

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра физики

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
по дисциплине

**"Физика"**

**семестр III (электромагнетизм)**

Конспект лекций подготовлен к.т.н. доц. О.И.Бурцевой, к.т.н. ст. преп.  
О.А.Герасимовой, к.т.н. доц. О.Ю.Горбуновой, к.т.н. доц. Е.Е.Диковой, д.т.н. проф.  
В.В.Жигуновым, к.т.н. доц. К.В.Жигуновым, ст. преп. С.Е.Кажарской, к.т.н. доц.  
И.Ю.Канунниковой, к.ф.-м.н. проф. Ю.Н.Колмаковым (ред), к.т.н. доц.  
А.М.Кузнецовым, д.ф.-м.н. проф. Д.М.Левиным, д.т.н. проф. Р.Н.Ростовцевым,  
к.т.н., доц. О.В.Шуваевой, к.т.н. доц. Е.В.Якуновой

Тула - 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

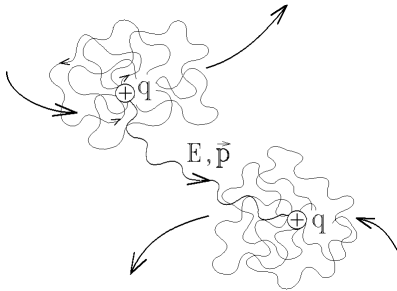
1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	
1.1. Поле покоящегося точечного заряда. Напряженность и потенциал поля. Принцип суперпозиции.	
Поле системы покоящихся зарядов. Сила Кулона.....	4
1.2. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле.....	5
1.3. Связь напряженности и потенциала электростатического поля. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности.....	6
1.4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля.....	7
1.5. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности: поле равномерно заряженного шара, провода (нити), плоскости.....	7
1.6. Теорема Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме.....	9
1.7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.....	9
1.8. Электрический диполь. Энергия диполя в электрическом поле, действующая на него сила и момент сил.....	9
2. ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	
2.1. Поверхностные заряды. Поле вблизи поверхности заряженного проводника.....	11
2.2. Явление электрической индукции. Экранировка поля проводящим слоем. Электростатическая защита.....	11
2.3. Электрическая ёмкость проводника. Конденсаторы и ёмкость конденсаторов.....	12
2.4. Энергия взаимодействия системы электрических зарядов. Энергия заряженного конденсатора.....	14
3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ	
3.1. Причины поляризации диэлектриков. Вектор поляризованности. Объемные и поверхностные связанные заряды.....	14
3.2. Диэлектрическая проницаемость среды и вектор электрической индукции.....	16
3.3. Теорема Гаусса для векторов поляризованности и электрической индукции.....	16
3.4. Электрическое поле в диэлектрике.....	17
3.5. Поле на границе диэлектрика. Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции.....	18
3.6. Плотность энергии электростатического поля в диэлектрике.....	18
4. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	
4.1. Сила тока и плотность тока.....	19
4.2. Уравнение непрерывности электрического заряда и условие стационарности тока.....	19
4.3. Электрическое поле в проводнике с током и закон Ома в локальной форме.....	20
4.4. Причина затухания тока. Электрическое сопротивление проводника. Законы Ома и Джоуля-Ленца.....	21
4.5. Условие квазистационарности тока.....	22
4.6. Причины появления электродвижущей силы. Источники ЭДС.....	22
4.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи.....	23
4.8. Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа и их применение.....	24
5. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	
5.1. Причина появления магнитного поля. Вектор индукции магнитного поля.....	25
5.2. Преобразование электрического и магнитного полей в инерциальных системах отсчета.....	26
5.3. Сила Лоренца.....	27
5.4. Магнитное поле движущегося электрического заряда и элемента тока. Закон Био-Савара-Лапласа.....	27
5.5. Сила Ампера.....	29
5.6. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля.....	30
5.7. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля.....	30
5.8. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля: поле цилиндрического провода с током, поверхностное поле, соленоидальной и тороидальной катушки с током.....	31
5.9. Теорема о циркуляции вектора индукции в дифференциальной форме.....	32
5.10. Сравнение особенностей электростатического и магнитостатического полей.....	33
5.11. Движение заряженной частицы в постоянных магнитном и электрическом полях.....	33
5.12. Дипольный магнитный момент контура с током.....	34
5.13. Энергия замкнутого проводника с постоянным током во внешнем магнитном поле.	
Сила и момент силы, действующие на контур с током.....	34
6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	
6.1. Намагничивание среды и вектор намагниченности.....	35
6.2. Магнитная проницаемость среды и вектор напряженности магнитного поля.....	36
6.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности и вектора намагниченности.....	37
6.4. Магнитное поле в магнетиках. Поле постоянного магнита.....	38
6.5. Поле на границе магнетика. Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.....	39
6.6. Причины появления диа-, пара- и ферромагнетизма.....	40
6.7. Доменная структура ферромагнетика, ферримагнетика и сегнетоэлектрика.....	41

6.8. Явление гистерезиса в ферромагнитных и сегнетоэлектрических средах. Кривая намагничивания.	
Применение гистерезиса. Ферромагнитный зонд.....	44
6.9. Принцип записи и считывания информации с помощью доменной структуры.....	46
<b>7. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ</b>	
7.1. Природа ЭДС электромагнитной индукции в проводниках, движущихся в магнитном поле.	
Принцип действия электромотора и генератора электрического тока.....	46
7.2. Вихревое электрическое поле и причина его появления.....	48
7.3. Закон Фарадея и правило Ленца.....	48
7.4. Проводник и постоянный магнит в переменном магнитном поле. Индукционные токи (токи Фуко).....	49
7.5. Коэффициент индуктивности. Индуктивность соленоида.....	50
7.6. Плотность энергии магнитного поля.....	50
7.7. Явление самоиндукции и ЭДС самоиндукции.....	51
7.8. Явление взаимной индукции. Коэффициенты взаимной индуктивности	
и принцип действия трансформатора. Электромагнитная защита.....	51
<b>8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ</b>	
8.1. Электрический колебательный контур. Собственные электрические колебания в контурах	
(незатухающие и затухающие), их характеристики.....	52
8.2. Вынужденные электрические колебания.....	54
8.3. Резонанс напряжения на конденсаторе и тока в контуре. Добротность контура.....	55
8.4. Полное сопротивление (импеданс) контура. Эффективные ток и напряжение.....	56
8.5. Принцип приема электромагнитного сигнала.....	57
<b>9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ</b>	
9.1. Ток смещения.....	57
9.2. Система уравнений Максвелла.....	58
9.3. Поток плотности энергии электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга и теорема Пойнтинга.....	59
9.4. Электромагнитное излучение ускоренных зарядов. Волновая зона.....	61
9.5. Диаграмма направленности электромагнитного излучения.....	62
9.6. Рассеяние электромагнитного излучения.....	62

# 1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ.

## 1.1. Поле покоящегося точечного заряда. Напряженность и потенциал поля. Принцип суперпозиции. Поле системы покоящихся зарядов. Сила Кулона

Электрическое поле возникает вокруг тел, имеющих электрический заряд. Согласно квантовой теории поля, каждое заряженное тело окружено "облаком" непрерывно испускаемых и поглощаемых виртуальных частиц (виртуальных фотонов). Возникают эти частицы в соответствии с законами квантовой физики, но образуемое ими "облако" проявляется в виде электромагнитного поля, позволяющего заряженным частицам взаимодействовать на расстоянии. Заряженные тела взаимодействуют на расстоянии, обмениваясь виртуальными фотонами, переносящими энергию  $E$  и импульс  $\vec{p}$  от одной заряженной частицы к другой, как показано на рисунке.



Вначале мы рассмотрим свойства покоящихся зарядов, между которыми действуют только электрические силы. Электрическое поле, созданное системой покоящихся зарядов, называется электростатическим полем.

Электрический заряд  $q$  характеризует величину электрического взаимодействия и измеряется в кулонах. Точечным зарядом является заряженное тело, геометрическими размерами которого в данных условиях можно пренебречь. Закон Кулона устанавливает, что сила Кулона, или сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся в вакууме на расстоянии  $r$  друг от друга, определяется выражением

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}, \text{ а постоянная } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \text{ называется электрической постоянной.}$$

Заметим, что нескомпенсированный заряд в 1 Кл — это очень большой заряд: два точечных заряда в 1 Кл каждый, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, будут отталкиваться с силой Кулона  $F_{кул} = 9 \cdot 10^9$  Н!

Заметим также, что закон Кулона для двух точечных взаимодействующих зарядов и закон гравитационного притяжения Ньютона для двух материальных точек имеют аналогичный вид. Так, если поместить один точечный заряд  $q$  в начало координат (см. рисунок), то на другой точечный заряд  $q_0$  будет действовать сила

Кулона 
$$\vec{F}_{кул} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \text{ где } \vec{e}_r = \vec{r}/r \text{ — единичный вектор, направленный вдоль радиус-}$$

вектора, соединяющего заряды. Подобным же образом запишется и сила гравитационного притяжения Ньютона для аналогично расположенных материальных точек с массами  $m$  и

$$m_0: \vec{F}_{грав} = G \frac{mm_0}{r^2} \vec{e}_r. \text{ Поэтому все классические законы для электростатического и гра-}$$

витационного полей одинаковы по форме. Однако между электростатическим и гравитационным взаимодействиями существуют и некоторые отличия.

1) Знак массы (гравитационного заряда) всегда положителен, и гравитационная сила **притягивает** положительные массы. Электрический же заряд  $q$  может быть и положительным, и отрицательным, причем сила Кулона **отталкивает** одноименные заряды и **притягивает** разноименные.

2) Электрическое взаимодействие намного сильнее гравитационного. А так как наш мир электрически нейтрален, т.е. полный (положительный и отрицательный) заряд в нем равен нулю, то значительно более слабые гравитационные силы в нем становятся заметными и могут достигать огромной величины только из-за большой суммарной массы всех частиц.

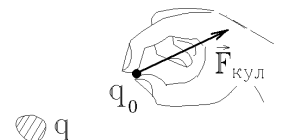
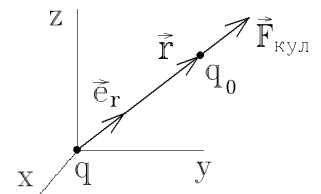
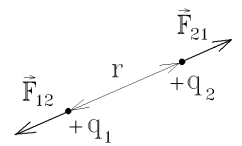
3) Электрический заряд нельзя уменьшать до сколь угодно малой величины. Имеется минимально возможный и **неделимый** заряд, равный или заряду электрона  $e = -1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл, или зарядам кварков  $-e/3, +2e/3$ . Но кварки объединены в элементарные частицы, заряды которых также кратны заряду электрона  $e$ . Поэтому все заряды в природе кратны заряду электрона:  $q = Ne$ , где  $N$  — целое число.

Величину электрического поля точечного заряда  $q$  характеризуют или напряженностью, или потенциалом. Поднесем к заряду  $q$  некоторый пробный заряд  $q_0$  и разделим силу их взаимодействия на величину пробного заряда. Полученный вектор называется напряженностью поля, созданного точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{кул}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

Напряженность поля численно равна кулоновской силе, действующей на единичный положительный заряд, внесенный в поле, и направлена вдоль этой силы.

Но кулоновская сила центральна, а все центральные силы **консервативны**, т.е. работа силы Кулона при изменении расстояния  $r$  между точечными зарядами  $q$  и  $q_0$  идет на изменение потенциальной энергии кулоновского электрического взаимодействия между зарядами (энергию электромагнитных взаимодействий принято обозначать буквой  $W$ ):



$$dA = \vec{F}_{\text{кул}} d\vec{r} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \cdot |d\vec{r}| = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -dW_{\text{кул}}.$$

Интегрируя, получаем выражение этой энергии:

$$W_{\text{кул}} = \int \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциальная энергия определена с точностью до постоянной, которую считаем равной нулю (заряды, разнесенные на бесконечное расстояние  $r = \infty$  не взаимодействуют, а поле любого заряда на бесконечном удалении равно нулю).

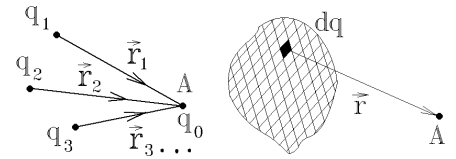
Разделив эту энергию на величину пробного заряда  $q_0$ , получаем потенциал поля, созданного точечным зарядом  $q$  на расстоянии  $r$ :

$$\phi = \frac{W_{\text{кул}}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциал – это скалярная характеристика электрического поля, равная энергии единичного положительного заряда, находящегося в данном поле.

Если поле создается системой точечных зарядов, то напряженности полей, созданных каждым точечным зарядом  $q_i$ , складываются векторно, и резльтирующее поле в точке А, указанной на рисунке, выражается формулой

$$\vec{E}_A = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \vec{r}_i. \text{ Это – принцип суперпозиции полей.}$$



Аналогично вычисляется суммарный потенциал электрического поля системы точечных зарядов:

$$\phi_A = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

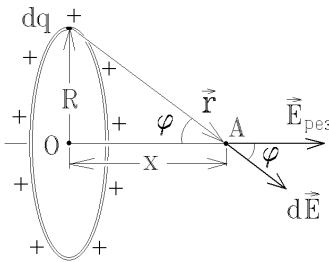
Заметим, что **резльтирующий потенциал системы вычислить проще**, так как потенциалы отдельных зарядов складываются скалярно, без учета направления их полей, но записанная сумма будет **алгебраической**, учитывающей знаки отдельных зарядов.

В прикладных технических задачах обычно заряд распределен по некоторой области. В этом случае объём, заполненный зарядом, разбивают на крошечные участки  $dV$ , которые имеют заряд  $dq$  и которые можно считать **точечными зарядами**. Вводят величину объёмной плотности электрического заряда  $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3} \right]$ . Тогда  $dq = \rho dV$  и

можно применить тот же принцип суперпозиции, заменяя сумму на интеграл по объёму, заполненному зарядом:

$$\vec{E}_A = \int_V d\vec{E} = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad \text{и} \quad \phi_A = \int_V d\phi = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

*Пример:* пусть заряд  $q$  равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса  $R$ .



В этом случае вводят линейную плотность заряда  $\rho_{\text{лин}} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{м}} \right]$ , разбивая

кольцо на крошечные участки длиной  $dl$ , заряды  $dq = \rho_{\text{лин}} dl$  на которых будут точечными (в данном примере  $\rho_{\text{лин}} = q/2\pi R$ ). Тогда, так как  $r = R^2 + x^2$  и  $\cos \phi = x/r$ , то в точке А на оси кольца на расстоянии  $x$  от его центра О получим

$$E_{\text{рез}} = \int dE \cos \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \phi}{r^2} \int dq = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

## 1.2. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле

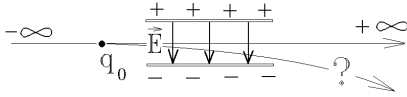
Если точечный заряд  $q_0$  движется в поле системы точечных зарядов  $q_i$ , то, используя принцип суперпозиции  $dA = \vec{F}_{\text{рез}} \cdot d\vec{r} = \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i dA_i$  и интегрируя, находим работу по перемещению заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 в электростатическом поле системы **покоящихся** точечных зарядов:  $A_{1 \rightarrow 2} = \sum_i A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left( \frac{q_i q_0}{r_{1i}} - \frac{q_i q_0}{r_{2i}} \right)$ , где  $r_{1i}$ ,  $r_{2i}$  – расстояния от точек 1 и 2 до заряда  $q_i$ . Учитывая выражение для потенциала данной системы зарядов, можно записать данную формулу в более удобном виде:

$$A_{12} = q_0 (\phi_1 - \phi_2).$$

Работа по перемещению точечного заряда в электростатическом поле равна произведению заряда на величину разности потенциалов в точках начального и конечного положения заряда.

Можно сказать, что энергия точечного заряда  $q$  в поле с потенциалом  $\phi$  равна  $W = q\phi$ .

В качестве единицы работы или энергии часто используют внесистемную, но очень удобную единицу электрон-вольт – это приращение кинетической энергии электрона, прошедшего разность потенциалов в 1 Вольт:



$$1 \text{ эВ} = e \cdot 1 \text{ В} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

*Пример:* пролетая через заряженный конденсатор, частица с положительным зарядом  $q_0$  должна ускориться в электрическом поле конденсатора и увеличить свою кинетическую энергию. С другой стороны изменение кинетической энергии равно изменению потенциальной энергии:  $\Delta E_{\text{кин}} = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = q_0 (\phi|_{x=\infty} - \phi|_{x=-\infty}) = q_0 (0 - 0) = 0$  (потенциалы на бесконечном удалении равны нулю). Попробуйте объяснить это противоречие.

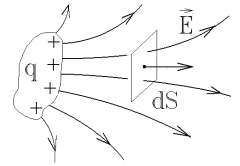
*Замечание:* можно доказать теорему Ирншоу: любая система зарядов не может находиться в равновесии под действием только электростатических сил между ними.

### 1.3. Связь напряженности и потенциала электростатического поля.

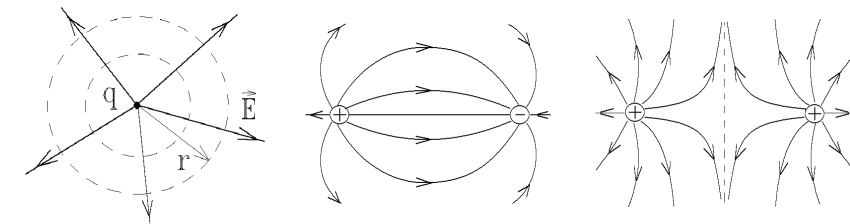
#### Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Удобно изображать электростатическое поле с помощью силовых линий – это линии, касательные, к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  (не имеющий начальной скорости свободный точечный заряд  $q_0$  всегда начинает двигаться в электрическом поле под действием кулоновской силы вдоль силовой линии). Плотность силовых линий или число силовых линий  $dN$ , пересекающих расположенную под прямым углом площадку  $dS$ , пропорциональна величине напряженности поля  $E$  в данной точке:  $dN/dS = E$ .

Окружим точечный заряд  $q$  сферическими поверхностями  $S$  с разными радиусами  $r$ . Так как  $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , то число силовых линий, пересекающих каждую сферическую замкнутую поверхность с площадью  $S = 4\pi r^2$ , не зависит от расстояния до заряда:  $N = \int E dS = q/\epsilon_0 = \text{const}$ .



Следовательно, силовые линии не могут начинаться или заканчиваться в вакууме. Силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах или уходят в бесконечность.



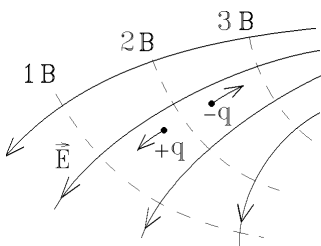
Вспомним, что любая консервативная сила связана с потенциальной энергией соотношением  $\vec{F} = -\text{grad } W$ . Разделив левую и правую часть этого выражения на пробный заряд  $q_0$ , получим соотношение между потенциалом и напряженностью электростатического поля:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi = -\vec{\nabla} \phi = -\left( \vec{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right).$$

Так как в случае радиальной симметрии, когда потенциал  $\phi = \phi(r)$  зависит только от расстояния  $r$  до центра заряженной системы, оператор градиента имеет вид  $\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial/\partial r$ , и для точечного заряда получаем записанную ранее формулу закона Кулона:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Обратная связь выражается интегралом: 
$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} E_x dx + \int_{y_1}^{y_2} E_y dy + \int_{z_1}^{z_2} E_z dz.$$



Совокупность точек (поверхность) с одинаковым потенциалом  $\phi = \text{const}$  называется эквипотенциальной поверхностью. Вектор напряженности  $\vec{E} = -\text{grad } \phi$  и силовые линии поля всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, которые изображены штриховыми линиями на рисунке. Вектор  $\text{grad } \phi$  направлен в сторону максимального возрастания потенциала; силовые линии направлены противоположно. Поэтому свободные **положительные** заряды стремятся двигаться вдоль силовой линии в сторону **уменьшения** потенциала, а **отрицательные** – в сторону **возрастания** потенциала. При движении заряда по эквипотенциальной поверхности электрические

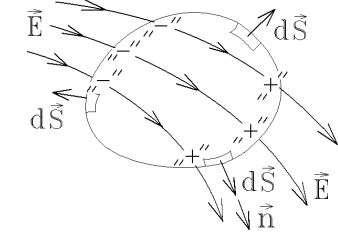
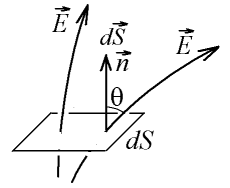
силы не совершают работу:  $A = q \cdot \Delta \phi = 0$ .

