Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тульский государственный университет»
Институт прикладной математики и компьютерных наук

Кафедра «Информационная безопасность»

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине

«Математическая логика и теория алгоритмов»

на тему

«Алгебра высказываний и логика предикатов»

Вариант №14

Выполнила:	ст. гр. 230711	____________ (подпись)	Павлова В. С.
Проверил:	д. т. н, доц. каф. ИБ	____________ (подпись)	Токарев В. Л.

Тула, 2023 г.

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Математическая логика и теория алгоритмов»

студента гр. 230711 Павловой Виктории Сергеевны

Тема курсовой работы:

«Алгебра высказываний и логика предикатов»

Исходные данные:

Согласно заданиям из варианта №14.

Задание получил ______________________ ______________

(ФИО) (подпись)

Задание выдал ______________________ ______________

(ФИО) (подпись)

Дата выдачи задания «07» ноября 2023 г.

График выполнения КР в соответствии с методическими указаниями.

Рекомендации и особые отметки ______________________________

«__» ________20__г

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире математическая логика занимает важное положение, предоставляя надежный инструментарий для анализа и формализации различных явлений. Актуальность рассматриваемой темы и решение практических задач по ней обоснована тем фактом, что с развитием информационных технологий и внедрением искусственного интеллекта во многие сферы жизни, понимание принципов математической логики становится важным для разработчиков алгоритмов и систем, работающих на логических принципах. В частности, в рамках вопросов информационной безопасности, в условиях роста киберугроз, математическая логика используется для формальной верификации программ, что позволяет выявлять и устранять ошибки и уязвимости. В области теории вычислений математическая логика используется для анализа сложности задач и разработки эффективных методов решения. В контексте машинного обучения и анализа данных, понимание логических структур и рассуждений оказывается полезным при создании алгоритмов для обработки и извлечения информации из больших объемов данных.

В рамках данной курсовой работы были рассмотрены основные аспекты данной предметной области и решены задачи на применение теоремы дедукции, доказательство справедливости выводимостей с использованием гипотез, приведение формул к конъюнктивной нормальной форме (КНФ), проверку выполнимости множества формул, а также использование метода резолюций для проверки истинности формул и доказательства противоречивости множества дизъюнктов с применением семантической резолюции. Эти методы не только предоставляют инструментарий для формальной логической обработки высказываний, но и обеспечивают понимание основных принципов, лежащих в основе математической логики, что является важным шагом в развитии логического мышления и математической грамотности.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задание №1. Доказать, что справедлива следующая выводимость, построив вывод формул из предложенной гипотезы:

$$\forall x(G \to F(x)) \vdash G \to (\forall x)(F(x))$$

Решение.

Данная выводимость справедлива исходя из 8-ой формулы эквивалентности логики предикатов:

$$\int_{C,B(x)}^{G,F(x)} C \to (\forall x)(B(x)) \equiv \forall x(C \to B(x)) = G \to (\forall x)(F(x)) \equiv \forall x(G \to F(x)),$$

откуда следует, что $\forall x(G \to F(x)) \vdash G \to (\forall x)(F(x))$, ч.т.д.

Задание №2. Используя теорему дедукции, доказать следующую формулу:

$$(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$$

Решение.

1. $\Gamma = \{A, C, (A \to B), (C \to A)\}$.
2. По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}$$

3. По правилу силлогизма:

$$\frac{\vdash C \to A,\ \vdash A \to B}{\vdash C \to B}$$

4. По теореме дедукции:

$$\frac{\Gamma, C \to A \vdash C \to B}{\Gamma \vdash (C \to A) \to (C \to B)}$$

5. По теореме дедукции:

$$\frac{\Gamma, A \to \mathrm{B} \vdash (\mathrm{C} \to \mathrm{A}) \to (\mathrm{C} \to \mathrm{B})}{\Gamma \vdash (A \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{C} \to \mathrm{A}) \to (\mathrm{C} \to \mathrm{B}))}, \text{ч. т. д.}$$

Задание №3. Доказать выводимость:

$$A \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \vdash (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{C}$$

Решение.

1. $\Gamma = \{A \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}), (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})\}$.
2. Согласно аксиоме 3:

$$\int_{x,y}^{A,B} (x \wedge y) \to \mathrm{x} \equiv (A \wedge B) \to \mathrm{A}$$

3. Согласно аксиоме 4:

$$\int_{x,y}^{A,B} (x \wedge y) \to \mathrm{y} \equiv (A \wedge B) \to \mathrm{B}$$

4. По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash A \wedge B,\ \vdash (A \wedge B) \to \mathrm{B}}{\vdash \mathrm{B}}$$

5. По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash A \wedge B,\ \vdash (A \wedge B) \to \mathrm{A}}{\vdash \mathrm{A}}$$

6. По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash A,\ \vdash A \to (B \to \mathrm{C})}{\vdash (B \to \mathrm{C})}$$

7. По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash B,\ \vdash (B \to \mathrm{C})}{\vdash \mathrm{C}}$$

8. По обобщённой теореме дедукции:

$$\frac{A \to (B \to \mathrm{C})\ ,\ \ (A \wedge B), C}{A \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \to (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{C}}$$

9. По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash A \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})}{\vdash (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \to \mathrm{C}}, \text{ч. т. д.}$$

Задание №4. Привести формулу к КНФ:

$$(A \to \mathrm{B}) \to ((\mathrm{C} \to \mathrm{A}) \to (\mathrm{C} \to \mathrm{B}))$$

Решение.

