Минобрнауки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»

Институт прикладной математики и компьютерных наук
КАФЕДРА ИБ

Теория систем и системный анализ

Практическая работа №3

ОСНОВЫ СТАТИСТИКИ

Методические указания к выполнению практических работ для студентов очной формы обучения

Тула 2023 г.

Цель работы

Работа предназначена для закрепления навыков решения задач по основным разделам математической статистики.

Краткие теоретические положения

Статистической или ***генеральной совокупностью*** называется совокупность объектов, которую необходимо изучить. Примеры: множество людей некоторого города, множество студентов, множество электроламп, множество телевизоров, множество фирм, экономических агентов и т. д. Число объектов генеральной совокупности называется ***объемом генеральной совокупности***. Обозначим это число через N.

Для изучения объектов генеральной совокупности производится выборка. ***Выборочной совокупностью*** или просто ***выборкой*** называется совокупность (множество) случайно отобранных объектов. Число объектов выборочной совокупности называется объемом выборки. Обозначим это число через n.

Обычно генеральную совокупность изучают относительно некоторого признака. ***Признаком*** называется общее свойство, характерное для всех объектов совокупности.

Элементы выборки можно считать независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, поскольку они являются результатом проведения последовательности независимых испытаний с одной и той же случайной величиной X.

Выборка X, элементы которой расположены в порядке возрастания, называется простым вариационным рядом. Разность R между наибольшим и наименьшим значениями измерений называют *широтой распределения* или *размахом варьирования*. Если одинаковые по значению элементы объединить в группы, то получается *сгруппированный вариационный ряд*, который представляется в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_r
n_i	n_1	n_2	...	n_r

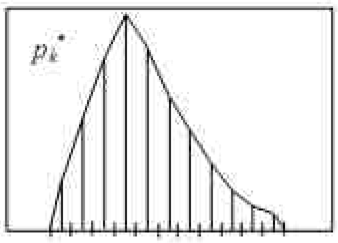
По вариационному ряду может быть построена ***эмпирическая функция распределения*** вероятностей исследуемой случайной величины. Эмпирическая функция распределения вероятностей F*(x) определяется как отношение числа α(x) элементов выборки, меньших, чем x, к общему числу элементов n: F*(x) = α(x)/n. Эта функция будет иметь ступенчатый график.

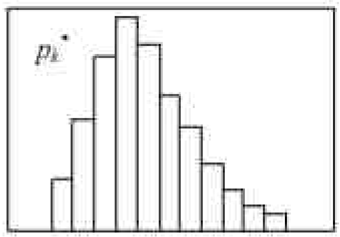
Если все элементы выборки различны, то величина ступенек будет равна 1/n. С ростом объёма выборки n величина ступенек уменьшается и стремится к нулю при n→∞. Для непрерывной величины при n→∞ эмпирическая функция F*(x) будет неограниченно приближаться к некоторой непрерывной функции F(x). Эту сходимость следует понимать как сходимость по вероятности. Если выборка имеет повторяющиеся по величине элементы, что характерно для дискретных величин, то удобнее пользоваться сгруппированным вариационным рядом. В случае дискретной величины ступенчатый характер функции F*(x) с возрастанием n сохраняется.

При большом объёме выборки и большом числе различных по величине элементов выборки пользоваться простым и сгруппированным вариационными рядами неудобно. В таком случае пользуются интервальным вариационным рядом, который строится следующим образом. Вся широта распределения разбивается на r частичных интервалов и подсчитывается число элементов n_i, попавших в i-й интервал (i = 1, 2, ..., r). Оптимальное количество интервалов вычисляется как $r=1+\lfloor \log_2 N \rfloor$, а шаг интервального ряда $h = (x_{max} - x_{min})/r$. Для каждого интервала указываются его правая α_{i-1} и левая α_i границы и его середина $\overline{x_i}$. Вся эта информация представляется в виде таблицы произвольной формы. Приведём один из вариантов такой таблицы:

Номер интервала	1	2	3	...	r
Границы интервала	$\alpha_0 \div \alpha_1$	$\alpha_1 \div \alpha_2$	$\alpha_2 \div \alpha_3$	...	$\alpha_{r-1} \div \alpha_r$
Середина интервала	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	...	$\overline{x}_r$
Число точек в интервале	n_1	n_2	n_3	...	n_r
Относительная частота	n_1/n	n_2/n	n_3/n	...	n_r/n

Для наглядного представления о форме плотности распределения случайной величины X используются понятия ***полигона*** и ***гистограммы*** распределения, которые строятся по интервальному вариационному ряду. Для построения полигона нужно из середины каждого частичного интервала восстановить перпендикуляр длиной $p_i^* = n_i/n$ и соединить отрезками прямых вершины этих перпендикуляров. Вершины крайних перпендикуляров соединяются с концами крайних частичных интервалов. Относительные частоты p_i^* представлены в таблице последней строкой. (Полигон распределения может быть построен также непосредственно по сгруппированному вариационному ряду.) Чтобы построить гистограмму, нужно на каждом частичном интервале построить прямоугольник высотой p^* .





Относительные частоты p_i^* есть не что иное, как эмпирические вероятности попадания случайной величины в соответствующие интервалы (здесь и далее символ * означает, что величина определена по экспериментальным данным). Если по оси OY откладывать не p_i^*, а отношения p_i^*/Δ_i, где Δ_i – длины частичных интервалов, то полигон и гистограмма будут различными формами представления эмпирической плотности распределения вероятностей.