Чем гуще расположены эквипотенциальные поверхности, тем больше  $\text{grad } \phi$  в данной точке поля, и тем больше электрическая сила  $\vec{F}_{\text{кул}} = -q \cdot \text{grad } \phi$ .

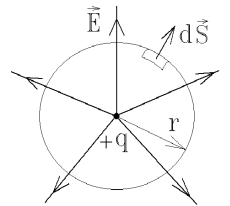
Заметим также, что для сложной системы зарядов проще вычислить потенциал, а затем, по известному распределению потенциала  $\phi$  всегда можно вычислить напряженность поля  $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ .

## 1.4. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля

Любую площадку  $dS$  описывают нормальным к ней вектором  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ , где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали. Поток вектора  $\vec{E}$  через эту площадку, как и поток любого вектора, равен скалярному произведению вектора  $\vec{E}$  на вектор площадки:  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta = dN$  – это число силовых линий  $\vec{E}$  электростатического поля, пересекающих площадку  $dS$ .

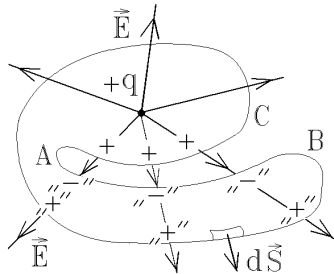
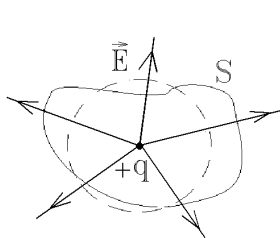


Разбивая любую **замкнутую** поверхность  $S$  на элементарные площадки  $d\vec{S}$ , договоримся всегда направлять вектор нормали  $\vec{n}$  и вектор площадки  $d\vec{S}$  из замкнутой поверхности **наружу**, как показано на рисунке. Тогда входящие в замкнутую поверхность силовые линии  $\vec{E}$  создают отрицательный поток, так как  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} < 0$  (они отмечены знаком "-"), а выходящие из нее линии  $\vec{E}$  создают положительный поток, так как для них  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$  (отмечены знаком "+"). Если внутри замкнутой поверхности  $S$  электрических зарядов нет, то все вошедшие в нее линии  $E$  должны выйти (см. рисунок), и поток вектора  $\vec{E}$  через такую поверхность будет равен нулю.



Охватим теперь точечный заряд  $q$  сферической поверхностью радиуса  $r$ , тогда

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos 0^\circ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{const} - \text{это число силовых линий, пересе-$$



кающих замкнутую сферическую поверхность  $S$ . А так как силовые линии не возникают и не исчезают в вакууме, то их число  $\Phi_E$  будет одинаково для любой замкнутой поверхности  $S$  произвольной формы. На участке AC (см. правый рисунок) линии  $\vec{E}$  выходят из замкнутой поверхности  $S$  и берутся со знаком "+", а на участке AB они же входят со знаком "-", т.е. поток вектора напряженности не зависит от формы замкнутой поверхности, охватывающей электрический заряд  $q$ :

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \text{const}.$$

Если внутри замкнутой поверхности находится система электрических зарядов, то используем принцип суперпозиции:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \oint \sum_i \vec{E}_i d\vec{S} = \oint \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \cos 0^\circ = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}.$$

Это – **теорема Гаусса** для электростатического поля в вакууме:

поток вектора напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

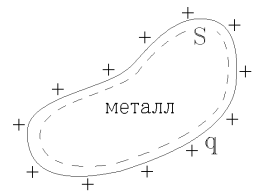
$$\text{Если заряд распределен внутри поверхности непрерывно с плотностью } \rho, \text{ то } \Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

где интеграл берется по объему внутри рассматриваемой замкнутой поверхности.

## 1.5. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженности: поле равномерно заряженного шара, провода (нити), плоскости

### 1. Заряженный проводник.

Свободные электроны в проводнике (металле) распределяются так, что результирующее поле внутри проводника отсутствует, т.е.  $\vec{E} = 0$  (иначе электроны будут перемещаться в электрическом поле  $\vec{E}$  до тех пор, пока оно не исчезнет).



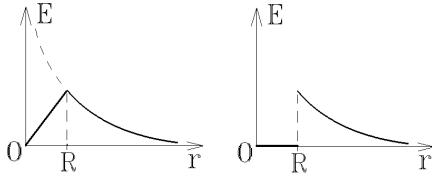
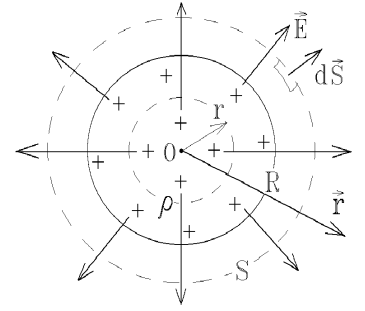
Выберем любую замкнутую поверхность  $S$  внутри проводника (см. рисунок). Согласно

$$\text{теореме Гаусса для нее } \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \oint \vec{E} d\vec{S} = 0. \text{ Т.е. внутри проводящей среды нескомпенсированного по-}$$

коящегося заряда быть не может. Свободный заряд, сообщенный проводящему телу, распределяется только по его поверхности.

## 2. Заряженный шар.

Пусть заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиуса  $R$  с объемной плотностью  $\rho = q / \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)$ . Окружим шар сферической поверхностью радиуса  $r > R$ . В силу симметрии распределения заряда величина  $|\vec{E}|$  должна быть одинаковой в каждой точке этой поверхности  $S$ . Тогда  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cos 0^\circ \cdot 4\pi r^2 = q / \epsilon_0$ , откуда с учетом направления линий поля получаем  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$  при  $r > R$  (вне равномерно заряженного шара его совпадает с полем точечного заряда  $q$ , помещенного в центр шара).



Охватим теперь центр шара другой сферической поверхностью радиуса  $r < R$ . Снова  $|\vec{E}| = E = \text{const}$  во всех точках этой поверхности. Используя теорему Гаусса, находим  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cos 0^\circ \cdot 4\pi r^2 = q_{\text{внутри}} / \epsilon_0$ , но внутри поверхности теперь находится заряд  $q_{\text{внутри}} = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$ . Поэтому внутри шара поле выражается формулой  $\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$  при  $r < R$ . Зависимость напряженности

поля равномерно заряженного шара от расстояния  $r$  до центра шара изображена на левом рисунке. Но если шар сделан из проводящего материала, то весь свободный заряд равномерно распределится по его поверхности ( $q_{\text{внутри}} = 0$ ), и напряженность поля такого шара (или поля равномерно заряженной сферы радиуса  $R$ ) будет иметь вид, показанный на правом рисунке.

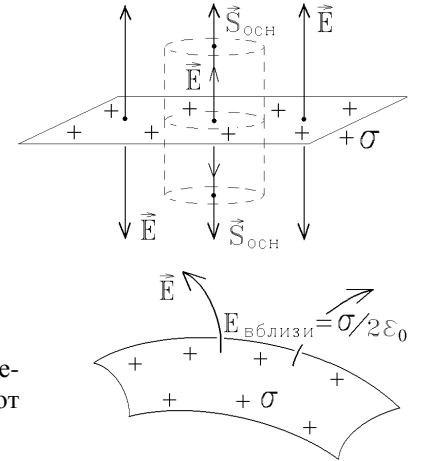
## 3. Равномерно заряженная плоскость.

Если заряд распределен по бесконечной плоскости равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$  (это заряд, приходящийся на единицу площади), то вследствие симметрии линии  $\vec{E}$  перпендикулярны плоскости, как показано на рисунке. Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра с площадью основания  $S_{\text{осн}}$ . Линии  $\vec{E}$  пересекают только основания, поэтому

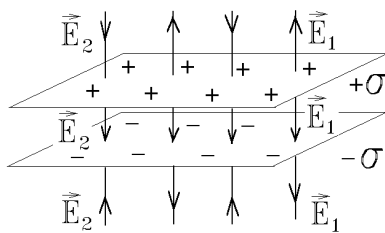
$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 2ES_{\text{осн}} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon_0} \quad \text{и} \quad E_{\text{заряд плоскости}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Поле равномерно заряженной плоскости не зависит от расстояния до неё.

Эту формулу можно применить и для заряженной плоскости конечных размеров, и для заряженных искривленных поверхностей, но только в точках, удаленных от краев и находящихся **вблизи** поверхности.



## 4. Заряженный плоский конденсатор.



В таком конденсаторе разноименно заряженные с поверхностной плотностью  $\sigma \approx \text{const}$  пластины находятся на малом расстоянии друг от друга, и приближенно их можно считать бесконечными.

В отрицательно заряженную плоскость линии  $\vec{E}_2$  входят, а из положительно заряженной плоскости линии  $\vec{E}_1$  выходят. Поэтому между пластинами  $E = E_1 + E_2 = 2 \cdot \sigma / 2\epsilon_0$ , т.е. **внутри** конденсатора  $E = \sigma / \epsilon_0$ , а вне конденсатора  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$  (поля положительно и отрицательно заряженных пластин конденсатора взаимно компенсируются).

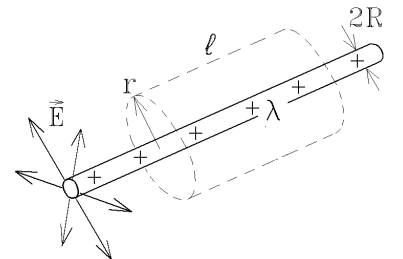
## 5. Заряженный цилиндр (нить).

Пусть заряд распределен по бесконечному прямому цилиндру радиуса  $R$  с линейной плотностью  $\rho_{\text{лин}} = \lambda$  (это заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра или нити). Охватим участок цилиндра коаксиальной замкнутой цилиндрической поверхностью длины  $l$  и радиуса  $r$ .

Так как в силу симметрии распределения заряда линии  $\vec{E}$  должны расходиться вдоль радиальных направлений, то они будут пересекать только боковую поверхность цилиндра, причем на одинаковом удалении  $r$  от оси величина

$E = \text{const}$ . Из теоремы Гаусса находим  $\oint \vec{E} d\vec{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ . Поэтому вне равномерно заряженного

цилиндра (или прямой нити) поле убывает с расстоянием  $r$  по закону  $E_{\text{заряд нити}} = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$ .





## 1.6. Теорема Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме

Из курса векторного анализа известна теорема Остроградского: поток любого вектора  $\vec{A}$  через любую замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции  $\vec{A}$  по объёму, охватываемому этой поверхностью, т.е.

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{A} dV.$$

Дивергенцию вектора  $\vec{A}$  легко найти по формуле

$$\text{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Применим теперь теорему Остроградского к вектору напряженности электрического поля:  $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV$ . С дру-

гой стороны, согласно теореме Гаусса,  $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$ , где интеграл берется по всему объёму  $V$ , охваченному

замкнутой поверхностью  $S$  и заполненному зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . Так как эти две теоремы справедливы для произвольного объема  $V$ , то из равенств интегралов следует равенство подынтегральных функций, т.е.

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0.$$

Это – теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля в дифференциальной форме. Она позволяет по известной функции напряженности (или потенциала) электростатического поля вычислить распределение плотности электростатического заряда, создающего это поле.

Заметим, что в тех точках поля, где дивергенция любого вектора  $\vec{A}$  положительна ( $\text{div} \vec{A} > 0$ ), возникают линии вектора  $\vec{A}$ . Эти точки называются источниками векторного поля  $\vec{A}$ . В точках, где  $\text{div} \vec{A} < 0$ , линии вектора  $\vec{A}$  исчезают (это – стоки поля  $\vec{A}$ ). Например, в точках, где имеется положительный заряд,  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 > 0$ , появляются силовые линии электрического поля (как уже говорилось раньше, они начинаются на положительных зарядах). А в тех точках, где имеется отрицательный заряд,  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 < 0$ , силовые линии электрического поля исчезают (на отрицательных зарядах). В точках, где заряда нет,  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 = 0$  (но  $\vec{E} \neq 0$ ), силовые линии не могут исчезать или появляться.

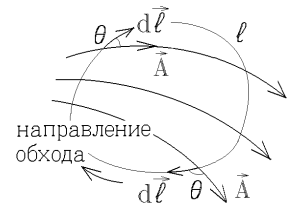
## 1.7. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Величина, равная интегралу от любого вектора  $\vec{A}$  по замкнутому контуру  $l$ , т.е.:

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \oint_l \vec{A} \cdot \cos \theta dl,$$

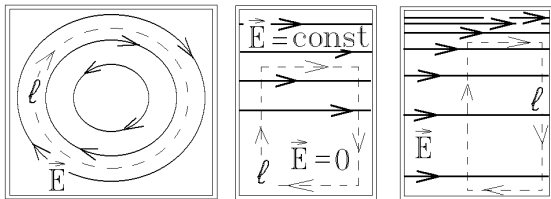
называется циркуляцией вектора  $\vec{A}$  по замкнутому контуру  $l$ . Она зависит от направления обхода контура (при изменении направления обхода изменяется знак циркуляции).

Но для электростатического поля  $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi_1 - \phi_2$ . Поэтому



Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю:  $\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$ .

Это – теорема циркуляции вектора  $\vec{E}$  для электростатического поля. Она эквивалентна утверждению о том, что при перемещении по замкнутому пути работа кулоновских сил равна нулю. Иначе говоря, все поля, циркуляция вектора напряженности которых по любому замкнутому контуру равна нулю, потенциальны, а силы в этих полях **консервативны**.

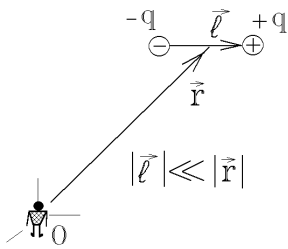


Из теоремы о циркуляции следует, что не могут существовать **электростатические** поля, фрагменты силовых линий которых изображены на рисунках слева. Действительно циркуляция  $\vec{E}$  вдоль замкнутых контуров  $l$ , показанных штриховыми линиями на этих фрагментах, не равна нулю, что нарушает теорему о циркуляции  $\vec{E}$ .

## 1.8. Электрический диполь. Энергия диполя в электрическом поле, действующая на него сила и момент сил

Электрическим диполем называется электронейтральная система зарядов, как правило, малого размера, у которой центры положительного и отрицательного заряда не совпадают. Простейший электрический диполь – это два точечных, одинаковых по величине и разных по знаку заряда, расстояние  $l$  между которыми мало по сравнению с расстоянием  $r$  от диполя до точки наблюдения  $O$ .

Электрический диполь характеризуется электрическим моментом:  $\vec{p}_e = q\vec{l}$ , направленным от центра отрицательного заряда к центру положительного.



Вычислим потенциал электростатического поля, создаваемого простейшим диполем в точке О. С учетом суперпозиций полей двух точечных зарядов находим:

$$\varphi = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}.$$

Но из  $\triangle AOB$  на рисунке следует, что  $r_1^2 = r_2^2 + l^2 - 2r_2 l \cos \theta$

где  $l^2 \approx 0$ , так как  $l \ll r_2 \approx r_1 \approx r$  (второй порядок малости),

т.е.  $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2rl \cos \theta$ . С точностью до малых

высших порядка  $r_2 + r_1 \approx 2r$  и  $r_2 r_1 \approx r^2$ , т.е.  $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$  и

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

– это потенциал поля электрического диполя.

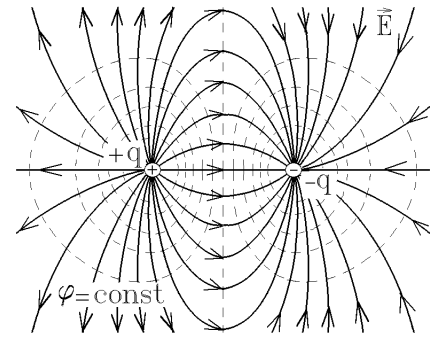
Напряженность поля, созданного диполем, получим, подставляя выражение grad в полярных координатах  $r, \theta$ :

$$\vec{E}_{\text{дип}} = -\text{grad} \varphi_{\text{дип}} = -\left( \vec{e}_r \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial \theta} \right), \quad \text{т.е.} \quad \vec{E}_{\text{дип}} = \vec{e}_r \vec{E}_r + \vec{e}_\theta \vec{E}_\theta \quad (\text{здесь } \vec{e}_r, \vec{e}_\theta - \text{единичные орты в радиальном и перпендикулярном направлении}).$$

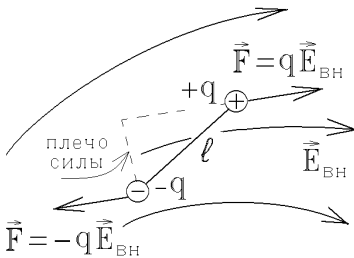
Радиальная составляющая вектора напряженности  $\vec{E}_r$  и перпендикулярная ей составляющая  $\vec{E}_\theta$  определяются, как  $\vec{E}_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial r} = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  и  $\vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{дип}}}{\partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ .

Тогда 
$$\vec{E}_{\text{дип}} = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$
 Т.е. величина напряженности

поля электрического диполя зависит от угла ориентации диполя  $\theta$  и расстояния  $r$  до диполя. Картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей (штриховые линии) простейшего электрического диполя из двух точечных зарядов изображена на рисунке справа.



Во **внешнем** электрическом поле  $\vec{E}_{\text{вн}}$  на диполь действует пара сил, старающаяся повернуть электрический момент диполя  $\vec{p}_e$  вдоль силовой линии внешнего поля, как показано на рисунке. Момент этой пары сил имеет величину  $M = F \cdot \underbrace{l \sin \theta}_{\text{плечо}} = qE_{\text{вн}} l \sin \theta = p_e E_{\text{вн}} \sin \theta$ ,



где  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{p}_e$  и  $\vec{E}_{\text{вн}}$ .

С учетом направления векторов, указанных на рисунке, вектор момента электрических сил, действующих на диполь, можно записать в виде векторного произведения: 
$$\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}_{\text{вн}}].$$

Под действием этих сил свободные электрические диполи стремятся ориентироваться (повернуться) в направлении силовых линий внешнего электрического поля.

Принцип суперпозиции позволяет также вычислить энергию простейшего электрического диполя во внешнем электрическом поле:

$W_{\text{дип}} = q\varphi_+ + (-q)\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-)$ , где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  – потенциалы внешнего поля в точках, где находятся заряды  $+q$  и  $-q$ .

Если направить ось  $x$  вдоль силовых линий внешнего поля, как показано на рисунке справа, то  $\varphi_+ - \varphi_- \approx \frac{\partial \varphi_{\text{вн}}}{\partial x} \cdot \Delta x = |\text{grad} \varphi_{\text{вн}}| \cdot l \cos \varphi = \vec{l} \cdot \text{grad} \varphi_{\text{вн}} = -\vec{l} \cdot \vec{E}_{\text{вн}}$ .

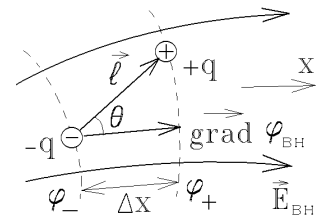
Следовательно, энергия диполя во внешнем электрическом поле:

$$W_{\text{дип}} = +q \cdot \varphi_+ - q \cdot \varphi_- = -q\vec{l} \cdot \vec{E}_{\text{вн}} = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}}$$

Тогда сила, действующая на диполь во внешнем электрическом поле, может быть представлена в виде

$$\vec{F} = -\text{grad} W_{\text{дип}} = \vec{\nabla} (\vec{p}_e \cdot \vec{E}_{\text{вн}})$$

Эта сила стремится втянуть диполь в область более сильного электрического поля с большей величиной напряженности.



## 2. ПРОВОДНИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

### 2.1. Поверхностные заряды. Поле вблизи поверхности заряженного проводника

Из теоремы Гаусса следовало, что покоящиеся электрические заряды  $q$  распределяются только по поверхности проводника с некоторой поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , где

$q = \oint \sigma dS$  (интеграл берется по всей поверхности). А так как внутри проводника  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi_{\text{пров}} = 0$ , то в любой точке однородного проводника

его потенциал одинаков:  $\varphi_{\text{пров}} = \text{const}$ , т.е. **поверхность проводника является эквипотенциальной**. Но на границе двух разных проводников может возникать скачок потенциала.

Линии  $\vec{E}$  перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям, поэтому силовые линии электростатического поля всегда перпендикулярны к поверхности заряженного проводника (как бы ни был распределен на нем заряд  $\sigma$ ).

