ge4$;

4) $A=\{(1\underbrace{0\ldots0}_{m-1\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m\text{ раз}}),\ (1\underbrace{0\ldots0}_{m-2\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m-1\text{ раз}}01),\ (1\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m-1\text{ раз}}),$
$(0\underbrace{1\ldots1}_{n-m-1\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m-2\text{ раз}}11),\ (01\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m-2\text{ раз}}),\ (0\underbrace{1\ldots1}_{n-m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m-1\text{ раз}})\},\ n>m+1\ge3.$

1.4. Найти:

1) число $|B_k^n|$ наборов $\tilde{\alpha}^n$ веса k $(n\ge1,\ n\ge k\ge0)$;

2) число наборов $\tilde{\alpha}^n$ из B^n, удовлетворяющих условию $2^{n-1}\le\nu(\tilde{\alpha}^n)\le2^n$ $(n\ge1)$;

3) число упорядоченных пар соседних наборов в B^n $(n\ge1)$;

4) число упорядоченных пар $(\tilde{\alpha}^n,\ \tilde{\beta}^n)$ наборов из B^n таких, что $\rho(\tilde{\alpha}^n,\ \tilde{\beta}^n)=k$ $(n\ge k\ge1)$;

5) число наборов $\tilde{\alpha}^n$ из B^n, удовлетворяющих условию $\tilde{\beta}^n \preccurlyeq \tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\gamma}^n$, где $\tilde{\beta}^n$ и $\tilde{\gamma}^n$ – два фиксированных набора и $\rho(\tilde{\beta}^n,\ \tilde{\gamma}^n) = k$ $(n \ge k \ge 1)$.

1.5. Показать, что:

1) два различных несравнимых набора в B^n, имеющих одинаковый вес, несравнимы ($n \ge 2$);

2) в B^n существует только два сравнимых противоположных набора ($n \ge 1$);

3) всякое подмножество в B^n, содержащее не менее $n+2$ наборов, содержит пару несравнимых наборов.

1.6. Найти число функций в $P_2(X^n)$, удовлетворяющих условию:

1) на данных l наборах значения функции фиксированы, а на остальных произвольные $(1 \le l \le 2^n - 1,\ n \ge 1)$;

2) на противоположных наборах функция принимает одинаковые значения $(n \ge 1)$;

3) на каждой паре соседних наборов функция принимает противоположные значения $(n \ge 1)$;

4) функция $f(\tilde{x}^n)$ совпадает с функцией, получаемой из нее при перестановке переменных x_1 и x_2 $(n \ge 2)$;

5) функция $f(\tilde{x}^n)$ симметрическая, т. е. $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) =$

$= f(x_{i_1},\ x_2,\ \ldots,\ x_{i_n})$ при любой подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, $n \ge 1$.

1.7. 1) Булева функция $f(\tilde{x}^3)$ равна 1 только в тех случаях, когда $x_1 = 1$ либо когда выполняется следующее условие: переменные x_2 и x_3 принимают разные значения, а значение переменной x_1 меньше значения переменной x_3; в остальных случаях функция равна 0. Построить таблицы $T(f)$ и $\Pi_{1,2}(f)$ функции $f(\tilde{x}^3)$ и выписать наборы множества N_f.

2) Цифровой индикатор образует изображения цифр 0, 1, 2, …, 9 путем высвечивания некоторых из 7 черточек. Внутри калькулятора цифра представляется двоичным четырехразрядным кодом, по которому формируются сигналы для высвечивания каждой из черточек. Таким образом, с каждой черточкой связана булева функция от четырех аргументов, принимающая значение 1, если черточка светится, и значение 0 в противном случае. Составить таблицы истинности этих функций.

3) На аварийном пульте системы расположены четыре сигнальные лампочки: L_1, L_2, L_3 и L_4. Система выключается только в том случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) загорелась лампочка L_1, но не загорелась лампочка L_2; б) загорелись лампочки L_2 и L_3, но не горит лампочка L_4; в) загорелась лампочка L_4, но не горит лампочка L_1. Построить таблицу $T(f)$) булевой функции $f(\tilde{x}^4)$, характеризующей условия выключения системы. Предполагается, что $x_i = 1$, если лампочка L_i горит, и $x_i = 0$ в противном случае.

§ 2. Формулы. Суперпозиция. Эквивалентность формул

1. Определение формулы. Приведем индуктивное определение формул. Пусть $B \subseteq P_2(n)$.

а) *Базис индукции.* $\forall f(\tilde{x}_n) \in B$ – формула над B.

б) *Индуктивный переход.* Пусть $f_0(\tilde{x}_n) \in B$ и $A_1, ..., A_n$ – выражения, являющиеся либо формулами над B, либо символами переменных из исходного алфавита переменных $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.Тогда выражение $f_0(A_1, A_2, ..., A_n)$ называется *формулой над* B.

Запись $U[f_1, ..., f_k]$ означает, что формула U построена из функций $f_1, ..., f_k$.

Сопоставим каждой формуле $U(x_1, ..., x_n)$ над B функцию $f(x_1, ..., x_n)$ из $P_2(n)$, опираясь на индуктивное определение формул.

а) *Базис индукции*. Если $U(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$, где $f \in B$, то формуле $U(x_1, ..., x_n)$ сопоставим функцию $f(x_1, ..., x_n)$.

б) *Индуктивный переход*. Пусть $U(x_1, ..., x_n) = f_0(A_1, ..., A_k)$, где A_i $(i = 1, ..., k)$ является либо формулой над B, либо символом переменной $x_j \in X$. Сопоставим формуле $U(x_1, ..., x_n)$ функцию $f(x_1, ..., x_n) = f_0(f_1, ..., f_k)$.

Если функция f соответствует формуле U, то говорят, что формула U *реализует функцию* f.

Введенное понятие булевой функции не позволяет рассматривать функции от меньшего числа аргументов как функции от большего числа переменных. Для устранения этого недостатка введем следующее определение.

Функция $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in P_2(n)$ зависит существенным образом от аргумента x_i, если существуют такие значения $\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, что

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n).$$

В этом случае x_i называется *существенной переменной* . В противном случае – *несущественной* или *фиктивной.*

Функции f_1 и f_2 называются *равными*, если функцию f_2 можно получить из f_1 путем добавления или изъятия фиктивных аргументов. Поскольку функции рассматриваются с точностью до фиктивных переменных, то формула U реализует любую функцию, равную f.

2. Операция суперпозиции. Функцию f, соответствующую формуле U, будем называть *суперпозицией* функций из B, а процесс получения функции f из B – *операцией суперпозиции.* Последняя включает две простые операции:

1) *операция подстановки переменных*:

$$P[f(x_1,\ ...,\ x_n)] = f(x_{i_1},\ ...,\ x_{i_n}),$$

которая включает переименование, перестановку и отождествление переменных.

2) *операция подстановки функций*:

$$S[f(x_1,...,x_n)] = f(A_1,...,A_k),$$

где A_i – либо формула, либо переменная из X , причем хотя бы одно из A_i отлично от переменной.

Пример 2.1. Выразим операцию отрицания через штрих Шеффера:

$$f(x_1,\ x_2) = x_1 \mid x_2;\ P(f(x_1,\ x_2)) = f(x,\ x) = \overline{x \,\&\, x} = \bar{x};\ \ \bar{x} = x \mid x. \ \square$$

Пример 2.2. Рассмотрим систему функций

$$B = \{f_1 = x_1 \vee x_2,\ f_2 = x_1 \,\&\, x_2,\ f_3 = \bar{x}\}.$$

Представим в виде суперпозиции этих функций сумму по модулю 2:

$$f(x_1,\ x_2) = x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_2 = f_1(f_2(f_3(x_1),\ x_2),\ f_2(x_1,\ f_3(x_2)).$$

Для стрелки Пирса по аналогии можно записать:

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = f_3(f_1(x_1,\ x_2))$$

или

$$x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 = f_2(f_3(x_1),\ f_3(x_2)). \ \square$$

Пусть U_1 – формула над $B_1 = \{f_1(x_1,...,x_n),...,\ f_k(x_1,...,x_n)\}$. Возьмем множество функций $B_2 = \{g_1(x_1,...,x_n),...,g_k(x_1,...,x_n)\}$. Рассмотрим формулу $U_2 = U_2[g_1,...,g_k]$, которая получается из U_1 путем подстановки $\begin{pmatrix} f_1,...,\ f_k \\ g_1,...,\ g_k \end{pmatrix}$. Говорят, что формулы U_1 и U_2 имеют одно и то же *строение*.

Формула U однозначно определяется строением C и упорядоченной совокупностью $(f_1,...,\ f_k)$. Поэтому можно писать $U = C[f_1,...,\ f_k]$.

Строение формулы можно представлять в виде диаграммы (ориентированного графа), вершинам которой приписаны логические связки и символы переменных. Например, строение формулы

$$U = f^{(2)}(g^{(2)}(x, h^{(1)}(y)), \varphi^{(2)}((x \,\&\, y), \psi^{(0)}))$$

описывается диаграммой, представленной на рис. 2.2 (в скобках указаны «арности» функций).

3. Основные тавтологии. Формулы U_1 и U_2 называются *эквивалентными* $(U_1 = U_2)$, если соответствующие им функции равны.

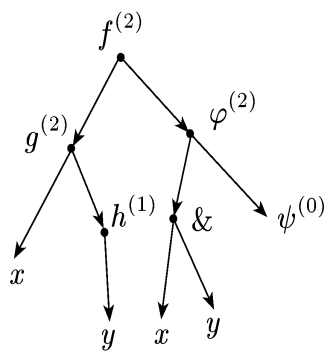


Рис. 2.2

Приведем список основных эквивалентностей (тождеств, тавтологий) алгебры логики, которые соответствуют теоретико-множественным тождествам, если заменить дизъюнкцию на объединение, конъюнкцию – на пересечение, отрицание – на дополнение.

1. $(x_1 \vee x_2) = (x_2 \vee x_1)$ (коммутативность дизъюнкции).
2. $(x_1 \vee (x_2 \vee x_3)) = ((x_1 \vee x_2) \vee x_3)$ (ассоциативность дизъюнкции).
3. $(x_1 \,\&\, x_2) = (x_2 \,\&\, x_1)$ (коммутативность конъюнкции).
4. $(x_1 \,\&\, (x_2 \,\&\, x_3)) = ((x_1 \,\&\, x_2) \,\&\, x_3)$ (ассоциативность конъюнкции).
5. $(x_1 \vee x_1) = x_1$ (правило повторения для дизъюнкции).
6. $(x_1 \,\&\, x_1) = x_1$ (правило повторения для конъюнкции).

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ (x_1 \vee 1) = 1 \\ 8.\ (x_1 \vee 0) = x_1 \\ 9.\ (x_1 \,\&\, 0) = 0 \\ 10.\ (x_1 \,\&\, 1) = x \end{array}\right\}$$ (операции с 0 и 1 для дизъюнкции и конъюнкции).

11. $\overline{\overline{x}} = x$ (закон двойного отрицания).

$$\left.\begin{array}{l} 12.\ \overline{0} = 1 \\ 13.\ \overline{1} = 0 \end{array}\right\}$$ (правила инверсии).

14. $(x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3)) = (x_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, x_3)$ (дистрибутивность конъюнкции).

15. $(x_1 \vee x_2 \,\&\, x_3) = ((x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3))$ (дистрибутивность дизъюнкции).

$$\left.\begin{array}{l} 16.\ \overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x}_1 \,\&\, \overline{x}_2) \\ 17.\ \overline{(x_1 \,\&\, x_2)} = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \end{array}\right\}$$ (законы де Моргана).

18. $(x_1 \vee \overline{x}_1) = 1$.

19. $(x_1 \,\&\, \overline{x}_1) = 0$.

Справедливость тождеств устанавливается сопоставлением таблиц истинности для функций, записанных в левых и правых частях тождеств.

С целью упрощения записи формул принимают следующие соглашения.

1. Приоритет логических связок для множества σ:

а) считают, что связка $\neg$ сильнее любой двухместной связки из σ;

б) связка $\&$ считается сильнее, чем любая из оставшихся связок.

2. Обозначим через $\circ$ любую из связок $\&$, $\vee$. В силу закона ассоциативности можно вместо формул $(x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$, $((x_1 \circ x_2) \circ x_3)$ использовать выражение $(x_1 \circ x_2 \circ x_3)$, которое не является формулой, но может быть превращено в нее путем расстановки скобок.

3. Внешние скобки у формул опускаются. Опускаются также скобки у выражения, над которым стоит знак отрицания.

Эти соглашения позволяют, например, формулу $((\neg x) \to ((x \,\&\, y) \vee z))$ записать в виде $\bar{x} \to (x \,\&\, y \vee z)$.

П р и м е р 2.3. *Правило поглощения*:

$$x_1 \vee x_1x_2 = x_1 \cdot 1 \vee x_1x_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_1x_2 = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 =$$
$$= x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1 \cdot 1 = x_1. \ \square$$

4. Задачи и упражнения

2.1. Выяснить, какие из нижеперечисленных выражений являются формулами над множеством связок $\sigma = \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \to,\ \oplus,\ \sim\}$. Проверить, какие из приведенных ниже выражений, не являющихся формулами, можно превратить в формулы над σ, добавляя скобки:

1) $x \to x$; 2) $x \vee (\neg y)$; 3) $x \oplus (\& y)$; 4) $(x \vee y) \to (x \oplus (\neg z))$;

5) $(x \leftarrow y)$; 6) $(x\&)\neg x$; 7) $(x \oplus (z))$; 8) $\neg(x \to ((\neg x) \,\&\, y))$;

9) $(x \sim y)\neg y$; 10) $(x \to (\neg y)) \sim ((x \vee (y \,\&\, z)) \oplus y))$;

11) $(\neg x \to y)$; 12) $((x \,\&\, (\neg x)) \vee (x \oplus (x \to x)) \vee (\neg x))$.

2.2. Выяснить, является ли выражение A формулой над множеством Φ. Проверить, можно ли, добавляя скобки, запятые и переменные, превратить некоторые из приведенных ниже выражений в формулы над соответствующими множествами Φ:

1) $A = g^{(1)}(f^{(2)}(1,\ x)),\ \Phi = (f^{(2)},\ \varphi^{(1)})$;

2) $A =)x(\varphi^{(1)},\ \Phi = (h^{(1)},\ \varphi^{(1)})$;

3) $A = (\varphi^{(1)}(f^{(2)}(x,\ \varphi^{(1)}(x))),\ \Phi = (f^{(2)},\ \varphi^{(1)})$;

4) $A = f^{(2)}(g^{(2)}(xy),\ h^{(2)}(1,\ y)),\ \Phi = (1,\ f^{(2)},\ g^{(2)},\ h^{(2)})$;

5) $A = g^{(2)}(\varphi^{(3)}(x,\ y,\ f^{(1)}(x)),\ f^{(1)}(x)),\ \Phi = (f^{(1)},\ \mathrm{g}^{(2)},\ \varphi^{(3)})$;

6) $A = h^{(1)}(f^{(2)}(g^{2}(x,\ h^{(1)}(x)),\ h^{(1)}(y)),\ \Phi = (0,\ f^{(2)},\ \mathrm{g}^{(2)},\ h^{(1)},\ \varphi^{(2)})$;

7) $A = h^{(2)}(\varphi^{(1)}(1),\ g^{2}(2,\ \varphi^{(1)}(x))),\ \Phi = (1,\ 2,\ \mathrm{g}^{(2)},\ h^{(2)},\ \varphi^{(1)})$;

8) $A = g^{(2)}(1,\ \varphi^{(2)}(x,\ h^{(1)}(\varphi^{(2)}(x,\ y)))),\ \Phi = (1,\ \mathrm{g}^{(3)},\ h^{(1)},\ \varphi^{(2)})$;

9) $A = g^{(2)}(h^{(2)}(1,\ \varphi^{(3)}(2,\ x,\ \varphi^{(1)}(x)))),\ \Phi = (1,\ 2,\ f^{(1)},\ \mathrm{g}^{(2)},\ h^{(2)},\ \varphi^{(3)})$;

10) $A = h^{(1)}(x,\ \varphi^{(2)}(x,\ f^{(1)}(1))),\ \Phi = (1,\ f^{(1)},\ h^{(1)},\ \varphi^{(2)})$.

2.3. Выяснить, сколькими способами можно расставить скобки в выражении A, чтобы всякий раз получалась формула над множеством связок $\sigma = \{\neg,\ \&,\ \vee,\ \rightarrow,\ \oplus,\ \downarrow\}$, если:

1) $A = \neg x \rightarrow y \,\&\, x$; 2) $A = x \,\&\, y \neg\neg z \vee x$;

3) $A = x \rightarrow \neg y \rightarrow z \,\&\, \neg x$;....4) $A = \neg x \oplus \neg y \rightarrow \neg z$;

5) $A = \neg\neg \downarrow x \oplus \neg\neg\neg y$;....6) $A = x \vee \neg y \oplus x \oplus x \neg x$.

2.4. Построить диаграмму, характеризующую строение формулы U:

1) $U = ((\neg(x \rightarrow (\neg y))) \oplus ((z \vee (y \,\&\, x)) \downarrow y))$;

2) $U = (((x \rightarrow y) \rightarrow (\neg((x \mid y) \rightarrow (x \mid z)))) \rightarrow ((\neg y) \rightarrow z))$;

3) $U = (((((x \oplus y) \oplus x) \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z))$;

4) $U = ((((x \downarrow y) \mid (y \downarrow x) \mid z) \downarrow (x \mid z))$;

5) $U = f^{(1)}(g^{(2)}(f^{(1)}(x),\ h^{(2)}(g^{(2)}(x,\ f^{(1)}(y)),\ f^{(1)}(x))))$;

6) $U = f^{(3)}(g^{(1)}(f^{(3)}(x,\ x,\ x)),\ h^{(2)}(x,\ g^{(1)}(f^{(3)}(x,\ y,\ y))),\ y)$;

7) $U = f^{(2)}(((x \rightarrow (\neg y)) \rightarrow z),\ g^{(1)}((x \oplus y) \rightarrow z))$.

2.5. Восстановить формулы по диаграммам на рис. 2.3.

2.6. Построив таблицы истинности соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы U_1 и U_2:

1) $U_1 = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow \overline{z}) \rightarrow xy$, $U_2 = \overline{yz \rightarrow x}$;

2) $U_1 = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \rightarrow (y \rightarrow z))$, $U_2 = \overline{y \rightarrow (x \vee z)}$;

3) $U_1 = x \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow yz)$, $U_2 = (x \vee (y \rightarrow z))(x \oplus y)$;

4) $U_1 = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \mid \oplus (x \oplus yz)$, $U_2 = \overline{x}(yz) \vee \overline{x \rightarrow z}$;

5) $U_1 = ((x \vee y)\overline{z} \rightarrow ((x \sim \overline{z}) \oplus \overline{y}))((x \oplus y)\overline{z})$, $U_2 = (x \rightarrow yz)\overline{x \rightarrow y}$;

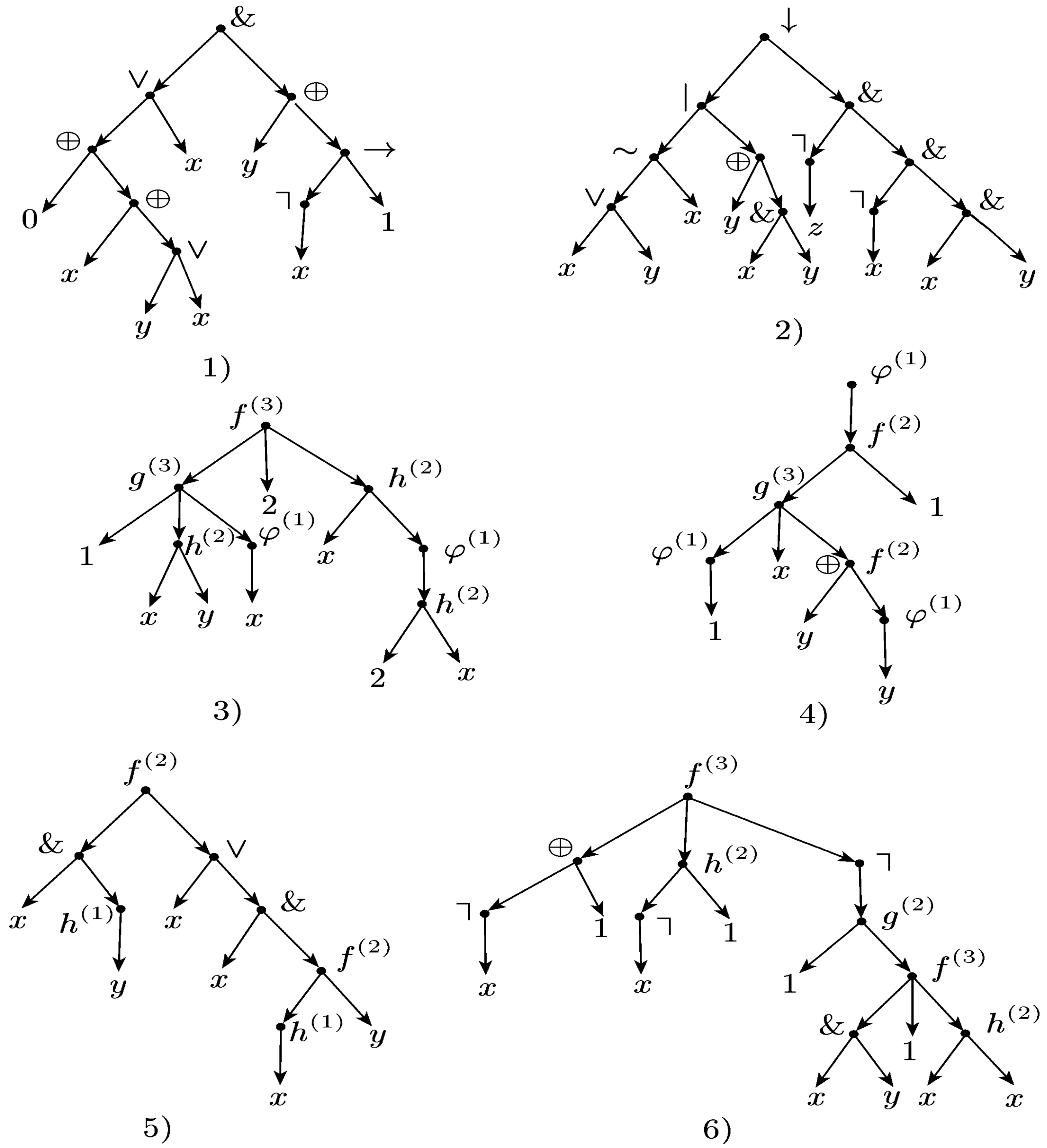


Рис. 2.3

6) $U_1 = (\bar{x} \vee y) \to ((y \,|\, \bar{z}) \to (x \sim xz))$, $U_2 = xy \vee (\overline{x \to x\bar{y}} \to z)$;

7) $U_1 = (x \,|\, \bar{y}) \to ((y \downarrow \bar{z}) \to (x \oplus z))$, $U_2 = x(yz) \oplus \overline{\bar{x} \to z}$;

8) $U_1 = (((x \,|\, y) \downarrow \bar{z}) \,|\, y) \downarrow (\bar{y} \to z)$, $U_2 = ((x \,|\, y) \downarrow (y \,|\, \bar{z}))(x \to (y \to z))$;

9) $U_1 = (xy \to z) \vee ((x \downarrow y) \,|\, z)$, $U_2 = ((x \to yz) \oplus (x \sim y)) \vee (y \to xz))$

10) $U_1 = \overline{x \oplus yz} \cdot \overline{\bar{y} \to xz}(\bar{x} \downarrow y)$, $U_2 = \overline{(xy \to (y \downarrow z)) \vee xyz}$.

2.7. Доказать справедливость следующих эквивалентностей:

1) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;

2) $x \& (y \sim z) = (x \& y) \sim (x \& z)$;

3) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;

4) $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$;

5) $x \& (y \to z) = (x \to y) \& (x \to z)$;

6) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

7) $x \to (y \& z) = (x \to y) \& (x \to z)$;

8) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;

9) $x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$;

10) $x \downarrow y = ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))$.

2.8. Реализовать функцию f формулой над множеством связок σ:

1) $f = x \to y$, $\sigma = \{\neg, \vee\}$; 2) $f = x \vee y$, $\sigma = \{\to\}$;

3) $f = x \sim y$, $\sigma = \{\&, \to\}$;….4) $f = x \mid y$, $\sigma = \{\downarrow\}$.

2.9. Доказать, что функцию f нельзя реализовать формулой над множеством связок σ:

1) $f = x \oplus y$, $\sigma = \{\&\}$; 2) $f = x \& y$, $\sigma = \{\to\}$.

3) $f = x \vee y$, $\sigma = \{\sim\}$.

2.10. Используя основные тавтологии, доказать эквивалентность формул U_1 и U_2:

1) $U_1 = (\bar{x} \to y) \to (\bar{x}y \sim (x \oplus y))$, $U_2 = (\overline{xy} \to x) \to y$;

2) $U_1 = (xy \vee (\bar{x} \to yz)) \sim ((\bar{x} \to \bar{y}) \to z)$, $U_2 = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$;

3) $U_1 = (x \oplus yz) \to (\bar{x} \to (y \to z))$, $U_2 = x \to ((y \to z) \to x)$;

4) $U_1 = (\bar{x} \to (\bar{y} \to (x \sim z)))(x \sim (y \to (z \vee (x \to y))))$,

$U_2 = (x \to (y \to z)) \to x$;

5) $U_1 = (\bar{x} \vee \bar{y}z) \to ((x \to y) \to ((y \vee z) \to \bar{x}))$, $U_2 = (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$;

6) $U_1 = (x\bar{y} \vee \bar{x}z) \oplus ((y \to z) \to \bar{x}y)$, $U_2 = (x(\overline{yz}) \oplus y) \oplus z$;

7) $U_1 = x \to ((\bar{x} \cdot \bar{y} \to (\bar{x} \cdot \bar{z} \to y)) \to y)z$, $U_2 = \overline{x(y \to \bar{z})}$;

8) $U_1 = \overline{(x \sim y) \to (x \to \overline{z})} \vee (x \oplus \overline{y}z)$, $U_2 = x \sim (z \to y)$;

9) $U_1 = \overline{(x \vee \overline{y} \cdot \overline{z})(\overline{x} \to \overline{y} \cdot z)}(x \to (y \sim z))$,

$$U_2 = ((x \to y) \sim (y \to (x \to z))) \oplus xyz;$$

10) $U_1 = \overline{((x \vee y) \to yz) \vee (y \to xz)} \vee (x \to (\overline{y} \to z))$, $U_2 = (x \to y) \vee z$.

§ 3. Двойственные функции. Принцип двойственности

Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, равная $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$, называется *двойственной* функцией к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Очевидно, что таблица истинности для двойственной функции f^* получается из таблицы истинности для функции f инвертированием (т. е. заменой 0 на 1 и 1 на 0) значений переменных и функции.

Из определения двойственности следует, что

$$f^{**} = (f^*)^* = f,$$

т. е. функция f является двойственной к f^* (*свойство взаимности*).

Принцип двойственности. *Если формула $U = C[f_1, ..., f_r]$ реализует функцию $f(x_1, ..., x_n)$, то формула $U^* = C[f_1^*, ..., f_r^*]$, т. е. формула, полученная из U заменой функций $f_1, ..., f_r$ соответственно на $f_1^*, ..., f_r^*$, реализует функцию $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Формулу U^* будем называть формулой, *двойственной к формуле U*.

Для формул над множеством $\Phi = \{0, 1, \overline{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$ принцип двойственности может быть сформулирован так: *для получения формулы U^*, двойственной к формуле U, нужно в формуле U заменить 0 на 1, 1 на 0, & на $\vee$, $\vee$ на &.*

Пример 2.4. С использованием принципа двойственности построить формулу, реализующую функцию, двойственную функции $f=(x\vee(1\to y))\vee y\cdot\bar{z}\vee(\bar{x}\,|\,\overline{y\downarrow\bar{z}})$. Полученную формулу упростить.

Решение. Так как $(x\vee y)^*=x\cdot y$, $1^*=0$, $(x\to y)^*=\overline{\bar{x}\to\bar{y}}=\overline{x\vee\bar{y}}=\bar{x}\cdot y$, $(x\cdot y)^*=x\vee y$, $(\bar{x})^*=\bar{x}$, $(x\,|\,y)^*=x\downarrow y$, $(x\downarrow y)^*=x\,|\,y$, то $f^*=(x\cdot(\bar{0}\cdot y))\cdot(y\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\downarrow\overline{y\,|\,\bar{z}})$.

Далее $f^*=x\cdot y\cdot(y\vee\bar{z})\cdot\bar{\bar{x}}\cdot\overline{\overline{y\,|\,\bar{z}}}=$

$=x\cdot y\cdot(y\vee\bar{z})\cdot x\cdot(\bar{y}\vee z)=x\cdot y\cdot(y\cdot\bar{y}\vee y\cdot z\vee\bar{z}\cdot\bar{y}\vee z\cdot\bar{z})=x\cdot y\cdot z$. □

Пример 2.5. *Построение формулы для отрицания функции.*

Из определения двойственной функции следует

$$\bar{f}(x_1,\,x_2,\,\ldots,x_n)=f^*(\bar{x}_1,\,\bar{x}_2,\,\ldots,\bar{x}_n).$$

Получаем следующее правило: *пусть формула $U=C[f_1,\,\ldots,\,f_r]$ реализует функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$. Чтобы получить формулу для функции $\bar{f}$ нужно в формуле $U^*=C[f_1^*,\,\ldots,\,f_r^*]$ заменить все переменные на их отрицания.* □

Задачи и упражнения

3.1. Записать тождества, двойственные следующим:

1) $x_1\vee x_2=\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2}$;….2) $\bar{x}_1\cdot(x_2\vee x_3)=\bar{x}_1\cdot x_2\vee\bar{x}_1\cdot x_3$.

3.2. Выяснить, является ли функция g двойственной к функции f:

1) $f=x\oplus y$, $g=x\sim y$;

2) $f=x\,|\,y$, $g=x\downarrow y$;

3) $f=x\to y$, $g=\bar{x}\cdot y$.

4) $f=(\bar{x}\to\bar{y})\to(y\to x)$, $g=(x\to y)\cdot(\bar{y}\to\bar{x})$;

5) $f=x\oplus y\oplus z$, $g=x\oplus y\oplus z$;

6) $f=x\cdot y\vee z$, $g=x\cdot(y\vee z)$;

7) $f = x \cdot y \oplus x \cdot z \oplus y \cdot z$, $g = x \cdot y \vee x \cdot z \vee y \cdot z$;

8) $f = x \cdot y \to z$, $g = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$;

9) $f = (x \vee y \vee z) \cdot t \vee x \cdot y \cdot z$, $g = (x \vee y \vee z) \cdot t \vee x \cdot y \cdot z$;

10) $f = x \cdot y \vee y \cdot z \vee z \cdot t \vee t \cdot x$, $g = x \cdot z \vee y \cdot t$;

11) $f = (x \vee y) \to (z \oplus t)$, $g = (x \mid y) \cdot (z \sim t)$;

12) $f = (x \to y) \to (z \to t)$, $g = (x \to \bar{z}) \cdot (x \to t) \cdot (\bar{y} \to \bar{z}) \cdot (\bar{y} \to t)$.

3.3. С использованием принципа двойственности построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции f, и убедиться в том, что полученная формула эквивалентна формуле U:

1) $f = x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$, $U = x \cdot (y \oplus z)$;

2) $f = (x \downarrow y) \oplus ((x \mid y) \downarrow (\bar{x} \sim y \cdot z))$, $U = x \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot y \vee \bar{y} \cdot z$;

3) $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee (y \cdot \bar{z} \oplus 1)) \downarrow z$, $U = x \vee y \vee \bar{z}$;

4) $f = x \cdot y \vee y \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot z$, $U = x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee y \cdot z$;

5) $f = ((x \to y) \vee z) \cdot (y \cdot \bar{z} \to (x \oplus y \cdot z))$, $U = (x \oplus y) \cdot z$;

6) $f = (((x \vee \bar{y} \vee (y \cdot z \sim 1)) \oplus 1) \to 0) \mid y$, $U = \overline{x \cdot z \vee y}$;

7) $f = (x \vee y \vee \bar{z}) \to (x \cdot \bar{y} \sim (x \oplus y \cdot \bar{z}))$, $U = (x \sim z) \cdot \bar{y}$;

8) $f = x \cdot y \vee y \cdot z \vee z \cdot t$, $U = x \cdot z \vee z \cdot y \vee y \cdot t$;

9) $f = (x \vee y \vee \bar{z}) \cdot \bar{t} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z$, $U = (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot \bar{t} \vee x \cdot y \cdot \bar{z}$;

10) $f = (x \cdot (y \cdot z \vee 0) \sim (t \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y)) \vee \bar{y} \cdot t$, $U = (x \vee (z \oplus t)) \cdot \bar{y}$.