$(A \to B) \to ((\mathrm{C} \to \mathrm{A}) \to (\mathrm{C} \to \mathrm{B})) = (\bar{A} \vee B) \to ((\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{A}) \to (\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{B})) = \overline{\bar{A} \vee B} \vee \overline{\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{A}} \vee (\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{B}) = \overline{\overline{\overline{\overline{\bar{A} \vee B} \vee \overline{\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{A}} \vee (\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{B})}}} = \overline{\overline{A \wedge \bar{\bar{B}}} \wedge \overline{\mathrm{C} \wedge \bar{\bar{\mathrm{A}}}} \wedge \mathrm{C} \wedge \bar{\bar{\mathrm{B}}}} = \overline{(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{\mathrm{C}} \vee \mathrm{A}) \wedge \mathrm{C} \wedge \bar{\bar{\mathrm{B}}}} = \overline{(\bar{A} \wedge \bar{\mathrm{C}} \vee B \wedge \bar{\mathrm{C}}) \wedge C \wedge \bar{\bar{\mathrm{B}}}} = \bar{0}.$

Вывод: в данном случае КНФ не существует.

Задание №5. Проверить, выполнимо ли множество формул:

$$F_1 = \forall x \forall y (P_1(x, y) \to P_2(x, y))$$

$$F_2 = \forall x \forall y (P_2(x, y) \to P_3(x, y))$$

$$F_3 = \exists x \exists y (P_1(x, y))$$

Решение.

1. $F_1 = \left(P_1(x, y) \to P_2(x, y)\right) = \left(\overline{P_1(x, y)} \vee P_2(x, y)\right)$
2. $F_2 = \left(P_2(x, y) \to P_3(x, y)\right) = \left(\overline{P_2(x, y)} \vee P_3(x, y)\right)$
3. $F_3 = (P_1(x, y)\theta = \{x|a, y|b\}) = P_1(a, b).$
4. $F_4 = \mathrm{res}(\overline{P_1(x, y)} \vee P_2(x, y), P_1(x, y), \theta_1 = \{a|x, b|y\}) = \mathrm{res}(\overline{P_1(a, b)} \vee P_2(a, b), P_1(a, b)) = P_2(a, b).$

5. $F_5 = \mathrm{res}(\overline{P_2(x,y)} \vee P_3(x,y), P_2(x,y)\ , \theta_2 = \{a|x, b|y\}) = \mathrm{res}(\overline{P_2(a,b)} \vee P_3(a,b), P_2(a,b)) = P_3(a,b)$.

Вывод: множество формул выполнимо.

Задание №6. Проверить истинность формул методом резолюций:

$$\Big(\exists u A(u,b,c) \to \big(\exists v \exists w B(v,v,w) \to \exists v A(b,v,v)\big)\Big) \wedge$$

$$\wedge \big(\exists y B(a,y,a) \vee \forall \mathrm{xA(b,x,x)} \vee \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{uB(x,u,b)}\big) \to$$

$$\to ((\forall \mathrm{xA(x,x,c)} \to \exists \mathrm{y} \exists \mathrm{zA(b,y,z)}) \vee \mathrm{B(a,a,b)})$$

Решение.

1. Имеем следующие формулы:

$F_1 = \exists u A(u,b,c) \to \{(\exists v \exists w B(v,v,w) \to \exists v A(b,v,v)\}$

$F_2 = \exists y B(a,y,a) \vee \forall \mathrm{xA(b,x,x)} \vee \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{uB(x,u,b)}$

$F_3 = \forall \mathrm{xA(x,x,c)} \to \exists \mathrm{y} \exists \mathrm{zA(b,y,z)}\ \vee \mathrm{B(a,a,b)}$

Таким образом, получим следующую запись: $F_1 \wedge F_2 \to F_3$. Чтобы доказать истинность, необходимо доказать, что $F_1 \wedge F_2 \to \overline{F_3} = \emptyset$.

2. Приведём формулы к КНФ и избавимся от кванторов существования:

$F_1 = \overline{\exists u A(u,b,c)} \vee (\overline{\exists v \exists w B(v,v,w)} \vee \exists v A(b,v,v) = \forall v \forall \mathrm{w} \forall j \overline{A(j,b,c)} \vee \overline{B(v,v,w)} \vee A(b,d,d)$, *подстановка* $\{j|u, d|v\}$.

$F_2 = \exists y B(a,y,a) \vee \forall \mathrm{xA(b,x,x)} \vee \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{uB(x,u,b)} = \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{t} \forall \mathrm{u} B(a,q,a) \vee \mathrm{A(b,x,x)} \vee \mathrm{B(t,u,b)}$, *подстановка* $\{q|y, t|x\}$.