Любая группировка исходных данных, подобная той, которая применяется при построении интервального вариационного ряда, приводит к частичной потере информации. Интервальный вариационный ряд не содержит точных значений элементов выборки, так как все элементы, попавшие в i-й интервал (i = 1, 2, ..., r), фактически приравниваются к значению $\overline{x_i}$, находящемуся в середине интервала.

Современная вычислительная техника позволяет проводить обработку данных, исходя непосредственно из простого вариационного ряда при любом объёме выборки. Использовать интервальный вариационный ряд рационально тогда, когда этого требует сам метод обработки экспериментальных данных.

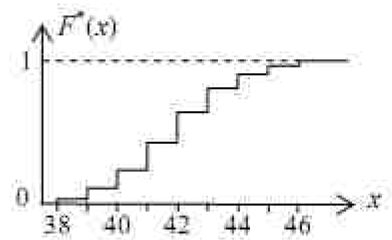
Пример 1. Для определения среднего размера мужской обуви, на который нужно ориентироваться при оптовых закупках, был проделан следующий эксперимент. В течение определённого времени в обувном магазине фиксировался размер обуви, которую приобретали покупатели. В результате была получена следующая выборка:

39, 43, 42, 40, 44, 39, 42, 41, 41, 40, 42, 41, 42, 45, 43, 44, 40, 43, 41, 42,
41, 43, 38, 41, 42, 40, 43, 40, 44, 41, 43, 41, 39, 45, 43, 46, 42, 43, 42, 40,
43, 42, 41, 43, 39, 44, 40, 43, 41, 42, 41, 43, 42, 45, 44, 42, 41, 42, 40, 44.

Построить сгруппированный вариационный ряд и график эмпирической функции распределения вероятностей F*(x) случайной величины X – размера обуви, которую носит мужское население данного города.

Объединяя одинаковые значения размера обуви, получим следующий сгруппированный вариационный ряд:

x_i	38	39	40	41	42	43	44	45	46
n_i	1	4	8	12	13	12	6	3	1



Функция распределения вероятностей в точке x определяется следующим образом. Число элементов вариационного ряда, меньших, чем x, делится на объём выборки n. Например, для x∈(x1; x2] слева находится всего один элемент, т.е F*(x) = 1/60. Для x∈(x2; x3] слева уже находится пять элементов (n1 + n2), т. е. F*(x) = 5/60 = 1/12, и т.д.

Для непрерывных случайных величин вероятность совпадения по величине двух или нескольких измерений случайной величины равна нулю. Все измерения практически всегда оказываются различными, и скачки функции F*(x) будут равны величине 1/n.

Представим исходный вариационный ряд в виде интервального вариационного ряда. Для этого найдем количество интервалов и шаг интервала.

$r=1+[\log_2 N] = 1+[\log_2 60] = 7.$

$h = (x_{max} - x_{min})/r = (46\text{-}38)/7 = 2.$

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
Границы интервала	[38; 39)	[39; 40)	[40; 41)	[41; 42)	[42; 43)	[43; 44)	[44; 46)
Середина интервала	38,5	39,5	40,5	41,5	42,5	43,5	45
Число точек в интервале	1	4	8	12	13	12	10
Относительная частота	1/60	4/60	8/60	12/60	13/60	12/60	10/60

Числовые характеристики выборки

Числовые характеристики случайных величин, найденные на основе экспериментальных данных, называются ***точечными оценками*** этих характеристик или ***эмпирическими характеристиками***. Чтобы понять структуру формул, определяющих эмпирические моменты случайной величины, рассмотрим простой вариационный ряд $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Можно формально считать, что рассматривается дискретная случайная величина, имеющая n возможных значений с вероятностями 1/n. Математическое ожидание этой случайной величины и дисперсия определяются по общему правилу:

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad D_x^* = M[(X - m_x^*)^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2. \qquad (1)$$

Формулы (1) соответствуют простому вариационному ряду. Для сгруппированного вариационного ряда число слагаемых в (1) уменьшится до r, где r – число различных по величине элементов выборки, за счёт группирования одинаковых слагаемых. Для интервального вариационного ряда формулы будут иметь такую же структуру, однако вместо непосредственных измерений, в ней фигурируют середины частичных интервалов $\overline{x_i}$. Учитывая эти особенности, можно записать общие формулы для вычисления начальных ν_k* и центральных μ_k* эмпирических моментов случайной величины:

$$\nu_k^* = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^k n_i, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i^k n_i, \end{cases} \qquad \mu_k^* = \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \nu_1^*)^k, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} (x_i - \nu_1^*)^k n_i, \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} (\overline{x}_i - \nu_1^*)^k n_i, \ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (2)$$

В этих формулах первая строка соответствует простому вариационному ряду, вторая – сгруппированному, третья – интервальному вариационному ряду. Формулы связи между центральными и начальными моментами не изменяется, т.е.

$$\mu_2^* = \nu_2^* - \nu_1^{*2}, \quad \mu_3^* = \nu_3^* - 3\nu_2^*\nu_1^* + 2\nu_1^{*3}, \quad \mu_4^* = \nu_4^* - 4\nu_3^*\nu_1^* + 6\nu_2^*\nu_1^{*2} - 3\nu_1^{*4}. \qquad (3)$$

Эмпирическое математическое ожидание случайной величины совпадает с первым начальным моментом ν_1*, а её эмпирическая дисперсия совпадает со вторым центральным моментом μ_2*.