Поле  $\vec{E}$  вблизи поверхности проводника можно определить из теоремы Гаусса, выбирая замкнутую поверхность в виде цилиндра с очень малой высотой и с основанием  $S$  (вектор  $d\vec{S}$  перпендикулярен к поверхности проводника). Эта замкнутая поверхность охватывает участок поверхности проводника с зарядом  $\sigma S$ . Линии  $\vec{E}$  пересекают только верхнее основание, поэтому

$\Phi_E = ES \cos 0^\circ = \sigma S / \epsilon_0$ , т.е. вблизи проводника в вакууме  $E = \sigma / \epsilon_0$ .

Это поле определяется не только зарядом  $\sigma$  в данном месте проводника. Дело в том, что заряд  $\sigma$  на участке поверхности создает поле  $\vec{E}_1$  (вблизи поверхности поле  $\vec{E}_1$  совпадает с полем бесконечной плоскости, заряженной с плотностью  $\sigma$ , т.е.  $E_1 = \sigma / 2\epsilon_0$ ). Остальной заряд на всей остальной поверхности проводника создает в этой же точке поле  $\vec{E}_2$ . Внутри проводника эти поля компенсируются:  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$ , как показано на рисунке, а вне проводника  $E = E_1 + E_2 = 2E_1 = \sigma / \epsilon_0$ . Т.е. половина напряженности поля вблизи проводника создается поверхностным зарядом  $\sigma$  в данном месте проводника, а половина – всем остальным зарядом проводника.

При этом весь остальной заряд проводника действует на участок заряда  $dq = \sigma dS$  с ку-

лоновской силой 
$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} dS = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S}.$$

Эта сила нормальна к поверхности и старается растянуть поверхность заряженного проводника. Но суммарная результирующая сила, действующая на весь заряженный проводник, обращается в

нуль:  $\vec{F}_{\text{рез}} = \oint \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\vec{S} = 0$  (иначе заряженный проводник начнет самопроизвольно двигаться в вакууме).

Если форма проводника несимметрична, то заряд распределится по поверхности проводника неравномерно:  $\sigma \neq \text{const}$ . Действительно, на большом удалении поле заряженного проводника (системы зарядов) совпадает с полем точечного заряда, имеющего сферические эквипотенциальные поверхности. Вблизи же проводника эквипотенциальные поверхности совпадут с его поверхностью, т.е. вблизи выступов эквипотенциальные поверхности **сгущаются**, и величина вектора

$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$  увеличивается. Но  $E = \sigma / \epsilon_0$ , и

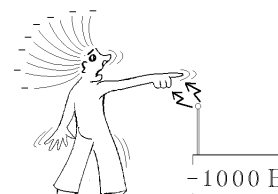
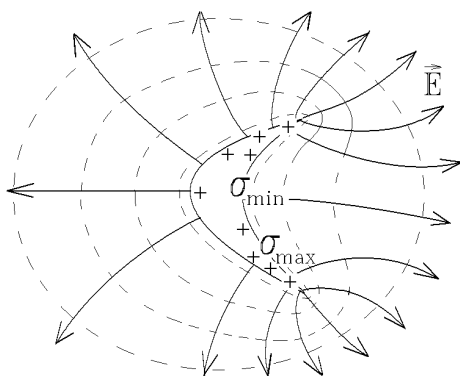
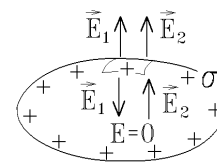
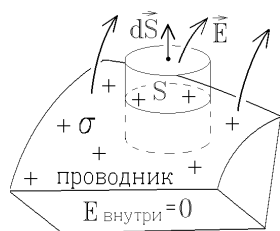
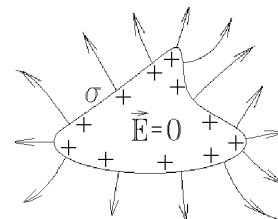
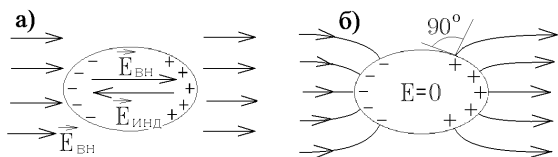
поэтому плотность зарядов  $\sigma$  на поверхности проводника будет максимальна на выступах и минимальна на впадинах.

**Пример:** статические электрические заряды стекают на конец каждого острия (волоса на рисунке). Не следует приближаться к выступающим (острым) концам заряженного проводника. Из-за большого электрического поля вблизи этих мест легко происходит электрический пробой и велика опасность поражения электрической искрой.

### 2.2. Явление электрической индукции. Экранировка поля проводящим слоем.

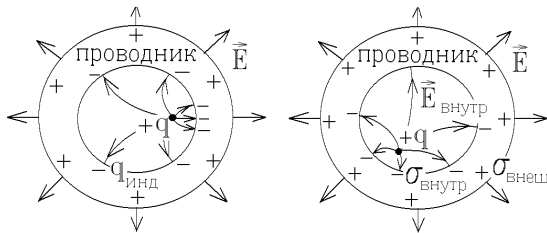
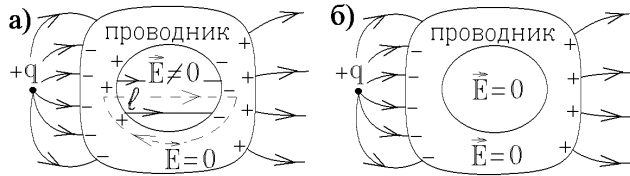
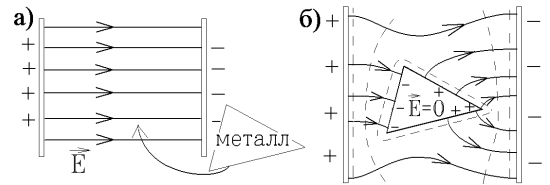
#### Электростатическая защита

При внесении проводника во внешнее электрическое поле (рисунок а) свободные заряды начнут на нем начнут перераспределяться и движутся до тех пор, пока созданное ими поле не скомпенсирует внешнее поле внутри проводника (рисунок б).



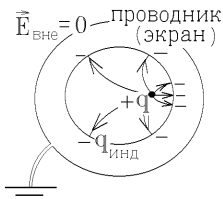
Такое явление называется электрической индукцией, а появившиеся на поверхности проводника заряды – индуцированными зарядами. Поле, создаваемое индуцированными зарядами, складывается с внешним полем, и силовые линии вне проводника искривляются.

Например, после внесения куска металла в однородное электростатическое поле между двумя заряженными пластинами (рисунок а) на поверхности металла образуются разделившиеся индуцированные заряды разного знака (их сумма равна нулю, так как первоначально металл был незаряжен), а картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей вне металла показана на рисунке б).



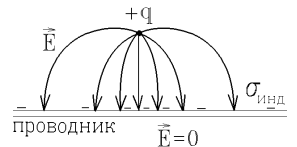
ряде  $q_{\text{инд}} = -q$  распределенном по поверхности полости. На внешней поверхности первоначально незаряженного проводника появится положительный индуцированный заряд той же величины  $q_{\text{инд}} = +q$ . Но он распределен так, как если бы на уединенный проводник поместили заряд  $+q$ . По сфере, изображенной на рисунке, он распределится равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{внеш}} = q/4\pi r^2$ . И как бы мы не перемещали заряд внутри полости, распределение заряда по внешней поверхности  $\sigma_{\text{внеш}}$  **не изменится**.

**Вывод:** замкнутый металлический слой разделяет пространство на две области: внутреннюю и внешнюю. И никакое перераспределение зарядов (изменение электрического поля) в одной области не влияет на поле в другой области. Это свойство проводников называется экранировкой поля, которая справедлива только для электростатических полей.



Чтобы устранить поле вне проводника, необходимо **заземлить** экранирующий металлический слой. Тогда индуцированный заряд стекает с внешней поверхности на землю и  $\vec{E}_{\text{вне}} = 0$ . Так осуществляется **электростатическая защита**.

Пример: в качестве экранирующего проводника рассмотрим тонкий плоский бесконечный проводящий слой. Поднесем сверху заряд  $+q$ . На верхней поверхности слоя образуется индуцированный заряд с поверхностной плотностью  $-\sigma_{\text{инд}}$ , на котором



закончатся **все** силовые линии, вышедшие из заряда  $+q$ . На нижней поверхности слоя должен появиться положительный индуцированный заряд, но он распределится равномерно и его плотность  $+\sigma_{\text{инд}} = +q/S_{\text{слоя}} = 0$ ! Поэтому по другую сторону протяженного проводящего слоя поле практически отсутствует.

### 2.3. Электрическая ёмкость проводника. Конденсаторы и ёмкость конденсаторов

Рассмотрим уединенный проводник, то есть проводник, настолько удаленный от других тел, что заряды на них практически не приводят к перераспределению индуцированных зарядов на проводнике. Можно считать, что **уединенный проводник окружен бесконечной вакуумной средой**.

Увеличим заряд  $q$  на уединенном проводнике в  $k$  раз. При этом в  $k$  раз возрастет поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , и в  $k$  раз возрастет потенциал  $\phi$  поверхности проводника:  $\phi = \oint \sigma dS / 4\pi\epsilon_0$ . Поэтому потенциал уединенного проводника пропорционален величине заряда на нем:  $q = C\phi$ .

Коэффициент пропорциональности  $C$ , зависящий от формы и размера уединенного проводника, называется его электрической емкостью (сокращенно его называют просто емкостью проводника). Измеряют емкость в фарадах: 1 фарад – это емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на  $\Delta\phi = 1$  В при увеличении заряда на нем на  $\Delta q = 1$  Кл.

Вычислим, например, емкость уединенного металлического шара с радиусом  $R$  и с зарядом  $+q$ , который равномерно распределяется по поверхности шара и создает вне его поле с напряженностью  $E = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$  ( $r \geq R$ ). Тогда

$$\phi|_{r=R} - \phi|_{r=\infty} = \int_0^\infty E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_R^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{C}, \text{ в результате чего нашли } \boxed{C_{\text{шара}} = 4\pi\epsilon_0 R}.$$

**Емкость уединенных проводов очень мала.** Например, емкость такого огромного шара, как Земля

( $R \approx 6400$  км), составляет всего  $C_{\text{Земли}} \approx 7,1 \cdot 10^{-4}$  Ф. Поэтому на уединенных проводниках нельзя накопить большой заряд. При большом заряде  $q$  потенциал  $\phi$  будет очень большим и произойдет электрический пробой (стекание заряда с проводника в виде искры или молнии). Малая емкость уединенного проводника  $C$  связана с тем, что поле такого заряда занимает огромный объем пространства вокруг него.

Чтобы увеличить емкость и при небольших потенциалах  $\phi$  накопить на проводниках большие заряды  $q$ , надо уменьшить объем электрического поля, создаваемого этими зарядами. Для этого используют системы из нескольких (в частности, из двух) проводников, называемые конденсаторами.

Плоский конденсатор образован двумя проводящими пластинами (обкладками). Если заряды на них одинаковы по величине и противоположны по знаку, то силовые линии  $\vec{E}$ , начинающиеся на одной пластине, должны закончиться на другой, и практически всё электрическое поле сосредоточено в объеме между пластинами.

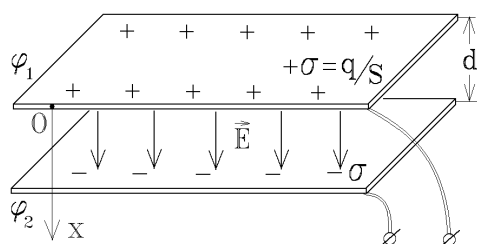
Обкладками цилиндрического конденсатора являются цилиндрические проводящие поверхности, имеющие общую ось, а сферический конденсатор – это две проводящие сферы с общим центром.

Заряд на всех конденсаторах пропорционален разности потенциалов на их обкладках (или напряжению  $U = \phi_1 - \phi_2$ , приложенному к конденсатору):

$$\boxed{q = C(\phi_1 - \phi_2) = CU}.$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  между зарядом и напряжением называется емкостью конденсатора, она всегда положительна.

Вычислим емкость некоторых конденсаторов:



а) плоский конденсатор с обкладками площади  $S$  и расстоянием между пластинами  $d$ . Поле между пластинами однородно и имеет напряженность

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} = \text{const}. \text{ Тогда } \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d E dx = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S} \equiv \frac{q}{C}, \text{ т.е.}$$

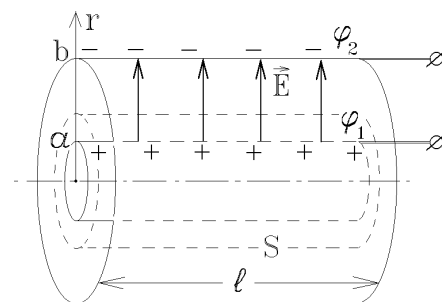
$$\boxed{C_{\text{плоского конденсатора}} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}}.$$

б) цилиндрический конденсатор длины  $l$  с радиусами обкладок  $a$  и  $b$ ). Окружим внутреннюю обкладку с зарядом  $q$  коаксиальной цилиндрической поверхностью длины  $l$  и радиуса  $r$ , где  $a < r < b$ . Из теоремы Гаусса  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S_{\text{бок}} = E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{\text{внутри}}}{\epsilon\epsilon_0}$  находим величину напряженности

электрического поля внутри конденсатора:  $E = q / (2\pi\epsilon_0 l r)$ . Тогда

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{b}{a} \equiv \frac{q}{C}, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{C_{\text{цилиндр конденсатора}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}}.$$



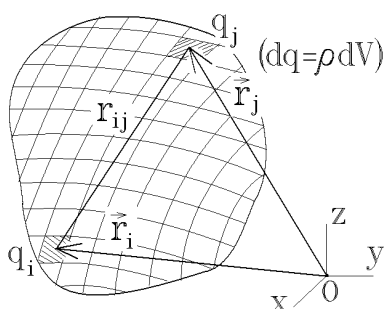
Из полученных формул видно, что при уменьшении объема электрического поля между обкладками, емкость конденсаторов резко возрастает. Появляется возможность накапливать большой заряд  $q$  на обкладках при малой разности потенциалов  $\phi_1 - \phi_2$  между ними. Следует иметь в виду, что при достаточно большой разности потенциалов между обкладками любая диэлектрическая среда между ними “пробивается” электрической искрой; при этом конденсатор мгновенно разряжается. Поэтому, кроме емкости, каждый конденсатор характеризуется напряжением пробоя. Конденсатор **нельзя заряжать очень сильно**, чтобы напряжение на нем не достигло этого максимального значения.

## 2.4. Энергия взаимодействия системы электрических зарядов.

### Энергия заряженного конденсатора

Разобьем заряженную среду на очень маленькие участки, каждый из которых можно считать **точечным зарядом**  $q_i$ .

Любой из этих зарядов находится в поле всех остальных зарядов и поэтому имеет энергию



$$W_i = q_i \Phi_i = q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Чтобы найти полную энергию системы зарядов, следует сложить энергии  $W_i$  всех точечных зарядов  $q_i$ , но в такой сумме энергии взаимодействия любых двух точечных зарядов будет учитываться дважды:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \dots,$$

поэтому сумму надо уменьшить в два раза:

$$W_{\text{системы}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \Phi_i = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Если заряд распределен в пространстве непрерывно с объемной плотностью  $\rho = \rho(\vec{r})$ , то зарядом элемента с объемом  $dV$ , будет  $dq = \rho dV$ , и энергия системы вычисляется с помощью интеграла

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi dV \quad \text{или} \quad W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV',$$

где интегрирование производится по всему объему  $V$ , занимаемому зарядом.

#### 1) Энергия заряженного проводника.

Потенциал уединенного проводника произвольной формы, имеющего заряд  $q$ , **одинаков во всех его точках**. Поэтому

$$W_{\text{заряд проводника}} = \frac{1}{2} \Phi \int \rho dV = \frac{1}{2} q \Phi.$$

(Фактически этот интеграл следует брать не по объему, а по поверхности заряженного проводника.)

#### 2) Энергия заряженного конденсатора.

Потенциал каждой *проводящей* обкладки конденсатора одинаков во всех точках. Поэтому

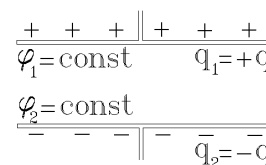
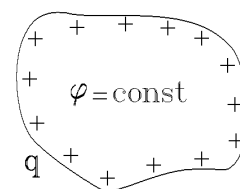
$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV = \underbrace{\frac{1}{2} \Phi_1 q_1}_{\text{энергия верхней пластины}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Phi_2 q_2}_{\text{энергия нижней пластины}} = \frac{1}{2} q (\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2} q U.$$

С учетом соотношения  $q = CU$  энергию любого заряженного конденсатора можно записать в виде одной из трех формул:

$$W_{\text{конденсатора}} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

Этот же результат можно получить другим способом: чтобы увеличить заряд конденсатора на  $dq$ , надо перенести этот добавочный заряд с отрицательно заряженной на положительно заряженную обкладку, совершив при этом работу  $\delta A = -(\Phi_1 - \Phi_2) dq$  против электрических сил. Эта работа расходуется на изменение потенциальной энергии конденсатора  $dW = -\delta A$ . Таким образом, энергия заряженного конденсатора емкости  $C$  будет равна

$$W = \int dW = \int_0^q (\Phi_1 - \Phi_2) dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}.$$

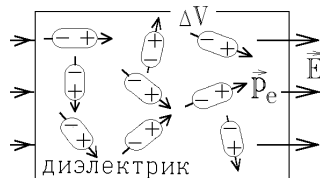


## 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

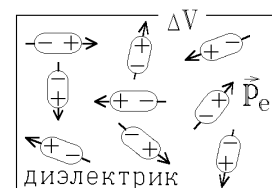
### 3.1. Причины поляризации диэлектриков. Вектор поляризованности.

#### Объемные и поверхностные связанные заряды

Идеальная диэлектрическая среда не содержит свободных заряженных частиц и поэтому не проводит электрический ток. Ее молекулы в целом нейтральны. Если молекулы диэлектрика несимметричны или **полярны** (как, например, молекулы NaCl), то они обладают дипольным электрическим моментом  $\vec{p}_e$ . При этом электрические моменты соседних молекул разупорядочены, направлены хаотично и в сумме дают ноль.



При помещении диэлектрика во внешнее поле с напряженностью  $\vec{E}$  электростатические силы стремятся развернуть диполи по направлению  $\vec{E}$ , приводя их в состояние с минимальной энергией

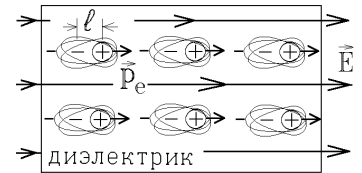


$W_{\min} = -p_e E$ . Но в таком состоянии энтропия упорядоченной системы молекул была бы минимальной. Поэтому тепловое движение стремится увеличить энтропию системы молекул и, наоборот, **разупорядочить** дипольные моменты. В результате дипольные моменты молекул только частично ориентируются по полю.

Возьмем векторную сумму всех дипольных моментов молекул в достаточно малом объеме среды  $\Delta V$  и разделим на этот объем. Полученный вектор  $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{\Delta V} \vec{p}_{e\text{мол}} / \Delta V$  называется вектором поляризованности диэлектрика.

Чем сильнее внешнее поле  $\vec{E}$ , тем сильнее должна быть ориентация дипольных моментов молекул, то есть величина  $\vec{P}$  пропорциональна величине  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ . Константу пропорциональности  $\kappa$  называют диэлектрической восприимчивостью среды. Она безразмерна.

Если молекулы диэлектрической среды симметричны или неполярны (например,  $O_2$ ), то в отсутствие внешнего электрического поля их дипольный момент равен нулю:  $\vec{p}_e = 0$ . Но во внешнем электрическом поле центры положительного и отрицательного заряда такой молекулы смещаются, и у симметричных молекул также появляются дипольные моменты  $\vec{p}_e$ . Причем, чем сильнее внешнее поле, тем больше смещаются заряды, и тем больше величина  $\vec{p}_e = q\vec{l}$ , следовательно, связь  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$  по-прежнему справедлива.