3.4. Используя принцип двойственности, найти отрицание для функций:

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_2 \cdot \overline{x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2}$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_3) \cdot x_2 \vee x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{\bar{x}_1 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$.

3) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot x_4 \vee \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \cdot \overline{\bar{x} \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4}$.

§ 4. Фиктивные и существенные переменные. Отождествление переменных у булевых функций

Переменная x_i $(1 \le i \le n)$ функции $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ называется *существенной*, если существуют такие наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соседние по i-ой компоненте (т. е. $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$), что $f(\tilde{\alpha}) \ne f(\tilde{\beta})$. В противном случае переменная x_i называется *фиктивной* (или *несущественной*) переменной функции $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Две функции $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{y}^m)$ называются *равными*, если множества их существенных переменных совпадают и на любых двух наборах $\tilde{\alpha}^n$ и $\widehat{\beta}^m$, различающихся, быть может, только значениями несущественных переменных, значения функций одинаковы: $f(\tilde{\alpha}^n) = g(\tilde{\beta}^m)$. Если $f(\tilde{x}^n)$ и $g(\tilde{y}^m)$ – равные функции, то одну из них можно получить из другой путем добавления и/или изъятия фиктивных переменных.

Пусть $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$. Говорят, что функция

$$\varphi(x_1, ..., x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, ..., x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, ..., x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, ..., x_n)$$

получена из функции $f(\tilde{x}^n)$ *путем отождествления переменных* x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_k}, если φ является результатом подстановки переменной x на места переменных x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_k}. В качестве x можно взять любую переменную, не входящую в множество $X^n \setminus \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}\}$.

П р и м е р 2.6. Перечислить все существенные и фиктивные переменные функции $f(\tilde{x}^4) = (1100\ 0011\ 1100\ 0011)$.

Р е ш е н и е. Сравним значения функции на всех парах наборов, соседних по переменной x_4:

$$f(0,\ 0,\ 0,\ 0) = f(0,\ 0,\ 0,\ 1) = f(0,\ 1,\ 1,\ 0) = f(0,\ 1,\ 1,\ 1) =$$
$$= f(1,\ 0,\ 0,\ 0) = f(1,\ 0,\ 0,\ 1) = f(1,\ 1,\ 1,\ 0) = f(1,\ 1,\ 1,\ 0),$$

т. е. $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0) = f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 1)$. Следовательно, переменная x_1 – фиктивная. Так как $f(0,\ 0,\ 0,\ 0) = 1$, а $f(0,\ 0,\ 1,\ 0) = 0$ и $f(0,\ 1,\ 0,\ 0) = 0$, то переменные x_3 и x_2 – существенные. Наконец, сравнивая значения функции на всех парах наборов, соседних по переменной x_1, находим, что x_1 – фиктивная переменная. Нетрудно убедиться, что $f(\tilde{x}^4) = x_2 \sim x_3$. □

П р и м е р 2.7. Перечислить все существенные и фиктивные переменные функции

$$f(\tilde{x}^4) = ((x_1\overline{x}_2 \vee x_3) \sim (\overline{x}_1 x_4 \vee x_2\overline{x}_3)) \to ((x_2 \oplus x_4) \vee x_3) \,|\, (\overline{x}_1(\overline{x}_2 \to (x_3 \oplus \overline{x}_4)))).$$

Р е ш е н и е. Данную задачу можно решать аналогично предыдущей, т. е. сравнивать значения функции на парах соседних наборов, однако при аналитическом задании функции более эффективным является ее представление в виде дизъюнктивной нормальной формы с помощью эквивалентностей (над множеством $\sigma = \{\neg,\ \&,\ \vee\}$) и дальнейшее упрощение:

$$f(\tilde{x}^4) = \overline{(x_1\overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 x_4 \vee x_2\overline{x}_3)} \vee \overline{x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 x_4 \vee x_3} \cdot \overline{\overline{x}_1(x_2 \vee x_3 x_4 \vee \overline{x}_3\overline{x}_4)} =$$
$$= \overline{x}_1 x_3 x_4 \vee (x_2 x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4)\overline{x}_3(x_1 \vee \overline{x}_2(x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3 x_4)) =$$
$$= x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 = x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4.$$

Отсюда сразу следует, что переменная x_2 фиктивная. Остальные три переменные существенные. Это следует также из того, что $f(0,\ 0,\ 1,\ 1) = 0$, а $f(1,\ 0,\ 1,\ 0) = f(0,\ 0,\ 0,\ 1) = f(0,\ 0,\ 1{,}0) = 1$. □

П р и м е р 2.8. Выяснить, можно ли, отождествляя и переименовывая переменные в функции $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_4$, получить функцию $g_1(x_1,\ x_2) = x_1 \vee x_2$ или $g_2(x_1,\ x_2) = x_1 \,|\, x_2$.

Р е ш е н и е. Функция $f(\tilde{x}^4)$ на нулевом наборе равны 1, а на единичном – 0: $f(\tilde{0}) = 1$, $f(\tilde{1}) = 0$. В то же время функция $g_1(\tilde{x}^2)$ этому условию не удовлетворяет ($g_1(0,\ 0)=0$, $g_1(1,\ 1)=1$). Значит, функцию g_1 из функции f описанным выше способом построить нельзя.

Функция $g_2(\tilde{0})=1$ и $g_2(\tilde{1})=0$, однако, отсюда не следует, что ее можно получить из функции f, отождествляя и переименовывая переменные. Для установления такой возможности можно перебрать все варианты построения из функции f двуместных функций и сравнить полученные функции с функцией g_2. Для этого надо рассмотреть семь вариантов:

1) $x_1=x_2=x_3=x$, $x_4=y$;

2) $x_1=x_2=x_4=x$, $x_3=y$;

3) $x_1=x_3=x_4=x$, $x_2=y$

4) $x_2=x_3=x_4=x$, $x_1=y$;

5) $x_1=x_2=x$, $x_3=x_4=y$;

6) $x_1=x_3=x$, $x_2=x_4=y$;

7) $x_1=x_4=x$, $x_2=x_3=y$.

Такая процедура трудоемка, поэтому поступим иначе. Из соотношений $g_2(0,\ 1)=g_2(1,\ 0)=1$ следует, что существует пара противоположных наборов $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4)$, на которых функция f обращается в 1, т. е. функция $\varphi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\,\&\,\varphi(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4)\neq 0$. Имеем

$$\varphi(\tilde{x}^4)=((x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_4)((\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)x_4\vee x_1x_2\bar{x}_4)=$$
$$=x_1x_2\bar{x}_4(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_4(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)=x_1x_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_4.$$

Функция $\varphi(\tilde{x}^4)=1$ только на четырех наборах: $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ и $(0,\ 0,\ 1,\ 1)$. Набор $(1,\ 1,\ 0,\ 0)$ приводит к отождествлению: $x_1=x_2=x$ и $x_3=x_4=y$. Имеем

$$f(x,\ x,\ y,\ y)=(x\vee x\vee\bar{y})\bar{y}\vee\bar{x}\cdot\bar{x}y=x\bar{y}\vee\bar{y}\vee\bar{x}y=\bar{x}\vee\bar{y}=x\,|\,y.$$

Набор $(1,\ 1,\ 1,\ 0)$ дает отождествление $x_1=x_2=x_3=x$ и $x_4=y$ и функцию:

$$f(x,\ x,\ x,\ y)=(x\vee x\vee \overline{x})\overline{y}\vee \overline{x}\cdot \overline{x}y=\overline{y}\vee \overline{x}y=\overline{x}\vee \overline{y}=x\,|\,y\,.$$

Других отождествлений, дающих функцию g_2 нет. Итак, функция

$$g_2(x_1,\ x_2)=f(x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2)=f(x_1,\ x_1,\ x_1,\ x_2)\,.$$

Задачи и упражнения

4.1. Указать все фиктивные переменные функции f:

1) $f(\tilde{x}^3)=(1010\ 1010)$;....2) $f(\tilde{x}^3)=(0110\ 0110)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(1111\ 0011)$; 4) $f(\tilde{x}^4)=(1011\ 0101\ 1011\ 0101)$;

5) $f(\tilde{x}^4)=(0101\ 1111\ 0101\ 1111)$;....6) $f(\tilde{x}^4)=(1100\ 1100\ 0010\ 0011)$.

4.2. С помощью эквивалентных преобразований показать, что x_1 – фиктивная переменная функции f:

1) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\to x_2)\cdot(x_2\,|\,x_2)$; 2) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\sim x_2)\vee(x_1\,|\,x_2)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\vee x_2)\to x_1\sim x_2))\cdot x_1\to(x_2\vee x_3)$;

4) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\oplus x_2)\to x_3)\cdot\overline{x_3\to x_2}$;

5) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\vee x_2\cdot\overline{x}_3)\sim(\overline{x}_1\to\overline{x}_2\cdot x_3))\cdot(x_2\downarrow x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^3)=((x_1\vee x_2\vee\overline{x}_3)\to(x_1\cdot x_2\,|\,x_3))\oplus(x_2\to x_1)\cdot x_3$;

7) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\to((x_2\to x_3)\to x_4))\sim\overline{x}_1\cdot(x_2\to x_3)\cdot x_4$;

8) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\cdot\overline{x}_2\vee x_3)\cdot(x_2\vee x_1\cdot x_4)\to(x_1\to(x_2\to x_3))$;

9) $f(\tilde{x}^4)=((x_1x_2\vee x_3x_4)\cdot(x_1\oplus x_2\oplus x_3)\to x_4)\oplus(x_1x_2(x_3\to x_4)\vee x_3x_4)$;

10) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\,|\,x_2)\downarrow((x_1\,|\,x_4))\,|\,((x_3\,|\,x_4)))\,|\,((x_1\,|\,x_3)\,|\,x_2)$.

4.3. Перечислить существенные переменные следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^2)=((x_1\vee x_2)\to x_1\cdot x_2)\oplus(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_1)$;

2) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\to((x_2\to x_1)\to x_2))\sim(x_1\vee x_2)$;

3) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\oplus(x_2\to(x_1\sim x_2)))\vee\overline{x_1\to x_2}$;

4) $f(\tilde{x}^2)=(\overline{x}_1\cdot x_2\to(\overline{x}_1\to\overline{x}_2))\to x_1\cdot\overline{x}_2$

5) $f(\tilde{x}^2) = (x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \sim x_1 \cdot x_2)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \to x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$;

7) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \to \bar{x}_2) \oplus (x_2 \to \bar{x}_3)) \oplus (x_2 \to x_3)$;

8) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \bar{x}_3) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \vee (x_1 \vee x_3)$;

9) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \downarrow (x_2 \mid x_3)) \downarrow (x_2 \mid (x_1 \downarrow x_3))) \downarrow (x_1 \mid x_2)$;

10) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \cdot x_2 \oplus x_3 \cdot x_4) \vee ((x_1 \cdot x_3 \sim x_2) \to x_4) \vee \bar{x}_1 \cdot x_3$.

4.4. Выяснить, можно ли из функции f, отождествляя и переименовывая в ней переменные, получить функцию g:

1) $f(\tilde{x}^3) = (1100\ 1011)$, $g(\tilde{x}^2) = (1011)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (1010\ 1100)$, $g(\tilde{x}^2) = (1000)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (0011\ 0010)$, $g(\tilde{x}^2) = (0110)$;

4) $f(\tilde{x}^4) = (0110\ 1101\ 1110\ 0011)$, $g(\tilde{x}^3) = (0110\ 0111)$;

5) $f(\tilde{x}^4) = (1111\ 1101\ 0001\ 1011)$, $g(\tilde{x}^2) = (1001)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 x_2$;

7) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) x_3 \oplus x_1 \bar{x}_2$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$;

8) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$; $g(\tilde{x}^3) = x_1 \to x_2$

9) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4) \to (x_1 \bar{x}_2 \to (x_3 \vee x_4))$, $g(\tilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \vee x_3)$:

10) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 x_2 \vee x_3 \bar{x}_4) \oplus (\bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3)$, $g(\tilde{x}^2) = x_1 \mid x_2$.

4.5. Доказать, что всякая симметрическая функция, отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных.

4.6. 1) Доказать, что если функция $f(\tilde{x}^3)$ существенно зависит от всех своих переменных и удовлетворяет условию $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1})$, то найдется пара переменных, отождествляя которые можно получить функцию, существенно зависящую от двух переменных.

2) Показать, что условие $f(\tilde{0}) = f(\tilde{1})$ отбросить нельзя.

§ 5. Специальные представления булевых функций

1. Разложение булевых функций по переменным. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Введем обозначение

$$x^{\sigma} = x \cdot \sigma \vee \bar{x} \cdot \bar{\sigma},$$

где σ – параметр, равный либо 0, либо 1. Очевидно, что

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \bar{x}, \ \sigma = 0, \\ x, \ \sigma = 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $x^{\sigma} = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – булева функция и $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$. Функцию, получаемую из $f(\tilde{x}^n)$ подстановкой на места переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ соответственно, называют $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$*-компонентой функции* $f(\tilde{x}^n)$ или *подфункцией функции* $f(\tilde{x}^n)$ и обозначают через $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\tilde{x}^n)$. При $k = 0$ подфункция совпадает с самой функцией. Если $k \ne 0$ и $k \ne n$, то подфункция $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\tilde{x}^n)$ называется *собственной*.

Т е о р е м а 2.1 (о разложении функций по переменным). *Каждую функцию алгебры логики $f(\tilde{x}^n)$ при любом k $(1 \le k \le n)$ можно представить в следующей форме:*

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)} x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\tilde{x}^n), \qquad (2.1)$$

где $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ $(k \ge 1)$ и дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \in B^k$.

Это представление называется *разложением функции $f(\tilde{x}^n)$ по k переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.*

В качестве следствий из теоремы рассмотрим два специальных случая разложения.

1) *Разложение функции* $f(\tilde{x}^n)$ *по переменной* x_i:

$$f(x_1,\ ...,x_{i-1},\ x_i,\ x_{i-1},\ ...,\ x_n) = x_i \cdot f(x_1,\ ...,x_{i-1},\ 1,\ x_{i+1},\ ...,\ x_n) \vee \\ \vee \overline{x}_n \cdot f(x_1,\ ...,x_{i-1},\ 0,\ x_{i+1},\ ...,\ x_n). \qquad (2.2)$$

Функции $f(x_1,\ ...,x_{i-1},\ 1,\ x_{i+1},\ ...,\ x_n)$ и $f(x_1,\ ...,x_{i-1},\ 0,\ x_{i+1},\ ...,\ x_n)$ называются *компонентами разложения.* Данное разложение полезно, когда какие-либо свойства устанавливаются по индукции.

2) *Разложение функции* $f(\tilde{x}^n)$ *по всем* n *переменным:*

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_n^{\sigma_n} \cdot f(\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_n). \qquad (2.3)$$

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ тождественно не равна 0, то выражение (2.3) можно представить в виде:

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}, \qquad (2.4)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\ \sigma_2,\ ...,\ \sigma_n) \in B^n$, на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ обращается в 1.

Разложение (2.4) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *совершенной д. н. ф.*) функции $f(\tilde{x}^n)$.

Непосредственно к понятию совершенной д. н. ф. примыкает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Каждая функция алгебры логики может быть представлена формулой в базисе* $S = \{\neg,\ \&,\ \vee\}$.

Данная теорема носит конструктивный характер, так как она позволяет для каждой функции построить реализующую ее формулу в виде совершенной д. н. ф. Для этого в таблице истинности для функции $f(x_1,\ ...,x_n)$ отмечаем все строки $(\sigma_1, ...,\ \sigma_n)$, в которых $f(\sigma_1, ...,\ \sigma_n) = 1$. Для каждой такой строки образуем логическое произведение $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}$, а затем все полученные конъюнкции соединяем знаком дизъюнкции.

Совершенная д. н. ф. есть выражение типа $\Sigma\Pi$. Покажем, что при f, тождественно не равной 1, ее можно представить в виде $\Pi\Sigma$. Запишем для двойственной функции (очевидно не равной тождественно 0) разложение в виде совершенной д. н. ф.:

$$f^*(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}: f(\tilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Из принципа двойственности следует

$$f^{**}(\tilde{x}^n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f^*(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} (x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f(\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_n)=0}} (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}) =$$

$$= \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}).$$

Таким образом, получаем разложение, которое называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*совершенной к. н. ф.*):

$$f(\tilde{x}^n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}). \tag{2.5}$$

П р и м е р 2.9. Построить совершенные д. н. ф. и к. н. ф. для функции $f = x_1 \to x_2$.

Р е ш е н и е. Имеем три набора (0, 0), (0, 1) и (1, 1), на которых эта функция равна 1 и один набор (1,0), на котором она равна 0 (см. табл. 2.2). Поэтому

$$x_1 \to x_2 = x_1^0 x_2^0 \vee x_1^0 x_2^1 \vee x_1^1 x_2^1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2,$$

$$x_1 \to x_2 = x_1^{\bar{1}} \vee x_2^{\bar{0}} = \bar{x}_1 \vee x_2. \ \square$$

2. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Пусть задан алфавит $X^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Выражение

$$K_r = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r} \ (i_\nu \neq i_\mu \text{ при } \nu \neq \mu)$$

называется *элементарной конъюнкцией* (*э. к.*), а число r – ее *рангом*. Выражения вида $x_{i_k}^{\sigma_k}$ называются *буквами*. По определению считаем константу 1 э. к. ранга 0.

Выражение

$$D = \mathop{\vee}_{i=1}^{s} K_i \ \ (K_i \neq K_j \text{ при } i \neq j), \qquad (2.6)$$

где K_i $(i = 1, \ldots, s)$ – элементарная конъюнкция ранга r_i, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (*д. н. ф.*).

Аналогично формула вида

$$D_r = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r} \ \ (i_\nu \neq i_\mu \text{ при } \nu \neq \mu)$$

называется *элементарной дизъюнкцией* (*э. д.*) *ранга* r. По определению считаем константу 0 э. д. нулевого ранга.

Выражение

$$K = \mathop{\&}_{i=1}^{s} D_i \ \ (D_i \neq D_j \text{ при } i \neq j), \qquad (2.7)$$

где D_i $(i = 1, \ldots, s)$ – э. д. ранга r_i, называется *конъюнктивной нормальной формой* (к. *н. ф.*).

Число s в формулах (2.6) и (2.7) называется соответственно *длиной д. н. ф.* и *длиной к. н. ф.* Сумма рангов всех конъюнкций, входящих в д. н. ф., называется *сложностью д. н. ф.* Аналогично, сумма рангов всех дизъюнкций, входящих в к. н. ф., называется *сложностью к. н. ф.*

Д. н. ф. (соответственно к. н. ф.) над множеством переменных X^n называется *совершенной*, если она составлена из э. к. (соответственно э. д.) ранга n.

Если булева функция задана некоторой д. н. ф., соверешенную д. н. ф. этой функции можно получить, используя преобразования вида $A = A \cdot x \vee A \cdot \overline{x}$ и $A \vee A = A$. Аналогично, совершенная к. н. ф. булевой функции может быть построена из какой-либо к. н. ф. этой функции с помощью преобразований вида $A = (A \vee x) \cdot (A \vee \overline{x})$ и $A \cdot A = A$.

Дистрибутивный закон $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$ совместно с эквивалентностями $x \cdot x = x$, $x \cdot \overline{x} = 0$, $A \cdot 0 = 0$, $A \vee 0 = A$ и законом поглощения $A \vee A \cdot B = A$ позволяет переходить от к. н. ф. булевой функции к некоторой д. н. ф. этой же функции. Аналогично, используя дистрибутивный закон

$x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$, эквивалентности $x \vee x = x$, $x \vee \bar{x} = 1$, $A \vee 1 = 1$, $A \cdot 1 = A$ и закон поглощения $A \cdot (A \vee B) = A$, можно из д. н. ф. булевой функции построить некоторую к. н. ф. той же функции.

Пример 2.10. С помощью эквивалентных преобразований построить совершенную д. н. ф. функции $f(x^3) = \bar{x}_1 \vee x_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3$.

Решение. Каждая из входящих в д. н. ф. конъюнкций элементарная, поэтому для построения совершенной д. н. ф. достаточно пополнить каждую из конъюнкций недостающими буквами x_i^{σ}, применяя соотношение $A = A \cdot x \vee A \cdot \bar{x}$, а затем устранить повторения с помощью эквивалентности $A \vee A = A$. Имеем

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

$$x_1 \bar{x}_2 = x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \; x_2 \bar{x}_3 = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3.$$

Следовательно,

$$f(x^3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3. \;\square$$

Пример 2.11. С помощью эквивалентных преобразований перейти от заданной д. н. ф. функции $f(x^3) = x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$ к к. н. ф.

Решение. Имеем $x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2) = 1 \cdot (x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$. Далее,

$$(x_1 \vee x_2) \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \vee 1)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = 1 \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) =$$
$$= x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3. \;\square$$

3. Представление булевых функций полиномом Жегалкина. Элементарная конъюнкция называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. *Константа* 1 (элементарная конъюнкция нулевого ранга) считается по определению *монотонной* элементарной конъюнкцией. Выражение вида

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_s, \tag{2.8}$$

где K_i $(i = (1, 2, \ldots, s)$ – попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над множеством переменных X^n, называется *полиномом Же-*

галкина (или *полиномом по модулю* 2). Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином, называется *степенью* этого *полинома*. Степень полинома 0 (при $s=0$) считается *неопределенной*. Число s называется длиной полинома (2.8).

Теорема 2.3 (И.И. Жегалкин). *Каждая булева функция единственным образом представима в виде полинома Жегалкина.*

В этой теореме единственность понимается с точностью до порядка слагаемых в сумме и порядка сомножителей в конъюнкциях.

Единственность представления булевой функции полиномом Жегалкина позволяет применять разнообразные методы его построения. Рассмотрим три метода построения полинома Жегалкина.

1. Метод неопределенных коэффициентов. Введем нумерацию монотонных э. к. над множеством переменных X^n, сопоставляя конъюнкции K вектор $\tilde{\sigma}(K)=(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_n)\in B^n$, в котором $\sigma_i=1$, если x_i входит в K. *Номером э. к.* K будем называть число $\nu(\tilde{\sigma}(K))=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\cdot 2^{n-i}$. Константа 1 в этой нумерации имеет номер 0. Тогда искомый полином Жегалкина $P(\tilde{x}^n)$, реализующий заданную функцию $f(\tilde{x}^n)$, можно записать в виде

$$P(\tilde{x}^n)=\beta_0\cdot 1\oplus\beta_1\cdot K_1\oplus\beta_2\cdot K_2\oplus...\oplus\beta_{2^n-1}\cdot K_{2^n-1}, \qquad (2.9)$$

где K_j – элементарная конъюнкция с номером j ($j=1,\ 2,\ ...,\ 2^n-1$).

Вектор $\tilde{\beta}_P=\left(\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_{2^n-1}\right)$ будем называть *вектором коэффициентов полинома* $P(\tilde{x}^n)$.

Неизвестные коэффициенты $\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_{2^n-1}$ находятся следующим образом. Для каждого $\tilde{\alpha}\in B^n$ составляем уравнение $P(\tilde{\alpha})=f(\tilde{\alpha})$, где $P(\tilde{\alpha})$ – выражение, получающееся из формулы (2.9) при $x=\tilde{\alpha}$. Решая систему из

2^n уравнений с 2^n неизвестными, которая имеет единственное решение, находим коэффициенты полинома $P(\tilde{x}^n)$.

Пример 2.12. Методом неопределенных коэффициентов построить полином Жегалкина для функции $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$.

Решение. Запишем общий вид полинома Жегалкина для функции двух переменных

$$P(x_1, x_2) = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot x_1 \oplus \beta_2 \cdot x_2 \oplus \beta_3 \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Составляем систему уравнений для коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$f(0, 0) = 0 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0,$$

$$f(0, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 0,$$

$$f(1, 0) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0,$$

$$f(1, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 1.$$

Решая эту систему, получаем $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1$. Следовательно, $x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$. □

2. Метод, основанный на использовании формул над множеством связок $\{\vee, \&, \neg\}$. Строят некоторую формулу над множеством связок $\{\vee, \&, \neg\}$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$, затем используют формулы $x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$, $\bar{x} = x \oplus 1$. Далее раскрывают скобки на основе дистрибутивного закона $x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$ и применяют эквивалентности $x \cdot x = x$, $x \cdot 1 = x$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$.

Из формулы $x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ следует, что для булевых функций f_1 и f_2, одновременно не обращающихся в 1 ($f_1 \cdot f_2 = 0$), выполняется равенство $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2$. Такие функции называются *ортогональными.* Из последнего равенства следует, что логическая сумма для ортогональных слагаемых не изменяется, если операцию $\vee$ заменить на $\oplus$. Эту процедуру можно применить, если представить данную функцию совершенной д. н. ф., в которой все элементарные конъюнкции ортогональны.

П р и м е р 2.13. Построить полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}_3)=(1011\ 0001)$ на основе совершенной д. н. ф.

Р е ш е н и е. Представим заданную функцию в виде совершенной д. н. ф., заменим все знаки $\vee$ на $\oplus$, а все отрицания по формуле $\overline{x}=x\oplus 1$, далее раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}_3) &= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1x_2x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \oplus \overline{x}_1 x_2 x_3 \oplus x_1x_2x_3 = \\ &= (x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1)\oplus(x_1\oplus 1)x_2(x_3\oplus 1)\oplus(x_1\oplus 1)x_2x_3\oplus x_1x_2x_3 = \\ &= x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus \\ &\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_1x_2x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2x_3 = x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_3\oplus 1. \ \square \end{aligned}$$

3. М е т о д, о с н о в а н н ы й н а п р е о б р а з о в а н и и в е к т о р а з н а ч е н и й ф у н к ц и и $\tilde{\alpha}_f$. Над векторами из B^{2^n} определяется индукцией по n операция T.

а) Если $n=1$ и $\tilde{\alpha}=(\alpha_0,\ \alpha_1)$, то $T(\tilde{\alpha})=(\alpha_0,\ \alpha_0\oplus\alpha_1)$.

б) Предположим, что операция T уже определена для каждого вектора $\tilde{\sigma}$ из B^{2^n}, и рассмотрим произвольный вектор из $B^{2^{n+1}}$. Пусть $\tilde{\alpha}=\left(\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_{2^n-1},\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_{2^n-1}\right)$ и

$$T\left(\beta_0,\ \beta_1,\ ...,\ \beta_{2^n-1}\right)=\left(\delta_0,\ \delta_1,\ ...,\ \delta_{2^n-1}\right),$$

$$T\left(\gamma_0,\ \gamma_1,\ ...,\ \gamma_{2^n-1}\right)=\left(\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ ...,\ \varepsilon_{2^n-1}\right).$$

Здесь δ_i и ε_j по индуктивному предположению известны. Полагаем $T(\tilde{\alpha})=(\delta_0,\ \delta_1,\ ...,\ \delta_{2^n-1},\ \delta_0\oplus\varepsilon_0,\ \delta_1\oplus\varepsilon_1,\ ...,\ \delta_{2^n-1}\oplus\varepsilon_{2^n-1})$. Вектор $\tilde{\alpha}_f$ значений функции $f(\tilde{x}^n)$ связан с вектором $\tilde{\beta}_P$ коэффициентов полинома $P(\tilde{x}^n)$, реализующего функцию $f(\tilde{x}^n)$, следующим образом: $\tilde{\beta}_P=T(\tilde{\alpha}_f)$ и $\tilde{\alpha}_f=T(\tilde{\beta}_P)$.

Опишем алгоритм построения вектора $\tilde{\beta}_P$. Разобьем вектор

$$\tilde{\alpha}_f=\left(\alpha_0,\ \alpha_1,\ ...,\ \alpha_{2i},\ \alpha_{2i+1},\ ...,\ \alpha_{2^n-2},\ \alpha_{2^n-1}\right)$$

на двумерные наборы

$$\tilde{\gamma}_0=\left(\alpha_0,\ \alpha_1\right),\ \tilde{\gamma}_1=\left(\alpha_2,\ \alpha_3\right),\ \ldots,\ \tilde{\gamma}_i=\left(\alpha_{2i},\ \alpha_{2i+1}\right),\ \ldots,\ \tilde{\gamma}_{2^{n-1}-1}=\left(\alpha_{2^n-2},\ \alpha_{2^n-1}\right).$$

Далее конструируем четырехмерные наборы, которые получаются в результате применения операции T к четырехмерным наборам, выделяемым из вектора $\tilde{\alpha}_f$:

$$T\left(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\right)=T\left(\tilde{\gamma}_0,\ \tilde{\gamma}_1\right)=\left(T\left(\tilde{\gamma}_0\right),\ T\left(\tilde{\gamma}_0\right)\oplus T\left(\tilde{\gamma}_1\right)\right),\ \ldots,$$

$$T\left(\alpha_{4j},\ \alpha_{4j+1},\ \alpha_{4j+2},\ \alpha_{4j+3}\right)=T\left(\tilde{\gamma}_{2j},\ \tilde{\gamma}_{2j+1}\right)=\left(T\left(\tilde{\gamma}_{2j}\right),\ T\left(\tilde{\gamma}_{2j}\right)\oplus T\left(\tilde{\gamma}_{2j+1}\right)\right),\ \ldots,$$

$$T\left(\alpha_{2^n-4},\ \alpha_{2^n-3},\ \alpha_{2^n-2},\ \alpha_{2^n-1}\right)=T\left(\tilde{\gamma}_{2^{n-1}-2},\ \tilde{\gamma}_{2^{n-1}-1}\right)=$$
$$=\left(T\left(\tilde{\gamma}_{2^{n-1}-2}\right),\ T\left(\tilde{\gamma}_{2^{n-1}-2}\right)\oplus T\left(\tilde{\gamma}_{2^{n-1}-1}\right)\right).$$

Затем аналогичным образом переходим к восьмимерным наборам и т. д., пока нее построим 2^n-мерный набор, который и будет искомым вектором $\tilde{\beta}_P$.

Полином Жегалкина представляется в виде

$$f(\tilde{x}^n)=\beta_0\cdot K_0\oplus\beta_1\cdot K_1\oplus\ldots\oplus\beta_{2^n-1}\cdot K_{2^n-1},$$

где K_i – монотонная элементарная конъюнкция (не содержащая отрицаний переменных) с номером i $(i=0,\ \ldots,\ 2^n-1)$ над множеством переменных $\tilde{X}^n=\left(x_1,\ \ldots,\ x_n\right)$, причем $K_0=1$.

П р и м е р 2.14. Построить полином Жегалкина для функции $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_1x_3\vee x_2x_3$, преобразуя ее вектор значений.