При вычислении эмпирических характеристик можно делать некоторые предварительные преобразования выборки, которые приводят к упрощению вычислений. При этом опираются на соответствующие свойства математического ожидания, дисперсии и т.п. Например, математическое ожидание можно вычислять по формуле:

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C) + C. \qquad (4)$$

Постоянная величина C выбирается так, чтобы суммирование оказалось наиболее простым. Преобразование типа X – C означает сдвиг всей выборки по числовой оси на величину C. Дисперсия не изменяется, т.е. D*{X} = D*{X – C}. Можно вводить масштабный коэффициент, т.е. рассматривать величину αX вместо величины X, где α – масштабирующий множитель. При вычислениях следует учитывать, что M{αX} = αM{X}, а D{αX} = = α2D{X}. Такие преобразования часто приводят к упрощению вычислений. Если вычисления проводятся на ЭВМ, то эти преобразования не целесообразны.

Пример 2. По выборке из примера 1 вычислить эмпирические математическое ожидание и дисперсию размера обуви, который пользуется спросом у населения. Воспользуемся формулой (4). Выберем C = 42 и рассмотрим величину Y = X – 42:

$x_i - 42$	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
n_i	1	4	8	12	13	12	6	3	1

Эмпирические математическое ожидание m_y*= ν_1* и второй начальный момент будем вычислять по второй формуле из (2) для ν_k* :

$$m_y^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i n_i =$$

$$= \frac{1}{60}[(-4)\cdot 1 + (-3)\cdot 4 + (-2)\cdot 8 + (-1)\cdot 12 + 0\cdot 13 + 1\cdot 12 + 2\cdot 6 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1] =$$

$$= -7/60 \approx -0{,}117$$

Следовательно, m_x*= m_y* + 42 =41,883. Это средний (эмпирический) размер обуви, которую носит мужское население данного города. Вычислим дисперсию, пользуясь тем, что D_x* = D_y*:

$$D_x^* = D_y^* = \nu_2^* - \nu_1^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 n_i - \nu_1^{*2} =$$

$$= \frac{1}{60}[(-4)^2\cdot 1 + (-3)^2\cdot 4 + (-2)^2\cdot 8 + (-1)^2\cdot 12 + 0^2\cdot 13 + 1^2\cdot 12 + 2^2\cdot 6 + 3^2\cdot 3 + 4^2\cdot 1] - 0{,}117^2 \approx$$

$$\approx 2{,}89.$$

Пример 3. По данной выборке случайной величины X вычислить все основные эмпирические характеристики: математическое ожидание m_x*, дисперсию D_x*, среднее квадратическое отклонение σ_x*, асимметрию Sk_x* и эксцесс Ex_x*.

1,8 1,3 2,3 2,7 4,7 3,4 1,0 0,1 0,2 2,7 0,3 2,1 0,7 3,3 8,0
0,8 4,0 0,2 0,3 0,6 3,0 3,5 4,6 0,5 0,6 4,1 2,7 0,3 0,4 1,2
4,5 1,6 1,5 9,6 4,0 0,3 0,7 7,3 2,5 2,0 3,7 0,1 0,9 4,9 0,1
1,2 0,5 0,0 1,3 2,8 0,6 1,4 0,8 1,1 0,9 0,4 1,2 0,2 0,1 0,7.

Наибольший элемент выборки равен 9,6, наименьший – 0, размах выборки равен 9,6. Учитывая, что элементы выборки распределены неравномерно на этом интервале, ширину первых пяти частичных интервалов выберем равной 0,6, двух следующих – 1,2, а последнего интервала – 4,2. Составим интервальный вариационный ряд, подсчитав число элементов выборки, попавших в каждый частичный интервал. Если значение элемента совпадает с левой границей частичного интервала, то его следует относить к данному интервалу. Значение, совпадающее с правой границей, не включается в данный интервал. В последний интервал включается и то значение, которое совпадает с его правой границей.

Вычисления проводятся в таблице, содержащей вариационный ряд и строки, необходимые для вычисления начальных моментов.

i	$z_{i-1} \div z_i$	$\overline{x}_i$	n_i	$\overline{x}_i n_i$	$\overline{x}_i^2 n_i$	$\overline{x}_i^3 n_i$	$\overline{x}_i^4 n_i$
1	0 ÷ 0,6	0,3	16	4,8	1,44	0,43	0,13
2	0,6 ÷ 1,2	0,9	12	10,8	9,72	8,75	7,87
3	1,2 ÷ 1,8	1,5	8	12	18	27	40,5
4	1,8 ÷ 2,4	2,1	4	8,4	17,64	37,04	77,79
5	2,4 ÷ 3,0	2,7	5	13,5	36,45	92,42	265,72
6	3,0 ÷ 4,2	3,6	8	28,8	103,68	373,25	1343,69
7	4, 2 ÷ 5,4	4,8	4	19,2	92,16	442,37	2123,37
8	5,4 ÷ 9,6	7,5	3	22,5	168,75	1265,63	9492,19
Σ			60	120	447,84	2252,88	13351,26

По результатам вычислений, получим:

$$m_x^* = \nu_1^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i n_i = \frac{1}{60} \cdot 120 = 2,$$

$$\nu_2^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i^2 n_i = \frac{1}{60} \cdot 447{,}84 = 7{,}46, \qquad \nu_3^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i^3 n_i = \frac{1}{60} \cdot 2252{,}88 = 37{,}55,$$

$$\nu_4^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i^4 n_i = \frac{1}{60} \cdot 13351{,}26 = 222{,}52, \;\; D_x^* = \nu_2^* - \nu_1^{*2} = 7{,}46 - 2^2 = 3{,}46, \;\; \sigma = \sqrt{D_x^*} = 1{,}86.$$