*Замечание:* связь  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$  справедлива только для изотропной диэлектрической среды. В случае анизотропной среды степень ориентации молекул по разным направлениям различна, вследствие чего постоянная  $\kappa$  должна зависеть от направления в среде. Такая анизотропная среда характеризуется тензором диэлектрической восприимчивости  $\|\kappa\|$ , а не-

параллельные векторы  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$  связаны матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

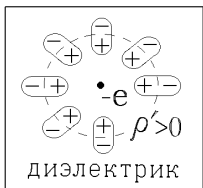
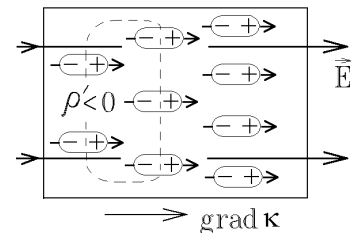
При этом в любой точке среды существуют три выделенных взаимно перпендикулярных оси (главные оси поляризации),

в которых тензор  $\|\kappa\|$  диагонален:

$$\|\kappa\| = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{zz} \end{pmatrix}.$$

Электрические заряды, создающие внешнее поле  $\vec{E}$ , называются сторонними (ими могут быть, например, свободные заряды). Во внешнем поле первоначально электронейтральная среда поляризуется – заряды молекул в ней разделяются, как было показано на рисунках. Однако, эти заряды связаны с молекулами и **не могут передвигаться свободно**. Их называют связанными и, в отличие от сторонних и свободных зарядов, отмечают штрихом:  $q'$ . Разделение связанных зарядов в молекулах под действием внешнего электрического поля называется поляризацией диэлектрика.

Заметим, что связанные заряды внутри диэлектрика (объемные связанные заряды с плотностью  $\rho'$ ) возникают в двух случаях. Либо **среда неоднородна**, например концентрация её молекул не постоянна, что вызывает появление ненулевого градиента диэлектрической восприимчивости  $\text{grad } \kappa \neq 0$  (см. правый рисунок). В этом случае после поляризации молекул во

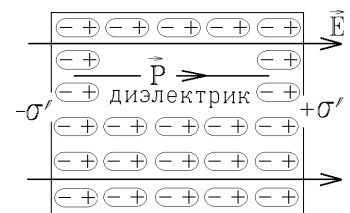


внешнем поле  $\vec{E}$  получаем  $\rho' = -\frac{\epsilon_0 \vec{E}}{\kappa + 1} \cdot \text{grad } \kappa$  (обратите внимание на знак  $\rho'$ ).

Либо в диэлектрической среде присутствуют сторонние (свободные) заряды, например – свободный электрон, показанный на левом рисунке. Эти заряды своим полем ориентируют дипольные моменты соседних

молекул диэлектрика. В этом случае  $\rho' = -\kappa\rho/(\kappa+1)$ , где  $\rho$  – объёмная плотность сторонних зарядов.

Если диэлектрик **однороден** ( $\kappa = \text{const}$ ) и **идеален**, т.е. **не содержит свободных зарядов** ( $\rho = 0$ ), то во внешнем электрическом поле  $\vec{E}$  внутри диэлектрика связанные заряды ориентиравшихся по полю молекул компенсируются (см. рисунок) и связанные заряды появляются только на поверхности диэлектрика с поверхностной плотностью  $\sigma'$ .



### 3.2. Диэлектрическая проницаемость среды и вектор электрической индукции

Согласно принципу суперпозиции суммарное поле  $\vec{E}$  в каждой точке диэлектрика создается как свободными зарядами  $q$ , так и связанными зарядами  $q'$ :  $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{q'}$ . В вакууме молекул нет, и  $\sum \vec{p}_e = 0$ , поэтому  $\vec{P}_{\text{в вакууме}} = 0$  и  $\kappa_{\text{вакуума}} = 0$ .

Можно показать, что дивергенция вектора поляризованности выражается через объёмную плотность связанных зарядов:  $\text{div } \vec{P} = -\rho'$ , т.е. **линии вектора  $\vec{P}$  начинаются только на отрицательных связанных зарядах ( $\text{div } \vec{P} > 0$ ), а заканчиваются только на положительных связанных зарядах ( $\text{div } \vec{P} < 0$ )**.

Подставляя эту связь в теорему Гаусса для  $\vec{E}$  в дифференциальной форме:  $\text{div } \vec{E} = (\rho + \rho')/\epsilon_0$  (электрическое поле внутри диэлектрика создается и сторонними (свободными)  $\rho$ , и связанными  $\rho'$  зарядами). Тогда получим

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\text{div } \vec{P}}{\epsilon_0}$  или  $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$ . Вектор  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  называют **вектором электрической индукции** или **электрического смещения**. Подставляя связь  $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$ , получаем

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E},$$

где безразмерный коэффициент  $\epsilon = 1 + \kappa$  называется **диэлектрической проницаемостью** изотропной диэлектрической среды.

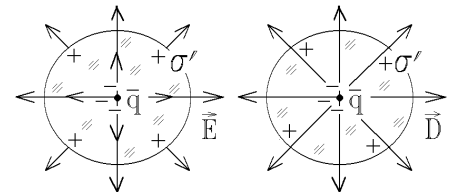
Из полученных соотношений видно, что электрическое поле в диэлектрике удобно описывать не вектором напряженности  $\vec{E}$ , а вектором индукции  $\vec{D}$ , для которого теорема Гаусса в дифференциальной форме принимает вид  $\text{div } \vec{D} = \rho$ . Из нее следует, что линии вектора  $\vec{D}$  начинаются только на положительных **сторонних** зарядах ( $\rho > 0$ ) и заканчиваются только на отрицательных **сторонних** зарядах ( $\rho < 0$ ).

В анизотропных диэлектриках векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  не параллельны и связаны через тензор диэлектрической проницаемости  $\|\epsilon\| = 1 + \|\kappa\|$ :

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} 1 + \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & 1 + \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & 1 + \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

В вакууме  $\kappa = 0$ ,  $\epsilon = 1$  и  $\vec{D}_{\text{в вакууме}} = \epsilon_0 \vec{E}_{\text{в вакууме}}$ .

*Пример:* точечный заряд окружен слоем диэлектрика. Часть линий вектора  $\vec{E}$  начинается на связанных зарядах  $+\sigma'$  на поверхности диэлектрика. Линии же вектора  $\vec{D}$  начинаются только на стороннем заряде  $q$ . Эти линии, в отличие от линий  $\vec{E}$ , не будут обрываться или возникать на неоднородностях среды, где отсутствуют сторонние заряды.



### 3.3. Теорема Гаусса для векторов поляризованности и электрической индукции

Записанные ранее выражения  $\text{div } \vec{P} = -\rho'$  и  $\text{div } \vec{D} = \rho$  являются записью теоремы Гаусса для векторов поляризованности и электрической индукции в дифференциальной форме. Используя теорему Остроградского, можно записать эту теорему в интегральной форме:

$$\Phi_D = \oint \vec{D} d\vec{S} = \sum_i q_i \text{ внутри} = \oint \rho dV_{\text{внутри}}.$$

поток вектора электрической индукции электростатического поля через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности сторонних (свободных) зарядов.

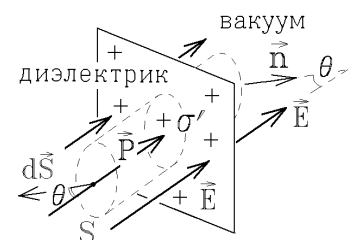
Для расчета поля в диэлектрике удобнее вычислять не  $\vec{E}$ , а вектор электрической индукции  $\vec{D}$ , который связан только с распределением сторонних зарядов и не требует знания распределения связанных зарядов.

Теорема Гаусса для вектора  $\vec{E}$  в однородном изотропном диэлектрике, где  $\epsilon = \text{const}$  и справедлива связь  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ , записывается в виде  $\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{S} = \sum q_{\text{внутри}} / \epsilon \epsilon_0$ .

Аналогично, поток вектора поляризованности через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности связанных зарядов, взятой со знаком “минус”:

$$\Phi_P = \oint \vec{P} d\vec{S} = - \sum_{\text{внутри } S} q'.$$

Применим эту теорему для нахождения вектора  $\vec{P}$  на плоской границе между однородным поляризованным диэлектриком и вакуумом. Выберем на этой границе





замкнутую поверхность в виде косоугольного цилиндра с основанием  $S$ , параллельным плоскости раздела сред, и боковыми направляющими, параллельными линиям вектора  $\vec{P}$  (или  $\vec{E}$ ). Эта поверхность охватывает участок границы со связанным зарядом  $q' = \sigma' S$ . Тогда по теореме Гаусса для вектора  $\vec{P}$ :  $\oint \vec{P} d\vec{S} = PS \cos(180^\circ - \theta) = -PS \cos \theta = -\sigma' S$

( $\theta$  – это угол между направлением поля  $\vec{E}$  и нормалью  $\vec{n}$  к границе раздела сред). Таким образом, на границе диэлектрика и вакуума поверхностная плотность связанного заряда  $\sigma'$  равна проекции вектора  $\vec{P}$  на направление внешней нормали  $\vec{n}$  к границе:

$$\boxed{\sigma' = P \cos \theta = P_n}.$$

### 3.4. Электрическое поле в диэлектрике

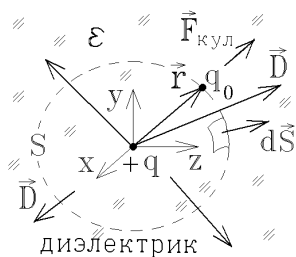
Введем в заряженный плоский конденсатор с вакуумом между обкладками и с напряженностью поля в вакууме  $E_{\text{вак}} = \sigma / \epsilon_0$  плоскую пластину из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . На ее поверхностях возникает связанный заряд с поверхностной плотностью  $\pm \sigma'$ . Поле этого связанного заряда вычисляется, аналогично полю заряженного конденсатора, по формуле  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{P_n}{\epsilon_0} = \frac{\kappa \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = \kappa E$ , где  $E$  – напряженность поля внутри диэлектрической пластины.

Так как вектор  $\vec{E}'$  направлен противоположно вектору  $\vec{E}_{\text{вак}}$ , то результирующим полем в диэлектрике будет  $E = E_{\text{вак}} - E' = E_{\text{вак}} - \kappa E$  откуда  $E_{\text{вак}} = (1 + \kappa) E = \epsilon E$ , т.е. **из-за наличия связанных зарядов поле в диэлектрике ослаблено в  $\epsilon$  раз по сравнению с полем в вакууме:**

$$\boxed{E_{\text{диэл}} = E_{\text{вак}} / \epsilon}.$$

*Замечание:* этот результат справедлив только в том случае, когда однородная диэлектрическая среда полностью заполнит пространство между двумя эквипотенциальными поверхностями такого поля в отсутствие диэлектрика. Если в плоский конденсатор, эквипотенциальные поверхности поля в котором тоже плоскости, параллельные обкладкам, внести шар из диэлектрика, то поле не только будет ослаблено в диэлектрике, но силовые линии нового поля изогнутся так, как показано на рисунке.

Обратим также внимание на то, что формулы связи  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$  справедливы только в изотропных диэлектрических средах, поляризация которых вызвана внешним сторонним электрическим полем. В сегнетоэлектриках, которые тоже являются диэлектриками, эта поляризация сохраняется и после снятия внешнего поля. Иначе говоря, в сегнетоэлектриках электрическое поле может быть создано остаточной “замороженной” поляризацией молекул, которая не исчезает после выключения внешнего поля. В этом случае соотношения  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$  не выполняются, но определение  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  верно всегда.

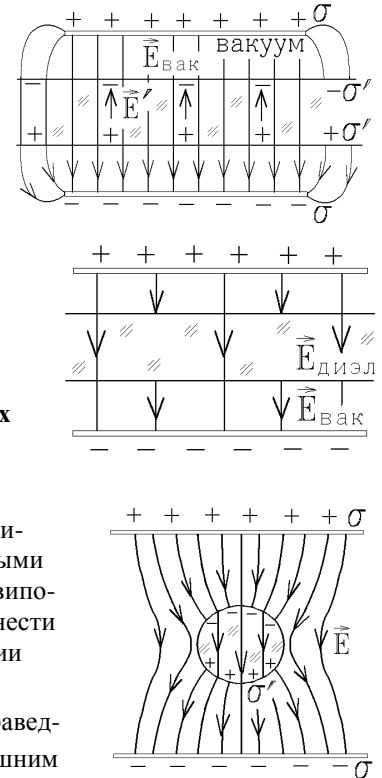


Рассмотрим теперь точечный заряд  $q$ , находящийся в изотропной диэлектрической среде и окружим его сферической поверхностью  $S$  радиуса  $r$ . Линии вектора  $\vec{D}$  начинаются на заряде  $q$ . Поток через эту поверхность вектора  $\vec{D}$ , линии которого начинаются на стороннем заряде  $q$ , не зависит от наличия диэлектрика и связанных зарядов, и по теореме Гаусса  $\oint \vec{D} d\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = q$ . Но  $E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}$  или  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^3} \vec{r}$ . Следовательно, кулоновская сила взаимодействия двух точечных зарядов  $q$  и  $q_0$ , находящихся в диэлектрической среде, уменьшается в  $\epsilon$  раз:

$$\boxed{\vec{F}_{\text{кул}} = \frac{qq_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^3} \vec{r}}, \quad \boxed{\phi = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r}}.$$

Поэтому все формулы и теоремы для электрического поля в вакууме, полученные из закона Кулона, остаются справедливыми и **внутри** изотропной однородной диэлектрической среды с проницаемостью  $\epsilon$ . Но **во всех выражениях** надо произвести замену  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon \epsilon_0$  (для вакуума  $\epsilon_{\text{вак}} = 1$ ). Чтобы не учитывать дополнительного искривления силовых линий на связанных зарядах, обычно считают, что диэлектрик заполняет все пространство, т.е. ограничен эквипотенциальной поверхностью  $\phi|_{\infty} = 0$ .

*Замечание:* строго говоря, сказанное относится только к жидкому изотропному диэлектрику. Твердый диэлектрик, в результате действия внешнего электрического поля на связанные заряды, начнет деформироваться. Вследствие этого, помимо электрических кулоновских, могут появиться дополнительные механические силы упругости, которые также надо учитывать.



### 3.5. Поле на границе диэлектрика. Граничные условия для векторов напряженности и электрической индукции

Пусть на границе двух изотропных однородных диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  отсутствуют сторонние (свободные) заряды. Тогда на этой границе появляется только связанный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma'$ . Выберем узенький контур ABCD, охватывающий участок границы, со сторонами  $AB=CD=l$ , параллельными поверхности раздела. Так как

$$AD \approx BC \approx 0, \text{ то по теореме о циркуляции вектора } \vec{E}: \oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = E_{1\tau}l - E_{2\tau}l = 0$$

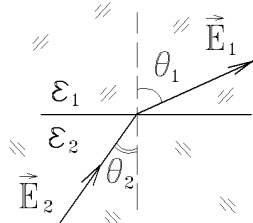
т.е. на границе раздела двух диэлектриков тангенциальная (касательная к границе раздела сред) составляющая вектора  $\vec{E}$  не изменяется:  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ .

Часть линий  $\vec{E}$  будет обрываться на связанных зарядах  $\sigma'$ , а линии  $\vec{D}$  не прерываются. А так как  $E_{\tau} = D_{\tau}/\epsilon_0\epsilon$ , то на границе

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \epsilon_1/\epsilon_2.$$

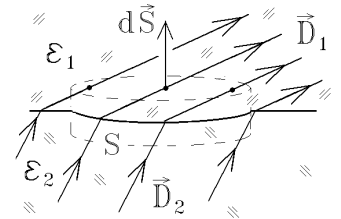
Выберем теперь замкнутую поверхность в виде очень короткого цилиндра с основаниями, имеющими площадь  $S_{\text{осн}}$ , и параллельными границе раздела диэлектриков. Эта поверхность охватывает участок границы раздела, но сторонних зарядов внутри нее нет, поэтому по теореме Гаусса  $\oint \vec{D} d\vec{S} \approx D_{1n}S_{\text{осн}} - D_{2n}S_{\text{осн}} = 0$ , т.е. на границе раздела сохраняется нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$  и не сохраняется нормальная составляющая вектора  $\vec{E}$ :

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{и} \quad E_{1n}/E_{2n} = \epsilon_2/\epsilon_1.$$



Таким образом, на границе раздела диэлектриков, не обладающих сегнетоэлектрическими свойствами, силовые линии электростатического поля претерпевают излом, где  $\text{tg } \theta_1 = E_{1\tau}/E_{1n}$ ;  $\text{tg } \theta_2 = E_{2\tau}/E_{2n}$  и  $\text{tg } \theta_1/\text{tg } \theta_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$ .

Полученные выражения справедливы и на границе диэлектрик – вакуум, если учесть, что для вакуума  $\epsilon_{\text{вак}} = 1$ . На границе диэлектрик–проводник все линии  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  обязаны закончиться на сторонних зарядах, индуцированных на поверхности проводника.



### 3.6. Плотность энергии электростатического поля в диэлектрике

Выразим энергию заряженного плоского конденсатора через напряженность поля  $\vec{E}$ . Если конденсатор заполнен диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ , то поле  $\vec{E}$  между обкладками и падение напряжения  $U = \phi_1 - \phi_2 = \int_0^d E dx = Ed$  между обкладками уменьшены в  $\epsilon$  раз, а емкость плоского конденсатора (как и всех конденсаторов, заполненных диэлектриком) увеличена в  $\epsilon$  раз:  $C = q/U = \epsilon\epsilon_0 S/d$ . Тогда из формулы для энергии конденсатора получим:

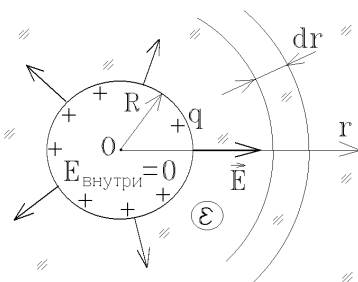
$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V, \text{ где } V = Sd \text{ – объем внутри конденсатора.}$$

Мы выразили энергию системы зарядов на конденсаторе через энергию создаваемого этими зарядами электрического поля. В электростатическом случае эти энергии одинаковы и фактически являются одной и той же величиной. Если исчезнут заряды, то исчезнет и связанное с ними поле.

В изотропной диэлектрической среде (или вакууме) с учетом соотношения  $D = \epsilon\epsilon_0 E$  плотность энергии электрического поля (энергия единицы объема) вычисляется по формуле

$$w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}. \text{ Размерность этой величины } [w] = \text{Дж/м}^3.$$

Можно вычислять энергию заряженной системы или как  $W = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV$ , или как  $W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV$ . Результат будет одинаковым! Интеграл во втором выражении берется по всему объему, занимаемому полем, т.е. по всем точкам пространства, где  $\vec{E} \neq 0$ .



В качестве примера рассмотрим поле уединенного заряженного проводящего шара радиуса  $R$ , окруженного бесконечной диэлектрической средой с проницаемостью  $\epsilon$ ,

$$\text{и имеющего емкость } C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R \text{ и энергию } W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

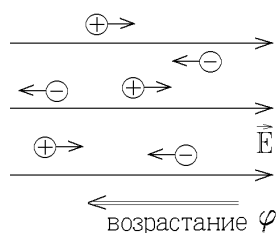
С другой стороны, энергия электрического поля шара (а оно существует только вне шара и совпадает с полем точечного заряда  $q$ ):

$$W_{\text{поля}} = \int_V \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} dV = \int_R^\infty \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \right)^2 \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{объем сферического слоя}} \cdot \frac{1}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

тот же результат.

## 4. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

### 4.1. Сила тока и плотность тока



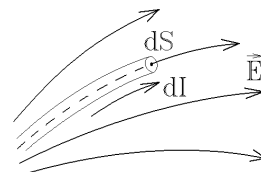
Среда, имеющая свободные носители заряда (например, электроны) называется проводящей (или проводником). Под действием электрического поля свободные заряды начинают перемещаться (положительные – по полю  $\vec{E}$ , отрицательные – против  $\vec{E}$ ), образуя электрический ток.

Сила тока  $I$  равна заряду, протекающему через поперечное сечение проводника (перпендикулярное к вектору  $\vec{E}$ ) за единицу времени:  $I = dq / dt$ . Сила тока измеряется в амперах.

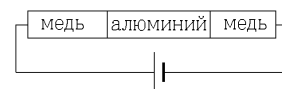
Линии тока направлены по движению зарядов, то есть вдоль вектора  $\vec{E}$ . Направление тока совпадает с направлением движения положительных зарядов.

Если выделить в пространстве трубку, направленную вдоль линий  $\vec{E}$ , и разделить ток  $dI$ , протекающий внутри трубки, на ее поперечное сечение  $dS$ , то получим вектор плотности тока  $\vec{j}$ , направленный вдоль вектора  $\vec{E}$  по касательной к линии тока:  $\vec{j} = dI / dS$ .