Р е ш е н и е. Имеем $\alpha_f=(0001\ 0111)$. Разобьем этот вектор на «последовательные» двумерные наборы: $\tilde{\gamma}_0=(0,\ 0)$, $\tilde{\gamma}_1=(0,\ 1)$, $\tilde{\gamma}_2=(0,\ 1)$, $\tilde{\gamma}_3=(1,\ 1)$. Затем последовательно применяем операцию T к соответствующим векторам:

$$T(\tilde{\gamma}_0)=(0,\ 0\oplus 0)=(0,\ 0),\ T(\tilde{\gamma}_1)=(0,\ 0\oplus 1)=(0,\ 1),$$

$$T(\tilde{\gamma}_2)=(0,\ 0\oplus 1)=(0,\ 1),\ T(\tilde{\gamma}_3)=(1,\ 1\oplus 1)=(1,\ 0);$$

$$T(\tilde{\gamma}_0,\ \tilde{\gamma}_1) = (T(\tilde{\gamma}_0),\ T(\tilde{\gamma}_0) \oplus T(\tilde{\gamma}_1)) = ((0,\ 0),\ (0,\ 0) \oplus (0,\ 1)) = (0,\ 0,\ 0,\ 1),$$

$$T(\tilde{\gamma}_2,\ \tilde{\gamma}_3) = (T(\tilde{\gamma}_2),\ T(\tilde{\gamma}_2) \oplus T(\tilde{\gamma}_3)) = ((0,\ 1),\ (0,\ 1) \oplus (1,\ 0)) = (0,\ 1,\ 1,\ 1);$$

$$T(\alpha_f) = T(\tilde{\gamma}_0,\ \tilde{\gamma}_1,\ \tilde{\gamma}_2,\ \tilde{\gamma}_3) = (T(\tilde{\gamma}_0,\ \tilde{\gamma}_1),\ T(\tilde{\gamma}_0,\ \tilde{\gamma}_1) \oplus T(\tilde{\gamma}_2,\ \tilde{\gamma}_3)) =$$
$$= ((0,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 0,\ 1) \oplus (0,\ 1,\ 1,\ 1)) = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0) = \tilde{\beta}_p.$$

Таким образом,

$$f(\tilde{x}^3) = 0 \cdot K_0 \oplus 0 \cdot K_1 \oplus 0 \cdot K_2 \oplus 1 \cdot K_3 \oplus 0 \cdot K_4 \oplus 1 \cdot K_5 \oplus 1 \cdot K_6 \oplus 0 \cdot K_7 =$$
$$= x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2.$$

Здесь K_i $(i = 0,\ \ldots,\ 7)$ – попарно различные монотонные (не содержащие отрицаний переменных) элементарные конъюнкции над множеством $\tilde{X}^3 = \{000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111\}$: $K_0 = 1$, $K_1 = x_3$, $K_2 = x_2$, $K_3 = x_2 x_3$, $K_4 = x_1$, $K_5 = x_1 x_3$, $K_6 = x_1 x_2$, $K_7 = x_1 x_2 x_3$. □

4. Задачи и упражнения

5.1. Представить в виде совершенной д. н. ф. следующие функции:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \to x_3$; 2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 x_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (1000\ 1111)$;….4) $f(\tilde{x}^3) = (0111\ 1000)$;

5) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \to x_2 x_3 x_4)(x_3 \to x_1 \bar{x}_2)$;….6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \to \bar{x}_2 x_4)$;

7) $f(\tilde{x}^4) = (1000\ 0111\ 0011\ 0001)$;….8) $f(\tilde{x}^4) = (1100\ 1000\ 1001\ 0011)$.

5.2. Представить в виде совершенной к. н. ф. следующие функции:

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$; 2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \downarrow x_2$;

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3$; 4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \to x_2 x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (0010\ 1110)$;….6) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \to (x_2 \to x_3 x_4)$;

7) $f(\tilde{x}^4) = (0110\ 1110\ 1110\ 0101)$.

5.3. С помощью эквивалентных преобразований построить д. н. ф. для функций:

1) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 x_2 \vee x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1x_2\oplus x_3)(x_1x_3\to x_2)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\sim x_2)\vee(x_1x_3\oplus(x_2\to x_3))$;

4) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\downarrow x_2x_3)\downarrow((\bar{x}_1\mid x_2)\downarrow x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=\overline{x_1\to(x_2\to x_3)}\oplus(x_1\mid(x_2\oplus x_3))$;

6) $f(\tilde{x}^3)=\overline{x_1\bar{x}_2\vee x_3}\sim(x_1\to x_2\bar{x}_3)$;

7) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2\bar{x}_3)(x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\overline{x_1x_2}\vee x_3)$;

8) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4)((\bar{x}_1\vee x_4)\oplus x_2x_3)\vee\bar{x}_2(x_3\vee\overline{x_1\bar{x}_4})$;

9) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\to x_2)(x_2\to\bar{x}_3)(x_3\to x_1\bar{x}_4)$;

10) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\downarrow x_2)((x_2\mid x_3)\vee x_1\bar{x}_4)(x_1\downarrow(x_3\mid x_4))$.

5.4. С помощью эквивалентных преобразований построить к. н. ф. для функций:

1) $f(\tilde{x}^2)=((x_1\to x_2)\oplus(\bar{x}_1\mid x_2))(x_1\sim x_2(x_1\to x_2))$;

2) $f(\tilde{x}^2)=\overline{x_1x_2}\vee(x_1\downarrow(x_2\vee(\bar{x}_1\to x_2)))$;

3) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2x_3\vee(x_1\to x_2x_3)$;

4) $f(\tilde{x}^3)=(\bar{x}_1\to(x_2\to x_3))\oplus x_1\bar{x}_2x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\sim(x_2\to x_3))\vee(x_2\to x_1x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^4)=\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_3x_4\vee x_1\bar{x}_4)$;

7) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\sim x_2)\vee(x_1x_3\sim x_4)\to x_2\bar{x}_3$.

5.5. Для следующих функций построить из заданной д. н. ф. ее совершенную д. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee\bar{x}_3$; 2) $f(\tilde{x}^3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_3$;

3) $f(\tilde{x}^3)=x_1\vee x_2x_3\vee\bar{x}_2\bar{x}_3$; 4) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\vee x_2x_3\vee\bar{x}_3$;

5) $f(\tilde{x}^3)=x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_3$; 6) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_3\bar{x}_4$;

7) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_2\vee\bar{x}_2x_4\vee x_3\bar{x}_4$; 8) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee x_2x_3\vee\bar{x}_1x_4$.

5.6. Для следующих функций построить из заданной к. н. ф. ее совершенную к. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)x_3$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_3)(x_2 \vee x_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee x_3)\overline{x}_3$;

4) $f(\tilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2(\overline{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)x_2(x_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)$;

7) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_3 \vee x_4)$;

8) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2x_3(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$.

5.7. Для следующих функций перейти от заданной к. н. ф. к д. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = x_1(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_2 \vee \overline{x}_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

6) $f(\tilde{x}^4) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)$;

7) $f(\tilde{x}^4) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)$.

5.8. Для следующих функций перейти от заданной д. н. ф. к к. н. ф.:

1) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3$; 2) $f(\tilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3$;

3) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$; 4) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3$; 6) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;

7) $f(\tilde{x}^4) = x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_4$; 8) $f(\tilde{x}^4) = x_1 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4$.

5.9. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^3)=x_1(x_2\vee\bar{x}_3)$; 2) $f(\tilde{x}^3)=x_1\to(x_2\to x_3)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(0000\ 0111)$; 4) $f(\tilde{x}^3)=(1000\ 1110)$;

5) $f(\tilde{x}^4)=(1000\ 0000\ 0000\ 0001)$; 6) $f(\tilde{x}^4)=(0000\ 1000\ 1001\ 0000)$.

5.10. Используя эквивалентности, построить полиномы Жегалкина для следующих функций:

1) $f(\tilde{x}^2)=x_1\to(x_2\to\bar{x}_1x_2)$; 2) $f(\tilde{x}^2)=x_1(x_2\sim x_1\bar{x}_2)$

3) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\downarrow x_2)\,|\,(x_2\downarrow x_3)$; 4) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2)(x_2\,|\,x_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=x_1\downarrow((x_1\to\bar{x}_2)\vee\bar{x}_3)$;

6) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\to(x_2\to x_3))((x_1\to x_2)\to x_3)$;

7) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\oplus x_2)\vee(x_2\downarrow x_3)$;

8) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\to x_2)\to(x_3\to x_1x_4)$;

9) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee(x_2\to((x_3\to x_2)\to x_4))$;

10) $f(\tilde{x}^4)=(x_1\vee x_2\vee x_3)x_4\vee x_1x_2x_3$.

5.11. Построить полиномы Жегалкина для следующих функций, преобразуя их векторы значений:

1) $f(\tilde{x}^2)=(1000)$; 2) $f(\tilde{x}^2)=(0010)$;

3) $f(\tilde{x}^3)=(0111\ 0011)$; 4) $f(\tilde{x}^3)=(1010\ 1110)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=(1000\ 0100)$; 6) $f(\tilde{x}^4)=(1010\ 1010\ 1011\ 0110)$;

7) $f(\tilde{x}^4)=(0000\ 0100\ 0110\ 0111)$; 8) $f(\tilde{x}^4)=(0100\ 0000\ 0001\ 0001)$.

§ 6. Полнота и замкнутость систем булевых функций

Система функций $B=\{f_1, f_2, ..., f_r\}\subseteq P_2$ называется (*функционально*) *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде формулы через функции этой системы.

Примеры полных систем.

1°. Система $B = P_2$ – множество всех булевых функций.

2°. Система $B = \{\bar{x},\ x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2\}$.

Очевидно, что не каждая система является полной, например, система $B = \{0,\ 1\}$ не полная. Следующая теорема позволяет сводить вопрос о полноте одних систем к вопросу о полноте других систем.

Теорема 2.4. *Пусть даны две системы функций из* P_2

$$B_1 = \{f_1,\ f_2,\ ...,\ f_r\},\ B_2 = \{g_1,\ g_2,\ ...,\ g_s\},$$

относительно которых известно, что система B_1 *полна и каждая ее функция выражается в виде формулы через функции системы* B_2. *Тогда система* B_2 *является полной.*

Опираясь на эту теорему, можно установить полноту еще ряда систем и тем самым расширить список примеров полных систем.

3°. Система $B = \{\bar{x},\ x_1 \& x_2\}$ является полной. Для доказательства возьмем за систему B_1 систему 2°, а за систему B_2 – систему 3° и используем тождество $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \& \bar{x}_2}$.

4°. Система $B = \{\bar{x},\ x_1 \vee x_2\}$ является полной. Доказательство аналогично предыдущему, либо через принцип двойственности.

5°. Система $B = \{x_1 | x_2\}$ является полной. Для доказательства возьмем за систему B_1 систему 3°, а за систему B_2 – систему 5°. Тогда

$$\bar{x}_1 = x_1 | x_1,\ x_1 \& x_2 = \overline{x_1 | x_2} = (x_1 | x_2) | (x_1 | x_2).$$

6°. Система $B = \{0,\ 1,\ x_1 \& x_2,\ x_1 \oplus x_2\}$ является полной. Для доказательства возьмем за систему B_1 систему 3), а за систему B_2 – систему 6). Имеем

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$

С понятием полноты тесно связано понятие замыкания и замкнутого класса.

Пусть $M \subseteq P_2$. *Замыканием* M (обозначается $[M]$) называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул через функции множества M. Замыкание инвариантно относительно операций введения и удаления фиктивных переменных.

Свойства замыкания:

1) $[M] \supseteq M$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) если $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$;

4) $[M_1 \cup M_2] \supseteq [M_1] \cup [M_2]$;

5) $[M_1 \cap M_2] \subseteq [M_1] \cap [M_2]$.

Класс (множество) M называется (*функционально*) *замкнутым*, если $[M] = M$. В терминах замыкания и замкнутого класса можно дать другое определение полноты, эквивалентное исходному: M – полная система в P_2, если $[M] = P_2$. Полное в P_2 множество M называется *базисом*, если для всякого собственного подмножества $M^{'} \subset M$ выполнено $[M^{'}] \neq P_2$. Множество M называется *предполным* классом в P_2, если $[M] \neq P_2$, а для любой функции $f \in P_2 \backslash M$ выполняется равенство $[M \cup \{f\}] = P_2$.

Функции f_1 и f_2 называются *конгруэтными*, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Например, функции $x\bar{y}$ и $y\bar{z}$ конгруэнтны, а функции xy и zz не являются конгруэнтными. При рассмотрении вопросов, связанных с замкнутыми классами, бывает удобно указывать по одному представителю из множества попарно конгруэнтных функций. Например, класс $\{x, y, z, ...\}$, состоящий из всех тождественных функций, можно обозначить через $\{x\}$.

Задачи и упражнения

6.1. Построить $[M]$ для функций, зависящих от переменных x_1, x_2:

1) $M=\{\bar{x}\}$, 2) $M=\{x_1\oplus x_2\}$, 3) $M=\{0,\ \bar{x}\}$; 4) $M=\{x_1x_2\}$;

5) $M=\{x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1\}$; 6) $M=\{\bar{x}_1\vee x_2\}$;

7) $M=\{0,\ x_1\sim x_2\}$, 8) $M=\{x_1x_2,\ x_1\oplus x_2\}$;

9) $M=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\}$; 10) $M=\{x_1x_2\vee x_2\bar{x}_3\vee \bar{x}_3x_1\}$;

11) $M=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1\}$; 12) $M=\{x_1\bar{x}_2\}$;

13) $M=\{\bar{x}_1\bar{x}_2\vee \bar{x}_2x_3\vee x_3\bar{x}_1\}$; 14) $M=\{x_1\vee x_2\vee x_3\}$.

6.2. Показать, что $f\in[M]$, выразив f формулой над множеством M:

1) $f=\bar{x},\ M=\{0,\ x\to y\}$; 2) $f=x\oplus y,\ M=\{x\downarrow y\}$;

3) $f=x,\ M=\{x\oplus y\}$; 4) $f=x\oplus y\oplus z,\ M=\{x\sim y\}$;

5) $f=0,\ M=\{xy\oplus z\}$; 6) $f=x,\ M=\{xy\}$;

7) $f=x\vee y,\ M=\{\bar{x}\vee\bar{y}\}$; 8) $f=x,\ M=\{xy\vee yz\vee zx\}$;

9) $f=xy,\ M=\{xy\oplus z\}$; 10) $f=xyz\vee t(x\vee y\vee z),\ M=\{xy\vee yz\vee zx\}$;

11) $f=x\oplus y\oplus z,\ M=\{\bar{x},\ xy\vee yz\vee zx\}$; 12) $f=x\vee y,\ M=\{x\to y\}$;

13) $f=x\oplus y,\ M=\{x\bar{y},\ x\vee\bar{y}\}$; 14) $f=xy,\ M=\{x\vee y,\ x\oplus z\}$.

6.3. Выписать все попарно некогруэнтные функции $f(x^3)$, принадлежащие замыканию множества M:

1) $M=\{1,\ \bar{x}\}$; 2) $M=\{xy\}$; 3) $M=\{x\sim y\}$;

4) $M=\{xy\vee yz\vee zx\}$; 5) $M=x\oplus y\oplus z\oplus 1$;

6) $M=\{x\vee y\vee z\}$, 7) $M=\{x\to y\}$; 8) $M=\{xy\vee z\}$;

9) $M=\{x\bar{y}\}$; 10) $M=\{x(x\vee\bar{y})(\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{z}\vee x)\}$.

6.4. Из полной для класса $[M]$ системы выделить базис:

1) $M=\{0,\ 1,\ \bar{x}\}$; 2) $M=\{x\oplus y,\ x\sim y,\ 1\}$;

2) $M=\{x,\ x\oplus y,\ x\oplus y\oplus z\}$; 4) $M=\{xy,\ x\vee y,\ xy\vee z\}$;

5) $M=\{x\vee y,\ x\to y\}$; 6) $M=\{x\bar{y},\ xy\}$;

7) $M=\{x\oplus y\oplus z,\ x\bar{y}\vee\bar{y}\bar{z}\vee\bar{z}x,\ \bar{x}\}$; 8) $M=\{1,\ x\sim y,\ x\oplus y\oplus z\oplus 1\}$;

9) $M=\{xy,\ xy\vee\bar{x}z\}$; 10) $M=\{x,\ x\vee y,\ x\vee y\vee z,\ xy\vee z\}$.

6.5. Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что множество M является полной системой в P_2:

1) $M=\{x\downarrow y\}$; 2) $M=\{xy\oplus z,\ (x\sim y)\oplus z\}$;

3) $M=\{x\to y,\ \overline{x\oplus y\oplus z}\}$; 4) $M=\{\ x\to y,\ f=(0101\,1110)\}$;

5) $M=\{0,\ xy\vee yz\vee zx,\ x\oplus y\oplus 1\}$; 6) $M=\{x\sim y,\ x\oplus y,\ xy\oplus z\}$;

7) $M=\{xy\vee\overline{xy},\ f=(01111110)\}$;

8) $M=\{\ xy\oplus zt\oplus 1,\ f=(1011\ 0110)\}$;

9) $M=\{0,\ 1,\ x\oplus y\oplus z,\ xy\oplus zx\oplus zy\}$; 10) $B=\{\bar{x}\cdot\bar{y}\vee z,\ x\oplus y\}$.

§7. Важнейшие замкнутые классы булевых функций

1. Классы функций, сохраняющих константы. Функция $f(\tilde{x}^n)$ *сохраняет константу* 0 (*константу* 1), если $f(0,\ 0,\ ...,\ 0)=0$ (соответственно, если $f(1,\ 1,\ ...,\ 1)=1$). Множество всех булевых функций алгебры логики, сохраняющих константу 0 (константу 1), обозначается через T_0 (соответственно через T_1). Таким образом,

$$T_0=\{f\in P_2\mid f(0,\ 0,\ ...,\ 0)=0\},\ T_1=\{f\in P_2\mid f(1,\ 1,\ ...,\ 1)=1\}.$$

Каждое из множеств T_0, T_1 является замкнутым и предполным в P_2 классом, причем $|T_0|=|T_1|=(1/2)\cdot 2^{2^n}=2^{2^n-1}$.

П р и м е р 2.15. Доказать, что $[\{xy,\ x\oplus y\}]=T_0$.

Р е ш е н и е. Полином любой функции $f\in T_0$ не содержит 1 в качестве слагаемого. Но всякий такой полином может быть получен с помощью суперпозиции из функций xy, $x\oplus y$.

2. Класс самодвойственных функций. Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной*, если $f(\tilde{x}^n)=f^*(\tilde{x}^n)$, т. е. имеет место тождество

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n).$$

Из этого определения следует, что функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любых противоположных наборах значений переменных она принимает противоположные значения. Класс самодвойственных функций обозначается через S:

$$S = \{ f(\tilde{x}^n) \in P_2 \mid f(\tilde{x}^n) = f^*(\tilde{x}^n) \}.$$

Самодвойственная функция определяется своими значениями на первой половине строк таблицы истинности, поэтому $|S| = 2^{(1/2)\cdot 2^n} = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}$.

Далее самодвойственную функцию $f = xy \vee yz \vee zx$ будем обозначать через $m(x, y, z)$.

Справедливо следующее утверждение, называемое леммой о несамодвойственной функции: *если функция $f(\tilde{x}^n)$ не является самодвойственной, то, подставляя на места ее переменных функции x и $\overline{x}$, можно получить константу.*

Если A – некоторое множество функций из P_2, то через A^* обозначим множество всех функций, двойственных к функциям из множества A. Множество A^* называется *двойственным к множеству* A. Если $A^* = A$, то множество A называется *самодвойственным*.

Пример 2.16. Определить, какие из переменных несамодвойственной функции $f(\tilde{x}^3)$, задаваемой вектором $\tilde{\alpha}_f = (0110\ 1101)$, следует заменить на x, а какие на $\overline{x}$ с тем, чтобы получить константу.

Решение. Поскольку $f(\tilde{x}^3) \notin S$, то существует пара противоположных наборов, на которых функция принимает одно и то же значение. В данном случае такими наборами являются (010) и (101), причем

$f(010)=f(101)=1$. Если заменить x_1 и x_3 на x, а x_2 на $\overline{x}$ (или x_1 и x_3 на $\overline{x}$, а x_2 на x, то получим $f(x,\, \overline{x},\, x)=f(\overline{x},\, x,\, \overline{x})=1$. ▯

3. Класс монотонных функций. Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной*, если $\forall \tilde{\alpha}^n,\, \tilde{\beta}^n \in B^n:\ \tilde{\alpha}^n \preccurlyeq \tilde{\beta}^n \Rightarrow f(\tilde{\alpha}^n)\le f(\tilde{\beta}^n)$. В противном случае $f(\tilde{x}^n)$ называется *немонотонной*. Множество всех монотонных булевых функций обозначается через M. Множество M является замкнутым и предполным в P_2 классом.

Справедливо утверждение, называемое леммой о немонотонной функции: *если* $f(\tilde{x}^n)\notin M$*, то, подставляя на места ее переменных константы 0 и 1 и функцию* x*, можно получить функцию* $\overline{x}$.

Вершина $\tilde{\alpha}\in B^n$ называется *нижней единицей* (*верхним нулем*) *монотонной функции* $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\alpha})=1$ (соответственно $f(\tilde{\alpha})=0$) и для всякой вершины $\tilde{\beta}\prec\tilde{\alpha}$ вытекает, что $f(\tilde{\beta})=0$ (соответственно из $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ вытекает, что $f(\tilde{\beta})=1$).

Проверку на монотонность функции $f(\tilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\tilde{\alpha}_f=\left(\alpha_0,\, \alpha_1,\, ...,\, \alpha_{2^n-1}\right)$, можно осуществить следующим образом. Разделим вектор $\tilde{\alpha}_f$ на две равные части $\tilde{\alpha}_{f_0^1}=\left(\alpha_0,\, \alpha_1,\, ...,\, \alpha_{2^{n-1}-1}\right)$ и $\tilde{\alpha}_{f_1^1}=\left(\alpha_{2^{n-1}},\, \alpha_{2^{n-1}-1},\, ...,\, \alpha_{2^n-1}\right)$. Если отношение $\tilde{\alpha}_{f_0^1}\preccurlyeq\tilde{\alpha}_{f_1^1}$ не выполнено, то $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной. В противном случае каждый из векторов $\tilde{\alpha}_{f_\sigma^1}$ ($\sigma\in\{0,\, 1\}$ вновь разделим на две равные части $\tilde{\alpha}_{f_{\sigma,0}^{1,2}}$ и $\tilde{\alpha}_{f_{\sigma,1}^{1,2}}$. Если не выполнено хотя бы одно из отношений $\tilde{\alpha}_{f_{\sigma,0}^{1,2}}\preccurlyeq\tilde{\alpha}_{f_{\sigma,1}^{1,2}}$, то $f(\tilde{x}^n)\notin M$. В противном случае вновь делим векторы пополам и т.д. Если отношение предшествования выполняется для всех пар векторов, то $f(\tilde{x}^n)$ монотонна.

П р и м е р 2.17. По вектору значений $\tilde{\alpha}_f = (1001\,1111)$ выяснить, является ли функция f монотонной.

Р е ш е н и е. Разделим вектор $\tilde{\alpha}_f$ на две равные части. При этом условие немотонности не нарушается, так как $1001 \le 1111$. На втором шаге: 10 и 01 не сравнимы, $11 \le 11$. Монотонность нарушена □

Для доказательства монотонности функции $f(\tilde{x}^n)$, которая задана формулой, можно с помощью эквивалентных преобразований представить функцию с помощью формулы, содержащей лишь связки & и $\vee$ (или другие монотонные операции).

П р и м е р 2.18. Проверить, является ли функция $f = x \vee \overline{x}y \vee \overline{x} \cdot \overline{y}z$ монотонной.

Р е ш е н и е. Имеем

$$x \vee \overline{x}y \vee \overline{x} \cdot \overline{y}z = x \vee \overline{x}(y \vee \overline{y}z) = x \vee \overline{x}(y \vee z) = x \vee y \vee z\,.$$

Функция f монотонна. □

Установить немонотонность функции $f(\tilde{x}^n)$ можно также, получив из нее немонотонную функцию одной переменной (отрицание) путем замены остальных переменных константами.

4. Класс линейных функций. Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *линейной*, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени:

$$f(x_1,\ ...,\ x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n\,. \tag{2.10}$$

Множество всех линейных функций обозначается через L. Из представления (2.10) вытекает, что $|L| = 2^{n+1}$. Множество L является замкнутым и предполным в P_2 классом.

Справедливо утверждение, называемое *л е м м о й о н е л и н е й н о й ф у н к ц и и*: *если $f \notin L$, то, подставляя на места ее переменных функции 0, 1, x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$, можно получить xy или $\overline{x} \cdot \overline{y}$.*

Если $f \notin L$, то функция f называется *нелинейной*.

П р и м е р 2.19. Заменить в векторе $\tilde{\alpha} = (-110---0)$ прочерки символами 0 и 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом.

Р е ш е н и е. Запишем полином Жегалкина для $f(\tilde{x}^3)$ в общем виде:

$$f(\tilde{x}^3) = \beta_0 \oplus \beta_1 x_1 \oplus \beta_2 x_2 \oplus \beta_3 x_3 \oplus \beta_4 x_1 x_2 \oplus \beta_5 x_1 x_3 \oplus \beta_6 x_2 x_3 \oplus \beta_7 x_1 x_2 x_3.$$

Искомый вектор: $\tilde{\alpha} = (\alpha_0 110 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 0)$. Составим систему уравнений:

$$f(000) = \beta_0 = \alpha_0,$$

$$f(001) = \beta_0 \oplus \beta_3 = 1,$$

$$f(010) = \beta_0 \oplus \beta_2 = 1,$$

$$f(011) = \beta_0 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_6 = 0,$$

$$f(100) = \beta_0 \oplus \beta_1 = \alpha_4,$$

$$f(101) = \beta_0 \oplus \beta_3 \oplus \beta_5 = \alpha_5,$$

$$f(110) = \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_4 = \alpha_6,$$

$$f(111) = \beta_0 \oplus \beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 0.$$

Если принять, что $\beta_0 = 1$, то из второго, третьего и четвертого уравнений следует, что $\beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_6 = 1$ Но $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$ (в силу линейности функции), а $\beta_2 = \beta_3 = 1$, так как функция $f(\tilde{x}^3)$ существенно зависит от переменных x_2 и x_3 ($f(001) \neq f(011)$ и $f(010) \neq f(011)$). Следовательно, $\beta_0 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = 1$, $\beta_6 = 0$. Из шестого уравнения $\alpha_5 = 1$, а из восьмого – $\beta_1 = 0$. Далее из пятого и седьмого уравнений последовательно находим $\alpha_4 = 0$, $\alpha_6 = 1$. Таким образом, $\tilde{\alpha} = (0110\ 0110)$, а $f = x_2 \oplus x_3$. □

5. Задачи и упражнения

7.1. Выяснить, принадлежит ли функция f множеству $T_1 \setminus T_0$:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \to (x_1 \mid x_2 x_3) \downarrow ((x_2 \sim x_3) \to x_1)$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 x_2 \to x_3) \to ((x_1 \to x_2) \downarrow (x_3 \oplus x_1 x_2))$;

4) $f = m(x_1,\ x_2,\ x_3)$; 5) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1))$

6) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 \vee \overline{\bar{x}_1 x_2}\bar{x}_3$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (1000\ 01011)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0001\ 1011)$.

7.2. Доказать, что:

1) $[\{x \vee y,\ x \oplus y\}] = T_0$; 2) $[\{x \vee y,\ x \sim y\}] = T_1$;

3) $[\{xy,\ x \sim y\}] = T_1$; 4) $[\{xy \oplus z\}] = T_0$;

5) $[\{xy,\ x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \bigcap T_1$; 6) $[\{xy \oplus z \oplus t\}] = T_0 \bigcap T_1$;

7) $[\{x \oplus y\}] = L \bigcap T_0$; 8) $[\{x \sim y\}] = L \bigcap T_1$;

9) $[\{x \oplus y \oplus z\}] = L \bigcap S \bigcap T_0$.

10) $[\{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}] = L \bigcap S$;

11) $[\{xy,\ m(x,\ y,\ \bar{z})\}] = T_0 \bigcap T_1$;

12) $[\{m(x,\ y,\ z),\ x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \bigcap S$;

13) $[\{m(\bar{x},\ y,\ z),\}] = T_1 \bigcap S$;

14) $[\{x \vee y,\ m(x,\ \bar{y},\ \bar{z})\}] = T_0 \bigcap T_1$;

15) $[\{m(x,\ y,\ z),\ x \oplus y\}] = T_0$.

7.3. Выяснить, является ли множество A базисом в классе K:

1) $A = \{xy \sim z\},\ K = T_1$;

2) $A = \{xy \vee z\},\ K = T_0$;

3) $A = \{xy,\ x \sim y,\ x \vee y\},\ K = T_1$;

4) $A = \{x \vee y,\ x\bar{y}\},\ K = T_0$;

5) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ 0\},\ K = T_0 \bigcap L$;

6) $A = \{xy \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z\},\ K = T_0 \bigcap T_1$;

7) $A = \{(x \sim y) \sim z\},\ K = L \bigcap S \bigcap T_0$;

8) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ m(x,\ y,\ z)\},\ K = T_0 \bigcap T_1$;

9) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ m(x,\ \bar{y},\ z)\},\ K = T_0 \bigcap S$;

10) $A=\{xy,\ x\oplus y\oplus z,\ m(x,\ y,\ z)\},\ K=T_0\bigcap T_1$;

11) $A=\{x\sim m(x,\ y,\ t)\},\ K=T_1$;

12) $A=\{xy,\ m(x,\ y,\ \bar{z})\},\ K=T_0\bigcap T_1$.

7.4. В заданном векторе $\tilde{\alpha}$ заменить прочерки символами из множества {0, 1} так, чтобы получился вектор $\tilde{\alpha}_f$ значений некоторой функции f, образующей базис в K:

1) $\tilde{\alpha}=(----),\ K=T_0\bigcap L$; 2) $\tilde{\alpha}=(--------),\ K=L\bigcap S$;

3) $\tilde{\alpha}=(-110-11-),\ K=T_0$; 4) $\tilde{\alpha}=(----),\ K=T_1\bigcap L$;

5) $\tilde{\alpha}=(-0---0--),\ K=S\bigcap T_1$; 6) $\tilde{\alpha}=(-00-----),\ K=S$;

7) $\tilde{\alpha}=(-1101100110100-),\ K=T_0\bigcap T_1$;

8) $\tilde{\alpha}=(--1---- ---------),\ K=L\bigcap S$.

7.5. Доказать, что класс T_1 является предполным в P_2.

7.6. Доказать, что множество A является предполным в L:

1) $A=[\{0,\ \bar{x}\}]$; 2) $A=L\bigcap T_1$; 3) $A=T_0\bigcap T_1$; 4) $A=L\bigcap S$.

7.7. Выяснить, является ли множество A предполным в T_0:

1) $A=T_0\bigcap L$; 2) $A=T_0\bigcap S$; 3) $A=T_0\bigcap T_1$;

4) $A=[\{0,\ x\}]$; 5) $A=[\{xy,\ x\vee y\}]$.

7.8. Выяснить, является ли функция f самодвойственной:

1) $f=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1$; 2) $f=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1$;

3) $f=(x\vee\bar{y}\vee z)t\vee x\bar{y}z$; 4) $f(x_1\oplus x_2)$;

5) $f=\overline{(x\to y)\to xz}\to(y\to z)$; 6) $f=x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_3x_1\oplus x_2\oplus x_3$;

7) $f=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_3x_1$;

8) $f=(x_1\to x_2)\oplus(x_2\to x_3)\oplus(x_3\to x_1)\oplus x_3$;

9) $f=x_1x_2\oplus x_3(x_1\vee x_2)$; 10) $f=x_1\oplus x_2\oplus(x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1)$.

7.9. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная векторно:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1010)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1001)$; 3) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$;

4) $\tilde{\alpha}_f = (0110\ 0110)$; 5) $\tilde{\alpha}_f = (0100\ 1101)$;

6) $\tilde{\alpha}_f = (1100\ 1001\ 0110\ 1100)$; 7) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 0100\ 1011\ 0010)$;

8) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0101\ 0101\ 1010)$; 9) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0110\ 1001\ 0110)$;

10) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 0111\ 0001\ 1000)$.

7.10. Заменить прочерки в векторе $\tilde{\alpha}$ символами 0 и 1 так, чтобы получился вектор значений самодвойственной функции:

1) $\tilde{\alpha} = (1-0-)$; 2) $\tilde{\alpha} = (-01-)$; 3) $\tilde{\alpha} = (01--)$;

4) $\tilde{\alpha} = (0-0-0---)$; 5) $\tilde{\alpha} = (--01--11)$;

6) $\tilde{\alpha} = (-1-1-0-1)$; 7) $\tilde{\alpha} = (-10-0--1)$;

8) $\tilde{\alpha} = (1001----1111----)$; 9) $\tilde{\alpha} = (11--00--01--10--)$;

10) $\tilde{\alpha} = (------01--101100)$.