Вычислим центральные моменты по формулам (3):

$$\mu_3^* = 37{,}55 - 3 \cdot 7{,}46 \cdot 2 + 2 \cdot 2^3 = 8{,}79,$$

$$\mu_4^* = 222{,}52 - 4 \cdot 37{,}55 \cdot 2 + 6 \cdot 7{,}46 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^4 = 53{,}16$$

Таким образом, асимметрия и эксцесс будут равны:

$$Sk_x^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_x^{*3}} = \frac{8{,}76}{1{,}86^3} = 1{,}36, \qquad Ex_x^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_x^{*4}} - 3 = \frac{53{,}27}{3{,}46^2} - 3 = 1{,}44.$$

Проверка статистических гипотез включает в себя большой пласт задач математической статистики. Зная некоторые характеристики выборки (или имея просто выборочные данные), мы можем проверять гипотезы о виде распределении случайной величины или ее параметрах.Чаще всего для этого используется критерий согласия χ^2 Пирсона, а также критерий Колмогорова-Смирнова.

Критерий согласия Пирсона (или критерий χ^2 - "хи квадрат") - наиболее часто употребляемый для проверки гипотезы о принадлежности некоторой выборки теоретическому закону распределения (в учебных задачах чаще всего проверяют "нормальность" - распределение по нормальному закону).

В учебных задачах обычно используется следующий **алгоритм**:

Выбор теоретического закона распределения (обычно задан заранее, если не задан - анализируем выборку, например, с помощью гистограммы относительных частот, которая имитирует плотность распределения).

Оцениваем параметры распределения по выборке (для этого вычисляется математическое ожидание и дисперсия): a, σ для нормального, a, b - для равномерного, λ - для распределения Пуассона и т.д.

Вычисляются теоретические значения частот (через теоретические вероятности попадания в интервал) и сравниваются с исходными (выборочными).

Анализируется значение статистики χ^2 и делается вывод о соответствии (или нет) теоретическому закону распределения.

3. Задание на работу

По данной выборке:

1) Найти наибольшее и наименьшее значения выборки x_{max} и x_{min}, размах варьирования R.

2) Сформировать сгруппированный вариационный ряд и построить график эмпирической функции распределения.

3) Сформировать интервальный вариационный ряд, найти относительные частоты, построить гистограмму и полигон заданного распределения.

4) Вычислить выборочную среднюю m_x*, выборочную дисперсию D_x*, среднее квадратическое отклонение σ_x* выборки для полного и интервального вариационного ряда.

5*) Дополнительное задание. Проверять гипотезы о виде распределении случайной величины (возможные виды распределений: нормальное, равномерное, экспоненциальное).

4. Варианты заданий

Вариант 1

```
-6.31203 8.51126 10.7972 28.5 -17.737 -16.2721 15.9244
 9.93652 -19.9924 16.7546 -19.2584 -4.22908 15.7062 27.8118
-0.121163 11.2366 11.3419 -17.1113 4.47812 0.512116 -3.50424
-18.152  4.18208  -17.9354  -1.38772  18.8604  12.0088  5.24416
29.443  4.28737  -15.0391  9.69999  13.0144  12.0714  -11.8254
14.2245  25.4068  -8.37057  15.398  -13.4826  -8.34463  8.40902
23.6443 20.5085 10.1044 2.08081 14.8151 22.7089 -0.505708
26.4994 22.1138 -15.7303 -10.8594 10.434 -15.9623 -9.79735
-2.52152 3.20088 13.811 -7.61979 19.2984 -5.80999 -3.00067
-2.11713 16.9835 20.3879 25.2069 -0.783434 -13.9282 0.957699
```

Вариант 2

```
22.1749  40.3055  37.4866  6.06084  28.131  45.0656  25.0642
6.12412  23.1014  9.34806  6.89926  43.0823  50.9737  4.89541
67.3874  0.497812  1.09247  23.1476  1.97095  20.4259  43.4787
4.36287  13.999  7.51715  80.772  15.6626  1.66489  24.0017
10.2065  8.20256  86.6419  11.8489  2.46116  17.7488  57.7915
10.1847  3.74553  2.31258  23.6534  1.28129  46.6661  6.32672
0.331028  31.7764  10.0521  69.5339  12.4367  59.071  3.71541
13.4716  7.6256  10.9603  26.7634  2.68612  77.1816  23.8567
```

3.94396 0.37901 18.3138 28.2016 28.7041 7.88782 1.73758
10.8989 57.3413 7.28225 2.87286 24.3974 45.1212 13.7531
0.203013 25.7793 36.1394 6.46566 3.7101 27.4493 9.75163
1.89593 43.7714 20.9937 40.3706 45.3776 29.6927 5.93669
65.1509 55.1075 16.3003 11.2171 118.096 2.19069 63.8129
11.7229 27.479 29.5903 46.3085 11.6706 10.5625 35.8881
83.8715 3.63411 10.8106 44.2058 23.0438 13.0849 53.1016
18.0438 39.9786 50.1323 108.392 59.9115 0.198398 14.5036
16.4221 7.71894 63.7346 6.49632 2.00895 68.4612 18.1998
30.6465 24.5477 0.843435 70.1447 15.4423 38.795 39.8957
9.02742 4.55712 114.501 2.86003 0.104748 0.486919 118.97
3.79344 25.728 10.6103 67.4326 23.8725 3.89042 23.7203 5.049
23.8824 4.88984 19.9046 47.1392 14.7611 15.4763 23.0573
8.04838 17.051