Плотность тока  $\vec{j}$  – это ток, протекающий через единицу площади поперечного сечения проводника. Поэтому сила тока, т.е. ток, протекающий через любую поверхность  $S$ , равна потоку вектора  $\vec{j}$  через эту поверхность:  $I = \int \vec{j} d\vec{S}$ .

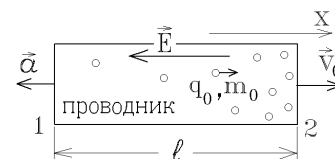


Для того чтобы определить вид свободных носителей тока в металлах, Рикке примерно в течение года (1901 г.) пропускал ток через цепь, составленную из разнородных металлов (см. рисунок). За это время протек заряд  $\sim 3,5 \cdot 10^6$  Кл, но структура и химический состав металлов не изменились. Опыт Рикке доказывает, что ток в металлах не связан с движением атомов (ионов).



Возьмем теперь кусок металла длины  $l$ , двигавшийся со скоростью  $v_0$  вдоль оси  $x$ ,

и резко затормозим его с ускорением  $a < 0$ . Свободные носители заряда  $q_0$  с массой  $m_0$  по инерции будут продолжать двигаться с прежней скоростью  $v_0$ , пересекая сечение проводника и создавая ток. Но вылететь из незамкнутого проводника они не могут, и скапливаются у переднего конца 2, создавая избыточный заряд и электрическое поле  $\vec{E}$ , стремящееся оттолкнуть их обратно. Электрическая сила уравнивает силу инерции:  $m_0 a = q_0 E = \text{const}$ . В результате на концах проводника создается разность потенциалов (напряжение)



$$U = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 E dx = \frac{m_0 a}{q_0} \int_0^l dx = \frac{m_0 a l}{q_0}.$$

Если концы проводника замкнуть, то, в соответствии с законом Ома, по нему потечет ток  $I = \frac{dq}{dt} = \frac{U}{R} = \frac{m_0 a l}{q_0 R}$ , где

$dq = \frac{m_0 a l}{q_0 R} dt$  – это заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за время  $dt$ , а  $R$  – сопротивление провод-

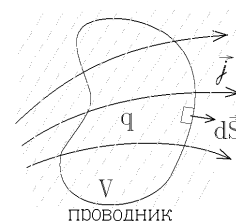
ника. За все время торможения  $t$  через него протечет заряд  $q = \int_0^t dq = \frac{m_0 l}{q_0 R} \int_0^t a dt = \frac{m_0 l v_0}{q_0 R}$

В опытах Толмена – Стюарта провод в виде спирали (катушки) раскручивали до скорости  $v_0 \approx 10^2 : 10^3$  м/с и измеряли заряд  $q$ , протекающий при остановке спирали. Таким образом, был определен удельный заряд свободных носителей тока  $q_0/m_0 = l v_0 / q R$ . Он оказался равным удельному заряду электрона  $e/m_e = 1,65 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. Эти опыты доказывают, что носителями тока в металлах являются свободные электроны.

### 4.2. Уравнение непрерывности электрического заряда и условие стационарности тока

Окружим участок проводника, по которому течет ток с плотностью  $\vec{j}$ , замкнутой поверхностью  $S$ . По определению вектора  $\vec{j}$  его поток по этой поверхности равен суммарному току  $I$ , вытекающему из замкнутой поверхности  $S$ :  $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = I = -\frac{dq}{dt}$ , где  $q$  – суммарный электри-

ческий заряд внутри поверхности  $S$ . (Если ток вытекает из поверхности, то заряд внутри нее уменьшается, так как направление тока определяется направлением перемещения положительных зарядов). Но  $q = \int \rho dV$ , где  $\rho$  – это плотность заряда. Применяя теорему Остроградского,



$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \left( -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$ , приравниваем подынтегральные выражения. Полученные уравнения

$$\boxed{\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \text{и} \quad \boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{\text{внутри}}}{dt}}$$

называются уравнениями непрерывности электрического заряда (в дифференциальной и интегральной формах соответственно). Они выражают закон сохранения электрического заряда и говорят о том, что заряд не может бесследно исчезнуть или возникнуть в какой-либо области. При изменении заряда в некоторой области пространства он должен вытекать или втекать в нее, создавая электрический ток.

Но если заряды в проводнике перераспределяются (в одной области суммарный заряд уменьшается, а в другой – увеличивается), то изменяются и потенциалы этих областей. Изменение потенциалов со временем приводит к изменению электрического поля. Поэтому ток  $\vec{j}$  не будет постоянным. Отсюда следует условие стационарности (постоянства) тока:

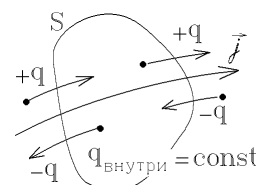
$$\boxed{\text{div} \vec{j} = 0} \quad \text{и} \quad \boxed{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0}.$$

Для того чтобы ток был постоянен, распределения потенциала и заряда в любой области проводящей среды должны быть постоянными во времени. Заряды могут перемещаться по проводнику, но заряд втекающий в любую его область будет равен заряду, вытекающему из нее.



Так как точки, где  $\text{div} \vec{j} \neq 0$  являются точками, где линии вектора  $\vec{j}$  возникают или исчезают, то линии постоянного или стационарного тока нигде не должны начинаться или заканчиваться: они **замкнуты**.

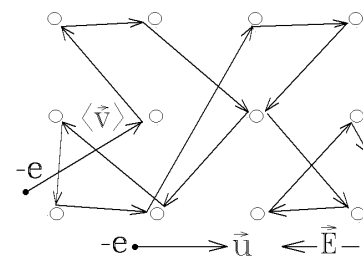
Цепь постоянного тока обязательно должна быть замкнута.



#### 4.3. Электрическое поле в проводнике с током и закон Ома в локальной форме

Электрический ток в металлах – это направленное движение свободных электронов под действием электрического поля. Будем считать, что напряженность этого поля постоянна:  $\vec{E} = \text{const}$ . Но электроны движутся в нем почти хаотически со средней тепловой скоростью  $\langle v \rangle \approx 2 \cdot 10^6$  м/с, сталкиваясь с атомами и рассеиваясь на них подобно молекулам газа. При этом каждый электрон лишь незначительно сдвигается противоположно линиям  $\vec{E}$ , дрейфует. Средняя скорость такого смещения  $\vec{u}$  называется дрейфовой скоростью.

Электрический ток в металлах – это совместное движение с малой дрейфовой скоростью  $\vec{u}$  хаотически мечущихся по решетке металла свободных электронов.



Пусть по проводу с сечением  $S = 1 \text{ мм}^2$  течет ток  $I = 1 \text{ А}$ . Концентрация свободных электронов в металле  $n \sim N_{\text{Авогадро}} / 1 \text{ см}^3 \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$ . За время  $dt$  через поперечное сечение проводника переносится заряд  $dq = -e \cdot n \cdot S u dt$ , где  $S u dt$  – объем участка провода, показанный на рисунке, а  $n \cdot S u dt$  – количество электронов, находившихся в этом участке и пересекших за время  $dt$  поперечное сечение  $S$ . Из определения тока получим  $I = |dq/dt| = enuS$ . Плотность тока в проводнике  $j = I/S = enu$ . С учетом направления векторов, связываем плотность тока с дрейфовой скоростью:

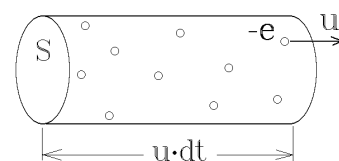
$$\boxed{\vec{j} = -en\vec{u}}.$$

В рассматриваемом примере  $u = I/enS \approx 0,1 \text{ мм/с} \ll \langle v \rangle \approx 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ , т.е. дрейфовая скорость направленного движения электронов, создающего ток, действительно очень мала и электроны практически мечутся на месте.

**Вопрос:** почему при такой маленькой скорости  $u$  при замыкании выключателя лампочка на большом удалении от него загорается практически моментально?

Меняющие направление движения электроны пролетают между двумя последовательными столкновениями расстояние  $\lambda$  (среднюю длину свободного пробега) за время  $\tau = \lambda / \langle v \rangle$ . Кулоновская сила сообщает им некоторую дополнительную скорость  $\vec{v}'$ , направленную против линий вектора  $\vec{E}$ :  $m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -e\vec{E}$ , где  $m$  – масса электрона, а  $(-e)$  – его заряд.

За время  $t$  каждый электрон приобретает скорость  $\vec{v}' = \int_0^t \frac{eE}{m} dt = \frac{eE}{m} t$  и практически полностью теряет её при последующем столкновении.



Средняя скорость, приобретаемая электроном между двумя последовательными столкновениями – это дрейфовая

скорость  $\vec{u}$ :  $u = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v' dt = \frac{eE}{m\tau} \int_0^{\tau} t dt = \frac{eE}{2m} \tau = \frac{eE\lambda}{2m\langle v \rangle}$ . Подставляя это выражение в формулу  $j = neu$ , получаем закон

Ома в локальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где величина  $\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2m\langle v \rangle}$  называется удельной проводимостью проводника. Эта характеристика зависит только от

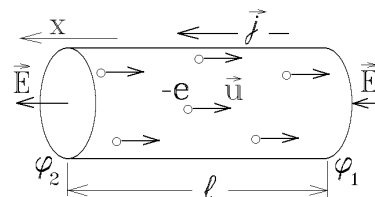
свойств самого проводника. Обратная ей величина  $\rho = 1/\sigma$  называется удельным сопротивлением проводника. Таким образом, ток  $\vec{j}$  в проводнике существует только тогда, когда в нем создано электрическое поле  $\vec{E}$ .

#### 4.4. Причина затухания тока. Электрическое сопротивление проводника.

##### Законы Ома и Джоуля-Ленца

Рассмотрим участок тонкого однородного провода длины  $l$  и сечения  $S = \text{const}$ . Ток течет вдоль оси провода, поэтому поле  $\vec{E}$  направлено вдоль оси.

Разность потенциалов между концами проводника называется падением напряжения на нем:  $U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^l E dx = El$  или  $E = U/l$ . Из выражения для закона



Ома в локальной форме следует, что  $j = \frac{I}{S} = \sigma E = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$  или  $U = IR$  – это закон Ома для участка однородного про-

водника. Одновременно получили выражение для сопротивления этого участка:  $R = \rho \frac{l}{S}$  – сопротивление проводника,

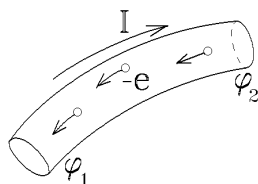
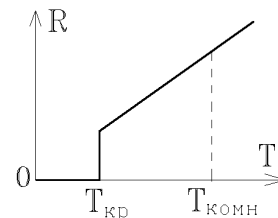
прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади поперечного сечения  $S$ .

Величина удельного сопротивления в классической электронной теории выражается через найденную выше

величину удельной проводимости  $\rho = 1/\sigma$ . Откуда  $R = \frac{2m\langle v \rangle l}{e^2 n \lambda S}$ .

Эта формула классической физики показывает, что причиной появления электрического сопротивления является рассеяние свободных электронов электрическими полями атомов кристаллической решетки. Чем чаще сталкивается с атомами электрон, тем меньше его длина свободного пробега  $\lambda$ , и тем больше сопротивление  $R$ . С ростом концентрации  $n$  свободных электронов сопротивление, наоборот, падает.

*Замечание:* в действительности, рассмотренное классическое описание механизма возникновения электрического сопротивления дает только качественные представления и приводит к неправильной зависимости сопротивления  $R$  от температуры  $T$ . **Истинный механизм рассеяния электронов можно описать только в квантовой теории.** Приближенный график зависимости  $R$  от  $T$  приведен на рисунке. Вблизи комнатной температуры  $T_{\text{комн}}$  сопротивление  $R$  возрастает с ростом  $T$  практически линейно, а для некоторых металлов при определенной критической температуре  $T_{\text{кр}}$  может скачком падать до нуля (явление сверхпроводимости).



При протекании тока  $I$  по участку проводника, заряд  $dq = Idt$  проходит разность потенциалов (падение напряжения на участке  $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ ). Кулоновские силы совершают над зарядом работу  $dA = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = UI dt$ , которая должна идти на увеличение энергии носителей заряда (электронов). Но так как их средняя дрейфовая скорость и концентрация  $n$  неизменны, то эта энергия непрерывно выделяется в проводнике, по которому течет ток, в виде тепла:  $dQ = UI dt$ . С учетом закона Ома  $U = IR$ , количество выделившегося тепла при про-

пуске тока в однородном проводнике выражается формулой:

$$Q = \int UI dt = \int I^2 R dt.$$

Это – закон Джоуля-Ленца, который определяет количество тепла, выделяющегося в проводнике за время  $t$  при протекании электрического тока.

Этот закон легко понять с точки зрения классической электронной теории, если учесть, что пролетая среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  за время  $\tau = \lambda/\langle v \rangle$ , электроны приобретают дополнительную скорость  $v' = \frac{eE}{m} \tau = \frac{eE\lambda}{m\langle v \rangle}$ .

При столкновении с атомами эта скорость теряется, а кинетическая энергия  $\frac{mv'^2}{2}$ , приобретаемая свободным электроном под действием поля  $\vec{E}$  за время между соударениями, переходит в тепло.

Если умножить среднюю энергию, выделяемую одним электроном при соударении, на число таких соударений за время  $dt$  и на число всех свободных электронов  $nSl$  в участке проводника, а также учесть закон Ома, то получим то же самое выражение теплоты  $dQ = I^2 R dt$ .

Джоулево тепло при протекании тока выделяется за счет неупругих соударений носителей тока (электронов) с атомами среды.

#### 4.5. Условие квазистационарности тока

Рассмотрим теперь переменный ток  $j = j(t)$ . Пусть он изменяется достаточно медленно. При изменении потенциалов в каком-либо месте проводника изменение электрического поля передается со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Если размер проводника равен  $l$ , то за время  $\tau = l/c$  во всех его точках успевает установиться новое распределение потенциалов, соответствующее новому значению тока в данный момент времени. Это аналогично установлению квазиравновесного состояния в термодинамической системе. Поэтому время  $\tau$  также называется временем релаксации.

Пусть ток  $j = j(t)$  меняется **медленно** в течение промежутка времени  $t \gg \tau$ . Тогда в любой момент  $t$  во всех точках проводника будет выполняться условие  $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$ , позволяющее считать ток в данный момент практически постоянным. Такой медленно изменяющийся со временем ток называется квазистационарным. Например, если ток изменяется по гармоническому закону:  $I = I_0 \cos \omega t$ , то условие квазистационарности тока имеет вид  $\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{c}{l}$ , где  $l$  – размер цепи.

Для квазистационарных токов можно применять все законы постоянного тока.

В компьютерах, например, размер цепей  $l \approx 0,1$  м, и условие квазистационарности принимает вид  $\omega \ll \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{0,1 \text{ м}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ . Поэтому, даже в компьютерных цепях, где частота переменного тока достигает 100 МГц, можно использовать законы постоянного тока. В бытовых электросетях ток с малой частотой  $\nu = 50$  Гц заведомо квазистационарен.

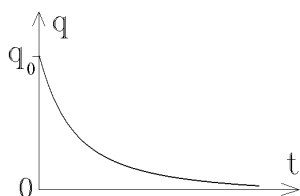
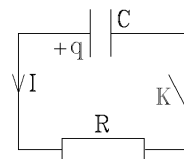
*Пример* : конденсатор емкости  $C$  с зарядом  $q$  в момент времени  $t = 0$  замкнули на сопротивление  $R$ . Разряд происходит достаточно медленно, и ток разряда  $I = -dq/dt$  квазистационарен. Падения напря-

жения на конденсаторе и сопротивлении одинаковы:  $U = \frac{q}{C} = IR = -\frac{dq}{dt} R$ . Разделяя переменные и

интегрируя, находим  $\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$  или  $\ln\left(\frac{q}{q_0}\right) = -\frac{t}{RC}$ , откуда

$q = q_0 e^{-t/(RC)}$ . Заряд на разряжающемся конденсаторе будет изменяться по экспоненциальному закону и за время  $\tau = RC$  убывает в  $e \approx 2,72$  раз.

*Замечание*: переменный ток нельзя считать квазистационарным в таких устройствах, как антенны, микроволновые приборы, импульсные радиоустройства (включая линии задержки).



#### 4.6. Причины появления электродвижущей силы. Источники ЭДС

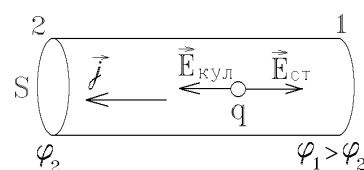
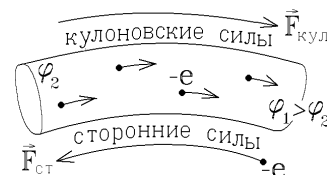
Если на концах проводника создать разность потенциалов, то свободные носители заряда под действием электростатических сил быстро перераспределятся так, чтобы скомпенсировать поле внутри проводника и сделать потенциал проводника всюду одинаковым ( $\varphi_{\text{проводника}} = \text{const}$ ). Электрический ток при этом прекращается.

Поэтому для поддержания ненулевой разности потенциалов  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  и создания постоянного тока должны присутствовать дополнительные силы **неэлектростатической природы**. Это химические, диффузионные и другие силы. Они совершают работу против электростатических кулоновских сил, возвращая свободные носители заряда обратно, и называются сторонними силами, которые и будут причиной появления электродвижущих сил (ЭДС).

При наличии постоянного тока в проводнике на свободные носители заряда  $q$  действуют, вообще говоря, как кулоновские силы  $\vec{F}_{\text{кул}} = q\vec{E}_{\text{кул}}$ , так и сторонние силы  $\vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_{\text{ст}}$ , где  $\vec{E}_{\text{ст}}$  – напряженность поля сторонних сил. Тогда закон Ома в локальной форме для однородного проводника  $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{кул}}$  при появлении сторонних сил запишется как

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

Участок проводника, на котором действуют сторонние силы, называется неоднородным.



#### 4.7. Закон Ома для неоднородного участка цепи

В тонком неоднородном проводнике векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  направлены вдоль его оси, перпендикулярно к сечению проводника  $S$ . Интегрируя по длине проводника обе части предыдущего равенства, получим в случае постоянного (или квазистационарного) тока:  $\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}$ . Учтем, что  $\frac{1}{\sigma} = \rho$ ,  $\vec{j} = \frac{I}{S} = \text{const}$ , поэтому  $\int_1^2 \frac{1}{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{l} = I \rho \frac{l}{S} = IR$ .

Первое слагаемое справа, как следует из законов электростатики, является разностью потенциалов:  $\int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} = \phi_1 - \phi_2$ .

Работу сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда называют электродвижущей силой (э.д.с.)  $\varepsilon$ , действующей на данном участке цепи:

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \frac{1}{q} \int_1^2 \vec{F}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} \cdot d\vec{l}.$$

Как и разность потенциалов, э.д.с. измеряется в вольтах.

С учетом этого определения получаем выражение  $IR = \phi_1 - \phi_2 + \varepsilon_{12}$ .

Это – закон Ома для неоднородного участка проводника, включающего э.д.с.  $\varepsilon_{12}$ , причем  $(\phi_1 - \phi_2)$  – разность потенциалов на его концах или падение напряжения на неоднородном участке цепи:

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \varepsilon_{12} - IR.$$

Еще раз подчеркнем, что ненулевая разность потенциалов, а, следовательно, и отличное от нуля электростатическое поле  $\vec{E}_{\text{кул}} = -\text{grad } \phi$  внутри проводника могут существовать только в одном случае – если на границах проводника возникают неэлектростатические сторонние силы, поддерживающие разность потенциалов неизменной, несмотря на перемещение свободных зарядов.

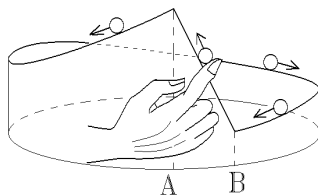
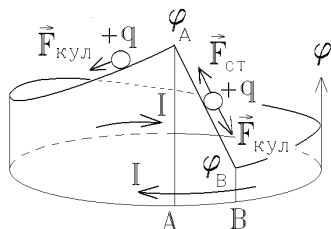
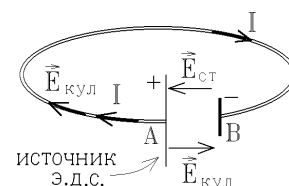
Сторонние силы возникают только в местах химической неоднородности проводников, в местах контакта разнородных проводников, или в местах, где на проводник действует переменное магнитное поле. Эти места называются источниками э.д.с. Именно на их краях возникает постоянная разность потенциалов, приводящая к появлению тока в цепи.