$F_3 = \forall \mathrm{xA(x,x,c)} \to \exists \mathrm{y} \exists \mathrm{zA(b,y,z)}\ \vee \mathrm{B(a,a,b)} = \overline{\forall \mathrm{xA(x,x,c)}} \vee \exists \mathrm{y} \exists \mathrm{zA(b,y,z)}\ \vee \mathrm{B(a,a,b)} = \exists \mathrm{x} \overline{\mathrm{A(x,x,c)}} \vee \mathrm{A(b,p,k)}\ \vee \mathrm{B(a,a,b)} = \overline{\mathrm{A(n,n,c)}} \vee \mathrm{A(b,p,k)}\ \vee \mathrm{B(a,a,b)}$, *подстановка* $\{p|y, k|z, n|x\}$.

3. $\{C_1, C_2, C_3\}$

$C_1 = \overline{A(J,b,c)} \vee \overline{B(v,v,w)} \vee A(b,d,d).$

$C_2 = B(a,q,a) \vee \mathrm{A(b,x,x)} \vee \mathrm{B(t,u,b)}.$

$C_3 = \overline{\mathrm{A(n,n,c)}} \vee \mathrm{A(b,p,k)}\ \vee \mathrm{B(a,a,b)}.$

res(C_1, C_3) = $C_1\theta_1 \vee C_3\theta_2,\ \theta_1 = \{n|d, b|c,\}, \theta_2 = \{j|p, c|k, v|a, w|b\}$

res$(C_1, C_3) = \emptyset, \text{ч. т. д.}$

Задание №7. Задано множество дизъюнктов $S = \{P, Q \vee \bar{P}, R \vee \bar{P}, \bar{P} \vee \bar{Q}\ \vee \bar{R}\}$. Доказать с помощью семантической резолюции, что S противоречиво, если интерпретация $I = \{\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}\}, P\ > Q >\ R$.

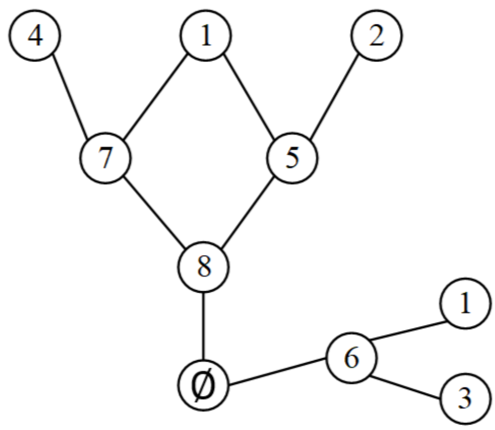
Решение.

1) P; 2) $\mathrm{Q} \vee \overline{\mathrm{P}}$; 3) $\mathrm{R} \vee \overline{\mathrm{P}}$; 4) $\overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}\ \vee \overline{\mathrm{R}}$

(1, 2) → 5) Q (1, 3) → 6) R

(1, 4) → 7) $\overline{\mathrm{Q}}\ \vee \overline{\mathrm{R}}$ (5, 7) → 8) $\overline{\mathrm{R}}$ (6, 8) → ∅

Графически это можно изобразить следующим образом:



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной курсовой работы были решены задачи по следующим темам: доказательство формул с использованием теоремы дедукции, доказательство справедливости выводимостей с использованием гипотез, приведение формул к КНФ, проверка выполнимости множества формул, проверка истинности формул методом резолюций, доказательство противоречивости множества дизъюнктов с помощью семантической резолюции.

В процессе исследования было установлено, что использование данных методов не только способствует разрешению логических задач, но также способствует развитию абстрактного мышления и умения анализа. Работа позволила глубже понять принципы математической логики, раскрыв её роль в решении различных задач в информатике, искусственном интеллекте, формальных методах верификации и других областях.

Математическая логика играет ключевую роль в области искусственного интеллекта, предоставляя формальные методы для представления и решения задач, связанных с логическим выводом, рассуждением и обработкой информации, а также используется для формального доказательства корректности программ и проверки их безопасности. Это важно в критических автоматизированных системах, таких как медицинское оборудование, автомобили с автопилотом и промышленные управляющие системы. Математическая логика также находит применение в разработке алгоритмов машинного обучения, основанных на логическом выводе. Это включает в себя методы индуктивного обучения, где извлечение закономерностей из данных поддается формализации через математическую логику. Таким образом, данная область науки предоставляет строгие инструменты для создания более точных, надежных и эффективных систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / Т. О. Перемитина. – Томск : ФДО, ТУСУР, 2016. –132 с.
2. Изаак, Д. Д. Математическая логика: курс лекций / Д. Д. Изаак.– Орск: Типография «Бланк», 2013. – 78 с.
3. Элементы математической логики [текст] : Учебное пособие. / О.Ю. Агарева, Ю.В. Селиванов. — М.: МАТИ, 2008. — 52 с