7.11. Определить, какие из переменных векторно заданных функций следует заменить на x, а какие на $\overline{x}$ с тем, чтобы получить константу:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1011\ 0110)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 1000)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 1000)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1100\ 1110)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (1000\ 1101\ 0010\ 1100)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0111\ 0001\ 0011\ 0001)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (0000\ 1111\ 0010\ 1111)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 1000\ 0110\ 1000)$.

7.12. Используя лемму о несамодвойственной функции, доказать, что S является предполным классом в P_2.

7.13. Выяснить, является ли множество A самодвойственным:

1) $A = \{0,\ 1,\ \overline{x}\}$; 2) $A = \{0,\ x\}$; 3) $A = \{x \oplus y,\ x \sim y,\ x \oplus y \oplus z\}$;

4) $A = \{x \to y,\ x \vee \overline{y}\}$; 5) $A = \{x \to y,\ x\overline{y}\}$;

6) $A = \{\overline{xy},\ \overline{x} \vee \overline{y},\ m(x,\ y,\ z)\}$; 7) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ \overline{x}\}$;

8) $A = [\{x \to y\}]$; 9) $A = [\{m(x,\ y,\ z)\}]$; 10) $A = [\{1,\ x \oplus y\}]$;

11) $A = [\{1,\ x \oplus y,\ xy\}]$; 12) $A = [\{1,\ x\overline{y}\}]$;

13) $A=[\{x\vee y,\ x\oplus y\}]$; 14) $A=[\{x\oplus y\}]$; 15) $A=[\{xy\oplus z\oplus 1\}]$.

7.14. По вектору значений $\tilde{\alpha}_f$ выяснить, является ли функция f монотонной:

1) $\tilde{\alpha}_f=(0110)$; 2) $\tilde{\alpha}_f=(0011\,0111)$;

3) $\tilde{\alpha}_f=(0101\,0111)$; 4) $\tilde{\alpha}_f=(0110\,0110)$;

5) $\tilde{\alpha}_f=(0001\,0111)$; 6) $\tilde{\alpha}_f=(0101\,0011)$;

7) $\tilde{\alpha}_f=(0010\,0011\,0111\,1111)$; 8) $\tilde{\alpha}_f=(0001\,0101\,0111\,1111)$.

7.15. Проверить, является ли функция f монотонной:

1) $f(\tilde{x}^2)=(x_1\oplus x_2)\cdot(x_1\sim x_2)$; 2) $f(\tilde{x}^2)=x_1\to(x_2\to x_1)$;

3) $f(\tilde{x}^2)=x_1\to(x_1\to x_2)$;

4) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;

6) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\oplus x_2)x_1x_3$;

7) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_3x_1$; 8) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\oplus x_2x_3\oplus x_3x_1\oplus x_1$.

7.16. Для немонотонной функции f указать два соседних набора $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ значений переменных таких, что $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})$:

1) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1x_2$; 2) $f(\tilde{x}^3)=x_1\oplus x_2\oplus x_3$;

3) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\oplus x_3$; 4) $f(\tilde{x}^3)=x_1\vee x_2\bar{x}_3$;

5) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_3\oplus x_2x_4$; 6) $f(\tilde{x}^4)=(x_1x_2x_4\to x_2x_3)\oplus x_4$.

7.17. Найти число нижних единиц $e(f)$ и верхних нулей $n(f)$ монотонной функции f:

1) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1$; 2) $f(\tilde{x}^2)=x_1\vee x_2$;

3) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_2x_3\vee x_4(x_1\vee x_2\vee x_3)$;

4) $f(\tilde{x}^{2k})=(x_1\vee x_2)\vee(x_3\vee x_4)...(x_{2k-1}\vee x_{2k})$;

5) $f(\tilde{x}^{3k}) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee (x_4 \vee x_5 \vee x_6)...(x_{3k-2} \vee x_{3k-1} \vee x_{3k})$.

7.18. Представив функцию f полиномом Жегалкина, выяснить, является ли она линейной:

1) $f(\tilde{x}^2) = x_2 \to x_1$; 2) $f(\tilde{x}^2) = \overline{x_1 \to x_2} \oplus \bar{x}_1 x_2$;

3) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \bar{x}_2 (x_1 \sim x_2)$; 4) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_3$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) x_3 \vee \bar{x}_3 (x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2)(x_2 \to x_1)) \sim x_3$;

7) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2$;

8) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \bar{x}_3 \oplus \bar{x}_1 x_2$;

9) $f(\tilde{x}^3) = m(x_1,\ x_2,\ x_3) \oplus \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \oplus x_1 x_2 x_3$;

10) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 x_3) \oplus x_1 x_2 x_3$;

11) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 x_3) \oplus \bar{x}_1 x_2 x_3$;

12) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 (x_2 \oplus x_3)$;

13) $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \oplus x_1 (x_2 \vee x_3)$;

14) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3 \oplus \bar{x}_1 x_2 x_3)$;

15) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \sim x_1 x_2 \bar{x}_3) \sim (x_1 \bar{x}_2 x_3 \sim \bar{x}_1 x_2 x_3)$.

7.19. Выяснить, является ли линейная функция f, заданная векторно:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1001)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1101)$; 3) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$;

4) $\tilde{\alpha}_f = (1100\ 0011)$; 5) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0101)$;

6) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0110)$; 7) $\tilde{\alpha}_f = (0110\ 1001)$;

8) $\tilde{\alpha}_f = (1100\ 1001\ 0110\ 1001)$; 9) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0110\ 0110\ 1001)$.

10) $\tilde{\alpha}_f = (0110\ 1001\ 0110\ 1001)$; 11) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0101\ 1001\ 1100)$;

12) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0101\ 0101\ 1010)$; 13) $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0110\ 0110\ 0101)$;

14) $\tilde{\alpha}_f = (0011\ 1100\ 1100\ 0011)$; 15) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 1001\ 0110\ 0110)$.

7.20. Заменить в векторе $\tilde{\alpha}$ прочерки символами 0 и 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом:

1) $\tilde{\alpha} = (10-1)$; 2) $\tilde{\alpha} = (0-11)$; 3) $\tilde{\alpha} = (-001--1-)$;

4) $\tilde{\alpha} = (1-101---)$; 5) $\tilde{\alpha} = (-0-1--00)$;

6) $\tilde{\alpha} = (11-0---1)$; 7) $\tilde{\alpha} = (1--11-0-)$;

8) $\tilde{\alpha} = (--10----0--1-110)$;

9) $\tilde{\alpha} = (1-----------0-110)$;

10) $\tilde{\alpha} = (--10----0--1-110)$;

11) $\tilde{\alpha} = (-1-------00-1-1--)$.

12) $\tilde{\alpha} = (---1-11--11-1-0-)$.

7.21. Подставляя на места переменных нелинейной функции f функции из множества $\{0,\ 1,\ x,\ y\}$, получить хотя бы одну из функций xy, $x\bar{y}$, $\bar{x}\cdot\bar{y}$:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3x_1$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (0110\ 0111)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 0101)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1100\ 1110)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 1111\ 1100\ 1111)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0111\ 1111\ 1110\ 1110)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (1111\ 0101\ 1111\ 1101)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0111\ 1011\ 1111\ 1110)$;

9) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0111\ 1111\ 1010)$; 10) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 1001\ 1001\ 0111)$;

11) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$;

12) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)$.

7.22. Выяснить, можно ли путем подстановки функций $0,\ 1,\ x,\ y,\ \bar{x},\ \bar{y}$ на места переменных функций f получить функцию xy:

1) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \to x_2$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 1000)$; 3) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$;

4) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 1011)$; 5) $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0111)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 0110)$;

7) $f(\tilde{x}^3)=x_1\to(x_2\to x_3)$; 8) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2x_3)\oplus\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$;

9) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\vee x_2\bar{x}_3\vee x_3\bar{x}_1$. 10) $\tilde{\alpha}_f=(1001\,1010)$;

11) $\tilde{\alpha}_f=(1001\,0110\,0110\,1001)$; 12) $\tilde{\alpha}_f=(1110\,1001\,1001\,0111)$;

13) $\tilde{\alpha}_f=(1101\,1110\,0110\,1011)$; 14) $\tilde{\alpha}_f=(1100\,0011\,0011\,1100)$;

15) $\tilde{\alpha}_f=(0111\,1011\,1111\,1100)$.

7.23. Доказать, что система A полна в L. Выяснить, является ли система A базисом в L:

1) $A=\{1,\ x_1\oplus x_2\}$; 2) $A=\{0,\ x_1\sim x_2\}$;

3) $A=\{0,\ 1,\ x_1\oplus x_2\oplus x_3\}$; 4) $A=\{x\oplus 1,\ x_1\oplus x_2\}$;

5) $A=\{x_1\oplus x_2,\ x_1\sim x_2\}$; 6) $A=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3,\ x\oplus 1,\ 0\}$;

7) $A=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1,\ x_1\sim x_2\}$; 8) $A=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_4,\ x\oplus 1\}$;

9) $A=\{x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1,\ 0\}$; 10) $A=\{x_1\oplus x_2,\ x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1,\ 1\}$.

§8. Полнота и замкнутые классы. Теорема Поста

В P_2 справедлив следующий критерий полноты.

Теорема 2.5 (Э. Пост). *Система $A\subset P_2$ полна в P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов $T_0,\ T_1,\ S,\ M$ и L.*

Функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *шефферовой* (или *обобщенной функцией Шеффера*), если она образует базис в P_2.

Для исследования полноты системы функций удобно пользоваться *критериальной* таблицей, в которой столбцы соответствуют пяти предполным классам в P_2, а строки – функциям исследуемой системы. На пересечении строки таблицы, соответствующей функции f, и столбца, соответствующего классу K, ставится знак плюс, если $f\in K$, и минус, если

$f \notin K$. Для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце содержался хотя бы один знак минус.

Пример 2.20. Исследовать полноту системы функций

$$A = \{ f_1 = x \to y,\ f_2 = \overline{x} \to yz \}.$$

Решение. Составим критериальную таблицу:

Таблица 2.4

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	–	+	–	–	–
f_2	+	+	–	+	–

Система A целиком входит в класс T_1, следовательно, она не полна. □

Пример 2.21. Исследовать полноту системы

$$A = (S \cap M) \cup (L \setminus M).$$

Решение. Используем аналог критериальной таблицы, в котором строки соответствуют не отдельным функциям, а подмножествам системы A. Разобьем систему A на подмножества $A_1 = S \cap M$, $A_2 = L \setminus M$ и исследуем принадлежность функций из этих подмножеств предполным классам.

Пусть $f \in A_1$. Тогда $f \in S$ и $f \in M$. Из первого условия следует, что f тождественно не равна константе, а тогда из второго условия – $f \in T_0 \cap T_1$.

Этим условиям удовлетворяет, например, функция $f_1 = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$, причем $f_1 \in (T_0 \cap T_1 \cap S \cap M) \setminus L$.

Пусть $f \in A_2$. Тогда $f \in L$ и $f \notin M$. Линейная функция имеет вид: $f = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$. Учитывая, что $f \notin M$, получим: если $a_0 = 0$, то при n четном $f \in T_0 \setminus T_1$, а при нечетном $f \in T_0 \cap T_1$; если $a_0 = 1$, то при n четном $f \in T_1 \setminus T_0$, а при нечетном $f \notin T_0 \cap T_1$.

Выберем две функции: $f_2^{(1)} = x_1 \oplus x_2 \in (L \bigcap T_0) \setminus (T_1 \bigcap S \bigcap M)$, $f_2^{(2)} = 1 \oplus x = \bar{x} \in (L \bigcap S) \setminus (T_0 \bigcap T_1 \bigcap M)$. Аналог критериальной таблицы имеет вид табл. 2.5:

Таблица 2.5

	T_0	T_1	S	M	L
A_1	+	+	+	+	–
A_2	–	–	–	–	+

Система A является полной в P_2. □

Пример 2.22. Из полной в P_2 системы

$$A = \{ f_1 = x \oplus y,\ f_2 = x \sim y,\ f_3 = x \oplus y \oplus z,\ f_4 = xy,\ f_5 = x \to y \}$$

выделить всевозможные базисы.

Решение. Составим критериальную таблицу 2.6, по которой построим к. н. ф. K, в которой элементарные дизъюнкции соответствуют столбцам таблицы и включают в качестве слагаемых символы тех функций, которые не входят в класс, соответствующий столбцу.

Таблица 2.6

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	+	–	–	–	+
f_2	–	+	–	–	+
f_3	+	+	+		+
f_4	+	+	–	+	–
f_5	–	+	–	–	–

В данном случае

$$K = (f_2 \vee f_5) f_1 (f_1 \vee f_2 \vee f_4 \vee f_5)(f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee f_5)(f_4 \vee f_5) = f_1 f_2 f_4 \vee f_1 f_5 .$$

Система A имеет два базиса: $Б_1 = \{f_1, f_2, f_4\}$ и $Б_2 = \{f_1, f_5\}$. □

Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Через $\Psi\left(f(\tilde{x}^n)\right)$ обозначим множество всех таких функций, которые получаются из $f(\tilde{x}^n)$ отождествлением переменных, причем $f(\tilde{x}^n) \notin \Psi\left(f(\tilde{x}^n)\right)$. Если $n < 2$, то по определению $\Psi\left(f(\tilde{x}^n)\right) = \varnothing$. Множество $\Psi\left(f(\tilde{x}^n)\right)$ называется *наследственной системой функции* $f(\tilde{x}^n)$. Функция называется *неприводимой*, если $\left[\Psi\left(f(\tilde{x}^n)\right)\right] \neq \left[f(\tilde{x}^n)\right]$. Базис $Б$ замкнутого класса K называется *простым*, если после замены произвольной функции $f \in Б$ ее наследственной системой получается система, неполная в K. Функция $f \notin K$ называется *простой относительно* K, если ее наследственная система $\Psi(f)$ содержится в K.

Задачи и упражнения

8.1. Выяснить, полна ли система функций:

1) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y,\ xy \vee yz \vee zx\}$;

2) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

3) $A = \{1,\ \bar{x},\ x(y \sim z) \oplus \bar{x}(y \oplus z),\ x \sim y\}$;

4) $A = \{x \sim y,\ x \oplus y,\ xy \oplus z\}$;

5) $A = \{\bar{x},\ x(y \sim z) \sim (y \vee z),\ x \oplus y \oplus z\}$;

6) $A = \{\bar{x},\ x(y \sim z) \sim yz,\ x \oplus y \oplus z\}$;

7) $A = \{xy(x \oplus y),\ xy \oplus x \oplus y,\ 1,\ xy \oplus yz \oplus zx\}$;

8) $A = \{xy(x \oplus z),\ 1\}$; 9) $A = \{x \to y,\ \bar{x} \to \bar{y}x,\ x \oplus y \oplus z,\ 1\}$;

10) $A = \{x \to y,\ x \oplus y\}$.

8.2. Выяснить, полна ли система векторно заданных функций:

1) $A = \{f_1 = (0110),\ f_2 = (1100\ 0011),\ f_3 = (1001\ 0110)\}$;

2) $A=\{f_1=(0111),\ f_2=(0101\,1010),\ f_3=(0111\,1110)\}$;

3) $A=\{f_1=(0111),\ f_2=(1001\,0110)\}$;

4) $A=\{f_1=(0101),\ f_2=(1110\,1000),\ f_3=(0110\,1001)\}$;

5) $A=\{f_1=(1001),\ f_2=(1110\ 1000)\}$;

6) $A=\{f_1=(11),\ f_2=(0111),\ f_3=(0011\,0111)\}$;

7) $A=\{f_1=(10),\ f_2=(0011\,0111)\}$;

8) $A=\{f_1=(11),\ f_2=(00),\ f_3=(0011\,0101)\}$;

9) $A=\{f_1=(1000\ 0001),\ f_2=(0111),\ f_3=(1011)\}$;

10) $A=\{f_1=(1000\ 0001),\ f_2=(0110),\ f_3=(1001)\}$.

8.3. Выяснить, полна ли система A:

1) $A=(S\cap M)\cup(L\setminus M)$; 2) $A=(L\cap T_1\cap T_0)\cup S\setminus(T_0\cup T_1)$;

3) $A=(L\cap T_1)\cup(S\cap M)$; 4) $A=(L\cap T_1)\cup(S\setminus T_0)$;

5) $A=(M\setminus T_0)\cup(L\setminus S)$; 6) $A=(M\setminus T_0)\cup(S\setminus L)$;

7) $A=(L\cap M)\cup(S\setminus T_0)$; 8) $A=((L\cap M)\setminus T_1)\cup(S\cap T_1)$;

9) $A=(M\setminus S)\cup(L\cap S)$; 10) $A=(M\cap S)\cup(T_0\setminus M)\cup(T_1\cap S)$.

8.4. Проверить, является ли система функций A базисом в P_2:

1) $A=\{x\to y,\ x\oplus y,\ x\vee y\}$; 2) $A=\{x\oplus y\oplus z,\ x\vee y,\ 0,\ 1\}$;

3) $A=\{x\oplus y\oplus yz,\ x\oplus y\oplus 1\}$;….4) $A=\{xy\vee z,\ xy\oplus z,\ xy\sim z\}$;

5) $A=\{x\oplus y\oplus z,\ x\oplus y\oplus z\oplus 1,\ xy\oplus yz\oplus zx,\ \overline{x}\}$;

6) $A=\{x\oplus y\oplus z,\ xy\oplus yz\oplus zx,\ 0,\ 1\}$; 7) $A=\{x\oplus y,\ x\sim yz\}$;

8) $A=\{xy\oplus yz\oplus zt,\ x\vee y,\ 0,\ 1\}$.

8.5. Из полной в P_2 системы A выделить всевозможные базисы:

1) $A=\{1,\ \overline{x},\ xy(x\oplus y),\ x\oplus y\oplus xy\oplus yz\oplus zx\}$;

2) $A=\{0,\ x\to y,\ x\oplus y,\ xy\sim xz\}$;

3) $A=\{0,\ 1,\ x\oplus y\oplus z,\ xy\oplus z,\ xy\oplus yz\oplus zx,\ x\vee y\}$;

4) $A=\{xy,\ x\vee y,\ xy\vee z,\ x\oplus y,\ x\to y\}$;

5) $A=\{xy\oplus z,\ x\oplus y\oplus 1,\ x\overline{y},\ \overline{x}\}$;

6) $A=\{xy\vee\overline{z},\ \overline{x},\ x\to y,\ 0,\ x\oplus zy\}$;

7) $A=\{xy,\ xy\vee z,\ x\oplus y,\ \overline{x},\ x\to y\}$;

8) $A=\{x\to y,\ x\oplus y,\ x\sim y,\ xy,\ x\oplus y\oplus z\}$.

8.6. Выяснить, можно ли расширить до базиса в P_2 множество A:

1) $A=\{x\sim y,\ m(x,\ y,\ z)\}$; 2) $A=\{x\}$; 3) $A=\{x\vee y,\ x\oplus y\}$;

4) $A=\{x\vee y,\ xy\}$; 5) $A=\{0,\ 1\}$; 6) $A=\{0,\ 1,\ x\vee y\}$;

7) $A=\{x\to y,\ x\vee y\}$; 8) $A=\{x\sim y,\ x\oplus y\}$.

8.7. Выяснить, полна ли система $A=\{f_1,\ f_2\}$:

1) $f_1\in S\setminus M,\ f_2\notin L\bigcup S,\ f_1\to f_2\equiv 1$;

2) $f_1\notin L\bigcup T_0\bigcup T_1,\ f_2\in M\bigcap L,\ f_1\to f_2\equiv 1$;

3) $f_1\notin T_0\bigcup L,\ f_2\notin S,\ f_1\to f_2\equiv 1$;

4) $f_1\in (S\bigcap L)\setminus T_0,\ f_2\in M\setminus(T_1\bigcap L),\ f_1\to f_2\equiv 1$.

8.8. Доказать, что если f монотонна и зависит существенно не менее чем от двух переменных, то система $\{0,\ \overline{f}\}$ полна в P_2.

8.9. Пусть $f_1,\ f_2,\ f_3$ – попарно различные функции переменных $x_1,\ x_2$, существенно зависящие от этих переменных. Доказать, что система $\{\overline{x},\ f_1,\ f_2,\ f_3\}$ полна в P_2.

8.10. Доказать, что если $f\notin T_0\bigcup T_1\bigcup S$, то f – шефферова функция.

8.11. С помощью суперпозиции из функции f можно получить константы 0 и 1. Доказать, что f – шефферова функция.

8.12. По функции f найти все попрано неконгруэнтные функции, входящие в ее наследственную систему $\Psi\left(f\right)$:

1) $f=xy$; 2) $f=xy\vee yz\vee zx$; 3) $f=xy\oplus z$; 4) $f=xy\vee z$;

5) $f=xy\vee zt$; 6) $f=xy\vee\overline{z}t$; 7) $f=x\oplus y\oplus z$;

8) $f=xy\oplus zy\oplus x\oplus y$; 9) $f=(x\vee y)\to y$;

10) $f = xyz \oplus xy \oplus x \oplus 1$.

8.13. Найти все попарно неконгруэнтные функции, простые относительно класса K:

1) $K = \{0\}$; 2) $K = T_0$; 3) $K = \{0, 1\}$: 4) $K = L$;

5) $K = L \bigcap S$; 6) $K = T_0 \bigcap T_1$; 7) $K = M$; 8) $K = S$;

9) $K = [0, 1, x]$; 10) $K = [0, 1, x, \overline{x}]$; 11) $K = [x, \overline{x}]$;

12) $K = T_0 \bigcap L \bigcap S$.

8.14. Выяснить, является ли функция f неприводимой:

1) $f = x \oplus y$; 2) $f = x \oplus y \oplus z$; 3) $f = x \oplus y \oplus z \oplus t$;

4) $f = xy \oplus yz \oplus zx$; 5) $f = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$; 6) $f = xyz \vee t(x \vee y \vee z)$;

7) $f = xy \vee z$; 8) $f = xy \vee zt$; 9) $f = xy \oplus yz \oplus zt$; 10) $f = xy \oplus z$.

8.15. Выяснить, является ли базис $Б$ класса K простым:

1) $Б = \{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$, $K = P_2$;

2) $Б = \{1, xy \oplus z\}$, $K = P_2$; 3) $Б = \{xy \vee z, 0, 1\}$, $K = M$;

4) $Б = \{xy \vee zt, 0, 1\}$, $K = M$; 5) $Б = \{xy \oplus x \oplus y, \overline{x}\}$, $K = P_2$;

6) $Б = \{x \oplus y, x \sim y\}$, $K = L$; 7) $Б = \{x \oplus y, x \sim y\}$, $K = P_2$;

8) $Б = \{x \oplus y \oplus z, 1\}$, $K = L \bigcap T_1$; 9) $Б = \{x \to y, x\overline{y}\}$, $K = P_2$;

10) $Б = \{x \sim y, m(x, y, z)\}$, $K = T_1$.

ГЛАВА 3

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Проблема минимизации булевых функций и ее геометрическая интерпретация

1. Проблема минимизации. Пусть задан алфавит переменных $X^n = \{x_1, ..., x_n\}$.

Определение. Выражение

$$K = x_{i_1}^{\sigma_1} \& ... \& x_{i_r}^{\sigma_r} \ (i_\nu \neq i_\mu \text{ при } \nu \neq \mu)$$

называется *элементарной конъюнкцией*, а число r – ее *рангом*. По определению считаем константу 1 элементарной конъюнкцией ранга 0. Число различных элементарных конъюнкций над алфавитом X^n равно 3^n.

Определение. Выражение

$$R = \bigvee_{i=1}^{s} K_i \ (K_i \neq K_j \text{ при } i \neq j),$$

где K_i $(i = 1, ..., s)$ – элементарная конъюнкция ранга r_1, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (*д. н. ф.*).

Из гл.2 следует: $\forall f(\tilde{x}^n) \in P_2 \exists R: f(\tilde{x}^n) = R$. Говорят, что функция f *представлена* в виде д. н. ф. или д. н. ф. *реализует* функцию f. Однако, представление функции в виде д. н. ф. не единственно, так как $|P_2| = 2^{2^n}$, а число д. н. ф. – 2^{3^n}. В связи с этим возникает возможность выбора более предпочтительной реализации функций алгебры логики. Для этого вводится индекс простоты $L(R)$, характеризующий сложность д. н. ф.

Приведем примеры индексов простоты для д. н. ф.

1) $L_Б(R)$ – число букв переменных, встречающихся в д. н. ф. R.

2) $L_к(R)$ – число элементарных конъюнкций, входящих в R.

3) $L_0(R)$ – число символов $\neg$, встречающихся в д. н. ф. R.

Определение. Д. н. ф., реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$ и имеющая минимальный индекс $L(R)$, называется *минимальной относительно* L (*м. д. н. ф. относительно* L).

Поскольку дальнейшее изложение связано главным образом с индексом простоты $L_Б(R)$, то минимальную д. н. ф. относительно этого индекса будем называть *минимальной д. н. ф.* (*м. д. н. ф.*). Д. н. ф., минимальную относительно индекса $L_к(R)$, будем называть *кратчайшей*.

Задача минимизации булевых функций состоит в построении минимальной д. н. ф. для произвольной функции алгебры логики $f(\tilde{x}^n)$.

2. Геометрическая интерпретация. *Гранью* единичного n-мерного куба B^n называется множество

$$B^{n,\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k} = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in B^n:\ \alpha_{i_1}=\sigma_1,\dots,\ \alpha_{i_k}=\sigma_k\}.$$

Множество $\{i_1,\dots,\ i_k\}$ называется *направлением*, число k – *рангом*, а число $n-k$ – *размерностью* грани $G = B^{n,\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}$. *Кодом* грани G называется вектор $\tilde{\gamma}(G)$ длины n, в котором $\gamma_{i_1}=\sigma_1,\dots,\ \gamma_{i_k}=\sigma_k$, а остальные координаты есть –. Например, $\tilde{\gamma}\left(B^{4,\,1,\,3}_{01}\right) = (0-1-)$. Одномерные грани называются *ребрами* куба.

Обозначим множество векторов длины n с координатами из множества $\{0,\ 1,\ -\}$ через G^n, на котором зададим частичный порядок: $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, если $\tilde{\beta}$ может быть получен из $\tilde{\alpha}$ путем замены некоторых (быть может, ни одной) координат вектора $\tilde{\alpha}$, равных 0 или 1, на –. Это отношение между кодами граней G и H соответствует отношению $G \subseteq H$ между гранями. Пусть $\|\alpha\|$ равно числу прочерков в наборе $\tilde{\alpha}$ и $G^n_k = \{\tilde{\alpha}\in G^n:\ \|\alpha\| = k\}$. Тогда $G^n_0 = B^n$, G^n_1 – множество ребер куба B^n, G^n_k – множество граней куба B^n размерности k. *Интервалом* $I(\tilde{\alpha},\ \tilde{\beta})$ *куба* B^n называется множество вида $\{\tilde{\gamma} \in B^n : \tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\gamma} \preccurlyeq \tilde{\beta}\}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ – вершины из B^n. Число $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ называется *размерностью* интервала.

3. Покрытия и тесты для (0, 1)-матриц. Пусть M – матрица с элементами из множества $\{0, 1\}$. Будем говорить, что строка $\tilde{\alpha}$ матрицы M *покрывает* некоторый столбец $\tilde{\beta}$, если на их пересечении стоит 1. Матрицу с m m строками и n столбцами будем называть *матрицей размерности* $m \times n$. Подмножество A строк матрицы M называется *покрытием* множества столбцов матрицы M, если для каждого столбца матрицы M найдется строка из множества A, покрывающая этот столбец. Покрытие называется *кратчайшим*, если оно имеет минимальную мощность среди всех покрытий матрицы M. Мощность кратчайшего покрытия $L_K(M)$ называется *глубиной* матрицы M.

Пусть каждой строке $\tilde{\alpha}$ матрицы M приписано неотрицательное число $w(\tilde{\alpha})$, называемое *весом* строки $\tilde{\alpha}$. *Весом множества* A строк матрицы M называется число $w(A) = \sum_{\tilde{\alpha} \in A} w(\tilde{\alpha})$. Покрытие A матрицы M называется *минимальным* относительно весовой функции w, если оно имеет минимальный вес среди всех покрытий матрицы M. Покрытие называется *тупиковым*, если удаление из него любой строки приводит к множеству, не являющимся покрытием.

Покрытие называется *градиентным*, если оно может быть получено в результате следующей процедуры. На первом шаге выбирается строка $\tilde{\alpha}_1$, имеющая наибольшее число единиц, из M вычеркивается строка $\tilde{\alpha}_1$ и все столбцы, имеющие в пересечении с $\tilde{\alpha}_1$ единицу. В результате получается матрица M_1. Пусть сделано k шагов, на которых выбрано множество строк $A_k = \{\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_k\}$ и получена матрица M_k. На $(k+1)$-м шаге в матрице M_k выбирается строка $\tilde{\alpha}_{k+1}$ с наибольшим числом единиц и т. д. Процедура заканчивается, если матрица M_k не содержит единиц. Полученное при этом множество A_k и является градиентным покрытием. Результат процедуры неоднозначен, поскольку выбор строки на каждом шаге, вообще говоря, не является однозначным. Максимальную мощность градиентного покрытия обозначим через $L_Г(M)$.

Множество A строк матрицы M называется *тестом*, если в подматрице, образованной строками из A, столбцы с номерами i и j различны, когда столбцы с номерами i и j различны в матрице M. Тест называется *минимальным*, если он имеет минимальную мощность среди всех тестов матрицы. Тест называется *тупиковым*, если после удаления любой строки получается множество, не являющееся тестом. Количество строк в тесте называется его *длиной*.

Универсальный алгоритм построения тестов состоит в построении по заданной матрице M некоторой к. н. ф. и последующем преобразовании ее в д. н. ф., слагаемые которой соответствуют тупиковым тестам.

Пример 3.1. Построить все тупиковые тесты матрицы

$$M = \begin{bmatrix} 010 \\ 011 \\ 101 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

Решение. На основе универсального алгоритма сначала построим матрицу $M^{(2)}$, составленную из сумм по модулю 2 всевозможных неупорядоченных пар столбцов матрицы M:

$$M = \begin{bmatrix} 101 \\ 110 \\ 101 \\ 011 \end{bmatrix}.$$

По матрице $M^{(2)}$ построим к. н. ф. $Q(M)$, переменными которой являются номера строк матрицы $M^{(2)}$, а элементарные дизъюнкции соответствуют ее столбцам и включают в себя номера строк, имеющих единицы на пересечении с данным столбцом:

$$Q(M) = (1 \vee 2 \vee 3)(2 \vee 4)(1 \vee 3 \vee 4).$$

Раскрывая скобки в к. н. ф. $Q(M)$ и используя правило поглощения, получаем д. н. ф.

$$D(M) = 1 \cdot 2 \vee 1 \cdot 4 \vee 2 \cdot 4 \vee 3 \cdot 4 \vee 2 \cdot 3.$$

Тупиковыми тестами являются следующие множества строк:

$$\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3\}. \square$$

4. Задачи и упражнения

1.1. Доказать следующие утверждения:

1) число различных граней куба B^n, имеющих заданное направление $\{i_1,..., i_k\}$ равно 2^k;

2) две различные грани одного направления не пересекаются;

3) объединение всех граней куба B^n, имеющих заданное направление, дают весь куб B^n;

4) число всех граней ранга k куба B^n равно $C_n^k \cdot 2^k$;

5) Общее число граней куба B^n равно 3^n;

6) число граней размерности k, содержащих заданную вершину $\tilde{\alpha} \in B^n$, равно C_n^k;

7) число граней размерности k, содержащих заданную грань размерности l, равно C_{n-l}^{k-l}.

1.2. Найти глубину матрицы M:

1) $M = \begin{bmatrix} 0101 \\ 0011 \\ 1001 \\ 1100 \end{bmatrix}$; 2) $M = \begin{bmatrix} 111000 \\ 100100 \\ 010010 \\ 001001 \end{bmatrix}$; 3) $M = \begin{bmatrix} 11110000001111 \\ 00111100111100 \\ 11000111100110 \\ 11111110000000 \\ 00000001111111 \end{bmatrix}$;

$$4)\ M=\begin{bmatrix}110000\\011000\\001100\\000011\\100001\end{bmatrix};\quad 5)\ M=\begin{bmatrix}11100\\01110\\00111\\10011\\11001\end{bmatrix};\quad 6)\ M=\begin{bmatrix}1010010\\1001001\\0101010\\0010110\\0100101\end{bmatrix}.$$

1.3. Найти минимальные мощности градиентных покрытий матриц M из задачи 1.2.