Пример: замкнутая цепь, в которой положительная клемма А и отрицательная клемма В источника э.д.с. замкнуты однородным проводником.

Потенциал  $\phi_A > \phi_B$ , и линии тока  $I$  выходят из клеммы «+» источника э.д.с. и входят в клемму «-», так как под действием кулоновских сил в однородном проводнике ток

должен течь в сторону убывания потенциала  $\vec{E}_{\text{кул}} = -\text{grad } \phi$ . Измене-

ние потенциала  $\phi$  вдоль этой цепи показано на левом рисунке. Поскольку линии постоянного тока замкнуты, то один и тот же ток  $I$  должен течь в одном направлении во всех точках цепи. На однородном участке цепи движение положительных зарядов  $+q$ , создающее ток  $I$ , обусловлено



электростатической силой  $\vec{F}_{\text{кул}}$ . А в источнике э.д.с. (участок АВ) это движение поддерживается сторонней силой  $\vec{F}_{\text{ст}}$ , и ток течет в сторону возрастания потенциала. На правом рисунке показан аналогичный пример из механики: шарик скатывается по желобу под действием силы тяжести, и поднимается на горку АВ сторонней силой.

Как правило, в цепях постоянного тока э.д.с.  $\varepsilon$  создается в специальных устройствах: батареях, аккумуляторах, гальванических элементах. Каждый такой элемент обозначается символом  $\text{—|—}$  и имеет некоторое сопротивление  $r$ ,

которое называется внутренним сопротивлением источника э.д.с. Оно подключается последовательно с сопротивлениями остальных участков цепи. Поэтому закон Ома для участка цепи, содержащего источник э.д.с.  $\varepsilon$ , имеет вид:

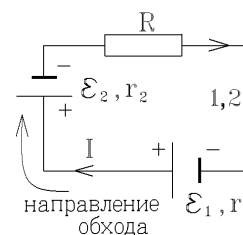
$$I(R + r) = \phi_1 - \phi_2 + \varepsilon,$$

где  $R$  – суммарное сопротивление однородных проводников на этом участке цепи.

Если цепь постоянного тока, содержащая несколько источников э.д.с. (батарей), замкнута (точка 1 совпадает с точкой 2), то  $\phi_1 - \phi_2 = 0$ . Тогда получим закон Ома для замкнутой

цепи:  $\sum \varepsilon = I(R + r)$  или  $I = \frac{1}{R + r} \sum \varepsilon$ .

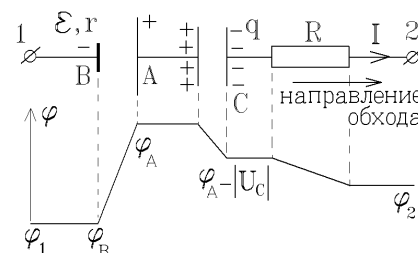
В числителе последней формулы стоит алгебраическая сумма всех э.д.с. в цепи, а в знаменателе – сумма всех сопротивлений, включающая внутренние сопротивления источников э.д.с.



Чтобы правильно записать знаки э.д.с. в этой сумме, необходимо, прежде всего, выбрать направление обхода цепи. Тогда знак э.д.с. определяется ориентацией полюсов батареи относительно направления обхода. Например, для цепи, показанной на рисунке, формула закона Ома примет вид:  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = I(R + r_1 + r_2)$ .

**Замечание:** квазистационарный ток может протекать по участку цепи, включающему конденсатор. На конденсаторе появляется заряд  $q$ , а на его обкладках – разность потенциалов  $U_C = q/C$ . Распределение потенциала на этом участке показано на правом рисунке, где  $\varphi_1 - \varphi_2$  – падение напряжения на данном участке цепи.

Аналогично, падение напряжения на клеммах батареи с э.д.с.  $\varepsilon$  и с внутренним сопротивлением  $r$  будет равно  $U = \varepsilon - Ir$ , если ток  $I$  **разряжает** батарею (создан батареей) и будет равно  $U = \varepsilon + Ir$ , если ток  $I$  **заряжает** батарею.



#### 4.8. Разветвленные электрические цепи. Правила Кирхгофа и их применение

Если электрическая цепь имеет сложный, разветвленный вид, то законы постоянного тока для нее пишутся в виде правил Кирхгофа. Пример такой цепи показан на рисунке.

**Узлом** называется точка, в которой соединяются три или более проводников. Так, например, цепь на рисунке имеет четыре узла А, В, С и D.

Первое правило Кирхгофа следует из условия стационарности тока. Окружим, например, узел А замкнутой поверхностью  $S$ . Тогда

$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ , т.е. заряд (ток), вытекающий из поверхности  $S$ , равен заряду (току), втекающему в нее. Поэтому

алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:  $\sum_i I_i = 0$ .

Это первое правило Кирхгофа. Число токов в сумме должно равняться числу проводников, сходящихся в узле. Токи, направленные к узлу или от него, входят в сумму с разными знаками. Так, для узла В на рисунке имеем  $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ .

Чтобы записать правила Кирхгофа, надо вдоль каждого выходящего из узла проводника в произвольном направлении обозначить стрелкой текущий по этому проводнику ток. Если направление тока выбрано неверно, то при решении системы уравнений знак тока получится отрицательным, а его величина будет верной.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для неоднородных участков проводника.

**Замкнутым контуром** называется сплошная линия, проведенная из любого узла вдоль проводников цепи, и возвращающаяся в этот узел, нигде не пересекая себя. Так, рассматриваемая на рисунке цепь имеет семь различных замкнутых контуров, показанных справа.

Разбиваем любой замкнутый контур на участки, соединяющие соседние узлы. Например, для внешнего контура цепи это будут участки АВ, ВС и СА. Записываем для них закон Ома с учетом направления обхода:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_1 r_1 &= \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_1, \\ I_2 R_2 + I_2 r_2 &= \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_2, \\ -I_6 R_6 &= \varphi_C - \varphi_A \end{aligned} \right\}$$

и складываем полученные выражения. Разности потенциалов в сумме дают ноль, и мы получаем второе правило Кирхгофа:

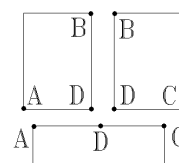
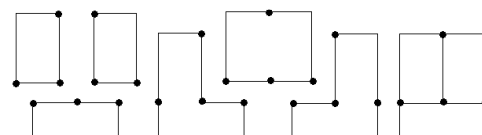
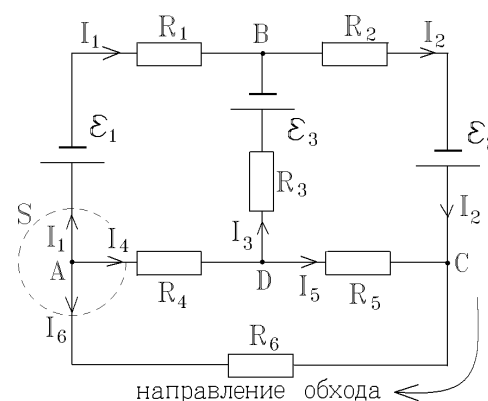
Алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления (включая внутренние сопротивления источников э.д.с.) в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме э.д.с. в этом же замкнутом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_i \varepsilon_i.$$

Чтобы учесть знаки в указанной сумме, выбираем направление обхода контура. Если выбранное произвольно направление (стрелка) тока совпадает с **направлением обхода**, то в сумму соответствующее слагаемое входит со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Правило определения знаков э.д.с. таково: если положительная (большая) клемма источника э.д.с. совпадает с направлением обхода, то в сумму эта э.д.с. входит со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Так, например, для внешнего замкнутого контура рассматриваемой цепи с учетом выбранного направления обхода второе правило Кирхгофа запишется в виде

$$I_1(R_1 + r_1) + I_2(R_2 + r_2) - I_6 R_6 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1.$$

**Замечание:** не следует писать правила Кирхгофа для всех узлов и всех замкнутых контуров цепи. Эти уравнения линейно зависимы. Если цепь имеет  $N$  узлов, то первые правила Кирхгофа следует писать для любых  $(N - 1)$  узлов. Вторые правила Кирхгофа можно записать только для





наименьших замкнутых контуров, внутри которых нет других участков цепи (рисунок справа). Записанная таким образом линейная система уравнений достаточна для определения всех неизвестных токов  $I_i$  во всех ветвях цепи.

Наконец, если токи в разветвленной цепи квазистационарны, а в цепь включены конденсаторы, то при записи второго правила Кирхгофа следует учесть сумму падений напряжения на конденсаторах, имеющих в выбранном замкнутом контуре:

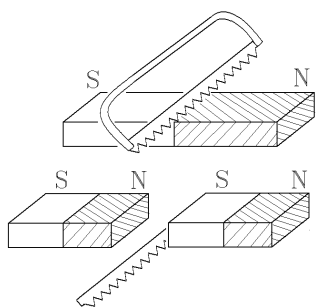
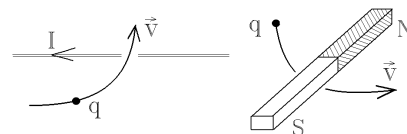
$$\sum_i I_i R_i + \sum_i I_i r_i + \sum_i U_{Ci} = \sum_i \mathcal{E}_i.$$

## 5. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

### 5.1. Причина появления магнитного поля. Вектор индукции магнитного поля

Поместим **неподвижную** свободную частицу с зарядом  $q$  вблизи проводника с током или постоянного магнита. Постоянный магнит на покоящуюся частицу не действует, а электрическим полем проводника с током можно пренебречь. Действительно, ток в металле создан движением свободных электронов, но заряд этих электронов практически скомпенсирован положительным зарядом ионов решетки. В целом проводник с током можно считать электронейтральным.

Но если частица с зарядом  $q$  движется, то ее траектория вблизи проводника с током, а также вблизи постоянного магнита начнет искривляться. Из этого следует, что на нее действует какая-то сила неэлектростатической природы. Она была названа магнитной.



Магнитные силы действуют на движущиеся заряды (токи) или на магниты.

Отдельные электрические заряды (положительные и отрицательные) существуют, а отдельных магнитных зарядов («северного» и «южного»), которые отталкивались или притягивались бы магнитными силами, в природе пока не обнаружено. Если распилить постоянный магнит пополам, то получим два новых постоянных магнита.

Оказывается, что магнитная сила имеет ту же природу, что и электрическая. Она является следствием релятивистских эффектов, возникающих при движении заряженных частиц. Покажем это, рассматривая прямолинейный тонкий бесконечно длинный проводник с током  $I$ . Параллельно проводнику на расстоянии  $r$  со скоростью  $\vec{v}$  в ту же сторону, что и ток, движется положительный точечный заряд  $q$ . Из опыта следует, что магнитная сила начнет притягивать заряд  $q$  к проводнику с током.

Но в другой инерциальной системе  $K'$ , движущейся вместе с зарядом  $q$  со скоростью  $\vec{v}$ , этот заряд покоится, и магнитной силы быть не должно. А по принципу относительности законы движения во всех инерциальных системах одинаковы, то есть сила притяжения должна сохраниться. Откуда же она берется?

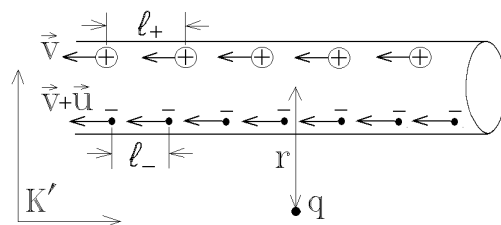
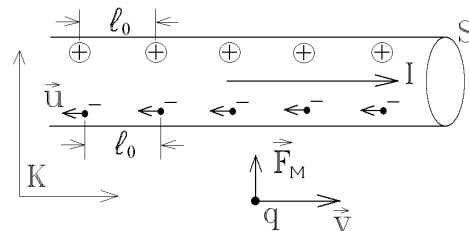
Дело в том, что ток  $I = jS = enuS$  – это направленное движение вдоль проводника свободных электронов,  $n$  – их концентрация,  $S$  – площадь сечения проводника. Тогда  $n \cdot S \cdot 1\text{м}$  – это число свободных электронов в единице длины проводника, а  $l_0 = 1/(n \cdot S)$  – это среднее расстояние между соседними свободными электронами, если они движутся «цепочкой», что справедливо для очень тонкого проводника в системе отсчета  $K$ , где проводник покоится, а сторонний заряд  $q$  движется со скоростью  $v$ .

При этом дрейфовая скорость направленного движения носителей тока  $u \approx 0,1\text{мм/с}$  очень мала, а так как на каждый свободный электрон приходится положительный ион решетки с зарядом  $+e$ , то среднее расстояние между положительными зарядами тоже равно  $l_0$ . В сумме положительные и отрицательные заряды компенсируют друг друга, и проводник с током не заряжен и не взаимодействует с зарядом  $q$  электростатически.

Но в системе  $K'$ , где покоится сторонний заряд  $q$ , свободные электроны движутся со скоростью  $v + u$ , а положительные ионы – со скоростью  $v$ . Из-за релятивистского сокращения длины расстояние между свободными электронами будет чуть меньше, чем расстояние между положительными ионами:  $L_- = l_0 \sqrt{1 - ((v+u)/c)^2} < L_+ = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$ . Заряды уже не компенсируют друг друга и распределены вдоль проводника с результирующей линейной плотностью  $\rho_{\text{лин}} = \lambda$ :

$$\lambda = \frac{+e}{L_+} + \frac{-e}{L_-} = \frac{e}{l} \left( \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right]^{-1/2} - \left[ 1 - \frac{(v+u)^2}{c^2} \right]^{-1/2} \right) \approx \frac{e}{l_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{(v+u)^2}{c^2} \right) \approx -\frac{euv}{l_0 c^2} = -enS \frac{v}{c^2} = -I \frac{v}{c^2}.$$

что вследствие эффекта Лоренца сокращения длины, проводник с током в системе  $K'$  оказывается линейно заряженным с плотностью  $\lambda$ . Этот заряд создает на расстоянии  $r$  электрическое поле с напряженностью  $E'$ , которая была вычислена ранее для заряженной нити:  $E' = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$ . Это поле притягивает неподвижный в системе  $K'$  заряд  $q$  к проводнику с



силой  $F_3' = q|E'| = qv \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}$ . Согласно принципу относительности эта си-

ла равна магнитной силе в неподвижной системе отсчета К:  $F_M = F_3' = qvB$ ,

где величина  $B = I / (2\pi\epsilon_0 c^2 r) = \mu_0 I / (2\pi r)$  характеризует магнитное поле,

создаваемое прямолинейным током  $I$ , а также любого другого магнитного поля. Она называется индукцией магнитного поля. Постоянная

$\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м называется магнитной постоянной. Единица

измерения магнитной индукции в СИ – тесла [Тл].

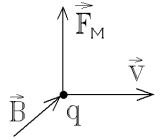
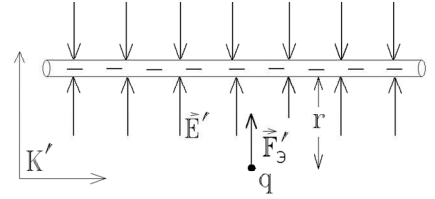
Индукция любого магнитного поля  $\vec{B}$  – это векторная величина, определяющая величину и ориентацию (направление) этого поля.

Но сила  $\vec{F}_M$ , притягивающая движущийся заряд к току  $I$  – это вектор, ортогональный вектору  $\vec{v}$  скорости заряда  $q$ . Поэтому индукция магнитного поля также должна быть вектором. Тогда три вектора  $\vec{F}_M$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  можно связать формулой векторного произведения (с учетом направления этих векторов):  $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}]$  – это магнитная сила, действующая на частицу с зарядом  $q$ , движущуюся со

скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ .

Выводы:

- 1) Магнитное создают движущиеся электрические заряды или токи.
- 2) Магнитные силы имеют одну природу с электрическими. В одной инерциальной системе отсчета наблюдатель измеряет магнитную силу, а в другой она превращается в электрическую силу. Магнитное поле для одного наблюдателя является электрическим для другого. Поэтому электрическое и магнитное поля взаимосвязаны и образуют одно целое – электромагнитное поле.



## 5.2. Преобразование электрического и магнитного полей в инерциальных системах отсчета.

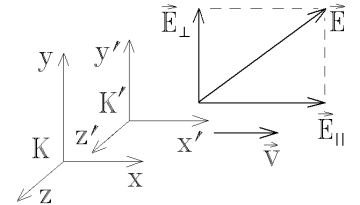
Так как магнетизм – это релятивистский эффект движения заряженных частиц, то законы электромагнетизма уже удовлетворяют всем требованиям специальной теории относительности. Электромагнетизм – это релятивистская теория.

Как показано выше, при переходе из одной инерциальной системы в другую электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$  и магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  меняются, переходят одно в другое.

Пусть система отсчета К покоится, и другая инерциальная система К' движется относительно неё с постоянной скоростью  $\vec{v}$  вдоль оси  $x$ . Пусть в некоторой точке  $x, y, z$  системы К в некоторый момент времени  $t$  по её часам электрическое и магнитное поля имеют значения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Разложим эти векторы на составляющие, параллельные и перпендикулярные вектору скорости  $\vec{v}$  (оси  $x$ ):  $\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp}$ ,

$\vec{B} = \vec{B}_{||} + \vec{B}_{\perp}$ . Эта же точка в системе К' имеет координаты, описываемые преобразова-

ниями Лоренца:  $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ ,  $t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ .



Электрическое и магнитное поля при переходе в систему К' описываются похожими формулами преобразования

специальной теории относительности:  $\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}$ ,  $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $\vec{B}'_{||} = \vec{B}_{||}$ ,  $\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - [\vec{v}, \vec{E}]/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$  (приводим их без

вывода). Как видим, изменяются только поперечные преобразования полей. Их продольные составляющие (направленные вдоль скорости  $\vec{v}$ ) одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Обратные преобразования можно получить

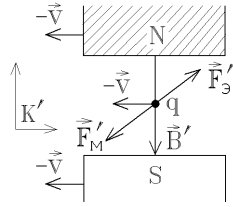
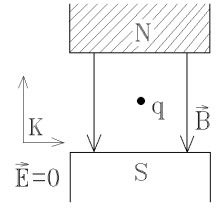
заменой  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ :  $\vec{E}_{||} = \vec{E}'_{||}$ ,  $\vec{E}_{\perp} = \frac{\vec{E}'_{\perp} - [\vec{v}, \vec{B}']}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $\vec{B}_{||} = \vec{B}'_{||}$ ,  $\vec{B}_{\perp} = \frac{\vec{B}'_{\perp} + [\vec{v}, \vec{E}']/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ .

Из этих преобразований следует, что хотя поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, но их комбинации  $[\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}']$  и  $[\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = \vec{E}'^2 - c^2 \vec{B}'^2]$  не изменяются, то есть являются релятивистскими инвариантами. Отсюда следует, что если в какой-либо системе векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  ортогональны, т.е.  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ , то они будут ортогональны и в любой другой инерциальной системе:  $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$ . В этом случае можно найти такую инерциальную систему, где одно из полей отсутствует:

$\vec{B}' = 0$  и  $\vec{E}' \neq 0$ , если  $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 > 0$  или  $\vec{B}' \neq 0$  и  $\vec{E}' = 0$ , если  $\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 < 0$ .

Наоборот, если в одной системе отсчета отсутствует либо электрическое, либо магнитное поле, то во всех других инерциальных системах отсчета будет выполнено условие  $\vec{E}' \perp \vec{B}'$ .

**Пример:** пусть в неподвижной системе К между полюсами неподвижного магнита находится неподвижный точечный заряд  $q$ . Очевидно, что на него не действуют ни магнитная, ни кулоновская силы ( $\vec{F} = 0$ ). Перейдем теперь в систему К', движущуюся вдоль магнита с нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$  вправо, как показано на рисунке ниже. В этой системе и заряд, и магнит, создающий магнитное поле с индукцией  $\vec{B}'$  движутся влево со скоростью  $-\vec{v}$ . Будет ли на заряд действовать магнитная сила  $\vec{F}'_{\text{магн}} = q[-\vec{v}, \vec{B}']$ , и начнет ли он отклоняться?