Вариант 3

6 6 15 5 9 30 1 18 29 7 61 26 7 2 11 16 22 8 8 15 12 43 9 50
1 3 13 2 39 8 27 26 14 0 2 2 15 22 1 2 26 8 19 26 5 53 30 9
9 44 0 14 41 5 8 11 10 3 8 17 3 13 8 29 18 4 7 3 33 8 10 22
26 69 12 16 27 21 75 33 26 27 17 9 5 5 97 6 25 4 25 6 27 118
10 44 35 25 4 1 40 14 23 1 1 2 10 1 61 47 63 29 34 19 20 51
24 2 7 3 15 17 19 29 20 13 30 11 57 2 68 46 8 74 6 62 10 6
20 17 37 9 10 0 1 35 1 10 11 3 0 28 34 2 8 73 36 23 63 17

Вариант 4

-12.4629 4.86541 -28.9343 3.58909 5.61619 -8.17433 -6.86504
28.9654 13.4664 20.2197 -19.4836 3.92785 -7.18 22.657
-8.02417 -27.5774 21.1793 8.66142 22.8749 26.5574 -22.3567
24.6603 12.712 21.4851 -14.241 2.98846 5.59421 -28.4838
12.6955 -18.189 -21.996 4.31057 14.1952 7.79894 18.2549
-19.9963 4.62553 23.4499 11.9813 -7.78612 1.53818 10.9632
-1.90624 -2.2798 4.06702 -25.521 -10.4926 -28.2476 14.5962
-27.3851 3.06537 -24.2666 23.0379 23.1368 -6.99506 -25.651
23.091 -28.3556 12.375 -11.1536 -20.1245 -13.7997 -3.26863
3.39681 -1.67369 29.6686 -25.4679 -28.5589 11.6609 -8.25673
-21.4137 -1.13715 19.3829 -27.4931 -17.0939 -29.1467 14.1256
-0.644571 -20.5915 19.4085

Вариант 5

18.3208 33.0654 26.1124 45.6125 49.7546 3.72093 49.7143
16.8028 44.0707 15.4917 35.0412 44.4937 53.2338 1.59128
5.16755 21.2782 3.95898 18.2842 12.0033 59.3774 45.8616
48.0443 44.2904 54.0634 38.5497 45.64 46.8357 53.5122
39.6887 41.5418 7.83373 4.3417 25.8048 26.9914 41.1353
52.3219 47.7348 35.1364 0.338766 27.5114 12.6076 22.5765

51.6426 13.3309 54.23 25.7462 2.21022 28.8299 23.7228
16.4512 11.0822 3.58176 22.3421 50.9687 59.3444 54.5999
28.286 17.0665 26.5464 24.5596 59.4287 53.362 30.2234
30.8368 3.79418 45.2994 55.3305 24.6036 19.74 52.2505
30.5457 49.4488 37.5847 9.99084 38.2952 38.8464 44.6933
23.0214 15.3195 1.88976 45.8158 11.0255 10.7453 36.6252
0.567662 23.9279 58.4765 0.36074 9.95788 49.8462

Вариант 6

21.6308 75.4847 4.54156 12.3202 0.781956 66.5538 113.913
10.6395 34.5341 12.1845 26.3857 30.0328 12.2741 6.43801
9.00991 51.0383 20.9002 14.2784 119.968 6.46566 3.26102
4.59836 32.8376 37.7961 13.0437 35.0837 54.8461 49.6106
21.9115 27.5938 25.1831 28.3791 13.0181 2.18736 27.1672
0.317116 14.0592 2.47548 56.4427 99.1454 4.01733 5.57268
12.9655 4.15749 161.633 4.05678 7.40199 55.2045 32.1215
33.4233 17.4357 6.94153 1.29977 25.435 0.954162 7.34256
4.30842 55.1767 19.5369 0.37204 56.4427 2.63096 6.37885
8.88224 6.4973 103.344 22.2417 4.02898 53.6762 9.70884
69.1671 6.51809 25.6406 65.6204 45.2607 9.2971 8.15176
32.4155 7.58527 31.2703 22.4038 19.14 25.1163 1.83674
17.5479 25.0352 16.0453 6.74989 30.0582 32.357 55.3088
30.0049 36.3019 12.4329 24.3974 10.0487 9.47034 22.8813
47.7294 44.273 1.12357 12.8007 17.3837 28.6993 5.76219
12.1138 7.24246 0.197629 15.7527 109.162 96.4029 2.95087
23.6357 7.53571 45.7743 2.75758 1.52663 4.74275 32.0939
13.8658

Вариант 7

28 21 7 38 67 2 29 7 66 107 3 27 23 8 9 22 26 48 20 5 33 16
15 29 11 13 23 2 16 2 27 57 12 15 3 0 8 47 2 41 35 1 1 26 2
9 17 29 10 26 15 27 21 21 6 30 1 4 17 67 23 34 25 2 49 17 54
11 30 44 31 8 50 2 12 3 9 21 52 16 36 84 28 53 27 23 93 15
45 21 44 13 48 5 16 19 23 35 68 32 20 15 75 22 53 3 16 24 65
5 16 41 1 46 9 4 66 16 37 28 5 42 2 19 214 84 116 6 25 46 2
18 9 2 12 1 44 68 147 21 42 36 73 7 5 22 50 6 11 5

Вариант 8

16 17 42 9 22 35 20 31 18 24 42 48 34 41 7 6 14 26 18 36 44
14 44 0 36 5 21 17 33 35 7 42 7 8 21 12 4 2 46 31 2 6 18 25
10 37 34 18 43 11 43 12 19 10 10 48 21 6 27 44 47 16 39 10 6
18 18 37 36 12 15 41 35 12 11 34 5 1 42 34 27 29 28 42 34 35
39 4 37 38 10 27 31 12 41