1.4. Найти числа кратчайших покрытий из задачи 1.2.

1.5. Найти числа тупиковых покрытий из задачи 1.2.

1.6. Пользуясь универсальным алгоритмом, построить все тупиковые тесты для матриц из пп. 1), 2), 5), 6) задачи 1.2.

§ 2. Методы построения сокращенной д. н. ф.

1. Определение сокращенной д. н. ф. *Импликантой* функции $f(\tilde{x}^n)$ называется такая элементарная конъюнкция K над множеством переменных $\{x_1,..., x_n\}$, что $K \vee f(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$. Импликанта K функции $f(\tilde{x}^n)$ называется *простой импликантой*, если после отбрасывания любой буквы из K получается конъюнкция, не являющаяся импликантой функции $f(\tilde{x}^n)$. Дизъюнкция всех простых импликант функции $f(\tilde{x}^n)$ называется *сокращенной д. н. ф.* функции $f(\tilde{x}^n)$.

Простая импликанта K функции $f(\tilde{x}^n)$ называется *ядровой*, если д. н. ф., составленная из всех простых импликант функции $f(\tilde{x}^n)$, отличных от K, не поглощает K. Дизъюнкция всех ядровых импликант функции $f(\tilde{x}^n)$ называется *ядром функции* $f(\tilde{x}^n)$.

2. Аналитические методы. 1) *Метод Блейка* применяется для произвольной д. н. ф. и состоит в применении слева направо правил обобщенного склеивания $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1 \cdot K_2 = K_1$.

На первом этапе производится операция обобщенного склеивания до тех пор, пока это возможно, на втором – операция поглощения.

Пример 3.2. Построить сокращенную д. н. ф. функции f по заданной д. н. ф.

$$R = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 .$$

Решение. На первом этапе получаем

$$R_1 = x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_3 .$$

После второго этапа находим сокращенную д. н. ф.

$$R_f^c = R_2 = x_1x_2 \vee x_3 . \ \square$$

2) *Метод Нельсона* позволяет строить сокращенную д. н. ф. функции f по ее произвольной к. н. ф. Сначала в заданной к. н. ф. раскрываются скобки с использованием закона дистрибутивности. На втором этапе вычеркиваются буквы и конъюнкции с использованием правил $x\bar{x}K = 0$, $xxK = xK$, $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

Пример 3.3. Построить сокращенную д. н. ф. по заданной к. н. ф.

$$f = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) .$$

Решение. После раскрытия скобок имеем

$$R_1 = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_2x_2 \vee x_2x_3 .$$

После второго этапа получаем сокращенную д. н. ф.

$$R_f^c = R_2 = x_1x_3 \vee x_2 . \ \square$$

3) *Алгоритм Квайна* строит сокращенную д. н. ф. по совершенной д. н. ф. На первом этапе к совершенной д. н. ф. применяется операция неполного склеивания $\bar{x}K \vee xK = \bar{x}K \vee xK \vee K$. После того как такая операция применена к каждой паре конъюнкций из совершенной д. н. ф., к которой она применима, с помощью операции поглощения $K \vee x^{\sigma}K$ удаляются те конъюнкции ранга n, которые можно удалить таким образом. В результате получается некоторая д. н. ф. R_1. Если проведено $k \geq 1$ этапов, то на

$(k+1)$-м этапе операции неполного склеивания и поглощения применяются к конъюнкциям ранга $n-k$ д. н. ф. R_k. В результате получается д. н. ф. R_{k+1}. Алгоритм заканчивается, если $R_{k+1}=R_k$.

Пример 3.4. Найти R_f^c, если $f(\tilde{x}^3)$ задана совершенной д. н. ф.

$$R_0 = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Решение. После первого этапа имеем

$$R_1 = x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3.$$

После второго этапа получаем сокращенную д. н. ф.

$$R_f^c = R_2 = x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3. \ \square$$

3. Геометрический метод. Этот метод позволяет построить сокращенную д. н. ф. для небольших значений n, исходя из геометрического представления множества N_f в кубе B^n. С этой целью в кубе B^n отыскиваются грани максимальной размерности, целиком содержащиеся в множестве N_f, а затем составляется д. н. ф. из конъюнкций, соответствующих этим граням.

Грань N_K, содержащаяся в N_f, называется *максимальной*, если не существует грани N_K такой, что $N_K \subseteq N_{K'} \subseteq N_f$ и $\dim N_{K'} > \dim N_K$.

Конъюнкция K, соответствующая максимальной грани $N_K \subseteq N_f$, является простой импликантой функции f. Так как из простой импликанты нельзя удалить ни одного множителя, то отсюда следует, что любую д. н. ф., в которой хотя бы один из членов не является простой импликантой, можно упростить. Отсюда следует следующее утверждение.

Теорема. *Минимальная д. н. ф. функции f состоит из простых импликант.*

Пусть $\tilde{N}_K = \{N_{K_1},\ ...,\ N_{K_m}\}$ – множество всех максимальных граней множества N_f. Поскольку $N_f = N_{K_1} \bigcup \ ...\bigcup \ N_{K_m}$ и сокращенная д. н. ф. реализует функцию f, то

$$R_f^c = K_1 \vee ... \vee K_m.$$

Пример 3.5. Найти сокращенную д. н. ф. для функции $f(\tilde{x}^3)$, заданной вектором $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1111)$.

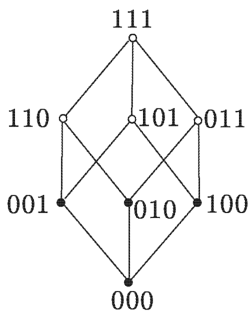


Рис.3.1

Решение. Вершины множества $N_f = \{111,\ 110,\ 101,\ 100,\ 011\}$ отмечены в кубе B^3 (рис. 3.1) светлыми кружками. Максимальными являются грани $N_{K_1} = B_{11}^{3,1,2} = (11–)$, $N_{K_2} = B_{11}^{3,1,3} = (1-1)$ и $N_{K_3} = B_{11}^{3,2,3} = (-11)$. Соответствующие этим граням конъюнкции $K_1 = x_1x_2$, $K_2 = x_1x_3$ и $K_3 = x_2x_3$ являются простыми импликантами функции $f(\tilde{x}^3)$. Сокращенная д. н. ф. имеет вид

$$R_f^c = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3. \ \square$$

4. Задачи и упражнения

2.1. Из заданного множества A элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функции f:

1) $A = \{x_1,\ \bar{x}_3,\ x_1x_2,\ x_2\bar{x}_3\}$, $\tilde{\alpha}_f = (0010\,1111)$;

2) $A = \{x_1\bar{x}_2,\ x_2x_3,\ x_1x_2x_3\}$; $\tilde{\alpha}_f = (0111\,1110)$;

3) $A = \{x_1,\ \bar{x}_4,\ x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\}$; $\tilde{\alpha}_f = (1010\,1110\,0101\,1110)$;

4) $A = \{x_1,\ x_2,\ x_1\bar{x}_2\}$; $\tilde{\alpha}_f = (1011)$;

5) $A = \{x_1x_3,\ x_1\bar{x}_3,\ x_2\}$; $\tilde{\alpha}_f = (0011\,1011)$;

6) $A = \{x_1\bar{x}_2,\ x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_2\}$; $\tilde{\alpha}_f = (0010\,1111)$.

2.2. По заданной д. н. ф. R методом Блейка построить сокращенную д. н. ф.:

1) $R = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4$;

2) $R = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$;

3) $R = x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4$;

4) $R = \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4$;

5) $R = x_1 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4$;

6) $R = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_4$;

7) $R = \bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3$;

8) $R = x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_1$.

2.3. По заданной к. н. ф. методом Нельсона построить сокращенную д. н. ф.:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$;

3) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

4) $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

5) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)$;

6) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee \bar{x}_4)(x_4 \vee x_1)$;

7) $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

8) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)$.

2.4. С помощью алгоритма Квайна построить сокращенную д. н. ф. для функции f, заданной вектором своих значений:

1) $\tilde{\alpha}_f = (0111\ 0110)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1011\ 1101)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (0010\ 1111)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 0100)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (0001\ 1011\ 1101\ 1011)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0000\ 1111\ 1111\ 0110)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (1111\ 1111\ 0111\ 1110)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0000\ 1111\ 0111\ 1111)$.

2.5. Геометрическим методом построить сокращенную д. н. ф. для функции f, заданной вектором своих значений:

1) $\tilde{\alpha}_f = (1111\ 0100)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (0101\ 0011)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 0011)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 0111)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (0001\ 1011\ 1101\ 1011)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0000\ 1111\ 1111\ 0110)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 0110\ 0000\ 0111)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (1111\ 1111\ 0111\ 1000)$.

2.6. Найти все ядровые импликанты для функции f, заданной вектором своих значений:

1) $\tilde{\alpha}_f = (0101\ 0111)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (1101\ 1011)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (1011\ 0000)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1110\ 1111)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (0001\ 1011\ 1101\ 1111)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0011\ 1101\ 1111\ 1101)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (0011\ 1101\ 1101\ 1110)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0010\ 1011\ 1101\ 1111)$.

§ 3. Методы построения тупиковых д. н. ф.

1. Определение тупиковой д. н. ф. Пусть R – произвольная д. н. ф., которую можно представить следующим образом:

$$R = R' \vee K,\ R = R' \vee x_i^{\sigma_i} K'.$$

Здесь K – элементарная конъюнкция из R, R' – д. н. ф., образованная из остальных конъюнкций, входящих в R; $x_i^{\sigma_i}$ – некоторый множитель из K; K' – произведение остальных множителей из K.

Рассмотрим два типа преобразования д. н. ф.

I. Операция удаления элементарной конъюнкции. Переход от д. н. ф. R к д. н. ф. R' – преобразование, осуществляемое путем удаления элементарной конъюнкция K. Данное преобразование определено тогда и только тогда, когда $R' = R$.

II. Операция удаления множителя. Переход от д. н. ф. R к д. н. ф. $R' \vee K'$ – преобразование, осуществляемое путем удаления множителя $x_i^{\sigma_i}$. Данное преобразование определено тогда и только тогда, когда $R' \vee K' = R$.

Определение. Д. н. ф. R, которую нельзя упростить при помощи преобразований I и II, называется *тупиковой д. н. ф.* (*т. д. н. ф.*).

2. Алгоритм упрощения. 1) Для функции $f(\tilde{x}^n)$ выбирается в качестве исходной какая-нибудь д. н. ф. Таковой можно взять, например, совершенную д. н. ф., так как существует простой способ ее построения.

2) Осуществляется упорядочивание в исходной д. н. ф. слагаемых и в каждом слагаемом – множителей. Это упорядочение можно задать записью д. н. ф.

3) Производится просмотр записи д. н. ф. слева направо. Для очередного члена K_i $(i = 1, \ldots, s)$ сначала пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции K_i. Если это невозможно, то просматривают члены $x_{i_\nu}^{\sigma_\nu}$ конъюнкции $K_i = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_r}^{\sigma_r}$ слева направо $(\nu = 1, \ldots, r)$ и применяют операцию удаления множителя $x_{i_\nu}^{\sigma_\nu}$ до тех пор, пока это удается.

Затем переходят к следующей элементарной конъюнкции. После обработки последней элементарной конъюнкции еще раз просматривают полученную д. н. ф. слева направо и пробуют применить операцию удаления элементарной конъюнкции. В результате получаем т. д. н. ф.

Пример 3.6. Для функции $f(\tilde{x}^3)$, заданной вектором значений $\tilde{\alpha}_f = (1101\,1011)$, с помощью алгоритма упрощения построить тупиковые д. н. ф.

Решение. В качестве исходной возьмем совершенную д. н. ф., рассмотрим ее естественное упорядочение

$$R' = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

и проследим работу алгоритма.

1°. Конъюнкция $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ не может быть удалена, но можно удалить множитель $\bar{x}_1$: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3$.

В результате получаем конъюнкцию $\bar{x}_2\bar{x}_3$, из которой нельзя удалить ни одного множителя.

2°. Конъюнкцию $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ удалить также нельзя, но можно удалить множитель $\bar{x}_2$: $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1x_3$.

3°. Конъюнкция $\bar{x}_1x_2x_3$, может быть удалена (см. п. 2°).

4°. Конъюнкция $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ также может быть удалена (см. п. 1°).

5°. Конъюнкцию $x_1x_2\bar{x}_3$ удалить нельзя, но можно удалить множитель x_2: $x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_3$.

6°. Конъюнкцию $x_1x_2x_3$ удалить нельзя, но можно удалить множитель x_1: $x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 = x_2x_3$.

В результате получаем т. д. н. ф.:

$$R_T = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3.$$

Если для той же функции взять другую упорядоченность ее совершенной д. н. ф., например,

$$R'' = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,$$

то в результате работы алгоритма упрощения получим другую т. д. н. ф.:

$$R_2 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2. \ \square$$

Из приведенного примера следует, что результат применения алгоритма упрощения зависит от выбора упорядочения исходной д. н. ф., причем получаемые т. д. н. ф. имеют различную сложность и, в частности, могут отличаться от минимальных.

3. Построение тупиковых д. н. ф. на основе геометрических представлений.

О п р е д е л е н и е. Покрытие множества N_f, состоящее из максимальных граней, называется *неприводимым*, если совокупность граней, получающаяся из исходной путем выбрасывания любой грани, не будет покрытием N_f.

О п р е д е л е н и е. Д. н.ф., соответствующая неприводимому покрытию множества N_f, называется *тупиковой* (в геометрическом смысле).

Для построения всех тупиковых д. н. ф. будем исходить из покрытия множества N_f системой всех его максимальных граней $N_{K_1^0}, \ldots, N_{K_m^0}$, которые соответствуют простым импликантам функции f.

Пусть $N_f = \{P_1, \ldots, P_\lambda\}$. Составим таблицу Квайна Q_f (табл. 3.1), в которой строки соответствуют простым импликантам функции f, а столбцы – наборам из множества N_f:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } P_j \in N_i^0, & (i = 1, \ldots, m); \\ 0, \text{ если } P_j \notin N_i^0, & (j = 1, \ldots, \lambda). \end{cases}$$

Т а б л и ц а 3.1

	P_1	$\cdots$	P_j	$\cdots$	P_λ
$N_{K_1^0}$	σ_{11}	$\cdots$	σ_{1j}	$\cdots$	$\sigma_{1\lambda}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
$N_{K_i^0}$	σ_{i1}	$\cdots$	σ_{ij}	$\cdots$	$\sigma_{i\lambda}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	
$N_{K_m^0}$	σ_{m1}	$\cdots$	σ_{mj}	$\cdots$	$\sigma_{m\lambda}$

Очевидно, что в каждом столбце содержится хотя бы одна единица. Для каждого j найдем множество E_j всех номеров строк, в которых столбец P_j содержит 1. Пусть $E_j = \{e_{j_1}, ..., e_{j_{\mu(j)}}\}$. Составим конъюнкцию, рассматривая номера строк как булевы переменные: $\underset{j=1}{\overset{\lambda}{\&}}(e_{j_1} \vee \ ... \ \vee e_{j_{\mu(j)}})$.

Произведем преобразование $\&\vee \to \vee\&$ и далее ликвидируем поглощаемые или дублирующие члены. В результате получим выражение $\vee\&'$, являющееся частью выражения $\vee\&$. Каждое слагаемое в $\vee\&'$ будет определять неприводимое покрытие, соответствующее тупиковой д. н. ф.

Пример 3.7. Для функции $f(\tilde{x}^3)$ из примера 3.6 с помощью таблицы Квайна построить все тупиковые д. н. ф.

Решение. Множество N_f состоит из 6 вершин, которые занумеруем числами I, II, …, VI. Максимальными гранями являются ребра, которые занумеруем арабскими цифрами 1, …, 6 (рис. 3.2).

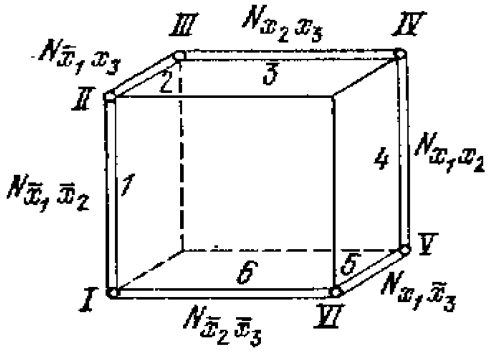


Рис. 3.2

Составим таблицу для множеств E_j ($j = 1, ..., 6$) (табл. 3.2).

Таблица 3.2

	I	II	III	IV	V	VI
1	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1
6	1	0	0	0	0	1

Имеем

$$E_{\mathrm{I}}=\{1,6\},\ E_{\mathrm{II}}=\{1,2\}, E_{\mathrm{III}}=\{2,3\}, E_{\mathrm{IV}}=\{3,4\}, E_{V}=\{4,5\}, E_{\mathrm{VI}}=\{5,6\}.$$

Тогда

$$\vee\& = (1\vee 6)\cdot(1\vee 2)\cdot(2\vee 3)\cdot(3\vee 4)\cdot(4\vee 5)\cdot(5\vee 6)=$$
$$=(1\vee 2\cdot 6)\cdot(3\vee 2\cdot 4)\cdot(5\vee 4\cdot 6)=(1\cdot 3\vee 2\cdot 3\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\vee 2\cdot 4\cdot 6)\cdot(5\vee 4\cdot 6)=$$
$$=1\cdot 3\cdot 5\vee 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\vee 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6\vee 1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\vee 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\vee$$
$$\vee 2\cdot 4\cdot 6=1\cdot 3\cdot 5\vee 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\vee 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\vee 1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\vee 2\cdot 4\cdot 6.$$

Получили пять неприводимых покрытий или пять тупиковых д. н. ф.:

$$R_1=\overline{x}_2\overline{x}_3\vee x_2x_3\vee x_1\overline{x}_3,$$

$$R_2=\overline{x}_1x_3\vee x_2x_3\vee x_1\overline{x}_3\vee\overline{x}_2\overline{x}_3,$$

$$R_3=\overline{x}_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_1x_3\vee x_1x_2\vee x_1\overline{x}_3,$$

$$R_4=\overline{x}_1\overline{x}_2\vee x_2x_3\vee x_1x_2\vee\overline{x}_2\overline{x}_3,$$

$$R_5=\overline{x}_1x_3\vee x_1x_2\vee\overline{x}_2\overline{x}_3,$$

из которых R_1 и R_2 являются минимальными. □

4. Задачи и упражнения

3.1. Для заданной д. н. ф. помощью алгоритма упрощения построить тупиковую д. н. ф.:

1) $R=\overline{x}_1\overline{x}_2\vee x_2$; 2) $R=x_1x_2\vee x_1\overline{x}_2$;

3) $R=x_1x_2x_3\vee x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_2\overline{x}_3$; 4) $R=x_1x_2\vee x_1\overline{x}_2\vee x_2\overline{x}_3$;

5) $R=x_1\overline{x}_2\vee x_2\overline{x}_3\vee x_1\overline{x}_3\vee\overline{x}_1x_2\vee\overline{x}_2x_3$;

6) $R=x_1x_2x_3x_4\vee x_2x_3\overline{x}_4\vee x_2\overline{x}_3\vee x_1\overline{x}_3$;

7) $R=\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_2x_3x_4\vee x_1\overline{x}_2x_4\vee\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$;

8) $R=\overline{x}_1x_3\vee x_2x_3\vee x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_2x_4\vee\overline{x}_2x_3x_4\vee x_1x_3x_4$.

3.2. По заданной сокращенной д. н. ф. построить тупиковые д. н. ф.:

1) $R=x_1x_2\vee\overline{x}_1\overline{x}_3\vee x_2\overline{x}_3$;

2) $R=\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_2x_3x_4\vee x_1\overline{x}_2x_4\vee\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$;

3) $R=x_1\overline{x}_2x_3\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_4\vee\overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$;

4) $R=\bar{x}_3\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_4$;

5) $R=\bar{x}_3x_4\vee\bar{x}_2x_4\vee x_1x_4\vee x_2x_3\bar{x}_4\vee x_1x_2x_3$;

6) $R=x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee\vee\bar{x}_3x_4\vee\bar{x}_2x_4\vee\bar{x}_1x_4$;

7) $R=\bar{x}_1x_3\vee x_2x_3\vee x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_2x_3x_4\vee x_1x_3x_4$;

8) $R=\bar{x}_1x_3\vee\bar{x}_2x_4\vee x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_1x_4\vee x_3x_4$.

3.3. Для функции f, заданной вектором своих значений, с помощью таблицы Квайна построить все тупиковые д. н. ф.:

1) $\tilde{\alpha}_f=(0111\,1100)$; 2) $\tilde{\alpha}_f=(0111\,1110)$;

3) $\tilde{\alpha}_f=(0001\,1111)$; 4) $\tilde{\alpha}_f=(0001\,1011\,1110\,0111)$;

5) $\tilde{\alpha}_f=(1110\,1000\,0110\,1110)$; 6) $\tilde{\alpha}_f=(1110\,0110\,0001\,0101)$;

7) $\tilde{\alpha}_f=(0001\,0111\,1010\,1110)$; 8) $\tilde{\alpha}_f=(1111\,1000\,0100\,1100)$.

3.4. Показать, что число тупиковых д. н. ф. произвольной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ не превосходит $C_{3^n}^{2^n}$.

§ 4. Методы построения минимальных д. н. ф.

1. Минимизация булевых функций на основе построения тупиковых д. н. ф. Сокращенная, тупиковая и минимальная д. н. ф. находятся в следующих соотношениях: тупиковая д. н. ф. получается из сокращенной путем удаления некоторых простых импликант; минимальная д. н. ф. является тупиковой; среди тупиковых д. н. ф. найдется минимальная. Отсюда процесс построения минимальных д. н. ф., если исходить из совершенной д. н. ф., можно представить следующей схемой (рис. 3.3).

Сначала получают сокращенную д. н. ф. При этом на данном шаге возможно усложнение д. н. ф. Далее однозначный процесс переходит в ветвящийся – процесс построения всех тупиковых д. н. ф. Наконец, из тупиковых д. н. ф. выделяются минимальные.

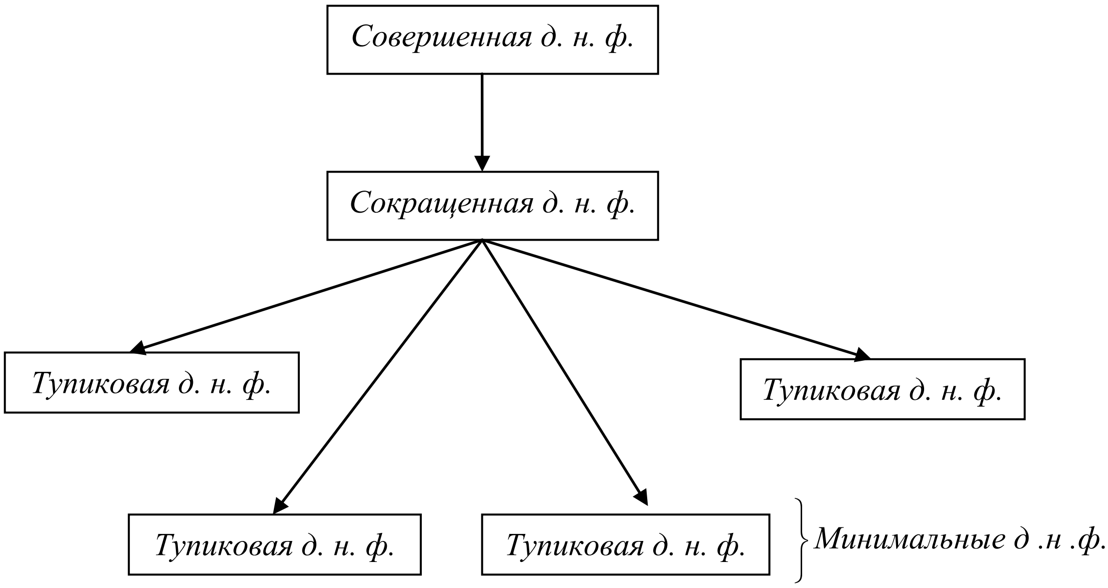


Рис. 3.3

2. Метод карт Карно. При использовании этого метода производится покрытие функций алгебры логики (ФАЛ) с помощью правильных конфигураций, содержащих нули или единицы. Правильными конфигурациями на карте Карно для функции от n переменных являются все прямоугольники (горизонтальные, вертикальные, квадраты), имеющие площадь 2^{n-i} $(i = 0, 1, ..., n)$. При этом стремятся, чтобы число покрытий ФАЛ на карте было минимально, а площадь, покрываемая каждой конфигурацией – максимальна. Конфигурации могут перекрываться. Принцип минимизации заключается в объединении соседних полей карты в пределах правильной конфигурации.

При нахождении минимальной формы ФАЛ выписываются переменные, не изменяющие своего значения в пределах правильной конфигурации. При объединении полей, в которых записаны единицы, ФАЛ записывается в виде д. н. ф., а при объединении полей, содержащих нули, – в виде к. н. ф. Например, функция от четырех переменных компактно записывается в форме матрицы размера $[4 \times 4]$, как это показано на рис. 3.4.

x_1x_2	x_3x_4			
	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Рис. 3.4

Каждой функции сопоставляется подмножество клеток, в которых эта функция равна единице. При этом элементарным конъюнкциям соответствуют некоторые правильно расположенные конфигурации клеток. Для функции n переменных конъюнкции ранга r соответствует 2^{n-r} клеток.

Пример 3.8. Для функции $f(\tilde{x}^4)$, представленной на рис. 3.4, построить минимальную д. н. ф.

Решение. На карте Карно разобьем множество клеток, содержащих единицы, на подмножества, представленные на рис. 3.5.

Каждое подмножество представляет правильную конфигурацию из четырех единиц, которой соответствует конъюнкция ранга 2. Объединение этих подмножеств содержит все единичные клетки функции $f(\tilde{x}^4)$. Поэтому

$$R_m = \overline{x}_1\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3 x_4 \vee x_1 x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 . \square$$

3. Метод Квайна-Мак-Класски. Данный метод основывается на представлении элементарных конъюнкций, входящих в совершенную д. н. ф. данной функции, в виде двоичных чисел, называемых *номерами* соответствующих наборов. Кроме номера, каждой элементарной конъюнкции присваивается определенный *индекс*, равный числу единиц в двоичном представлении данного набора. Например:

элементарная конъюнкция (набор) $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$; номер 010(2); индекс 1;

элементарная конъюнкция (набор) $x_1 x_2 \bar{x}_3$; номер 110(6); индекс 2.

x_1x_2	x_3x_4			
	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11				
10				

$\bar{x}_1 \bar{x}_4$

x_1x_2	x_3x_4			
	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11		1		
10		1		

$\bar{x}_3 x_4$

x_1x_2	x_3x_4			
	00	01	11	10
00				
01				
11		1	1	
10		1	1	

$x_1 x_4$

x_1x_2	x_3x_4			
	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

$\bar{x}_2 \bar{x}_4$

Рис. 3.5

В результате реализации данного метода функция разлагается на простые импликанты. Алгоритм Квайна-Мак-Класски формулируется следующим образом: для того, чтобы два числа m и n являлись номерами двух склеивающихся между собой наборов, необходимо и достаточно, чтобы индексы данных чисел отличались на единицу, сами числа отличались на степень числа 2 и число с большим индексом было больше числа с меньшим индексом.

Пример 3.8. Для функции $f(\tilde{x}^4)$, заданной вектором значений

$\tilde{\alpha}_f = (0101\;0101\;0101\;0000)$ построить минимальную д. н. ф. методом Квайна-Мак-Класски.

Р е ш е н и е. Запишем совершенную д. н. ф.:

$$f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 .$$

На *первом этапе* минимизации определяем номера и индексы каждого набора и представляем функцию в виде

$$f(\tilde{x}^4) = \underset{1(\mathrm{I})}{0001} \vee \underset{5(\mathrm{II})}{0101} \vee \underset{9(\mathrm{II})}{1001} \vee \underset{7(\mathrm{III})}{0111} \vee \underset{11(\mathrm{III})}{1011} \vee \underset{3(\mathrm{II})}{0011} .$$

На *втором этапе* группируем наборы, располагая их в порядке возрастания индексов (табл. 3.3).

Т а б л и ц а 3.3

<table>
<tr><th>Индекс</th><th>Номер</th><th colspan="2">Результаты склеивания</th></tr>
<tr><td>I</td><td>0001(1)</td><td>00-1
0-01
-001</td><td rowspan="3">0--1
-0-1
0--1
-0-1</td></tr>
<tr><td>II</td><td>0011(3)
0101(5)
1001(9)</td><td rowspan="2">0-11
-011
01-1
10-1</td></tr>
<tr><td>III</td><td>0111(7)
1011(11)</td></tr>
</table>

На *третьем этапе* производим склеивание различных наборов, руководствуясь приведенной выше формулировкой алгоритма. При склеивании не совпадающие в числах разряды отмечаются прочерками. Например, склеивание чисел 0001 и 0011 дает число 00-1. Результат склеивания записывается в следующий столбец таблицы 3.3, также разделяемый на строки с индексами, отличающимися на единицу. После склеивания всех групп первого столбца таблицы переходят ко второму, записывая результат склеивания в третий столбец. При объединении второго и последующих столбцов таблицы возможно склеивать только числа, содержащие прочерки в одноименных разрядах. Склеивание продолжается до тех пор, пока образование нового столбца станет невозможно.

На *четвертом этапе* после окончания склеивания приступают к построению импликантной таблицы (табл. 3.4), записывая в нее в качестве простых импликант наборы, содержащиеся в последнем столбце таблицы 3.3. В таблицу 3.4 также вписываются в качестве простых импликант наборы из других столбцов таблицы 3.3, не принимавшие участия в склеивании. Если импликанта, содержащаяся в i-ой строке таблицы, составляет часть конституенты j-го столбца, то на пересечении i-ой строки и j-го столбца ставится символ *. Для получения минимальной формы ФАЛ из таблицы 3.4 необходимо выбрать минимальное число строк, чтобы для каждого столбца среди выбранных строк нашлась хотя бы одна, содержащая в этом столбце символ *.

Таблица 3.4

Импли-пли-канты	Наборы					
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$
$\bar{x}_1x_4$	*	*		*		*
$\bar{x}_2x_4$	*		*		*	*

В результате получаем минимальную д. н. ф. в виде

$$R_m = \bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_4.$$

4. Задачи и упражнения

4.1. По заданной сокращенной д. н. ф. построить минимальные д. н. ф.:

1) $R = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$:

2) $R = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4$;

3) $R = \overline{x}_1x_4 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;

4) $R = \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$;

5) $R = x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$:

6) $R = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

7) $R = \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_4$;

8) $R = x_2x_3x_5 \vee x_2x_4x_5 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_5 \vee x_1x_2\overline{x}_3x_4$.

4.2. По заданной д. н. ф. методом карт Карно построить минимальные д. н. ф.:

1) $R = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3$;

2) $R = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4$;

3) $R = \overline{x}_1x_4 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;

4) $R = \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$;

5) $R_c = x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$;

6) $R = x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

7) $R = \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3x_4$.

4.3. Методом Квайна-Мак-Класски построить минимальные д. н. ф. функции f, заданной вектором своих значений:

1) $\tilde{\alpha}_f = (0111\,1100)$; 2) $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1111)$;

3) $\tilde{\alpha}_f = (0001\,1011\,1101\,1111)$; 4) $\tilde{\alpha}_f = (1110\,1000\,0110\,1110)$;

5) $\tilde{\alpha}_f = (1110\,0110\,0001\,0101)$; 6) $\tilde{\alpha}_f = (0001\,0111\,1010\,1110)$;

7) $\tilde{\alpha}_f = (1111\,1000\,0100\,1100)$; 8) $\tilde{\alpha}_f = (0010\,1011\,1101\,1111)$.