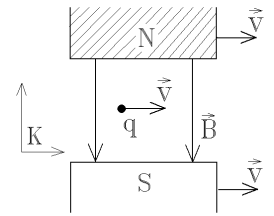
Для ответа заметим, что в неподвижной системе К электрическое поле отсутствует:  $\vec{E} = 0$ , а  $\vec{B} = \vec{B}_{\perp}$ . Тогда в системе К', движущейся со скоростью  $v \ll c$ , магнитное поле практически не изменяется:  $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = 0$ ,  $\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - [\vec{v}, \vec{E}]/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \vec{B}_{\perp} = \vec{B}$ , но появляется поперечное

электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx [\vec{v}, \vec{B}] \approx [\vec{v}, \vec{B}']$  (так как

$\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$ ). Следовательно, в системе К' на заряд  $q$  будет действовать дополнительная электрическая сила

$\vec{F}'_{\text{эл}} = q\vec{E}'_{\perp} = q[\vec{v}, \vec{B}']$ . Суммарная сила  $\vec{F}' = \vec{F}'_{\text{эл}} + \vec{F}'_{\text{магн}} = 0$ , и заряд  $q$  не отклоняется вбок, как и в системе К.

Приведем *обратный пример*: постоянный магнит движется с той же скоростью, что и заряд  $q$ , как показано на рисунке. Из опыта известно, что равномерно движущийся магнит не создает электрического поля. На заряд  $q$  действует только магнитная сила  $\vec{F}_{\text{магн}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$ , отклоняющая заряд в сторону. Можно перейти в инерциальную систему отсчета, где и магнит, и заряд покоятся и магнитная сила отсутствует. Но в этой системе появится электрическое поле  $\vec{E}'_{\perp}$ , по-прежнему отклоняющее заряд с той же по величине силой. Таким образом, магнитная сила  $\vec{F}_{\text{магн}} = q[\vec{v}, \vec{B}]$  появляется всякий раз, когда заряд движется в магнитном поле независимо от относительного движения источников магнитного поля.



### 5.3. Сила Лоренца

Из сравнения двух приведенных выше примеров можно сделать вывод: при переходе из одной инерциальной системы в другую электрическое и магнитное поля преобразуются друг в друга. Поэтому, чтобы не получить неверных, ошибочных результатов, надо одновременно учитывать и электрическую, и магнитную силу, действующую на заряженную частицу. Эту суммарную силу

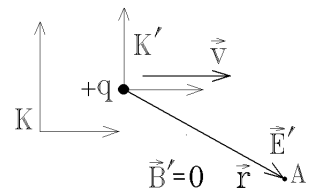
$$\vec{F} = \underbrace{q\vec{E}}_{=\vec{F}_{\text{эл}}} + \underbrace{q[\vec{v}, \vec{B}]}_{=\vec{F}_{\text{магн}}}$$

следует называть силой Лоренца. Её первое слагаемое – это электрическая сила  $\vec{F}_{\text{эл}}$ , которая в электростатическом поле равна силе Кулона. Второе слагаемое  $\vec{F}_{\text{магн}}$  – это магнитная составляющая силы Лоренца. Разделение такой полной силы Лоренца на электрическую и магнитную составляющие зависит от выбора системы отсчета.

### 5.4. Магнитное поле движущегося электрического заряда и элемента тока.

#### Закон Био-Савара-Лапласа

Пусть частица с зарядом  $q$  движется в покоящейся системе отсчета К с нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$  (даже огромная средняя скорость хаотического движения свободных электронов в металле  $\langle v \rangle \approx 2 \cdot 10^6$  м/с много меньше скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с). Перейдем в инерциальную систему К', в которой частица покоится и создаёт в точке А на удалении  $\vec{r}$  электростатическое поле с напряженностью  $\vec{E}' = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  (очевидно, что для покоящегося заряда  $\vec{B}' = 0$ ).

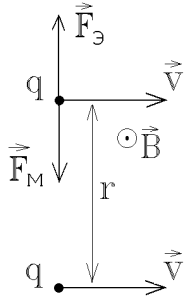
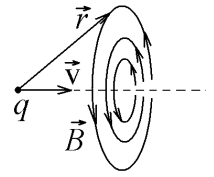


Возвращаемся в систему К. Согласно приведенным выше формулам преобразования электрического и магнитного полей, в ней возникнет поперечное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$ ,  $\vec{B}_{\perp} = \frac{\vec{B}'_{\perp} + [\vec{v}, \vec{E}']}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{[\vec{v}, \vec{E}']}{c^2} = \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}$

(при этом учтено, что для нерелятивистской частицы  $\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 1$  и  $\vec{B}'_{\perp} = 0$ ). Подставляя  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ , получаем выражение вектора индукции магнитного поля, созданного движением со скоростью  $\vec{v}$  частицы с электрическим зарядом  $q$  на расстоянии  $\vec{r}$  от нее:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Линии индукции  $\vec{B}$  охватывают линию, вдоль которой направлен вектор скорости частицы, и **замкнуты** в отличие от линий напряженности электростатического поля, которые начинаются и заканчиваются на электрических зарядах.

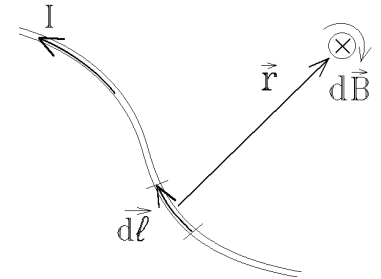


Магнитное поле, созданное одной движущейся частицей очень мало. Рассмотрим для примера две одинаковые заряженные частицы, движущиеся на расстоянии  $r$  друг от друга с одинаковыми скоростями  $\vec{v}$  параллельно друг другу. Электрическая сила Кулона  $\vec{F}_E = qE = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  расталкивает их, а

магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_M = q[\vec{v}, \vec{B}] = \frac{\mu_0 v^2 q^2}{4\pi r^2}$  притягивает, как следует из формулы для векторного произведения  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Но отношение сил  $\frac{F_M}{F_E} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$  для нерелятивистских частиц. Особенно заметна малость магнитного поля, созданного одним электроном при направленном движении с дрейфовой скоростью  $u \sim 0,1$  мм/с, создающем ток в металлических проводниках. Тогда  $\frac{F_M}{F_E} = \frac{u^2}{c^2} \sim 10^{-25}$ .

Практически магнитные силы должны исчезать на фоне электрических. Но положительные и отрицательные заряды электронов и ионов в веществе точно скомпенсированы, и поэтому результирующая кулоновских сил ничтожно мала. А крайне малые магнитные силы, действующие на каждый свободный электрон, суммируются, то есть умножаются на число электронов, имеющее порядок числа Авогадро, и в итоге создаются достаточно большие магнитные поля. Заметное магнитное поле возникает при направленном движении достаточно большого заряда.

Рассмотрим тонкий проводник с током  $I$  и вырежем из него маленький участок длины  $dl$ . Все движущиеся в нем носители заряда создают магнитные поля. Согласно принципу суперпозиции для магнитного поля индукции полей, создаваемых разными источниками, складываются векторно, и результирующее поле всех движущихся электронов равно  $\vec{B}_{\text{рез}} = \sum_i \vec{B}_i = \frac{\mu_0 (-e)}{4\pi} \sum_i \frac{[\vec{v}_i, \vec{r}_i]}{r_i^3}$ . Однако свободные электроны в проводнике движутся **хаотически**, их скорости  $\vec{v}_i$  и векторы магнитной индукции  $\vec{B}_i$  направлены в разные стороны и в сумме должны дать ноль. Поэтому неподвижный кусок металла, вообще говоря, не создает магнитного поля, хотя в нем имеются движущиеся заряды.



Но ток в проводнике – это направленное результирующее движение свободных электронов с одной и той же дрейфовой скоростью  $\vec{u}$ . В участке проводника с объемом  $dV = Sdl$  будет  $nSdl$  таких электронов, и, двигаясь совместно, они создадут в точке А на расстоянии  $\vec{r}$  от участка  $dl$  поле с индукцией  $d\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i = nSdl \frac{\mu_0 (-e)}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$ , где  $n$  – концентрация или число свободных электронов в единице объема,  $nSdl$  – это число электронов в выделенном участке, а  $\frac{\mu_0 (-e)}{4\pi} \frac{[\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$  – поле одного электрона. Учтем, что  $-en\vec{u} = \vec{j}$  – плотность тока. Назовем векторную величину  $I d\vec{l} = \vec{j} S dl = -en\vec{u} S dl$ , направленную по линиям тока, элементом тока. Получаем закон Био – Савара – Лапласа:

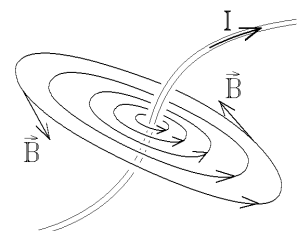
Элемент тока  $I d\vec{l}$  создает на расстоянии  $\vec{r}$  магнитное поле с индукцией

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

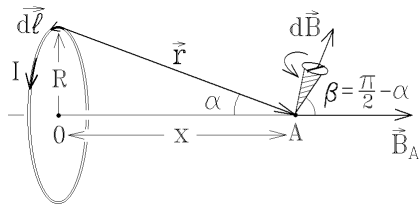
Этот закон позволяет, зная токи, рассчитать магнитное поле в любой точке пространства. Чтобы найти поле, созданное всем проводником с током, надо проинтегрировать полученное для  $d\vec{B}$  выражение по всей длине проводника:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

Как и в случае движущегося заряда, линии индукции  $\vec{B}$  замкнуты и охватывают проводник с током.



Вычислим магнитное поле, созданное некоторыми проводниками с током.

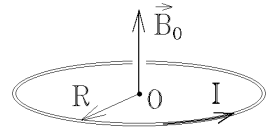


1) Поле на оси кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$ . Каждый элемент тока  $Idl$  создает в точке  $A$  на оси витка на расстоянии  $x$  от его центра  $O$  поле  $d\vec{B}$ . Для определения результирующей индукции  $\vec{B}_A$ , направленной в силу симметрии вдоль оси витка, надо суммировать проекции всех векторов  $d\vec{B}$  на ось (поперечные составляющие  $d\vec{B}_\perp$  взаимно компенсируют друг друга):

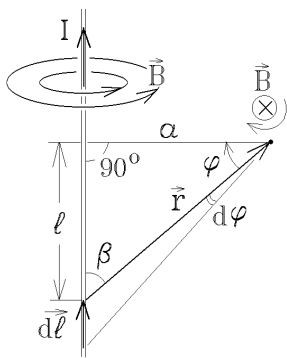
$$B_A = \oint d\vec{B} \cdot \cos \beta = \oint \frac{\mu_0 I dl \sin 90^\circ}{4\pi r^2} \cos \beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \beta \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \beta \cdot 2\pi R$$

Так как  $r^2 = R^2 + x^2$  и  $\cos \beta = \sin \alpha = R/r$ , то индукция  $\vec{B}_A$ , направленная вдоль оси  $x$ ,

уменьшается с расстоянием  $x$  от центра витка  $O$  и имеет величину  $B_A = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$ .



В центре  $O$  кругового витка с током  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$  (направление  $\vec{B}_0$  показано на рисунке).



2) Поле на расстоянии  $a$  от бесконечного прямолинейного тонкого проводника с током  $I$ . Из прямоугольного треугольника, изображенного на рисунке слева, следует:

$$\sin \beta = \cos \varphi; \quad r = \frac{a}{\cos \varphi}; \quad l = a \cdot \tan \varphi. \quad \text{Тогда } dl = a \cdot d(\tan \varphi) = \frac{a \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi} \text{ и величину индукции}$$

$d\vec{B}$ , созданной элементом тока  $Idl$ , можно выразить через одну независимую переменную

$$\varphi: \quad dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \beta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \varphi d\varphi.$$

Если поле создано конечным участком прямолинейного тонкого проводника с током, то в точке  $A$  на расстоянии  $a$  от проводника индукцию магнитного поля можно найти, вычислив интеграл по всей длине проводника (угол  $\varphi$  изменяется от  $-\varphi_1$  до  $+\varphi_2$ ):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \sin \varphi \right]_{-\varphi_1}^{+\varphi_2} = B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1).$$

Для бесконечно длинного проводника  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  и

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

бесконечным тонким прямолинейным током  $I$  на расстоянии  $a$  от проводника. Это же выражение мы получали раньше при выводе магнитной силы в разделе 17.1.

## 5.5. Сила Ампера

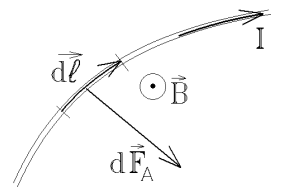
Внесем металлический проводник с током во внешнее магнитное поле  $\vec{B}$ . На движущиеся внутри свободные электроны действуют силы Лоренца  $\vec{F}_m = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ . Скорости свободных электронов складываются из скорости хаотического движения  $\vec{v}_{хд}$  и дрейфовой скорости  $\vec{u}$ , приводящей к появлению тока:  $\vec{v} = \vec{v}_{хд} + \vec{u}$ . Скорости хаотического движения электронов направлены в разные стороны. Поэтому в разные стороны будут направлены и соответствующие им магнитные силы, которые в сумме равны нулю. Совместное же дрейфовое движение свободных электронов со скоростью  $\vec{u}$  приводит к появлению суммарной силы

$d\vec{F}_A = \sum \vec{F}_{mi} = -e[\vec{u}, \vec{B}] \cdot nSdl$ , так как  $nSdl$  – число свободных электронов в участке проводника длины  $dl$  и сечения  $S$ , а  $-e[\vec{u}, \vec{B}]$  – сила, действующая на один электрон. Сила  $d\vec{F}_A$  называется силой Ампера. Действуя на все свободные заряды в проводнике, она действует и на сам проводник. Так как  $-enS\vec{u}dl = \vec{j}Sdl = I\vec{dl}$  (элемент тока), то на элемент проводника с током  $I$ , помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис.), действует сила Ампера

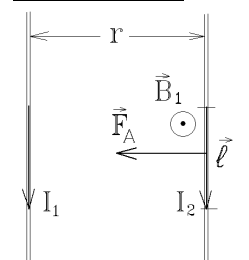
Это – закон Ампера. На весь проводник с током действует сила Ампера  $\vec{F}_A = \int_l I[d\vec{l}, \vec{B}]$ .

Пример: рассмотрим два параллельных проводника с током на расстоянии  $r$  друг от друга, АО которым текут в одном направлении токи  $I_1$  и  $I_2$ . Первый ток создает вблизи вто-

рого поле  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ . В этом поле на участок второго тока длины  $l$  действует сила Ампера



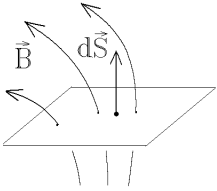
$$d\vec{F}_A = I[d\vec{l}, \vec{B}].$$



$$F_A = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l, \text{ притягивающая токи друг к другу.}$$

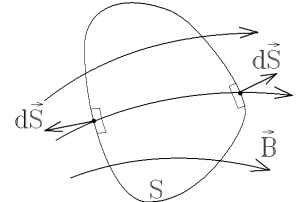
Если заряды одного знака отталкиваются, то однонаправленные токи притягиваются силой Ампера, а разнонаправленные токи отталкиваются.

### 5.6. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля



Поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через произвольную площадку  $d\vec{S}$  называется магнитным потоком:  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Численно его можно считать равным числу линий магнитной индукции, пересекающих площадку  $dS$ . В СИ единицу измерения  $\Phi_B$  называют вебером [Вб].

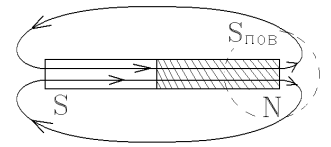
Так как отдельных магнитных зарядов (монополей Дирака) экспериментально не обнаружено, то линии  $\vec{B}$  замкнуты, они нигде не начинаются и нигде не кончаются. Поэтому сколько линий  $\vec{B}$  входит внутрь замкнутой поверхности  $S$ , столько же и выходит из нее. Входящие линии образуют тупой угол с  $d\vec{S}$ , и для них  $\vec{B} \cdot d\vec{S} < 0$ , а для выходящих линий  $\vec{B} \cdot d\vec{S} > 0$ . Поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:



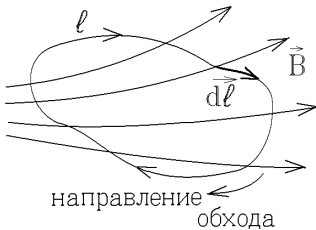
$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{— это теорема Гаусса для вектора индукции } \vec{B} \text{ любого магнитного поля.}$$

Используя теорему Остроградского  $\oint \vec{B} d\vec{S} = \int \text{div } \vec{B} dV$ , получаем теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$  в дифференциальной форме:  $\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$ . Напомним, что в точках, где  $\text{div } \vec{A} \neq 0$ , линии вектора  $\vec{A}$  должны либо оканчиваться, либо начинаться. Условие  $\text{div } \vec{B} = 0$  означает отсутствие начала или конца линий  $\vec{B}$ , то есть их **замкнутость**.

*Пример:* окружим северный полюс постоянного магнита замкнутой поверхностью  $S_{\text{пов}}$ . Чтобы выполнялась теорема Гаусса, число линий  $\vec{B}$ , выходящих из поверхности, должно быть числу линий  $\vec{B}$ , входящих в неё. Внутри магнита тоже есть магнитное поле, а линии  $\vec{B}$  нигде не обрываются, они замкнуты.

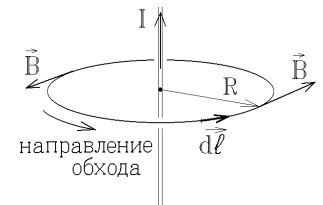


### 5.7. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля



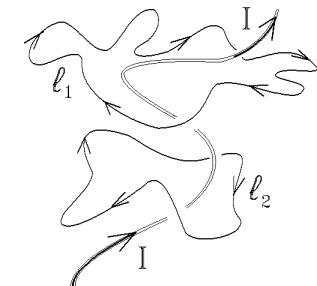
По определению циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по замкнутому контуру называется интеграл  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ , знак которого зависит от направления обхода контура.

Вычислим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по круговому контуру радиуса  $R$ , окружающему прямой бесконечный проводник с током  $I$ . Контур совпадает с линией индукции  $\vec{B}$ , а величина  $B = \mu_0 I / 2\pi R$  при интегрировании

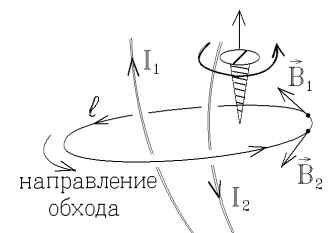


$$\text{постоянна. Тогда } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl \cos 0^\circ = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint dl = \mu_0 I.$$

Результат не изменится, если форма проводника с током и форма охватывающего его контура будут произвольны (см. рисунок слева). Если контур охватывает несколько токов, то их поля по принципу суперпозиции складываются:  $\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i$ , и циркуляция результирующего вектора  $\vec{B}$  определяется выражением  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ .



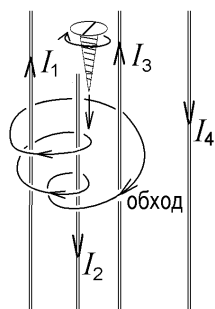
Но токи могут течь по проводникам в разных направлениях. К тому же можно изменить и направление обхода контура, что изменит знак циркуляции. Поэтому сумма в правой части должна быть алгебраической: следует учитывать знаки токов. Для определения знака тока  $I_i$ , входящего в сумму, удобно перпендикулярно плоскости контура поставить винт и вращать его по направлению обхода контура. Если направление поступательного движения винта совпадает с направлением тока, охватываемого контуром, то этот ток входит в сумму со знаком "+". Если же ток направлен противоположно направлению движения винта, то он входит в сумму со знаком "-". Так циркуляция  $\vec{B}$  в примере, показанном на рисунке, будет равна  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2)$ .



Обобщая все сказанное выше, приходим к выводу:

циркуляция вектора  $\vec{B}$  по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, **охватываемых этим контуром**, умноженной на магнитную постоянную:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$



Это – **теорема о циркуляции для вектора индукции магнитного поля**.

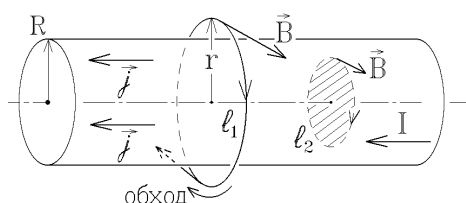
*Замечание:* контур может охватывать каждый ток несколько раз. Так на рисунке слева ток  $I_1$  охватывается контуром 2 раза, ток  $I_2$  – 3 раза, ток  $I_3$  – 1 раз. В соответствии с заданным направлением обхода теорема о циркуляции  $\vec{B}$  запишется в виде  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (-2I_1 + 3I_2 - I_3)$ . Ток  $I_4$  тоже создает магнитное поле  $\vec{B}_4$ , но этот ток не охватывается контуром и его циркуляция  $\oint \vec{B}_4 \cdot d\vec{l} = 0$  и ток  $I_4$  в сумму не входит.