Вариант 9

27 15 22 12 4 30 40 21 20 21 27 18 8 42 57 20 18 11 35 22 17 10 41 13 93 9 70 52 37 16 1 44 3 46 57 8 39 13 25 1 11 11 7 1 9 49 3 64 34 81 22 5 49 15 161 47 22 180 19 25 30 68 28 41 28 25 14 12 8 21 9 31 7 42 16 127 13 34 0 10 10 65 35 2 52 7 2 54 4 49 4 10 19 99 11 16 13 21 30 61 57 19 14 15 12 9 13 17 39 16 2 47 77 6 44 4 27 9 13 3 34 74 45 13 90 8 3 45 5 71 11 13 28 44 3 17 5 0 19 60 25 6 29 9 26 21 29 29 4 0 64 5 13 10 12 17 45 16 33 30 12 41 15 39 25

Вариант 10

18.1411 23.9331 13.1083 11.3246 13.3507 21.6651 10.956 44.5053 51.1209 52.2951 40.9722 53.6941 6.32282 17.5438 12.5861 10.4618 3.32599 24.8866 21.4072 11.1501 9.91623 46.1165 0.0495033 33.5697 14.0051 3.00423 9.81527 37.4914 8.37103 6.91082 13.0168 6.31947 62.1917 40.6341 6.27598 0.410707 6.66825 7.85457 1.46151 20.4106 29.394 18.1593 29.4179 40.3613 13.3888 2.08037 25.6707 8.57241 41.5194 45.4303 2.15773 60.2631 21.8845 6.50704 1.3711 20.5961 2.64431 11.4367 17.1414 10.7345 3.52303 13.4797 4.72615 4.57519 11.4909 16.4572 35.3647 6.91254 0.696857 2.28049 10.648 3.20884 33.1362 6.23342 55.3531 4.08931 0.0128227 10.0934 19.3952 9.98751 4.4208 15.4476 9.80729 7.92067 6.08145 0.906522 44.2248 10.4916 6.75962 1.12939 56.136 0.320568 4.56139 1.33974 22.7071 8.12854 2.51584 6.93239 8.70309 10.9496 69.1772 1.5095 0.239479 13.0086 18.7911 81.4199 100.906 29.3834 47.1856 55.3726 15.0447 4.14105 54.9396 60.6647 7.55311 46.332 45.2009 33.1266 10.1349 1.91444

Вариант 11

117 143 102 104 106 123 141 121 135 107 143 112 147 120 138 144 112 120 118 103 139 142 120 101 127 133 111 122 112 123 142 127 127 146 137 127 128 141 148 143 130 111 135 109 143 114 146 141 125 116 121 135 106 125 133 145 138 147 144 129 132 124 135 103 148 138 149 132 119 115 145 116 112 140 100 139 126 123 123 141 147 136 101 127 108 146 149 131 116 128 133 101 105 129 134 103 119 108 137 136 138 131 136 138 146 106 115 137 114 113 134 113 132 129 127 139 131 113 104 113

Вариант 12

−5 −2 −21 −17 2 −11 −3 −3 −25 −11 2 −3 22 29 20 5 33 −28 −1 18 −19 −3 14 −9 15 −27 23 19 18 2 −24 11 27 9 1 34 −14 −1 8 16 −6 21 −14 −4 13 9 37 9 −8 −8 15 30 −22 −2 20 −13 30 −29 −23 27 21 39 18 −22 −9 −4 38 19 35 2 9 0 −27 −1 −27 −17 −15 19 −18 −21 −24 21 20 25 −27 36 34 0 −10 1 26 −4 22 33 7 32

36 3 -29 34 16 4 15 -7 -2 21 27 -10 -9 -15 23 -23 26 25 1 -8 13 -18 -13 -13

Вариант 13

-6.31203 8.51126 10.7972 28.5 -17.737 -16.2721 15.9244 9.93652 -19.9924 16.7546 -19.2584 -4.22908 15.7062 27.8118 -0.121163 11.2366 11.3419 -17.1113 4.47812 0.512116 -3.50424 -18.152 4.18208 -17.9354 -1.38772 18.8604 12.0088 5.24416 29.443 4.28737 -15.0391 9.69999 13.0144 12.0714 -11.8254 14.2245 25.4068 -8.37057 15.398 -13.4826 -8.34463 8.40902 23.6443 20.5085 10.1044 2.08081 14.8151 22.7089 -0.505708 26.4994 22.1138 -15.7303 -10.8594 10.434 -15.9623 -9.79735 -2.52152 3.20088 13.811 -7.61979 19.2984 -5.80999 -3.00067 -2.11713 16.9835 20.3879 25.2069 -0.783434 -13.9282 0.957699