ГЛАВА 4

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ

§ 1. Схемы их функциональных элементов

1. Понятие схемы из функциональных элементов (СФЭ). В современной технике управляющих и вычислительных устройств важное место занимают *дискретные преобразователи*, т. е. устройства, которые обладают некоторым числом входов и выходов. Наборы сигналов, поступающие на входы и возникающие на выходах, принадлежат известным конечным множествам. Устройства осуществляют преобразования входных наборов сигналов в выходные. Математической моделью таких устройств являются так называемые схемы из функциональных элементов.

Схемой из функциональных элементов называется ориентированная бесконтурная сеть с помеченными вершинами. Полюса сети делятся на *входные* (*входы*) и *выходные* (*выходы*). Входные полюса помечаются символами переменных (иногда также символами отрицаний переменных или констант). Каждая вершина, отличная от входа (внутренняя вершина), помечается функциональным символом (или символом логической связки). При этом должны выполняться следующие условия:

1) полустепень захода каждого входного полюса равна нулю;

2) полустепень захода каждой вершины, отличной от входного полюса, равна числу мест функционального символа (или логической связки), которым эта вершина помечена.

Представим СФЭ логической сетью с входами $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ из алфавита X и выходами $y_{j_1}, ..., y_{j_p}$ из алфавита Y. Обозначение:

$$\Sigma(x_{i_1}, ..., x_{i_n}; y_{j_1}, ..., y_{j_p}). \tag{4.1}$$

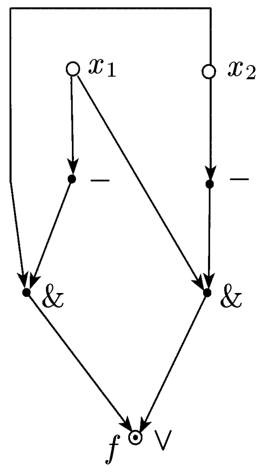
Функционирование схемы задается системой функций алгебры логики

$$
\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\ \ldots,\ x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p = f_p(x_1,\ \ldots,\ x_n), \end{cases} \tag{4.2}
$$

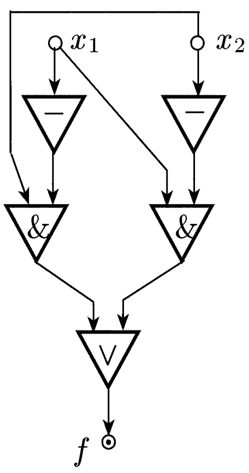
называемую *проводимостью данной схемы*.

Множество функциональных символов или связок, используемых для пометки внутренних вершин СФЭ, называется *базисом схемы*. Изображение СФЭ представлено на рис. 4.1 *а*. Входы помечаются светлыми кружками, внутренние вершины – темными кружками, а выходы – двойными кружками.

Другой способ изображения схем иллюстрируется рис. 4.1. *б*. Здесь входы, как и ранее, изображаются светлыми кружками, каждая внутренняя вершина заменена треугольником, внутрь которого помещается функциональный символ. К одной из сторон треугольника присоединены входы элемента, а вершина треугольника, противоположная этой стороне, является выходом элемента. Выходы схемы отделены от функциональных элементов (ФЭ) и обозначены, как и прежде, двойными кружками. Выходам могут приписываться символы функций, реализуемых в них.



а



б

Рис. 4.1

Одноразрядным двоичным сумматором называется СФЭ, реализующая в произвольном базисе систему из двух функций:

$$m(x, y, p) = xy \vee yp \vee px, \ l(x, y, p) = x \oplus y \oplus p.$$

Дешифратором называется схема D_n, реализующая систему всех конъюнкций ранга n переменных $x_1, ..., x_n$.

Мультиплексором от переменных $x_1, ..., x_n, y_0, y_1, ..., y_{2^n-1}$ называется схема M_n, реализующая функцию

$$f(x_1, ..., x_n, y_0, y_1, ..., y_{2^n-1}) = \bigvee_{\sigma_1, ... \sigma_n} y_{\nu(\sigma_1, ..., \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} ... x_n^{\sigma_n},$$

где $\nu(\sigma_1, ..., \sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{n-i}$.

Универсальным многополюсником для множества переменных $X^n = \{x_1, ..., x_n\}$ называется СФЭ $U(X^n) = U_n$, реализующая все булевы функции переменных из X^n.

2. Реализация функций СФЭ. Понятие *функции, реализуемой в вершине схемы*, определяется по индукции следующим образом. Если СФЭ не содержит ФЭ, то каждая ее вершина является входом. В этом случае функция, реализуемая в вершине, тождественно равна переменной (или ее отрицанию), приписанной соответствующему входу. Пусть для СФЭ, содержащих не более $m \geq 0$ элементов, для каждой вершины определена реализуемая в ней функция. Рас смотрим произвольную СФЭ с $m+1$ элементами. Поскольку СФЭ является ориентированным бесконтурным графом, то существует вершина с нулевой полустепенью исхода. Удаляя эту вершину, получаем СФЭ с m элементами, в которой по предположению индукции каждой вершине можно однозначно сопоставить функцию, реализуемую в этой вершине. Пусть удаленная вершина v имела полустепень захода, равную k, и вершине был приписан k-местный функциональный символ f. Пусть, кроме того, в k вершинах, из которых дуги выходили в вершину v, реализуются функции $f_1(x_1, ..., x_n)$, …, $f_k(x_1, ..., x_n)$. При этом входы функционального элемента считаются упорядоченными. Тогда определим функцию φ_v, реализуемую в вершине v, равенством

$$\varphi_v(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, ..., x_n),..., f_k(x_1, ..., x_n)).$$

Будем говорить, что *функция* f *реализуется схемой* (*логической сетью*) Σ, если в Σ существует выход, в которой реализуется функция f.

Сложностью СФЭ будем называть число вершин, не являющихся входами, т. е. число ФЭ. Схема Σ называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех СФЭ, реализующих функции, реализуемые схемой Σ. *Сложностью булевой функции* f (системы функций $A = \{f_1, ..., f_m\}$ в классе СФЭ в базисе $Б$ называется сложность минимальной СФЭ в базисе $Б$, реализующих функцию f (систему функций A). Сложность схемы Σ (функции f, системы функций A) в базисе $Б$ обозначается через $L_Б(\Sigma)$ ($L_Б(f)$, $L_Б(A)$). В дальнейшем, если базис $Б$ не указывается, подразумевается, что СФЭ представлена в стандартном базисе $\{\vee, \&, \neg\}$. При этом символ $Б$ в обозначении сложности схемы или функции будем опускать и писать $L(\Sigma)$ и $L(f)$. Везде в дальнейшем связки $\vee$, $\&$, $\oplus$, $|$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\sim$, Δ являются двухместными.

Глубиной СФЭ в базисе $Б$ называется максимальное число внутренних вершин (ФЭ) в ориентированных цепях, соединяющих вход с выходом.

3. Задачи анализа и синтеза СФЭ. З а д а ч а а н а л и з а: для данной СФЭ (4.1) получить систему булевых уравнений (4.2).

З а д а ч а с и н т е з а: для данного базиса $Б$ функциональных элементов и произвольной системы булевых уравнений (4.2) построить схему (4.1) из заданных ФЭ, реализующую эту систему уравнений.

Существование решения задачи синтеза определяется теоремой Поста, согласно которой система функций $(f_1, ..., f_r)$, реализующих базисные

ФЭ, должна быть полна. Функции y_i $(i=1, ..., p)$ можно представить в виде суперпозиции функций $(f_1, ..., f_r)$, а каждому шагу суперпозиции соответствует определенное соединение элементов.

Пример 4.1. Для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_1(f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_2, x_3), f_3(x_3), x_3) \quad (4.3)$$

схема, соответствующая суперпозиции в правой части формулы (4.3), показана на рис. 4.2.

Проблема синтеза заключается в том, что для данной системы булевых уравнений можно построить много схем из ФЭ, которые реализуют эту систему. В связи с этим возникает задача *оптимального синтеза*: из всевозможных схем, реализующих данную функцию, выбрать наилучшую по тому или иному признаку, например, с наименьшим числом элементов.

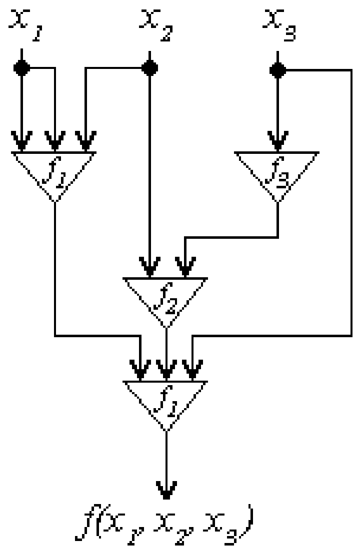


Рис. 4.2

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Существует алгоритм, который для каждой системы булевых функций строит минимальную схему* Σ.

Данный алгоритм построения минимальных схем относится к классу алгоритмов типа «полного перебора», так как он основан на просмотре всех схем до определенной сложности. Алгоритмы полного перебора, как правило, обладают большой трудоемкостью и непригодны для практических целей. Поэтому рассмотрим далее более простую задачу, для которой исходная система уравнений содержит одно уравнение

$$y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

и, следовательно, искомая схема имеет один выход.

Будем рассматривать задачу синтеза не для отдельной функции f, а для всего класса P_2 функций от n переменных. Качество алгоритмов синтеза сравнивается путем сопоставления так называемых функций Шеннона. Пусть

$$L(n) = \max_{f \in P_2} L(f),\ L_A(f)\ L_A(n) = \max_{f \in P_2} L_A(f),$$

$L_A(f)$ – минимальная сложность схем, реализующих f, которые получаются при помощи алгоритма A.

Функции $L(n)$, $L_A(n)$ называются функциями Шеннона, причем очевидно, что

$$L_A(n) \geq L(n).$$

Задача синтеза состоит в том, чтобы найти алгоритм A, для которого $L_A(n)$ была бы возможно ближе к $L(n)$, и чтобы трудоемкость алгоритма A была бы существенно меньше, чем трудоемкость алгоритма полного перебора. При такой постановке задачи не требуется, чтобы алгоритм A для каждой функции f находил минимальную схему, необходимо только, чтобы простейшая схема, получаемая при помощи алгоритма A, имела сложность $L_A(f)$, сильно не превышающую $L(n)$.

Пример 4.2. Построить схему в стандартном базисе, реализующую функцию $f(\tilde{x}^3) = (0101\ 0100)$.

Решение. Представим данную функцию формулой в базисе $Б = \{\vee, \&, \neg\}$, используя совершенную д. н. ф.:

$$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$$

Для каждой логической операции в этой формуле возьмем соответствующие ФЭ и произведем их соединение так, как этого требует формула. В результате получим схему, показанную на рис. 4.3. Сложность этой схемы равна 10. Предварительное упрощение формулы

$$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 = (\bar{x}_1 \vee x_1) \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee$$
$$\vee \bar{x}_1 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_2) \cdot x_3 = \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_3 = x_3 \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = \overline{x_1 \cdot x_2} \cdot x_3$$

позволяет для той же функции построить более простую схему (рис. 4.4). □

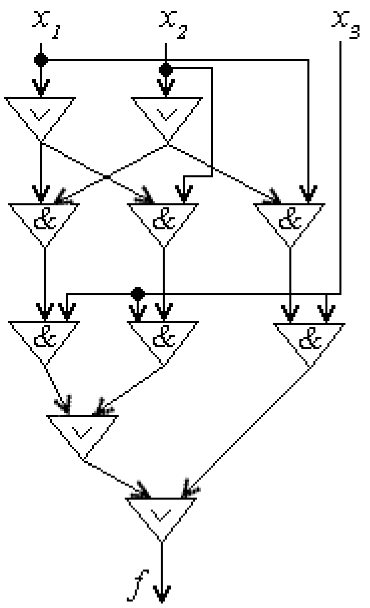


Рис. 4.3

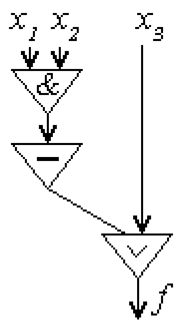


Рис. 4.4

4. Задачи и упражнения

1.1. Для заданной функции $f(\tilde{x}^n)$ построить СФЭ в стандартном базисе сложности, не превосходящей m:

1) $f(\tilde{x}^2) = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2,\ m = 2;$ 2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \sim x_2,\ m = 4;$

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_3 \cdot x_1,\ m = 4;$

4) $f(\tilde{x}^3) = (01111110),\ m = 6;$ 5) $f(\tilde{x}^3) = (0001\,1111),\ m = 2;$

6) $f(\tilde{x}^3) = (1000\ 1101),\ m = 4;$ 7) $f(\tilde{x}^3) = (0110\ 1001),\ m = 8.$

1.2. Для заданной функции $f(\tilde{x}^n)$ построить формулу в базисе $Б$:

1) $f(\tilde{x}^2)=x_1\oplus x_2$; а) $Б$={|}, б) $Б$={→, ¬};

2) $f(\tilde{x}^2)=x_1\to x_2$ а) $Б$={↓}, б) $Б$={&, ¬};

3) $f(\tilde{x}^2)=x_1\vee x_2$; а) $Б$={¬, |}, б) $Б$={~, &};

4) $f(\tilde{x}^3)=x_1\vee x_2\vee x_3$, а) $Б$={¬, ↓}, б) $Б$={→, ¬};

5) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1$, а) $Б$={&, ⊕}, б) $Б$={→, ¬};

6) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$; а) $Б$={¬, |, ↓}, б) $Б$={&, ⊕, ¬};

7) $f(\tilde{x}^2)=x_1\oplus x_2x_3$; а) $Б$={¬, |, ↓}, б) $Б$={→, ¬}.

1.3. Для функции, заданной вектором своих значений, построить формулу в базисе $Б$:

1) $\tilde{\alpha}_f=(1011)$; а) $Б$={∨, ¬}, б) $Б$={|};

2) $\tilde{\alpha}_f=(1001)$; а) $Б$={&, →}, б) $Б$={↓};

3) $\tilde{\alpha}_f=(1000\ 0001)$; а) $Б$={¬, |}, б) $Б$={⊕, &, 1};

4) $\tilde{\alpha}_f=(1110\ 1000)$; а) $Б$={⊕, &, 1}, б) $Б$={→, ¬};

5) $\tilde{\alpha}_f=(1001\ 0100)$; а) $Б$={⊕, 1}, б) $Б$={¬, |};

6) $\tilde{\alpha}_f=(1010\ 1110)$; а) $Б$={⊕, &, ¬}, б) $Б$={¬, ∨};

7) $\tilde{\alpha}_f=(0110\ 1111)$; а) $Б$={⊕, &, ¬}, б) $Б$={¬, ↓}.

1.4. По схемам, изображенным на рис. 4.5, найти функции, реализуемые ими.

1.5. Построить СФЭ в базисе $Б$, реализующую систему функций:

1) $\Phi=\{f_1=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1,\ f_2=x_1\oplus x_2\oplus x_3\}$;

а) $Б$={&, ∨, ¬}, б) $Б$={&, ⊕}, в) $Б$={|, ↓};

2) $\Phi=\{f_1=\bar{x}_1,\ f_2=\bar{x}_1\bar{x}_2,\ f_3=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ f_4=1\}$;

а) $Б$={&, ¬}, б) $Б$={¬, ↓};

3) $\Phi=\{f_1=x_1\oplus x_2,\ f_2=\overline{x_1\vee x_2\vee x_3}\vee x_1x_2x_3,\ f_3=x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\}$;

а) $Б$={⊕, &, ¬}, б) $Б$={&, ∨, ¬};

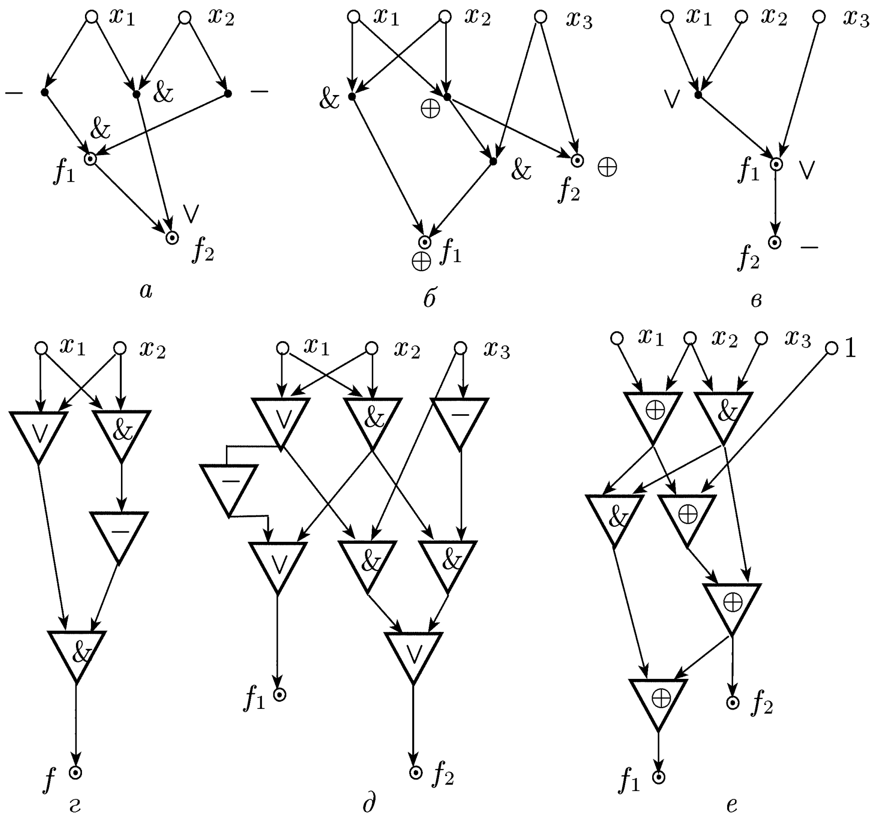


Рис. 4.5

4) $\Phi=\{ f_1=\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1,\ f_2=\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3,\ f_3=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\}$;

а) *Б*=$\{\&, \vee, \neg\}$, б) *Б*=$\{\,|\,\}$;

5) $\Phi=\{ f_1=x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3,\ f_2=x_1 \sim x_2,\ f_3=x_2 \oplus x_3\}$;

а) *Б*=$\{\&, \vee, \neg\}$, б) *Б*=$\{\downarrow\}$;

6) $\Phi=\{ f_1=x_1x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4,\ f_2=f_1(x_1,\ x_2,\ \bar{x}_3,\ \bar{x}_4)\}$;

а) *Б*=$\{\&, \vee, \neg\}$, б) *Б*=$\{\&, \oplus, \neg\}$;

7) $\Phi=\{ f_1=x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_4,\ \ f_2=x_1 \oplus x_2,$

$f_3=x_2 \oplus x_3,\ f_4=x_1 \oplus x_4\}$;

а) *Б*=$\{\&, \vee, \neg\}$, б) *Б*=$\{\&, \oplus, \neg\}$;

8) $\Phi=\{ f_0=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ f_1=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3,\ f_2=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ f_3=\bar{x}_1x_2x_3,$

$f_4=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ f_5=x_1\bar{x}_2x_3,\ f_6=x_1x_2\bar{x}_3,\ f_4=x_1x_2x_3\}$;

а) $Б=\{\&, \neg\}$, б) $Б=\{\vee, \oplus, \neg\}$.

1.6. Реализовать функцию $f(\tilde{x}^n)$ СФЭ в стандартном базисе, предварительно упростив выражение для $f(\tilde{x}^n)$:

1) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;

2) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$;

3) $f(\tilde{x}^3)=x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3$;

4) $f(\tilde{x}^3)=(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3)=(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_2x_3$;

6) $f(\tilde{x}^3)=(x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;

7) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$.

1.7. Реализовать функцию f СФЭ по методу, основанному на д. н. ф.:

1) $f=(0100\ 0110)$; 2) $f=(0111\ 1110)$;

3) $f=(0001\ 0111)$; 4) $f=(0001\ 1111)$;

5) $f=1\oplus x\oplus zy$; 6) $f=x\oplus y\oplus z$.

1.8. Построить СФЭ глубины l для функции f:

1) $f=x_1x_2x_3x_4,\ l=2$; 2) $f=x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3,\ l=2$;

3) $f=x_1\oplus x_2\oplus x_3,\ l=6$;

4) $f=x_1(x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6) \vee x_2(x_3x_5 \vee x_4x_5 \vee x_4x_6 \vee x_3x_6);\ l=3$;

5) $f=x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4,\ l=2$;

6) $f=(x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1) \vee (x_1\oplus x_2\oplus x_3),\ l=2$.

1.9. Построить одноразрядный двоичный сумматор в базисе $Б$ со сложностью, не превышающей L:

1) $Б=\{\vee, \&, \neg\},\ L=9$; 2) $Б=\{\oplus, \&\},\ L=5$;

3) $Б=\{\downarrow, |, \neg\},\ L=12$.

1.10. 1) Построить дешифратор D_2 в базисе $Б = \{\&, \neg\}$ с числом элементов, не превышающим 6.

2) Построить дешифратор D_n в базисе $Б = \{\&, \neg\}$ такую, что

$$L(D_n) \le 2^{n+1} + n - 4.$$

1.11. 1) Построить мультиплексор M_2 в стандартном базисе с числом элементов, не превышающим 13.

2) Доказать, что $L(M_n) \le 3 \cdot 2^n + 2^{(n+3)/2} + n$.

3) Доказать, что $L(M_n) \ge 2^{n-1}$.

1.12. 1) Построить СФЭ для многополюсника U_1 сложности 3.

2) Доказать, что сложность минимального многополюсника U_n равна $2^{2^n} - n$.

§ 2. Контактные схемы

1. Понятие контактной схемы. Сеть S с k полюсами, в которой каждое ребро помечено буквой из алфавита $X^n = \{x_1, ..., x_n, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$, называется k*-полюсной контактной схемой*, реализующей булевы функции переменных $x_1, ..., x_n$, или, короче, $\langle k, n \rangle$*-схемой*. $\langle 2, n \rangle$-схемы называются X^n*-схемами*. Сеть S называется *сетью контактной схемы*. Контактная схема называется *связной* (*сильно связной, параллельно-последовательной*), если таковой является ее сеть. Параллельно-последовательная контактная схема называется кратко π*-схемой*. Ребра схемы, помеченные символами переменных или их отрицаний, называется *контактами*. Контакт называется *замыкающим*, если он помечен символом переменной, и *размыкающим*, если он помечен символом отрицания переменной. Пусть Σ_1 и Σ_2 – две k-полюсные контактные схемы, полюса каждой из которых помечены буквами $a_1, ..., a_k$. Схемы Σ_1 и Σ_2 называются *изоморфными*, если их сети изоморфны и при этом: а) соответствующие ребра помечены одинаково; б) соответствующие полюса помечены одинаково. Пусть a и b – два полюса контактной схемы Σ, $[a,\ b]$ – некоторая цепь, соединяющая a и b, и $K_{[a,b]}$ – конъюнкция букв, приписанных ребрам цепи $[a,\ b]$. Функция $f_{a,b}(\tilde{x}^n)$, определяемая формулой

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) = \underset{[a,b]}{\vee} K_{[a,b]},$$

в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюса a и b, называется *функцией проводимости между полюсами* $a,\ b$ *схемы* Σ. Говорят что схема Σ *реализует функцию* $g(\tilde{x}^n)$, если в ней существуют полюса a и b такие, что $g(\tilde{x}^n) = f_{a,b}(\tilde{x}^n)$.

Контактная схема с $k+1$ полюсами называется $(1,\ k)$*-полюсником, реализующим функции* $g_1(\tilde{x}^n),\ ...,\ g_k(\tilde{x}^n)$, если существуют полюс a и полюса b_i $(1 \le i \le k)$ такие, что $f_{a,b_i}(\tilde{x}^n) = g_i(\tilde{x}^n)$. При изображении $(1,\ k)$-полюсников полюс a изображается светлым кружком и называется *входом*, полюса b_i изображаются двойными кружками и называются *выходами*, остальные вершины изображаются темными кружками. Если число полюсов схемы не указывается, то имеется в виду двухполюсная контактная схема. Две схемы называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию или систему функций. *Сложностью контактной схемы* называется число ее контактов. Контактная схема, имеющая наименьшую сложность среди всех эквивалентных ей схем, называется *минимальной*. *Сложностью булевой функции* f *в классе контактных схем* (обозначается $L_k(f)$) называется сложность минимальной контактной схемы, реализующей f. *Сложностью булевой функции* f *в классе* π*-схем* называется число контактов в минимальной π-схеме, реализующей f (обозначается $L_\pi(f)$). *Сложностью булевой функции* f *в классе формул* над множеством связок $\{\vee, \&, \neg\}$ называется число вхождений символов переменных. Сложность функции f в этом классе обозначается через $L_{\Phi}(f)$.

П р и м е р 4.3. Построить контактную схему, реализующую функцию $f(\tilde{x}^3)$, заданную вектором ее значений $\tilde{\alpha}_f = (1101\,1100)$.

Р е ш е н и е. Представим f в совершенной д. н. ф. и упростим ее:

$$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3.$$

Схема, соответствующая этой д. н. ф. показана на рис. 4.6.

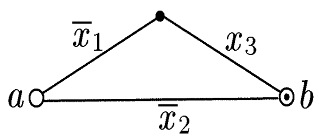


Рис. 4.6

2. Методы синтеза контактных схем. Рассмотрим два метода для синтеза контактных схем, реализующих функции $f(\tilde{x}^n)$.

1) *Метод Шеннона. Контактным* X^n*-деревом* называется контактный $(1,\ 2^n)$-полюсник D_n^k, индуктивное определение которого дано на рис. 4.7. Очевидно, что D_n^k реализует все конъюнкции ранга n переменных $x_1,\ ...,\ x_n$ и что $L_K\left(D_n^k\right) = 2^{n+1} - 2$. $(1,\ m)$-полюсник называется *разделительным,* если для любых его выходов b, c функция проводимости $f_{b,c}(\tilde{x}^n)$ тождественно равна нулю.

Универсальным контактным многополюсником называется $(1,\ 2^{2^n})$-полюсник U_n^k, реализующий все булевы функции переменных $x_1,\ ...,\ x_n$.

Метод Шеннона состоит в использовании схем D_{n-m}^k и U_m^k.

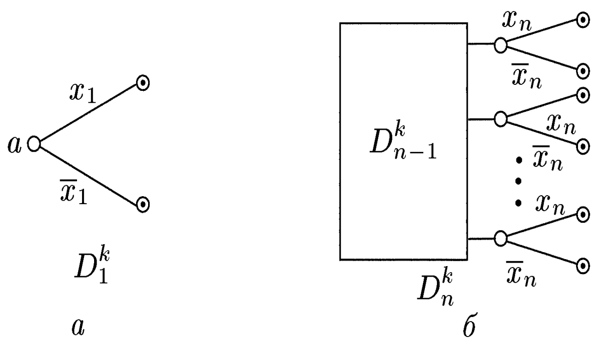


Рис. 4.7

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ – функция, которую следует реализовать. Для набора $\tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_{n-m})\in B^{n-m}$ положим

$$f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)=f(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_{n-m},\ x_{n-m+1},\ ...,\ x_n).$$

По формуле разложения имеем

$$f(\tilde{x}^n)=\bigvee_{\substack{\tilde{\sigma}\in B^{n-m}\\ \tilde{\sigma}=(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_{n-m})}} x_1^{\sigma_1}...x_{n-m}^{\sigma_{n-m}}f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n).$$

Пусть D_{n-m}^k – контактное дерево с полюсами $a,\ b_0,\ b_1,\ ...,\ b_{2^{n-m}-1}$, реализующее конъюнкции $K_{\nu_{\tilde{\sigma}}}=x_1^{\sigma_1}...x_{n-m}^{\sigma_{n-m}}$ между полюсами a и b_k, где $k=\nu(\tilde{\sigma})=\sum_{i=1}^{n-m}2^{n-m-i}\sigma_i$. Пусть U_m^k – универсальный контактный $(2^{2^m},1)$-полюсник с полюсами $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{2^{2^m}-1},\ b$, реализующий все функции $f(x_{n-m+1},\ ...,\ x_n)$.

Рассмотрим схему Σ_f, полученную отождествлением для каждого $\tilde{\sigma}\in B^{n-m}$ выхода $b_\nu(\tilde{\sigma})$ схемы D_{n-m}^k с входом a_r схемы U_m^k таким, что $f_{a,b}(x_{n-m+1},\ ...,\ x_n)=f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)$ (рис. 4.8).

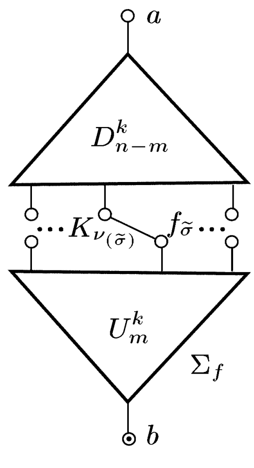


Рис. 4.8

В силу разделительности схемы D_{n-m}^k для полученной таким образом схемы Σ_f с полюсами a и b справедливо равенство

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_{n-m})} x_1^{\sigma_1} ... x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} f_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n).$$

Из построения следует, что сложность схемы Σ_f определяется из равенства

$$L(\Sigma_f) = L(D_{n-m}^k) + L(U_m^k).$$

2) *Метод каскадов* для построения контактных схем состоит в следующем. Пусть требуется реализовать контактной схемой функцию $f(\tilde{x}^n)$ $(n \geq 2)$. Обозначим через U_i $(i = 1,\ ...,\ n-1)$ совокупность всех подфункций $f(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_i,\ x_{i+1},\ ...,\ x_n)$, $(\sigma_1,\ ...,\ \sigma_i) \in B^i$ функции f, и пусть U_i^* – множество, составленное из попарно различных функций из U_i. Каждому множеству U_i^* $(i = 1,\ ...,\ n-1)$ взаимно однозначно сопоставим множество V_i точек плоскости, называемых *вершинами* i*-го ранга*. Добавим еще три полюса – входной полюс a и выходные полюса b и c. Полюс a является вершиной нулевого ранга, полюса b и c – вершинами n-го ранга. Полюсу a сопоставим функцию $f(\tilde{x}^n)$, полюсам b и c – функции, тождественно равные единице и нулю. Положим $V = \{a,\ b\} \bigcup \bigcup_{i=1} V_i$. Множество V разобьем на классы эквивалентности, отнеся к одному классу вершины разных рангов в том и только том случае, когда они соответствуют равным функциям. Пусть v – произвольная вершина i-го ранга, а $\varphi_v(x_{i+1},\ ...,\ x_n)$ – соответствующая ей функция, и пусть $\varphi_v(0,\ x_{i+2},\ ...,\ x_n) \neq \varphi_v(1,\ x_{i+2},\ ...,\ x_n)$. Тогда соединим вершину v контактом x_{i+1} с вершиной u ранга $i+1$, которая соответствует подфункции $\varphi_v(1,\ x_{i+2},\ ...,\ x_n)$, и контактом $\bar{x}_{i+1}$ с вершиной w, соответствующей подфункции $\varphi_v(0,\ x_{i+2},\ ...,\ x_n)$. Если же $\varphi_v(0,\ x_{i+2},\ ...,\ x_n) \equiv \varphi_v(1,\ x_{i+2},\ ...,\ x_n)$, то обе подфункции равны тождественно функции $\varphi_v(x_{i+1},\ ...,\ x_n)$, и контакты между соответствующими верши-

нами не проводятся. Все вершины из одного класса эквивалентности отождествляются. В результате получаем схему Σ_f такую, что $f_{a,b}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$, $f_{a,c}(\tilde{x}^n) = \overline{f}(\tilde{x}^n)$. В случае, когда интересует только реализация функции f, вершина c вместе с инцидентными ей контактами может быть удалена. В дальнейшем будем рассматривать схемы, в которых вершина c отброшена. Изложенный метод переносится на реализацию систем булевых функций.

Пример 4.4. С использованием метода каскадов построить контактную схему для функции $f = x_1 x_2 \oplus x_3$.

Решение. Имеем $U_1^* = \{x_3,\ x_2 \oplus x_3\}$, $U_2^* = \{x_3,\ \overline{x}_3\}$, $U_3^* = \{0,\ 1\}$. Полагаем $V_0 = \{a\}$, $V_1 = \{1,\ 2\}$, $V_2 = \{3,\ 4\}$, $V_3 = \{5,\ 6\}$. Вершины 2 и 4, соответствующие x_3, эквивалентны. На рис. 4.9, *а* показан способ проведения ребер. Схема, полученная отождествлением эквивалентных вершин, представлена на рис. 4.9, *б*. □

3. Двойственные контактные схемы. Пусть двухсвязная двухполюсная контактная схема Σ является плоской (т. е. ее сеть $S(a,\ b)$ является плоской) и ее полюсы a и b лежат в одной грани. Проведем в этой грани ребро $(a,\ b)$ так, чтобы сеть S', полученная из S добавлением ребра $(a,\ b)$, осталась плоской. Выберем в каждой грани сети S' по одной вершине. Построим на выбранных вершинах граф G^*, двойственный к графу G сети S'. Каждое отличное от $(a,\ b)$ ребро графа G^* пересекает некоторый контакт схемы Σ. Пометим это ребро той буквой, которой помечен пересекаемый им контакт. Вершины графа G^*, расположенные в гранях сети S', разделенных ребром $(a,\ b)$, обозначим через a^*, b^* и назовем *полюсами*. Удалим ребро $(a^*,\ b^*)$ из G^*. В результате получаем двухсвязную схему Σ^* с полюсами a^* и b^*, которая называется схемой, двойственной к Σ.

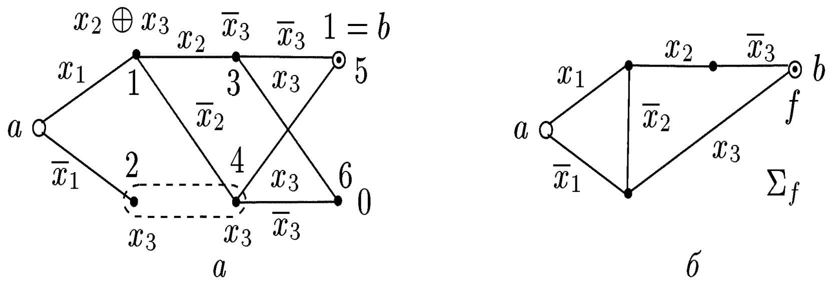


Рис. 4.9

Пример 4.5. На рис. 4.10 проиллюстрирован процесс построения двойственной схемы.

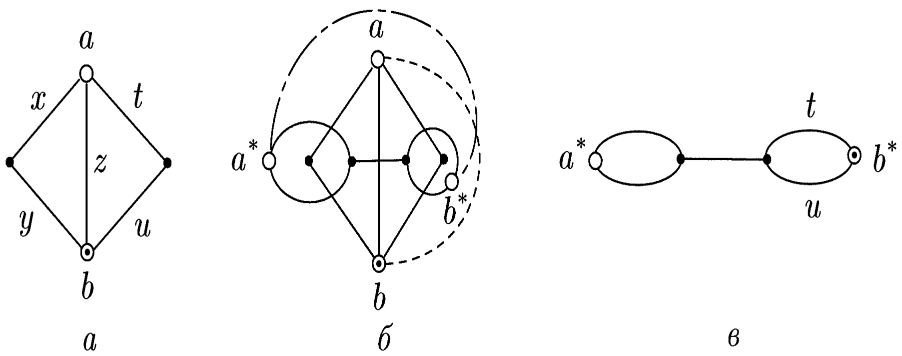


Рис. 4.10

4. Задачи и упражнения

2.1. Найти функции, реализуемые двухполюсными схемами Σ, представленными на рис. 4.11.

2.2. Представив функцию f в д. н. ф. или к. н. ф., построить π-схему, реализующую f:

1) $f(\tilde{x}^2) = (1101)$; 2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \sim x_2$;

3) $f(\tilde{x}^3) = (1000\ 1111)$; 4) $f(\tilde{x}^3) = (1110\ 1000)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (0100\ 0010)$; 6) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_1 \oplus x_2)$;

7) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus 1$.

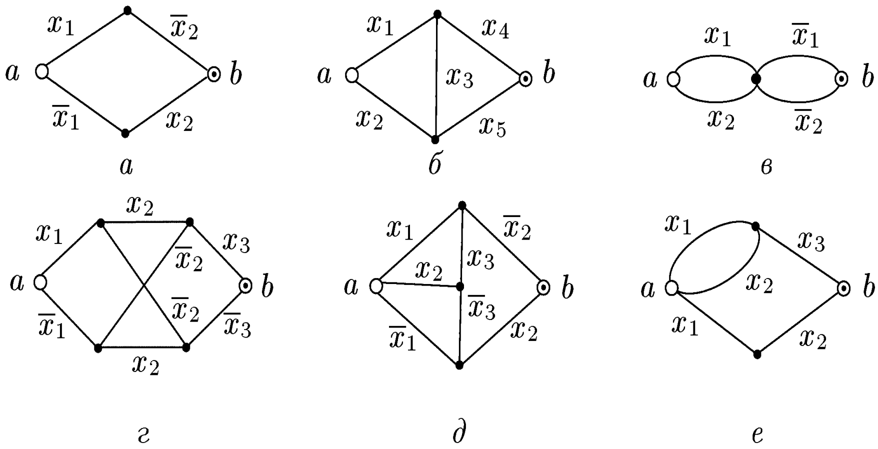


Рис. 4.11

2.2. Представив функцию f в д. н. ф. или к. н. ф., построить π-схему, реализующую f:

1) $f(\tilde{x}^2) = (1101)$; 2) $f(\tilde{x}^2) = x_1 \sim x_2$; 3) $f(\tilde{x}^3) = (1000\ 1111)$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (1110\ 1000)$; 5) $f(\tilde{x}^3) = (0100\ 0010)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_1 \oplus x_2)$; 7) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus 1$.

2.3. Построить контактную схему, реализующую функцию f:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$; 3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$; 5) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow (x_3 \mid \bar{x}_2)$;

6) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2x_3 \oplus 1$; 7) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2x_3)(x_1 \oplus x_3)$.

2.4. Построить контактную схему сложности, не превышающей l, реализующую функцию f:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2x_3$, $l = 6$;

2) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_2\oplus\bar{x}_2x_3\oplus x_3x_1\oplus 1,\ l=5$;

3) $f(\tilde{x}^3)=x_1\bar{x}_3\oplus x_2x_3\oplus\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\oplus 1,\ l=5$;

4) $f(\tilde{x}^3)=x_1x_2\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2,\ l=5$;

5) $f(\tilde{x}^4)=\bar{x}_1x_4\vee x_2x_3x_4\vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4\vee x_1\bar{x}_4,\ l=7$;

6) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\oplus x_2\oplus x_3)(x_1\vee x_3),\ l=5$;

7) $f(\tilde{x}^4)=(0000\ 0001\ 0111\ 1111),\ l=7$.

2.5. Построить контактную схему, реализующую f и имеющую сложность не выше L, упростив предварительно формулу, с помощью которой она задана:

1) $f(\tilde{x}^5)=((x_1\vee x_2)(\bar{x}_2\vee x_4)\vee(x_3\vee\bar{x}_4)(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee x_4x_5))(x_1\vee x_2x_3),\ L{=}5$;

2) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee\bar{x}_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4,\ L{=}4$;

3) $$f(\tilde{x}^6)=((x_1\vee x_2)(x_1x_2\vee\bar{x}_2\bar{x}_3)x_6\vee(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\bar{x}_5)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\vee \\ \vee(\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_2\vee x_6)x_3\vee x_1x_2\vee x_5x_6),\ L{=}1;$$

4) $$f(\tilde{x}^7)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3((\bar{x}_4\vee\bar{x}_1\bar{x}_5)(x_5\vee x_1\bar{x}_4x_7)\vee(x_6x_7\vee x_2x_4x_5)\,\& \\ \&(\bar{x}_4x_5\vee\bar{x}_3x_6\bar{x}_7))\vee(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)(\bar{x}_4\vee\bar{x}_6)(x_5\vee x_7),\ L{=}6;$$

5) $$f(\tilde{x}^4)=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus x_4\oplus x_1x_2x_3x_4\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus x_2x_3\oplus \\ \oplus x_2x_4\oplus x_3x_4\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_4\oplus x_2x_3x_4,\ L{=}4;$$

6) $f(\tilde{x}^4)=x_1x_2x_3x_4\vee(\bigoplus\limits_{1\le i<j\le 4}x_ix_j),\ L{=}6$.

2.6. Построить контактную схему сложности, не превышающей L, реализующую систему функций Φ:

1) $\Phi=\{f_1=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1,\ \ f_2=x_1\oplus x_2\oplus x_3\},\ L{=}12$;

2) $$\Phi=\{f_1=(0000\ 0001),\ f_2=(0000\ 0011),\ f_3=(0000\ 0111), \\ f_4=(0000\ 1111),\ f_5=(0001\ 1111),\ f_6=(0011\ 1111), \\ f_7=(0111\ 1111)\},\ L=11;$$

3) $\Phi=\{f_0=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2,\ f_1=\bar{x}_1\vee x_2,\ f_2=x_1\vee\bar{x}_2,\ f_3=x_1\vee x_2\},\ L{=}6$;

4) $\Phi=\{f_0=\bar{x}_1\bar{x}_2,\ f_1=\bar{x}_1x_2,\ f_2=x_1\bar{x}_2,\ f_3=x_1x_2\},\ L{=}6$;

5) $\Phi = \{ f_1 = (0000\ 0001),\ \ f_2 = (0001\ 0111),\ \ f_3 = (0111\ 1111)\},\ L = 9$;

6) $\Phi = \{ f_1 = (1001\ 0110),\ \ f_2 = (0110\ 1001),\ \ f_3 = (0011\ 1100),$
$f_4 = (1100\ 0011)\},\ L = 10.$

2.7. Найти функции, реализуемые контактными схемами, изображенными на рис. 4.12.

2.8. Пусть $\nu(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}\alpha_i$ – номер набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n)$. Построить контактную схему с не более чем l контактами, реализующую функцию $f(\tilde{x}^4)$:

1) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \ \nu(\alpha_1, \alpha_2) \le \nu(\alpha_3, \alpha_4), \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 7$;

2) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \ \nu(\alpha_1, \alpha_2) = \nu(\alpha_3, \alpha_4), \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 8$;

3) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 12$;

4) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \ \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \alpha_3 + \alpha_4 \pmod 2, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 8$;

5) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \ \alpha_1 + \alpha_2 \le \alpha_3 + \alpha_4, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 10$;

6) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \ (\alpha_1 \le \alpha_3)\,\&\,(\alpha_2 \le \alpha_4), \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 4$;

7) $f(\tilde{x}^4) = \begin{cases} 1, \text{ если наборы } (\alpha_1,\ \alpha_2) \text{ и } (\alpha_3,\ \alpha_4) \text{ несравнимы,} \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$ $l = 8$.

2.9. Построить контактную схему для одноразрядного двоичного сумматора.

2.10. С использованием метода каскадов построить контактную схему для функции f:

1) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus 1$; 2) $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$; 4) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

5) $f(\tilde{x}^3) = (0110\ 1000)$; 6) $f(\tilde{x}^3) = (0110\ 1101)$;

7) $f(\tilde{x}^4) = (0000\ 0001\ 0111\ 1111)$.

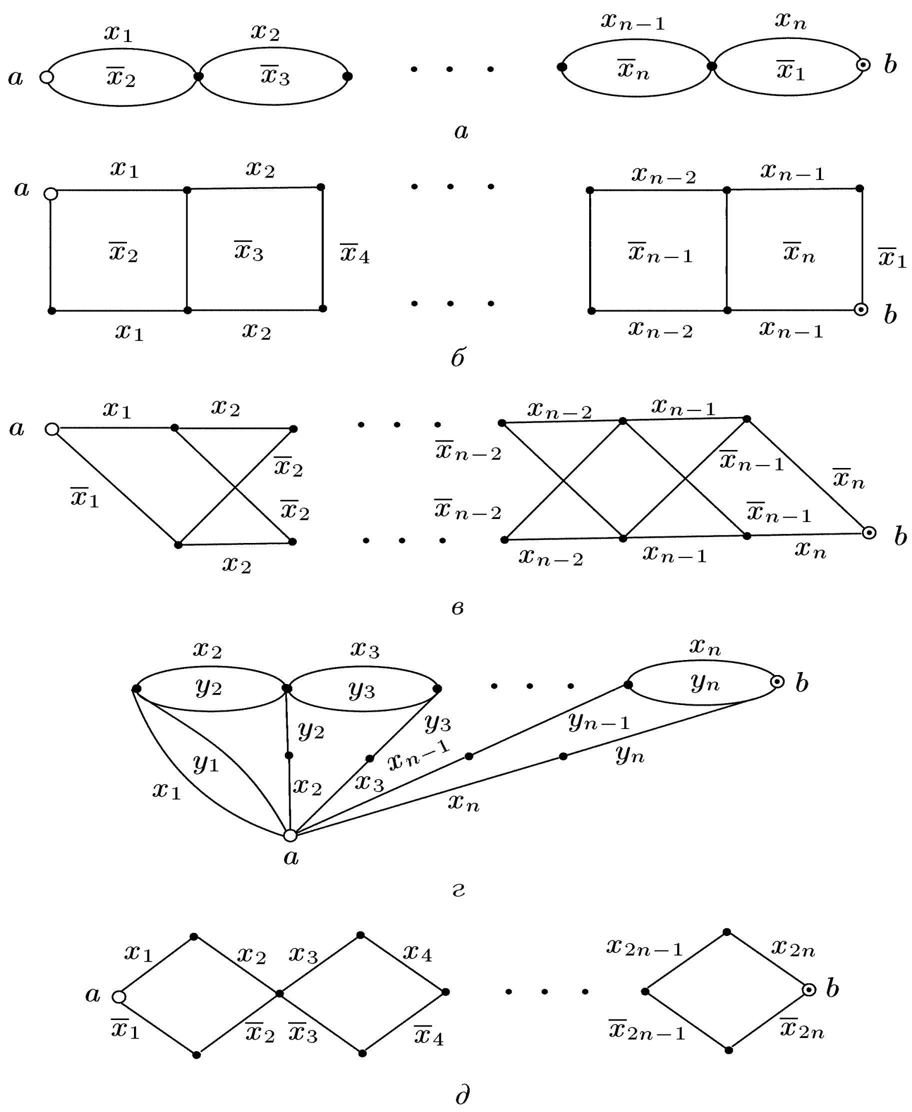


Рис. 4.12

2.11. С использованием метода каскадов построить контактную схему для системы функций Φ:

1) $\Phi = \{ f_1 = x_1 x_2,\ f_2 = x_1 \vee x_2 \}$;

2) $\Phi = \{ f_1 = x_2 \oplus x_3,\ f_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\ f_3 = \overline{x}_2 \}$;

3) $\Phi = \{ f_1 = x_3,\ f_2 = \overline{x}_3,\ f_3 = x_2 \oplus x_3,\ f_4 = x_2 \sim x_3,\ f_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,$
$f_6 = \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3} \}$;

4) $\Phi=\{f_1=\bar{x}_2\bar{x}_3,\ f_1=\bar{x}_2\vee\bar{x}_3,\ f_3=x_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1\bar{x}_2\}$;

5) $\Phi=\{f_1=x_1\oplus x_2\oplus x_3,\ f_2=(x_1\vee x_2)\bar{x}_3\vee x_1x_2\}$;

6) $\Phi=\{f_1=x_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3,\ f_2=x_1\bar{x}_3\vee\bar{x}_2\}$;

7) $\Phi=\{f_1=x_1\vee x_2,\ f_2=x_1\vee\bar{x}_2,\ f_4=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\}$;

8) $\Phi=\{f_1=x_1x_2,\ f_2=x_1\bar{x}_2,\ f_3=\bar{x}_1\bar{x}_2\}$.

2.12. Для схем, указанных на рис. 4.13 построить двойственные.

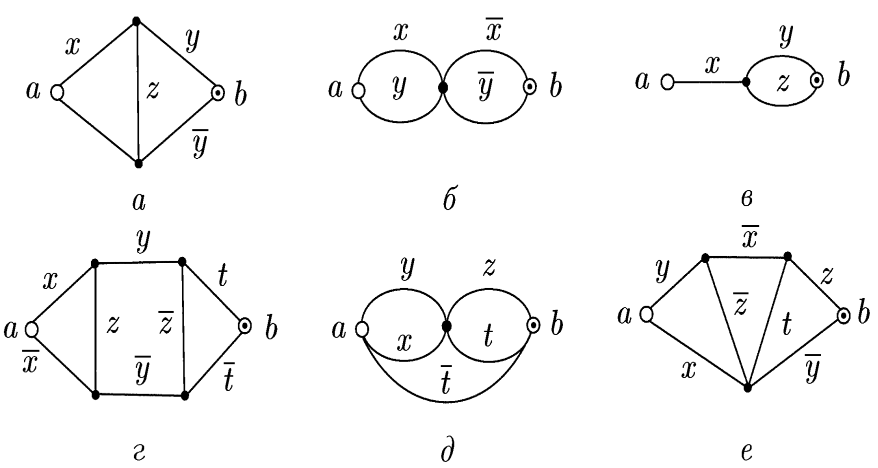


Рис. 4.13

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1

§ 1.

1.2. 1) Да. 2) Нет. 3) Нет. 4) Да. 5) Да. 6) Да. 7) Нет.

8) Да. $(A\bigcap \overline{B})\bigcup B= =(A\bigcup B)\bigcap(\overline{B}\bigcup B)=(A\bigcup B)\bigcap U=A\bigcup B=B\bigcup A$.

1.3. 1). Используем принцип равнообъемности.

Пусть $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$. Тогда $x\in A$ и $x\in B\bigcup C$. Если $x\in B$, то $x\in A\bigcap B$ (т. к. $x\in A$), а значит, $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$. Если $x\in C$, то $x\in A\bigcap C$ (т. к. $x\in A$), а значит, $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$. Итак, $A\bigcap(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

Пусть $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$. Если $x\in A\bigcap B$, то $x\in A$ и $x\in B$. Отсюда следует, что $x\in A$ и $x\in B\bigcup C$, т. е. $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$. Если $x\in A\bigcap C$, то $x\in A$ и $x\in C$. Отсюда следует, что $x\in A$ и $x\in B\bigcup C$, т. е. $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$. Итак, $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$.

9) Используем формулу $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$. Тогда

$(A\setminus B)\setminus C=(A\bigcap\overline{B})\setminus C=A\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}$, $(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)=(A\bigcap\overline{C})\setminus(B\bigcap\overline{C})=$

$=(A\bigcap\overline{C})\bigcap\overline{B\bigcap\overline{C}}=(A\bigcap\overline{C})\bigcap(\overline{B}\bigcup C)==A\bigcap\overline{C}\bigcap\overline{B}\bigcup A\bigcap\overline{C}\bigcap C=A\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}$.

11) Используем формулу $A\oplus B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$. Тогда $(A\oplus B)\bigcup(A\bigcap B)=$

$=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)\bigcup(A\bigcap B)=(A\bigcap\overline{B})\bigcup(B\bigcap\overline{A})\bigcup(A\bigcap B)=$
$=A\bigcap(\overline{B}\bigcup B)\bigcup(B\bigcap\overline{A})=A\bigcap U\bigcup(\overline{A}\bigcap B)=A\bigcup(\overline{A}\bigcap B)=(A\bigcup\overline{A})\bigcap(A\bigcup B)=$

$=[U\bigcap(A\bigcup B)=A\bigcup B$.

1.4. 3) Пусть $A\bigcap B\subseteq C$ и $x\in A$. Если $x\in B$, то $x\in A\bigcap B\subseteq C$, т. е. $x\in\overline{B}\bigcup C$. Если $x\in\overline{B}$, то $x\in\overline{B}\bigcup C$.

Пусть $A\subseteq\overline{B}\bigcup C$ и $x\in A\bigcap B$. Тогда $x\in A$ и $x\in B$. Значит, $x\in C$.

1.5. 1) $A\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{B}+B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot C=A\cdot(B\cdot C+\bar{B})+B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot C=$

$=A\cdot(B+\bar{B})\cdot(C+\bar{B})+B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot C=A\cdot U\cdot(C+\bar{B})+B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot C=$

$=A\cdot C+A\cdot\bar{B}+B\cdot\bar{C}+\bar{A}\cdot C=C\cdot(A+\bar{A})+A\cdot\bar{B}+B\cdot\bar{C}=$

$=C\cdot U+A\cdot\bar{B}+B\cdot\bar{C}=C+A\cdot\bar{B}+B\cdot\bar{C}=(C+B)\cdot(C+\bar{C})+A\cdot\bar{B}=$

$=(C+B)\cdot U+A\cdot\bar{B}=C+B+A\cdot\bar{B}=(B+A)\cdot(B+\bar{B})+C=(A+B)\cdot U+C=$

$=A+B+C$.

2) $B\bigcap C$.

1.6. 1) $X\supset Y$. 2) $X\subset Y$. 3) $X\subset Y$. 4) $X\supset Y$. 5) $X\supset Y$. 6) $X=Y$.

7) $X\subset Y$. 8) $X=Y$. 9) $X=Y$. 10) Никакое. 11) Никакое.

12) $\overline{A\oplus B}=\overline{(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)}=\overline{A\setminus B}\bigcap\overline{B\setminus A}=\overline{A\bigcap\bar{B}}\bigcap\overline{B\bigcap\bar{A}}=$

$=(\bar{A}\bigcup B)\bigcap(\bar{B}\bigcup A)=A\bigcap B\bigcup\bar{A}\bigcap\bar{B}$, т. е. $X=Y$.

13) Никакое. 14) $X=\overline{A\bigcap B\bigcap C}=U\setminus(A\bigcap B\bigcap C)$,

$Y=\bar{A}\bigcap\bar{B}\bigcap\bar{C}=\overline{A\bigcup B\bigcup C}=U\setminus(A\bigcup B\bigcup C)$. Поскольку

$(A\bigcap B\bigcap C)\subseteq(A\bigcup B\bigcup C)$, то $X\supset Y$.

15) $X\subset Y$. 16) $X=Y$.

1.7. 1) $X=(A\setminus B)\bigcup C$; $B\subset A$, $A\bigcap C=\varnothing$. 2) $X=C\setminus B$; $B\subset A\subset C$.

3) $X=B=C$; $A\subset B=C$. 4) $X=(C\setminus A)\bigcup B$; $B\subset A\subset C$.

5) $X=C$; $A\subset C$, $B\subset C$, $A\bigcap B=\varnothing$. 6) $X=B=C$, $A\subset B=C$.

1.8. 1) $X=A$; $C\subset A\subset B$. 2) $X=A$; $C\subset A\subset B$.

3) Система несовместна.

4) $X=\varnothing$; $A=B$, $C=\varnothing$. 5) $X=C\setminus A$; $A\subset B\subset C$.

6) $X=B$; $A\subset B\subset C$.

1.9. 1) $A\bigcap\bar{B}\bigcap\bar{C}\bigcup\bar{A}\bigcap B\bigcap C\bigcup\bar{A}\bigcap B\bigcap\bar{C}\bigcup\bar{A}\bigcap\bar{B}\bigcap C$.

2) $A\cap B\cap C\cup\bar{A}\cap B\cap C\cup\bar{A}\cap B\cap\bar{C}\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cap C\cup A\cap B\cap\bar{C}\cup A\cap\bar{B}\cap C\cup$

$\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.

3) $A\bigcap\bar{B}\bigcap\bar{C}\bigcup\bar{A}\bigcap B\bigcap C$. 4) $A\cap B\cap C\cup\bar{A}\cap B\cap C\cup\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.

§ 2.

2.1. 1) См. пример 1.18.

2) $\delta_\alpha = \gamma_\alpha = R$, $\alpha^{-1} = \alpha$, $\alpha \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = R^2$.

3) $\delta_\alpha = \gamma_\alpha = R$, $\alpha^{-1} = \{(x, y) \mid x, y \in R \,\&\, (2y \geq 3x)\}$,

$\alpha \circ \alpha = \{(x, y) \mid x, y \in R \,\&\, (4x \geq 9y)\}$, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = R^2$.

4) $\delta_\alpha = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\gamma_\alpha = \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\alpha^{-1} = \left\{(x, y) \mid x, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \& \,(x \geq \sin y)\right\}$, $\alpha \circ \alpha = \{(x, y) \mid \sin\sin x \leq y)\}$,

$\alpha \circ \alpha^{-1} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$, $\alpha^{-1} \circ \alpha = \left\{(x, y) \mid x, y \in \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

2.2. 3) $(x, y) \in (\alpha_1 \bigcup \alpha_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \alpha_1 \bigcup \alpha_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y, x) \in \alpha_1 \vee (y, x) \in \alpha_2 \Leftrightarrow (x, y) \in \alpha_1^{-1} \vee (x, y) \in \alpha_2^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \alpha_1^{-1} \bigcup \alpha_2^{-1}$.

5) Пусть α – бинарное отношение между элементами множеств A и B. $(x, y) \in \overline{\alpha^{-1}} \Leftrightarrow (x, y) \in (B \times A) \setminus \alpha^{-1} \Leftrightarrow (x \in B, y \in A) \wedge (x, y) \notin \alpha^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in B,\ y \in A) \wedge (y, x) \notin \alpha \Leftrightarrow (y, x) \in (A \times B) \setminus \alpha \Leftrightarrow (y, x) \in \bar{\alpha} \Leftrightarrow (x, y) \in \bar{\alpha}^{-1}$.

2.3. 1) $2^{m \cdot n}$. 2) n^m. 3) $m = n$.

2.5. 3) рефлексивность, симметричность, антитранзитивность.

5) антирефлексивность, симметричность, антитранзитивность.

2.6. См. пример 1.26.

2.7. Если α – биекция между X и Y, то результат следует из задачи 2.6. Обратно, $\delta_\alpha = X$, так как $\alpha \circ \alpha^{-1} = e_X$; $\gamma_\alpha = Y$, так как $\alpha^{-1} \circ \alpha = e_Y$. Если $(x, y) \in \alpha$ и $(x, z) \in \alpha$, то $(y, z) \in \alpha^{-1} \circ \alpha$, а значит $y = z$. Если $(y, x) \in \alpha$ и $(z, x) \in \alpha$, то $(y, z) \in \alpha \circ \alpha^{-1}$, а значит, $y = z$.

2.10. α – рефлексивное отношение на $X \Leftrightarrow e_X \subseteq \alpha$.

2.11. α – иррефлексивное отношение на $X \Leftrightarrow \alpha \bigcap e_X = \varnothing$. Например, пусть $\alpha_1 = \{(x, y) \mid x, y \in N,\ x < y\}$, $\alpha_1 = \alpha_1^{-1}$. Тогда $\alpha_1 \circ \alpha_2$ рефексивно.

2.12. α симметрично $\Leftrightarrow \alpha = \alpha^{-1}$.

2.13. $\alpha_1 \circ \alpha_2$ симметрично $\Leftrightarrow \alpha_1 \circ \alpha_2 = (\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} = \alpha_2 \circ \alpha_1$,
$\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1 \Rightarrow (\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = (\alpha_2 \circ \alpha_1)^{-1} = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2^{-1} = \alpha_1 \circ \alpha_2$.

2.14. 1) α антисимметрично на $X \Leftrightarrow \alpha \bigcap \alpha^{-1} \subseteq e_X$.

2) $(\alpha_1 \bigcup \alpha_2) \bigcap (\alpha_1 \bigcup \alpha_2)^{-1} = (\alpha_1 \bigcup \alpha_2) \bigcap (\alpha_1^{-1} \bigcup \alpha_2^{-1})$; $\alpha_1^{-1} \bigcap \alpha_2 = (\alpha_1 \bigcap \alpha_2^{-1})^{-1}$.

2.15. 1) См. задачу 2.5. 3).

2) Например, $\{(x,\ y) \mid x,\ y \in Z,\ x \le y \le x^2\}$.

3) $\{(x,\ y) \mid x,\ y \in R,\ x \le y\}$.

4) $\{(x,\ y) \mid x,\ y \in R,\ x < y\}$.

2.16. $\alpha \subseteq e_X$.

2.17. 1) Да. 2) Нет.

2.19. $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$ – эквивалентность $\Rightarrow \alpha^{-1} = \alpha$,
$\alpha_1 \circ \alpha_2 \subseteq (\alpha_1 \bigcup \alpha_2) \circ (\alpha_1 \bigcup \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \bigcup \alpha_2$. $\alpha_1 \bigcup \alpha_2 = (\alpha_1 \circ e_X) \bigcup (e_X \circ \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \circ \alpha_2$.

Обратно, пусть $\alpha_1 \bigcup \alpha_2 = \alpha_1 \circ \alpha_2$. Тогда $\alpha_2 \circ \alpha_1 = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} = (\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} =$
$= (\alpha_1 \bigcup \alpha_2)^{-1} = \alpha_1 \bigcup \alpha_2$, $(\alpha_1 \bigcup \alpha_2) \circ (\alpha_1 \bigcup \alpha_2) = (\alpha_1 \circ \alpha_1) \bigcup (\alpha_2 \circ \alpha_1) \bigcup (\alpha_1 \circ \alpha_2) \bigcup$
$\bigcup (\alpha_2 \circ \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \bigcup \alpha_2$, т. е. $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$ транзитивно.

Симметричность и рефлексивность $\alpha_1 \bigcup \alpha_2$ очевидна.

2.20. $\alpha_1 \circ \alpha_2$ – эквивалентность $\Rightarrow \alpha_1 \circ \alpha_2 = (\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} =$
$= \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} = \alpha_2 \circ \alpha_1$. Пусть $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \alpha_2 \circ \alpha_1$. Тогда $(\alpha_1 \circ \alpha_2)^{-1} = (\alpha_2 \circ \alpha_1)^{-1} =$
$= \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2^{-1} = \alpha_1 \circ \alpha_2$, т. е. $\alpha_1 \circ \alpha_2$ симметрично. Далее
$(\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2) = \alpha_1 \circ (\alpha_2 \circ \alpha_1) \circ \alpha_2 = \alpha_1 \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2) \circ \alpha_2 =$
$= (\alpha_1 \circ \alpha_1) \circ \circ (\alpha_2 \circ \alpha_2) \subseteq \alpha_1 \circ \alpha_2$, т. е. $\alpha_1 \circ \alpha_2$ транзитивно. Рефлексивность $\alpha_1 \circ \alpha_2$ очевидна.

ГЛАВА 2

§ 1.

1.1. 3) 205. 5) $2^{m+1}+1$. 7) $2^{3m+1}+2^{2m+1}-2^{m+1}+1$.

1.2. 2) (1110 0111). 4) При $m=2$ имеем (10), при $m=3$ – (101). Если $m\geq 4$, то $n=2^{m-1}+2^{m-2}-1$, набор имеет вид $(10\underbrace{1...1}_{m-2\text{ раз}}1)$.

1.3. 1) (00110) $\preccurlyeq$ (00111), (00110) $\preccurlyeq$ (10110), (01010) $\preccurlyeq$ (01011) $\preccurlyeq$ (11011).

1.4. 1) C_n^k. 2) 2^{n-1}.

3) $n\cdot 2^n$. Число наборов соседних с $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_n)$ равно n.

4) $C_n^k\cdot 2^n$. Любой набор $\tilde{\beta}^n$, отстоящий от фиксированного набора $\tilde{\alpha}^n$ на расстоянии k, получается из $\tilde{\alpha}^n$ подходящей заменой некоторых k компонент на противоположные.

5) 2^k.

1.5. 2) Сравнимые противоположные наборы длины n: (0, …, 0) и (1, …, 1).

3) В таком подмножестве есть наборы одинакового веса.

1.6. 1) 2^{2^n-l}. 2) 2^{2^n-1}. 3) 2. 4) $2^{3\cdot 2^n-2}$. 5) 2^{n+1}.

§ 2.

2.1. 1) – 9), 11), 12) Не являются. Добавляя скобки, можно превратить в формулы выражения 1), 2), 4), 8), 11) и 12).

2.2. 1) – 5), 8) – 10) Не являются. Добавляя скобки, запятые и переменные в формулы можно превратить выражения 4) и 5).

2.3. 1) Пятью способами. 3) семью способами. 5) Тремя способами. 6) Девятью способами.

2.4. 2) См. рис. О.2.1. 4) См. рис. О.2.2. 5) См. рис. О.2.3. 7) См. рис. О.2.4.