Вариант 14

22.1749 40.3055 37.4866 6.06084 28.131 45.0656 25.0642 6.12412 23.1014 9.34806 6.89926 43.0823 50.9737 4.89541 67.3874 0.497812 1.09247 23.1476 1.97095 20.4259 43.4787 4.36287 13.999 7.51715 80.772 15.6626 1.66489 24.0017 10.2065 8.20256 86.6419 11.8489 2.46116 17.7488 57.7915 10.1847 3.74553 2.31258 23.6534 1.28129 46.6661 6.32672 0.331028 31.7764 10.0521 69.5339 12.4367 59.071 3.71541 13.4716 7.6256 10.9603 26.7634 2.68612 77.1816 23.8567 3.94396 0.37901 18.3138 28.2016 28.7041 7.88782 1.73758 10.8989 57.3413 7.28225 2.87286 24.3974 45.1212 13.7531 0.203013 25.7793 36.1394 6.46566 3.7101 27.4493 9.75163 1.89593 43.7714 20.9937 40.3706 45.3776 29.6927 5.93669 65.1509 55.1075 16.3003 11.2171 118.096 2.19069 63.8129 11.7229 27.479 29.5903 46.3085 11.6706 10.5625 35.8881 83.8715 3.63411 10.8106 44.2058 23.0438 13.0849 53.1016 18.0438 39.9786 50.1323 108.392 59.9115 0.198398 14.5036 16.4221 7.71894 63.7346 6.49632 2.00895 68.4612 18.1998 30.6465 24.5477 0.843435 70.1447 15.4423 38.795 39.8957 9.02742 4.55712 114.501 2.86003 0.104748 0.486919 118.97 3.79344 25.728 10.6103 67.4326 23.8725 3.89042 23.7203 5.049 23.8824 4.88984 19.9046 47.1392 14.7611 15.4763 23.0573 8.04838 17.051

Вариант 15

6 6 15 5 9 30 1 18 29 7 61 26 7 2 11 16 22 8 8 15 12 43 9 50 1 3 13 2 39 8 27 26 14 0 2 2 15 22 1 2 26 8 19 26 5 53 30 9 9 44 0 14 41 5 8 11 10 3 8 17 3 13 8 29 18 4 7 3 33 8 10 22 26 69 12 16 27 21 75 33 26 27 17 9 5 5 97 6 25 4 25 6 27 118 10 44 35 25 4 1 40 14 23 1 1 2 10 1 61 47 63 29 34 19 20 51

24 2 7 3 15 17 19 29 20 13 30 11 57 2 68 46 8 74 6 62 10 6 20 17 37 9 10 0 1 35 1 10 11 3 0 28 34 2 8 73 36 23 63 17

Вариант 16.

-12.4629 4.86541 -28.9343 3.58909 5.61619 -8.17433 -6.86504 28.9654 13.4664 20.2197 -19.4836 3.92785 -7.18 22.657 -8.02417 -27.5774 21.1793 8.66142 22.8749 26.5574 -22.3567 24.6603 12.712 21.4851 -14.241 2.98846 5.59421 -28.4838 12.6955 -18.189 -21.996 4.31057 14.1952 7.79894 18.2549 -19.9963 4.62553 23.4499 11.9813 -7.78612 1.53818 10.9632 -1.90624 -2.2798 4.06702 -25.521 -10.4926 -28.2476 14.5962 -27.3851 3.06537 -24.2666 23.0379 23.1368 -6.99506 -25.651 23.091 -28.3556 12.375 -11.1536 -20.1245 -13.7997 -3.26863 3.39681 -1.67369 29.6686 -25.4679 -28.5589 11.6609 -8.25673 -21.4137 -1.13715 19.3829 -27.4931 -17.0939 -29.1467 14.1256 -0.644571 -20.5915 19.4085

Вариант 17.

18.3208 33.0654 26.1124 45.6125 49.7546 3.72093 49.7143 16.8028 44.0707 15.4917 35.0412 44.4937 53.2338 1.59128 5.16755 21.2782 3.95898 18.2842 12.0033 59.3774 45.8616 48.0443 44.2904 54.0634 38.5497 45.64 46.8357 53.5122 39.6887 41.5418 7.83373 4.3417 25.8048 26.9914 41.1353 52.3219 47.7348 35.1364 0.338766 27.5114 12.6076 22.5765 51.6426 13.3309 54.23 25.7462 2.21022 28.8299 23.7228 16.4512 11.0822 3.58176 22.3421 50.9687 59.3444 54.5999 28.286 17.0665 26.5464 24.5596 59.4287 53.362 30.2234 30.8368 3.79418 45.2994 55.3305 24.6036 19.74 52.2505 30.5457 49.4488 37.5847 9.99084 38.2952 38.8464 44.6933 23.0214 15.3195 1.88976 45.8158 11.0255 10.7453 36.6252 0.567662 23.9279 58.4765 0.36074 9.95788 49.8462

Вариант 18

21.6308 75.4847 4.54156 12.3202 0.781956 66.5538 113.913 10.6395 34.5341 12.1845 26.3857 30.0328 12.2741 6.43801 9.00991 51.0383 20.9002 14.2784 119.968 6.46566 3.26102 4.59836 32.8376 37.7961 13.0437 35.0837 54.8461 49.6106 21.9115 27.5938 25.1831 28.3791 13.0181 2.18736 27.1672 0.317116 14.0592 2.47548 56.4427 99.1454 4.01733 5.57268 12.9655 4.15749 161.633 4.05678 7.40199 55.2045 32.1215 33.4233 17.4357 6.94153 1.29977 25.435 0.954162 7.34256 4.30842 55.1767 19.5369 0.37204 56.4427 2.63096 6.37885 8.88224 6.4973 103.344 22.2417 4.02898 53.6762 9.70884 69.1671 6.51809 25.6406 65.6204 45.2607 9.2971 8.15176 32.4155 7.58527 31.2703 22.4038 19.14 25.1163 1.83674

17.5479 25.0352 16.0453 6.74989 30.0582 32.357 55.3088
30.0049 36.3019 12.4329 24.3974 10.0487 9.47034 22.8813
47.7294 44.273 1.12357 12.8007 17.3837 28.6993 5.76219
12.1138 7.24246 0.197629 15.7527 109.162 96.4029 2.95087
23.6357 7.53571 45.7743 2.75758 1.52663 4.74275 32.0939
13.8658

Вариант 19.

28 21 7 38 67 2 29 7 66 107 3 27 23 8 9 22 26 48 20 5 33 16
15 29 11 13 23 2 16 2 27 57 12 15 3 0 8 47 2 41 35 1 1 26 2
9 17 29 10 26 15 27 21 21 6 30 1 4 17 67 23 34 25 2 49 17 54
11 30 44 31 8 50 2 12 3 9 21 52 16 36 84 28 53 27 23 93 15
45 21 44 13 48 5 16 19 23 35 68 32 20 15 75 22 53 3 16 24 65
5 16 41 1 46 9 4 66 16 37 28 5 42 2 19 214 84 116 6 25 46 2
18 9 2 12 1 44 68 147 21 42 36 73 7 5 22 50 6 11 5

Вариант 20

16 17 42 9 22 35 20 31 18 24 42 48 34 41 7 6 14 26 18 36 44
14 44 0 36 5 21 17 33 35 7 42 7 8 21 12 4 2 46 31 2 6 18 25
10 37 34 18 43 11 43 12 19 10 10 48 21 6 27 44 47 16 39 10 6
18 18 37 36 12 15 41 35 12 11 34 5 1 42 34 27 29 28 42 34 35
39 4 37 38 10 27 31 12 41

Вариант 21

27 15 22 12 4 30 40 21 20 21 27 18 8 42 57 20 18 11 35 22 17
10 41 13 93 9 70 52 37 16 1 44 3 46 57 8 39 13 25 1 11 11 7
1 9 49 3 64 34 81 22 5 49 15 161 47 22 180 19 25 30 68 28 41
28 25 14 12 8 21 9 31 7 42 16 127 13 34 0 10 10 65 35 2 52 7
2 54 4 49 4 10 19 99 11 16 13 21 30 61 57 19 14 15 12 9 13
17 39 16 2 47 77 6 44 4 27 9 13 3 34 74 45 13 90 8 3 45 5 71
11 13 28 44 3 17 5 0 19 60 25 6 29 9 26 21 29 29 4 0 64 5 13
10 12 17 45 16 33 30 12 41 15 39 25

Вариант 22

18.1411 23.9331 13.1083 11.3246 13.3507 21.6651 10.956
44.5053 51.1209 52.2951 40.9722 53.6941 6.32282 17.5438
12.5861 10.4618 3.32599 24.8866 21.4072 11.1501 9.91623
46.1165 0.0495033 33.5697 14.0051 3.00423 9.81527 37.4914
8.37103 6.91082 13.0168 6.31947 62.1917 40.6341 6.27598
0.410707 6.66825 7.85457 1.46151 20.4106 29.394 18.1593
29.4179 40.3613 13.3888 2.08037 25.6707 8.57241 41.5194
45.4303 2.15773 60.2631 21.8845 6.50704 1.3711 20.5961
2.64431 11.4367 17.1414 10.7345 3.52303 13.4797 4.72615
4.57519 11.4909 16.4572 35.3647 6.91254 0.696857 2.28049
10.648 3.20884 33.1362 6.23342 55.3531 4.08931 0.0128227

10.0934 19.3952 9.98751 4.4208 15.4476 9.80729 7.92067
6.08145 0.906522 44.2248 10.4916 6.75962 1.12939 56.136
0.320568 4.56139 1.33974 22.7071 8.12854 2.51584 6.93239
8.70309 10.9496 69.1772 1.5095 0.239479 13.0086 18.7911
81.4199 100.906 29.3834 47.1856 55.3726 15.0447 4.14105
54.9396 60.6647 7.55311 46.332 45.2009 33.1266 10.1349
1.91444

Вариант 23.
117 143 102 104 106 123 141 121 135 107 143 112 147 120 138
144 112 120 118 103 139 142 120 101 127 133 111 122 112 123
142 127 127 146 137 127 128 141 148 143 130 111 135 109 143
114 146 141 125 116 121 135 106 125 133 145 138 147 144 129
132 124 135 103 148 138 149 132 119 115 145 116 112 140 100
139 126 123 123 141 147 136 101 127 108 146 149 131 116 128
133 101 105 129 134 103 119 108 137 136 138 131 136 138 146
106 115 137 114 113 134 113 132 129 127 139 131 113 104 113

Вариант 24.
-5 -2 -21 -17 2 -11 -3 -3 -25 -11 2 -3 22 29 20 5 33 -28 -1
18 -19 -3 14 -9 15 -27 23 19 18 2 -24 11 27 9 1 34 -14 -1 8
16 -6 21 -14 -4 13 9 37 9 -8 -8 15 30 -22 -2 20 -13 30 -29
-23 27 21 39 18 -22 -9 -4 38 19 35 2 9 0 -27 -1 -27 -17 -15
19 -18 -21 -24 21 20 25 -27 36 34 0 -10 1 26 -4 22 33 7 32
36 3 -29 34 16 4 15 -7 -2 21 27 -10 -9 -15 23 -23 26 25 1 -8
13 -18 -13 -13

5. ОФОРМЛЕНИЕ РАБОТЫ

Результаты выполнения работы должны быть оформлены в бумажном виде файла с использованием таблиц MS Excel (или др. электронной таблиц). Все расчеты, таблицы, результаты и графики должны быть подписаны.

4. РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/ В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов втузов.—3-е изд., перераб. и доп.—М.: Высш. шк.
3. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.