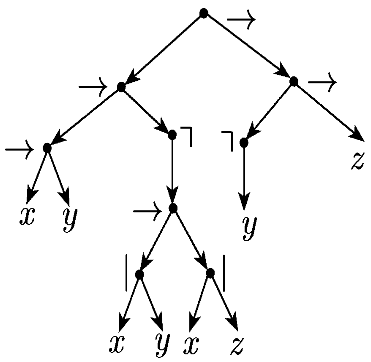


Рис. О.2.1

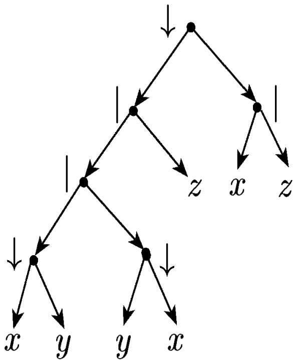


Рис. О.2.2

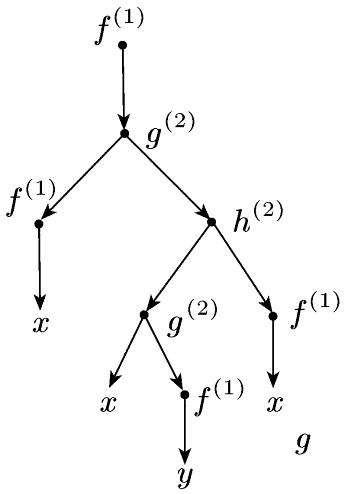


Рис. О.2.3

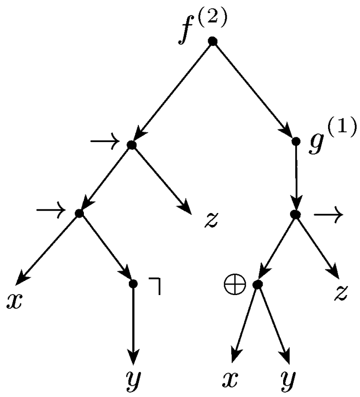


Рис. О.2.4

2.5. 1) $(((0\oplus(x\oplus(y\vee x)))\vee x)\&(y\oplus((\neg x)\to 1)))$.

3) $f^{(3)}(g^{(3)}(1,\ h^{(2)}(x,\ y),\varphi^{(1)}(x)),\ 2,\ h^{(2)}(x,\ \varphi^{(1)}(h^{(2)}(x,\ \varphi^{(1)}(h^{(2)}(2,\ x))))$.

6) $f^{(3)}(((\neg x)\oplus 1,\ h^{(2)}(\neg x,\ 1),\ (\neg g^{(2)}(1,\ f^{(3)}((x\& y),\ 1,\ h^{(2)}(x,\ x)))))$.

2.6. 2), 6), 10) Эквивалентны. 3), 7) Не эквивалентны.

2.8. 2) $x\vee y=(x\to y)\to y$. 3) $x\sim y=(x\to y)\&(y\to x)$.

§ 3.

3.2. 1), 2), 3), 5), 7), 10), 12) Является.

3.3. 1) $f^* = (x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z})^* = (x \vee 0) \cdot (y \vee z \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})) =$
$= x \cdot ((y \vee z) \cdot (\bar{y} \vee \bar{z})) = x \cdot (y \oplus z).$

5) $f^* = (((x \to y) \vee z) \cdot (y \cdot \bar{z} \to (x \oplus y \cdot z)))^* =$

$= (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{y} \vee z \vee x \cdot \bar{z}))^* == z \cdot (x \cdot y \vee \bar{x} \cdot \bar{y})^* = z \cdot (x \sim y)^* = z \cdot (x \oplus y).$

10) $f^* = ((x \cdot (y \cdot z \vee 0) \sim (t \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y)) \vee \bar{y} \cdot t)^* =$

$= (x \cdot y \cdot z \cdot (t \vee \bar{x} \cdot y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (x \vee \bar{y}) \cdot \bar{t} \vee \bar{y} \cdot t)^* = (x \cdot y \cdot z \cdot t \vee x \cdot \bar{z} \cdot \bar{t} \vee \bar{y} \cdot \bar{t})^* =$
$= (x \vee y \vee z \vee t) \cdot (x \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \cdot \bar{y} = (x \vee y \cdot \bar{z} \vee y \cdot \bar{t} \vee z \cdot \bar{t} \vee \bar{z} \cdot t) \cdot \bar{y} = (x \vee (z \oplus t)) \cdot \bar{y}.$

§ 4.

4.1. 1) Фиктивные переменные x_1 и x_2. 3) Фиктивная переменная x_2.

5) Фиктивные переменные x_1 и x_3.

4.2. 3) $f \equiv 1$.

6) $f = (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus (\bar{x}_2 \vee x_1) \cdot x_3 =$

$= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3) \vee \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (\bar{x}_2 \vee x_1) \cdot x_3 = \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 =$

$= \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2 = x_2 \vee \bar{x}_3.$

9) $f \equiv 0$. 10) $f \equiv 1$.

4.3. 1) Существенных переменных нет. 3) Переменная x_1. 9) Переменные x_1 и x_2. 10) Переменные x_2, x_3 и x_4.

4.4. 1), 2), 5), 7) – 10) Можно. 3), 4), 6) Нельзя.

4.6. 2) Достаточно рассмотреть одну из функций
$m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ или $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

§ 5.

5.1. 2) $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$. 4) $\bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

6) $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4$.

5.2. 1) $(x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$. 2) $(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

5) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

6) $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$.

5.3. 4) $f(\tilde{x}^3) = \overline{\overline{x_1 \vee x_2x_3} \cdot \overline{\overline{\overline{\bar{x}_1x_2} \vee x_3}}} = (x_1 \vee x_2x_3) \vee (\overline{\bar{x}_1x_2} \vee x_3) =$

$= x_1 \vee x_2x_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3$.

10) $f(\tilde{x}^4) = \overline{x_1 \vee x_2} \cdot (\overline{x_2x_3} \vee x_1\bar{x}_4) \cdot \overline{x_1 \vee \overline{x_3x_4}} = \bar{x}_1\bar{x}_2(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4)\bar{x}_1x_3x_4 =$

$= \bar{x}_1x_2x_3x_4$.

5.4. 1) $f(\tilde{x}^2) = ((\bar{x}_1 \vee x_2) \oplus \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2})(x_1 \sim x_2(\bar{x}_1 \vee x_2)) =$

$= (\overline{x_1 \cdot \bar{x}_2} \oplus \overline{\bar{x}_1 \cdot x_2})(x_1 \sim x_2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \sim x_2) = 0 =$

$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

3) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$.

6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

5.5. 2) $f(\tilde{x}^3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 =$

$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

5) $f(\tilde{x}^3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 =$

$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$.

5.6. 1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_3) =$

$= (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

5) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\,\&$

$\&(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

5.7. 3) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 =$

$= x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$.

6) $f(\tilde{x}^4) = (x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)(x_2x_3 \vee x_2\bar{x}_4 \vee x_3x_4) =$

$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_4$.

5.8. 2) $f(\tilde{x}^3)=(x_1\vee x_2)(\bar{x}_2\vee x_2)(x_1\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)\vee\bar{x}_2x_3=$

$=(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_2)(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_2\vee\bar{x}_3\vee\bar{x}_2)(x_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee\bar{x}_3\vee x_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3\vee x_3)=$
$=(x_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)=(\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)$.

5.9. 1) $x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1$.

4) $x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1$.

6) $x_1x_2x_3x_4\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus x_2x_3\oplus x_2x_4\oplus x_1\oplus x_2$.

5.10. 1) $f(\tilde{x}^2)=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_1x_2=\bar{x}_1\vee\bar{x}_2=\overline{x_1x_2}=x_1x_2\oplus 1$.

3) $f(\tilde{x}^3)=\overline{\overline{x_1\vee x_2}\cdot\overline{x_2\vee x_3}}=\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3}=(x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)(x_3\oplus 1)\oplus 1=$

$=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3$.

9) $f(\tilde{x}^4)=x_1\vee\bar{x}_2\vee\overline{x_2\vee\bar{x}_3}x_4=x_1\vee\bar{x}_2\vee x_4=\overline{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4}=$

$=(x_1\oplus 1)x_2(x_4\oplus 1)\oplus 1==x_1x_2x_4\oplus x_1x_2\oplus x_2x_4\oplus x_2\oplus 1$.

5.11. 1) $x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2\oplus 1$. 3) $x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_2\oplus x_3$.

7) $x_1x_2x_4\oplus x_2x_3x_4\oplus x_1x_3\oplus x_1x_4\oplus x_2x_4$.

§ 6.

6.1. 1) $\{x_1,\ \bar{x}_1,\ x_2,\ \bar{x}_2\}$. 2) $\{0,\ x_1,\ x_2,\ x_1\oplus x_2\}$. 3) $\{0,\ 1,\ x_1,\ \bar{x}_1,\ x_2,\ \bar{x}_2\}$.

4) $\{x_1,\ x_2,\ x_1x_2\}$. 5) $\{x_1,\ x_2\}$. 6) $\{1,\ x_2,\ x_2,\ \bar{x}_1\vee x_2,\ x_1\vee\bar{x}_2,\ x_1\vee x_2\}$.

6.2. 1) $f=x\to 0$. 2) $f=((x\downarrow x)\downarrow(y\downarrow y))\downarrow(x\downarrow y)$.

3) $f=(x\oplus x)\oplus x$. 4) $f=(x\sim y)\sim z$. 5) $f=xx\oplus x$. 6) $f=x\overline{(y\bar{x})}$.

7) $f=\overline{\bar{x}\vee\bar{x}}\vee\overline{\bar{y}\vee\bar{y}}$.

6.3. 1) $\{0,\ 1,\ x,\ \bar{x}\}$. 2) $\{x,\ xy,\ xyz\}$. 3) $\{1,\ x,\ x\sim y,\ x\oplus y\oplus z\}$.

4) $\{x,\ xy\vee yz\vee zx\}$. 5) $\{x,\ \bar{x},\ x\oplus y\oplus z, x\oplus y\oplus z\oplus 1\}$.

6.4. 1) $\{0,\ \bar{x}\}$. 2) $\{x\oplus y,\ 1\}$. 3) $\{x\oplus y\}$. 4) $\{xy,\ x\vee y\}$. 5) $\{x\to y\}$.

6.5. 1) Система $\{\bar{x},\ xy,\ x \vee y\}$ является полной в P_2, поскольку всякая $f \in P_2$ может быть представлена в виде д. н. ф. или к. н. ф. С другой стороны, $\bar{x} = x \downarrow x$, $xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$, $x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

2) Имеем $0 = xx \oplus x$, $xy = xy \oplus 0$, $\bar{x} = (x \sim x) \oplus x$. Система $\{\bar{x},\ xy\}$ полна, поскольку $x \vee y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$.

3) Имеем $\bar{x} = \overline{x \oplus x \oplus x}$, $x \vee y = \bar{x} \to y$. Система $\{\bar{x},\ x \vee y\}$ полна, поскольку $xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.

4) Имеем $0 = f(x,\ x,\ x)$, $\bar{x} = x \to 0$, $xy = \overline{x \to \bar{y}}$.

5) Имеем $\bar{x} = x \oplus 0 \oplus 1$, $xy = m(x,\ y,\ 0)$.

§ 7.

7.1. 1, 5), 6), 7) $\in T_1 \setminus T_0$. 2), 3), 4), 8) $\notin T_1 \setminus T_0$.

7.2. 1) $xy = x \vee y \oplus x \oplus y$. Далее см. пример 2.15.

2) Указание. Использовать пример 2.15 и то, что $T_0^* = T_1$.

3) Указание. Свести к 2).

4) Указание. $x \oplus y = xx \oplus y$, $xy = (xy \oplus z) \oplus z$. Далее см. пример 2.15.

5) Полином всякой функции из $T_0 \cap T_1$ содержит нечетное число слагаемых и не содержит 1 в качестве свободного члена. С помощью функций xy, $x \oplus y \oplus z$ любой такой полином можно построить.

6) См. 5).

7) Указание. Всякий многочлен не выше первой степени и не содержащий слагаемых, равных 1, является суперпозицией функции $x \oplus y$.

7.3. 1) Да. Имеем $1 = xx \sim x$, $x \sim y = xx \sim y$, $x \oplus y \oplus z = (x \sim y) \sim z$, $xy = xy \sim 1$. Далее см. задачу 7.2, 5).

2) A не является базисом в T_0, так как $A \subseteq T_0 \cap T_1$.

3) A не является базисом в T_1, так как $[\{xy,\ x\sim y\}]=T_1$.

8) A не является базисом в $T_0\bigcap T_1$, так как $A\subseteq S$.

10) Нет, так как $[\{xy,\ x\oplus y\oplus z\}]=T_0\bigcap T_1$.

12) A – базис $T_0\bigcap T_1$, см. задачу 7.2, 5).

7.4. 1) $\tilde{\alpha}_f=(0110)$, $f=x_1\oplus x_2$.

Решение. $f(\tilde{x}^2)\in L$ существенно зависит от x_1 и x_2 и $f(00)=0$. Отсюда $f=x_1\oplus x_2$. Утверждение, что $[\{x_1\oplus x_2\}]=T_0\bigcap L$ доказано в задаче 7.2, 7).

2) $\tilde{\alpha}_f=(1001\ 0110)$. 3) $\tilde{\alpha}_f=(0110\ 0110)$. 4) $\tilde{\alpha}_f=(1001)$.

5) $\tilde{\alpha}_f=(0010\ 1011)$. 7) $\tilde{\alpha}_f=(0110110011010011)$.

8) $f=1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_4$.

7.5. Пусть $f\notin T_1$. Тогда а) либо $f(x,\ ...,\ x)\equiv 0$, либо $f(x,\ ...,\ x)\equiv\bar{x}$.

В случае а) имеем $P_2=[\{0,\ 1,\ xy\oplus z\}]\subseteq[\{0\}\bigcap T_1]\subseteq[\{f\}\bigcup T_1]$. В случае б) $P_2=[\{\bar{x},\ xy\}]\subseteq[\{f\}\bigcup T_1]$.

7.6. 1) Пусть $f\in L\setminus A$. Тогда f существенно зависит более чем от одной переменной. Подстановкой константы 0 из f можно получить функцию вида $x\oplus y\oplus\sigma$, $\sigma\in\{0,\ 1\}$. Далее $[\{x\oplus y\oplus\sigma,\ \bar{x}\}]=L$.

3) Пусть $f\in L\setminus A$. Тогда $f(x,\ ...,\ x)\in\{1,\ \bar{x}\}$. Далее утверждение следует из полноты в L систем $\{1,\ x\oplus y\}$, $\{\bar{x},\ x\oplus y\}$.

7.7. 1) Пусть $f\in T_0\setminus L$. Из f отождествлением переменных можно получить функцию φ, которая имеет вид либо $xy\oplus l_1(x,\ y)$, либо $m(x,\ y,\ z)\oplus l_2(x,\ y)$, где l_1, l_2 – линейные функции. В обоих случаях $T_0=[\{x\oplus y,\ \varphi\}]\subseteq[T\bigcap L\bigcap\{f\}]$.

2) $A=T_0\bigcap S$ не является предполным в T_0, так как $A\subset T_0\bigcap T_1$.

3) Да. 4) Нет. 5) Нет, так как $[\{0\}\bigcup A]\neq T_0$.

7.8. В задачах 1), 2), 3), 6), 10) функция f самодвойственна. В задачах 4), 5), 7)-9) функция f не является самодвойственной.

7.9. В задачах 1), 3), 5), 6), 10) $f \in S$. В задачах 2), 4), 7)-9) $f \notin S$.

7.10. 1) (1100). 4) $(0110\ 1001)$. 8) $(1001\ 0000\ 1111\ 0110)$.

7.11. 1) $f(x, \bar{x}, x) = f(\bar{x}, x, \bar{x}) = 1$. 2) $f(\bar{x}, x, x) = 1$.

7.12. Пусть $f \notin S$. Требуется доказать, что $[\{f\} \bigcup S] = P_2$. Имеем $\{x, \bar{x}\} \subset S$. Из леммы о несамодвойственной функции вытекает, что $\{1,0\} \subseteq [x, \bar{x}, \{f\}]$. Известно, что $[\bar{x}, xy, x \vee y] = P_2$. Тогда $[0, 1, x \oplus y \oplus z, m(x,y,z)] = P_2$, так как $\bar{x} = x \oplus 1$, $xy = m(x, y, 0)$, $x \vee y = m(x, y, 1)$. Имеем

$$P_2 \subseteq [0, 1, x \oplus y \oplus z, m(x,y,z)] \subseteq [x, \bar{x}, \{f\} \bigcup S] = [\{f\} \bigcup S].$$

7.13. В задачах 1), 3), 5)-7), 10) множества A являются самодвойственными. В задачах 2), 4), 8), 9) множества A не является самодвойственной.

7.14. 2), 3), 5), 8 $f \in M$. 1), 4), 6), 7) $f \notin M$.

7.15. 1) Да, $f \equiv 0$. 2) Да, $f \equiv 1$. 3) Нет, $f(x, 0) = \bar{x}$. 4) Да, $f = x_1 \vee x_2 x_3$.

5) Нет, $f(1, 0, z) = \bar{z}$. 6), 7) Да. 8) Нет.

7.16. 1) $\tilde{\alpha} = (010)$, $\tilde{\beta} = (110)$. 2) $\tilde{\alpha} = (001)$, $\tilde{\beta} = (011)$.

7.17. 1) $e(f) = n(f) = 3$. 2) $e(f) = 2$, $n(f) = 1$. 3) $e(f) = n(f) = 4$.

4) $e(f) = 2^k$, $n(f) = k$.

7.18. 2), 3), 5), 6), 8), 9) $f \in L$. 1), 4), 7), 10) $f \notin L$.

7.19. 1), 3)-5), 7)-10) $f \in L$. 2), 6) $f \notin L$.

7.20. 1) Имеем $f = ax_1 \oplus bx_2 \oplus c$, $f(00) = c = 1$, $f(01) = b \oplus c = 0$, $f(11) = a \oplus b \oplus c = 1$. Отсюда $f = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, $\tilde{\alpha}_f = (1001)$.

2) $f = x_1$, $\tilde{\alpha}_f = (0011)$. 3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$, $\tilde{\alpha}_f = (1001\ 0110)$.

4) $f = x_3 \oplus 1$, $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 1010)$. 5) $f = x_1 \oplus x_2$, $\tilde{\alpha}_f = (0011\ 1100)$.

9) $f = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus 1$, $\tilde{\alpha} = (1010101010110110)$.

10) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus 1$, $\tilde{\alpha}_f = (1010\ 0101\ 0101\ 1110)$.

7.21. 1) $f(x, y, y) = f(x, y, 1) = xy$. 2) $f(x, y, y) = xy$.

3) $f(x, y, 0) = \bar{x} \cdot \bar{y}$. 4) $f(x, 1, y) = x\bar{y}$. 5) $f(y, 0, 1, x) = x\bar{y}$.

6) $f(y, x, y, y) = x\bar{y}$. 11) $f(x, x, x, y) = xy$. 12) $f(x, 1, y, 1) = xy$.

7.22. 1), 4), 7), 9) Нельзя, так как $\left|N_{\bar{f}}\right| \le 2$.

2) $xy = f(\bar{x}, \bar{y}, 1)$. 3), 8), 11) Нельзя, так как $f \in L$.

5), 6) Нельзя. Указание. Подстановка констант и любое отождествление переменных приводит к уменьшению числа нулей.

7.23. 1) С помощью суперпозиции из функции $x_1 \oplus x_2$ можно получить любую функцию вида $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$, путем подстановки 1 – любую функцию вида $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} \oplus 1$. Система A является базисом.

2)-5), 7)-9) A является базисом. 6), 10) A не является базисом.

§8.

8.1. 1) Нет, $A \subseteq T_0$. 2) Да. 3) Нет, $A \subseteq L$. 4) Да. 5) Нет, $A \subseteq S$. 6) Да.

8.2. 1) Нет, $A \subseteq L$. 2) Нет, $A \subseteq T_0$. 3), 5) Да. 4) Нет, $A \subseteq S$. 6) Нет, $A \subseteq M$.

8.3. 1), 4), 6) Да. 2) Нет, $A \subseteq S$. 3) Нет, $A \subseteq T_1$. 5) Нет, $A \subseteq L$.

8.4. 1) Нет, так как подсистема $\{x \to y, x \oplus y\}$ полна.

2) Да. 3) Нет, $A \subseteq T_1$. 4) Нет, можно удалить $xy \vee z$.

8.5. 1) $Б_1 = \{1, x, f\}$, $Б_2 = \{\bar{x}, xy(x \oplus y), f\}$, где $f = x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx$.

2) $Б_1 = \{0, x \to y\}$, $Б_2 = \{x \oplus y, x \to y\}$, $Б_3 = \{0, xy \sim xz\}$, $Б_4 = \{x \oplus y, xy \sim xz\}$.

8.6. 1) Да, $A \bigcup \{0\}$ – базис.

2) Нет, функция x входит во все предполные классы.

3) Да, $A\bigcup\{1\}$ – базис.

4) Нет, функции xy и $x\vee y$ принадлежат одним и тем же предполным классам.

8.7. 1) Вообще говоря нет. Рассмотреть $f_1 = x\oplus y\oplus z$, $f_2 = x_1\vee x_2\vee x_3$.

2) Система полна. Имеем $f_2\equiv 1\notin S$, $f_1\notin M\bigcup L\bigcup T_0\bigcup T_1$.

8.8. Имеем $0\notin T_1\bigcup S$, $\overline{f}\notin T_0\bigcup M\bigcup L$.

8.9. Указание. Среди трех функций, существенно зависящие от x_1, x_2, нет самодвойственных и есть хотя бы одна нелинейная.

8.10. Из $f\notin T_0\bigcup T_1$ следует, что $f\in M$. Если бы $f\in L$, то из $f\notin T_0\bigcup T_1$ следовало бы, что $f\in S$, а это противоречит условию.

8.11. $f\notin T_0\bigcup T_1\bigcup S$. Далее см. задачу 8.10.

8.12. 1), 2) $\Psi(f)=\{x\}$. 3) $\Psi(f)=\{x\oplus y,\ 0\}$. 4) $\Psi(f)=\{x,\ x\vee y\}$.

8.13. 1) $1,\ x,\ \overline{x},\ x\overline{y},\ x\oplus y$. 2) $1,\ \overline{x}$. 3) $x,\ \overline{x},\ x\overline{y},\ x\oplus y,\ x\sim y,\ x\to y$.

5) $0,\ 1,\ xy,\ x\vee y,\ \overline{x}\cdot\overline{y},\ \overline{x}\vee\overline{y}$.

8.14. 1), 2), 4) Да. 3), 5) Нет.

8.15. 1) Да. 2) Нет, поскольку $\{xy\oplus y,\ 1\}$ – также базис в P_2. 3) Да.

4) Нет, так как $\{x\vee y,\ xy\}\subseteq\Phi(xy\vee zt)$ и $\{0,\ 1,\ xy,\ x\vee y\}$ – базис в M.

5) Да.

ГЛАВА 3

§ 1.

1.1. 1) Если множество $\{i_1,\ldots,\ i_k\}$ зафиксировано, то число граней $B^{n,\ i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ равно числу двоичных наборов $(\sigma_1,\ \ldots,\ \sigma_k)$, т. е. 2^k.

2) Если $\tilde{\alpha} \in B^{n,\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k} \bigcap B^{n,\, i_1,\dots,i_k}_{r_1\dots r_k}$, то $\sigma_1 = r_1,\ \dots,\ \sigma_k = r_k$, а следовательно грани совпадают. Приходим к противоречию.

3) Вытекает из задач 1) и 2) с учетом того, что $\left|B^{n,\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\right| = 2^{n-k}$.

4) Число способов выбрать направления $\{i_1,\dots,\ i_k\}$ равно C_n^k. Далее утверждение следует из задачи 1).

5) Следует из задачи 4).

6) Если $\tilde{\alpha} \in B^{n,\, i_1,\dots,i_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}$, то вектор $(\sigma_1,\ \dots,\ \sigma_k)$ однозначно определяется вектором $\tilde{\alpha}$ и множеством $\{i_1,\dots,\ i_k\}$. Последнее можно выбрать C_n^k способами.

7) Код грани G размерности k, содержащей заданную грань H размерности l, получается из кода грани H расстановкой $k-l$ прочерков среди $n-l$ координат, имеющих значение 0 или 1.

1.2. 1) 2. 2) 3. 3) 2. 4) 3. 5) 2. 6) 3.

1.3. 1) 2. 2) 4. 3) 3. 4) 3. 5) 2. 6) 3.

1.4. 1) 2. 2) 1. 3) 1. 4) 2. 5) 5. 6) 4.

1.5. 1) 2. 2) 1. 3) 3. 4) 5. 5) 5. 6) 4.

1.6. 1) $\{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 4\}$. 2) $\{1,\ 2,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 4\},\ \{1,\ 3,\ 4\}$.

§ 2.

2.1. 1) $x_1,\ x_2\bar{x}_3$. 2) $x_1\bar{x}_2$. 3) $x_2\bar{x}_3,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$. 4) x_1.

2.2. 1) После применения правила обобщенного склеивания: $R_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_3x_4$. После применения правила поглощения: $R_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_3x_4$.

2) $R = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$.

3) $R = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

4) $R = \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$.

5) $R \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_4$.

2.3. 1) $\bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$. 2) $x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$. 3) $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$.

4) $x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3$. 5) $x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

6) $x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$.

2.4. 1) $\bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$.

2) $x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3$. 3) $x_1 \vee x_2 \bar{x}_3$.

4) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$. 5) $\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4$.

6) $x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4$.

2.5. 1) $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_3$. 2) $\bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2$. 3) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$.

4) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

5) $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$.

6) $x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4$.

2.6. 1) $x_3,\ x_1 x_2$. 2) Ядровых импликант нет. 3) $\bar{x}_1 \bar{x}_3,\ \bar{x}_1 x_2$.

4) $x_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3$. 5) $x_2 \bar{x}_4,\ x_1 \bar{x}_3,\ x_3 x_4$. 6) $x_2 \bar{x}_3,\ \bar{x}_2 x_3$.

§ 3.

3.1. 1) $\bar{x}_1 \vee x_2$. 2) x_1. 3) $x_1 x_2 \vee \bar{x}_3$. 4) $x_1 \vee x_2 \bar{x}_3$. 5) $x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$;

6) $R = x_2 \vee x_1 \bar{x}_3$.

3.2. 1) $x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$. 2) $R_T = R$.

3.3. 1) $R_T^1 = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$, $R_T^2 = \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3$. 3) $R = x_1 \vee x_2 x_3$.

3.4. Указание. Оценка следует из того, что число элементарных конъюнкций над переменными $x_1, \ldots, x_n$ равно 3^n, длина тупиковой д. н. ф. не превосходит 2^n и ни одна из конъюнкций в тупиковой д. н. ф. не поглощает другую.

§ 4.

4.1. 1) $x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$. 4) $\bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3x_4$.

4.2. 1) $x_1x_2 \vee x_2x_3$. 4) $\bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_3x_4$.

4.3. 2) $x_1 \vee x_2x_3$. 7) $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_3x_4$.

ГЛАВА 4

§ 1.

1.2. 1) а) $((x_1 \mid x_2) \mid (x_2 \mid x_2)) \mid (x_1 \mid x_2)$, б) $\overline{\overline{(x_1 \to \bar{x}_2)} \to (\bar{x}_1 \to x_2)}$.

2) а) $((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_1) \downarrow ((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_1)$, б) $\overline{x_1 \,\&\, \bar{x}_2}$.

3) а) $(x_1 \mid x_2) \mid (x_2 \mid x_2)$, б) $((x \,\&\, y) \sim x) \sim y$.

1.3. 1) а) $\bar{x}_2 \vee x_1$, б) $x_2 \mid (x_1 \mid x_1)$.

2) а) $(x_1 \to x_2) \,\&\, (x_2 \to x_1)$, б) $((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_1)$.

3) а) $(\overline{(x_1 \mid x_2)} \mid x_3) \mid ((x_1 \mid x_2) \mid \bar{x}_3)$, б) $x_1x_2x_3 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1)$.

1.4. 1) $f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2$, $f_2 = x_1 \sim x_2$.

2) $f_1 = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$, $f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

3) $f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $f_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

1.6. Указание. 1) $f = x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3$. 2) $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_1$.

3) $f = \bar{x}_3(x_1 \vee x_2) \vee \bar{x}_1(x_2 \vee x_3)$. 4) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)$.

1.7. Указание. 1) $f = \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3$.

2) $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_1$. 3) $f = x_1 \vee x_2x_3$.

§ 2.

2.1. а) $f = x_1 \oplus x_2 = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2$. б) $f = x_1x_4 \vee x_1x_3x_5 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2x_5$.

в) $f = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) = x_1 \oplus x_2$. г) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

д) $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_2(x_3\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3x_2) \vee \bar{x}_1x_2$. е) $x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$.

2.4. Указание. Представить функцию f формулой в базисе $\{\vee, \&, \neg\}$. Если число букв окажется равным l, то построить схему по формуле. Если число букв окажется больше, чем l и формула не упрощается, то реализовать отдельные подформулы схемами и попытаться совместить части полученных схем так, чтобы не возникало «ложных» цепей.

1) $f = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$. 2) $f = x_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$.

3) $f = x_2(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3$. 4) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_3)$.

5) $f = \bar{x}_2(x_1 \vee x_3) \vee x_1 x_3$.

2.5. 1) $f = (x_1 \vee x_2 x_3)(\bar{x}_2 \vee x_4)$. 2) $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$. 3) $f = x_1$.

4) $f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_4 \vee \bar{x}_6)(x_5 \vee x_7)$. 5) $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

6) $f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4$.

2.7. 1) $f = x_1 x_2 ... x_n \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 ... \bar{x}_n$.2) $f = x_1 x_2 ... \bar{x}_n$.

3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus ... \oplus x_n$.

4) $f = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = P_n$, где $P_1 = x_1 \vee y_1$, $P_{k+1} = x_k y_k \vee P_k(x_k \vee y_k)$, P_n реализует перенос в $(n+1)$-й разряд сумматора.

5) $f(\tilde{x}^{2n}) = \underset{1 \le i \le n}{\&}(x_{2n-1} \sim x_{2n})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабичева И. В. Дискретная математика: контролирующие материалы к тестированию: Учебное пособие / И. В. Бабичева. – СПб.: Лань, 2021. – 160 с.

2. Баранов В. П. Дискретная математика: Учебное пособие / В. П. Баранов. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2013. – 216 с.

3. Вороненко А.А. Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями: учебно-методическое пособие / А.А. Вороненко, В.С. Федорова. – М.: ИНФРА–М, 2019. – 104 с.

4. Гаврилов Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – М.: Физматлит, 2009. – 416 с.

5. Дегтярь М.И. Сборник задач по множествам, булевым функциям и математической логике: Учебное пособие / М.И. Дегтярь, С.М. Дудаков, Б.Н. Карлов. – СПб.: Лань, 2020. – 128 с.

6. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. Теория и практикум: Учебник / Я.М. Ерусалимский. – СПб.: Лань, 2021. – 476 с.

7. Кожухов С.Ф. Сборник задач по дискретной математике: Учебное пособие / С.Ф. Кожухов, П.И. Совертков. – СПб.: Лань, 2021. – 324 с.

8. Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Наука, 2001. – 224 с.

9. Лихтарников М.Л. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: Учебное пособие / Т.В. Моисеенкова, Т.Г. Сукачева.– СПб.: Лань, 2021. – 288 с.

10. Мальцев И.А. Дискретная математика: Учебное пособие / И.А. Мальцев. – СПб.: Лань, 2021. – 304 с.

11. Моисеенкова Т.В. Дискретная математика в примерах и задачах: Учебное пособие / Т.В. Моисеенкова. – Сибирский Федеральный Университет, 2018. – 132 с.

12. Новиков Ф.А. Дискретная математика: Учебное пособие для вузов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2011. – 384 с.

13. Шевелев Ю.П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группе): Учебное пособие / Ю.П. Шевелев, М.А Писаренко, М.Ю. Шевелев. – СПб.: Лань, 2021. – 524 с.

14. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов / С. В. Яблонский. – Москва: Высшая школа, 2008. – 384 с.