## 5.8. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля: поле цилиндрического провода с током, поверхностного тока, соленоидальной и тороидальной катушки с током

### 1) Цилиндрический проводник с током

Полученная ранее формула для индукции магнитного поля тонкого прямого бесконечно длинного проводника с током  $B = \mu_0 I / 2\pi r$  дает некорректный результат  $B \rightarrow \infty$  на оси проводника, т.е. при  $r = 0$ . Этого можно избежать, если учесть, что любой реальный проводник имеет конечное поперечное сечение, и ток в нем распределен с конечной плотностью.

Пусть ток  $I$ , текущий по прямому цилиндрическому проводнику радиуса  $R$ , имеет одинаковую во всех точках

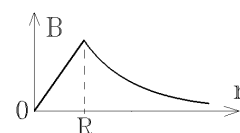


плотность  $j = I / \pi R^2$ . Для кругового контура  $l_1$  радиуса  $r > R$  теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  имеет вид:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ . На одинаковом удалении  $r$  от оси величина  $B = \text{const}$ . Таким образом, поле **вне** длинного прямого цилиндрического проводника с током совпадает с полем бесконечно тонкого прямого проводника с током:  $B|_{r \geq R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Другой контур  $l_2$  радиуса  $r < R$  охватывает участок проводника, заштрихованный на рисунке, через поперечное сечение которого течет ток  $I' = j\pi r^2$ . В этом случае теорема о циркуляции  $\vec{B}$  дает:

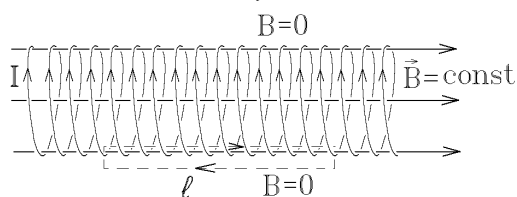
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 j\pi r^2 = \mu_0 I r^2 / R^2$ . Поэтому **внутри** проводника на удалении  $r$  от его оси

индукция магнитного поля  $B|_{r \leq R} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$ . Зависимость величины  $B$  от расстояния  $r$  до оси про-



водника представлена на графике. Как видно, на оси проводника  $B = 0$ , а на поверхности проводника с током магнитное поле имеет наибольшую индукцию.

### 2) Длинная катушка-соленоид с током.



Линии индукции магнитного поля должны замыкаться (выходя из одного конца соленоида, они возвращаются в другой). Если соленоид имеет очень большую длину, то линии  $\vec{B}$  практически уходят в бесконечность. Внутри такого соленоида с равномерной намоткой витков  $\vec{B} = \text{const}$ , а вне его, вдали от концов соленоида,  $\vec{B} = 0$ .

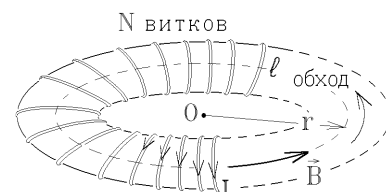
Циркуляция  $\vec{B}$  по очень узкому прямоугольному контуру длины  $l$ , одна сторона которого лежит внутри соленоида, а другая – вне его, равна  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{внутри}} l + B_{\text{вне}} l = \mu_0 I N$ , так как контур охватывает  $N$  витков с током  $I$ , текущим по каждому витку. Таким образом, индукция магнитного поля внутри длинного прямого соленоида, где  $n = N/l$  – число витков на единицу длины соленоида, будет равна

$$B_{\text{в соленоиде}} = \mu_0 n I$$

Бесконечно длинных соленоидов не существует и применять эту формулу можно только вдали от краев длинных и узких соленоидов.

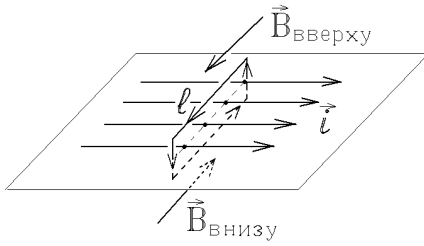
### 3) Тороидальная катушка с током.

Линии индукции  $\vec{B}$  внутри катушки образуют замкнутые окружности. Выберем контур  $l$  радиуса  $r$ , совпадающий с такой линией. Он охватывает все  $N$  витков катушки, по которым течет ток  $I$ , и из теоремы о циркуляции  $\vec{B}$  следует, что  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I N$ , т.е. индукция магнитного поля внутри тороидальной катушки



зависит от расстояния  $r$  до ее центра О:  $B_{\text{в тороиде}} = \mu_0 NI / 2\pi r$ .

#### 4) Плоскость с поверхностным током.



Пусть по бесконечной плоскости течет постоянный ток с линейной плотностью  $i$  (это – ток, протекающий по полосе ширины  $1\text{м}$ :  $I = il$ , где  $l$  – ширина полосы с током). Выберем симметричный прямоугольный контур, охватывающий участок плоскости ширины  $l$ . Тогда из теоремы о циркуляции  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{вверху}} l + B_{\text{внизу}} l = \mu_0 il$ , где  $il$  – охватываемый ток. Из-за симметрии контура относительно плоскости с током  $B_{\text{вверху}} = B_{\text{внизу}}$  и

$B_{\text{плоскости с током}} = \mu_0 i / 2$ . Полученная величина индукции магнитного поля, созданного бесконечной плоскостью с однородным поверхностным током, не

зависит от расстояния до плоскости.

**Замечание:** формулу  $B = \mu_0 i / 2$  можно применять для точек, **достаточно близких** к поверхности любой формы, по которой течет ток с линейной плотностью  $i$ . Рядом с поверхностью основной вклад в  $B$  дает близлежащий участок тока, который можно считать плоским.

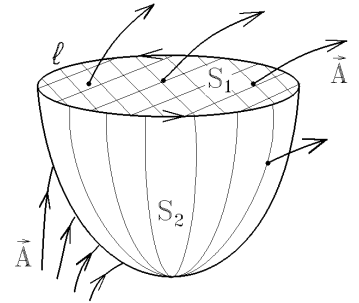
### 5.9. Теорема о циркуляции вектора индукции в дифференциальной форме

Кроме теоремы Остроградского, в векторном анализе важна теорема Стокса, позволяющая вычислить циркуляцию любого вектора  $\vec{A}$ :

циркуляция вектора  $\vec{A}$  по произвольному замкнутому контуру равна интегралу от  $\text{rot } \vec{A}$  по поверхности произвольной формы, ограниченной этим контуром:  $\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$ .

Заметим, что поверхность  $S$  может иметь какую угодно форму, лишь бы она была ограничена замкнутым контуром  $l$  – результат при этом не изменится:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 = \int_{S_2} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}_2.$$



Вектор  $\text{rot } \vec{A}$  называется ротором вектора  $\vec{A}$  и вычисляется как векторное произведение  $\text{rot } \vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}]$  или

$$\text{rot } \vec{A} = \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \text{ где } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{орты декартовой системы координат}$$

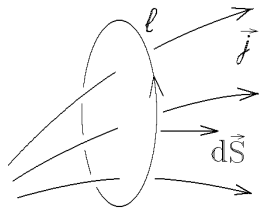
(сравните выражения  $\text{grad } A$ ,  $\text{div } \vec{A}$  и  $\text{rot } \vec{A}$ ). Векторы  $d\vec{S}$ , как и раньше, направлены перпендикулярно к элементарной площадке  $dS$ .

Применим теперь теорему Стокса к магнитному полю:

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охватываемый ток}} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}, \text{ где } S - \text{площадь, охватываемая контуром.}$$

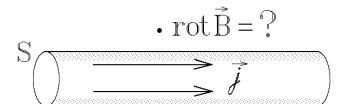
это теорема о циркуляции  $\vec{B}$

Так как это равенство выполняется для произвольных поверхностей  $S$ , то равны подынтегральные функции:  $\text{rot } \vec{B} = [\vec{\nabla}, \vec{B}] = \mu_0 \vec{j}$  – это теорема о циркуляции индукции  $\vec{B}$  магнитного поля в дифференциальной форме (зная поле  $\vec{B}(x, y, z)$ , можно вычислить плотность тока  $\vec{j}$ , создающего это поле).

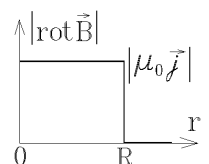


$\vec{j}$ , создающего это поле).

**Пример:** построим график зависимости величины  $|\text{rot } \vec{B}|$  от  $r$ , если  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля тока, текущего вдоль длинного провода радиуса  $R$  с постоянной плотностью  $\vec{j}$  ( $r$  – расстояние от оси провода).



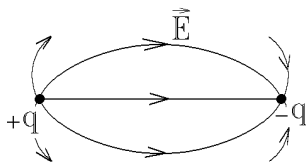
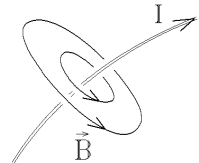
Так как ток течет только в области  $0 \leq r \leq R$ , то вне провода  $\text{rot } \vec{B} = 0$ , хотя  $B = \frac{\mu_0 j R^2}{2\pi r} \neq 0$ .





## 5.10. Сравнение особенностей электростатического и магнитостатического полей

Сопоставим полученные ранее законы для этих полей, записав их в виде следующей таблицы:

	Электростатическое поле	Постоянное магнитное поле
Теорема Гаусса	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$ или $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ или $\text{div } \vec{B} = 0$
Теорема о циркуляции	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ или $\text{rot } \vec{E} = 0$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$ или $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
Линии поля	Линии $\vec{E}$ начинаются и заканчиваются на электрических зарядах: 	Линии $\vec{B}$ замкнуты и охватывают токи. Магнитных зарядов нет: 

Если ротор вектора напряженности поля во всех точках пространства равен нулю, то такое поле называется потенциальным. Дивергенция этого вектора отлична от нуля только в тех точках, где расположены заряды, создающие поле. Для потенциального поля существует скалярная функция, называемая потенциалом поля  $\phi$ , такая, что вектор напряженности является градиентом этой функции:  $\vec{E} = -\text{grad } \phi$ . Силы этого поля всегда **консервативны**. Ротор напряженности потенциального поля всегда равен нулю:  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . Например, потенциальны все центральные поля (электростатическое, и гравитационное).

Если же, наоборот, дивергенция вектора индукции равна нулю во всех точках пространства, то поле называется вихревым (или соленоидальным). Ротор этого вектора отличен от нуля только в тех точках, где плотность тока, создающего такое поле, отлична от нуля (где присутствуют "вихри"). Зарядов – источников вихревого поля не существует, как не существует однозначного потенциала  $\phi$ .

В отличие от консервативных сил потенциальных полей магнитная сила перпендикулярна траектории движения заряда. Поэтому **силы магнитного поля работы не совершают**, и невозможно определить через работу сил потенциальную энергию для вихревого поля. Нельзя построить машину, которая работала бы за счет энергии магнитного поля. Силы вихревого поля неконсервативны.

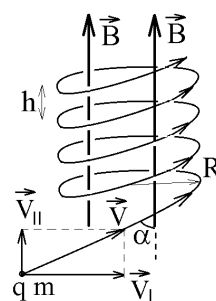
И все же, несмотря на такие различия, электростатическое и магнитное поля имеют одну природу и преобразуются одно в другое при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

## 5.11. Движение заряженной частицы в постоянных магнитном и электрическом полях

Если частица с массой  $m$  и зарядом  $q$  ускоряется в электрическом поле разностью потенциалов  $U = \phi_1 - \phi_2$ , то совершаемая электрическим полем работа превращается в кинетическую энергию частицы  $A = q(\phi_1 - \phi_2) = mv^2/2$ , и частица приобретает скорость  $v = \sqrt{2qU/m}$ . Отношение  $q/m$  называется удельным зарядом частицы.

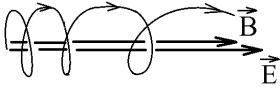
Пусть ускоренная частица со скоростью  $\vec{v}$  влетает в постоянное однородное магнитное поле под углом  $\alpha$  к линиям индукции поля  $\vec{B}$ . Скорость частицы можно разложить на перпендикулярную к полю  $v_{\perp} = v \sin \alpha$  и параллельную к полю составляющую  $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ . Магнитная сила Лоренца  $F_m = |q[\vec{v}, \vec{B}]| = qBv \sin \alpha = qBv_{\perp}$  будет направлена перпендикулярно как к скорости частицы, так и к линиям магнитного поля, и приведет к движению частицы с постоянной по величине скоростью  $v_{\perp}$  по окружности радиуса  $R$  с нормальным (центростремительным) ускорением  $a_n = v_{\perp}^2 / R$ . Из уравнения динамики  $ma_n = m \frac{v_{\perp}^2}{R} = F_m = qBv_{\perp}$  находим радиус траектории:

при:  $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$  и период обращения  $T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$ , который **не зависит от скорости частицы**.



Вдоль линий  $\vec{B}$  магнитная сила не действует, и частица будет лететь с постоянной скоростью  $v_{\parallel}$ , одновременно вращаясь вокруг линий  $\vec{B}$  с периодом  $T$ . Результирующим движением будет винтовая линия или спираль с радиусом

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \text{ и с шагом } h = v_{\parallel}T = \frac{2\pi mv_{\parallel}}{qB}, \text{ показанная на рисунке.}$$



Если одновременно с магнитным полем на заряженную частицу действует электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , то траектория частицы будет достаточно сложной кривой линией. В наиболее простом случае направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  совпадают. Тогда под действием электрического поля  $ma_{\parallel} = F_z = qE$  частица будет двигаться вдоль линий  $\vec{B}$  с ускорением  $a_{\parallel}$  с меняющейся со временем скоростью  $v_{\parallel} = v_{0\parallel} + a_{\parallel}t$ . Её траектория – винтовая линия с тем же радиусом  $R$ , но с переменным шагом  $h$ .

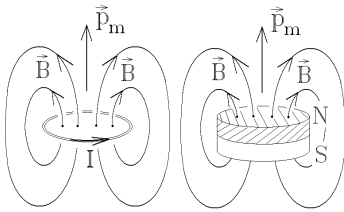
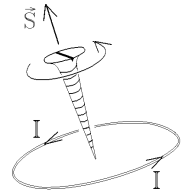
Если линии  $\vec{E}$  образуют угол  $\alpha$  с линиями  $\vec{B}$ , то заряженная частица совершает сложные петли, но постепенно смещается (“дрейфует”) в направлении перпендикулярном к векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  со средней скоростью  $\langle \vec{v}_{\text{др}} \rangle = [\vec{E}, \vec{B}] / B^2$ , которая также называется скоростью дрейфа  $\langle v_{\text{др}} \rangle = E \sin \alpha / B$ .

## 5.12. Дипольный магнитный момент контура с током

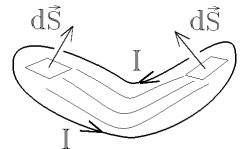
Под контуром с током здесь подразумевается замкнутый тонкий проводник, по которому течет **постоянный** ток. Если этот контур имеет малые размеры, то его называют магнитным диполем.

Такой диполь характеризуется дипольным магнитным моментом  $\vec{p}_m = I\vec{S}$ .

В этой формуле  $S$  – это площадь контура с током, а вектор площади  $\vec{S}$  направлен перпендикулярно контуру по правилу винта. Винт, установленный в центре контура, вращают **по направлению тока**  $I$  (см. рисунок). Поступательное движение винта показывает направление вектора площади  $\vec{S}$  контура с током и направление магнитного момента  $\vec{p}_m$ .



Заметим, что магнитное поле контура с током совпадает с полем постоянного магнита той же формы. Поэтому постоянные магниты тоже описывают магнитным моментом  $\vec{p}_m$ . В задачах можно заменять постоянные магниты эквивалентными замкнутыми контурами с током той же формы и наоборот. Если контур с током не плоский, то его магнитный момент вычисляется по формуле  $\vec{p}_m = I \int d\vec{S}$ , где интеграл берется по любой поверхности, ограниченной плоскостью с током. Результат не зависит от формы поверхности.



Результат не зависит от формы поверхности.

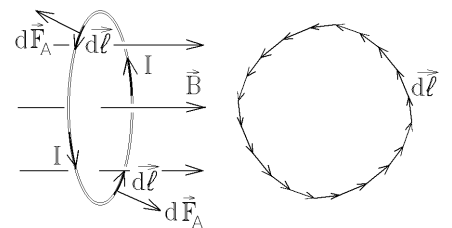
## 5.13. Энергия замкнутого проводника с постоянным током во внешнем магнитном поле.

Сила и момент сил, действующие на контур с током

Рассмотрим замкнутый проводник или контур с током, находящийся в магнитном поле. На каждый элемент тока  $I d\vec{l}$  действует сила Ампера  $d\vec{F}_A = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$ . Если поле **однородно** ( $\vec{B} = \text{const}$ ), то результирующая сила, действующая на весь контур,

$\vec{F}_A = \oint d\vec{F}_A = I[\oint d\vec{l} \times \vec{B}] = 0$ , так как для замкнутого контура  $\oint d\vec{l} = 0$ .

Таким образом, **в однородном магнитном поле силы Ампера стремятся растянуть или сжать замкнутый контур с током, но в сумме они равны нулю и поэтому не могут сдвинуть контур с места.**



Однако, суммарный момент сил Ампера  $\vec{M} = \oint [\vec{r}, d\vec{F}_A]$  не равен нулю и стремится повернуть контур с током.

Вычислим этот момент сил. Для этого разобьем плоский контур с током на очень узкие полоски ширины  $dy$ , как показано на рисунке. На два элемента тока  $I d\vec{l}$ , выделенные этой полоской, действует пара сил  $d\vec{F}_A$ , направленных в противоположные стороны. Величина момента этой пары сил равна  $dM = x \cdot dF_A = x \cdot IB dl \sin \alpha = IB x dy = IB dS$ , где  $dS = x dy$  – это площадь заштрихованной на рисунке полоски. Суммарный момент сил, поворачивающий весь контур с током, вычисляется, как  $M = IB \int dS = IBS$ . Как и раньше, будем определять направление вектора  $\vec{S}$  площади, ограниченной контуром с током, по правилу правого винта, вращая его “по току”.

Тогда выражение для вектора момента сил запишется как  $\vec{M} = [I\vec{S}, \vec{B}]$  или, с помощью магнитного момента контура,

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}].$$

как

Момент сил Ампера  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$  стремится повернуть плоскость контура с током перпендикулярно линиям индукции  $\vec{B}$  так, чтобы магнитный момент  $\vec{p}_m$  был направлен вдоль вектора  $\vec{B}$ .

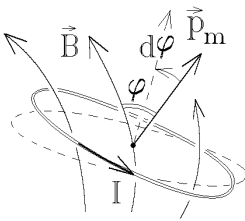
Точно так же постоянный магнит (магнитная стрелка) разворачивается вдоль линий вектора  $\vec{B}$ , а электрический диполь поворачивается вдоль линий напряженности  $\vec{E}$  электрического поля.

Если через  $\varphi$  обозначить угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ , то при повороте контура с током в магнитном поле на угол  $d\varphi$  (причем  $d\varphi < 0$ , так как угол  $\varphi$  **уменьшается**

(см. рисунок ниже), момент сил совершает работу  $dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = -p_m B \sin \varphi d\varphi = -dW$ , кото-

рая идет на изменение потенциальной энергии контура с током в магнитном поле. Интегрируя это уравнение, получим

$$\text{выражение для этой энергии: } W = \int dW = \int \underbrace{p_m B}_{=\text{const}} \sin \varphi d\varphi = -p_m B \cos \varphi \text{ или } \boxed{W = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}}.$$



*Замечание:* хотя магнитное поле  $\vec{B}$  не потенциально, но контур с током в нем обладает потенциальной энергией, которая определена с точностью до постоянной. Знак “-” показывает, что эта энергия минимальна, когда векторы  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  параллельны и направлены в одну сторону. Магнитный диполь стремится повернуться в состояние с минимальной энергией.

В неоднородном поле ( $\vec{B} \neq \text{const}$ ) формула

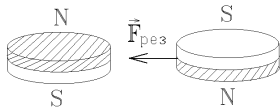
$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$  справедлива, если **размер контура достаточно мал** (тогда в пределах контура поле можно считать приближенно однородным). Следовательно, контур с током по-прежнему стремится развернуться так, чтобы его магнитный момент  $\vec{p}_m$  был направлен вдоль линии вектора  $\vec{B}$ .

Но, кроме того, на контур действует результирующая сила

$$\boxed{\vec{F}_{\text{рез}} = -\text{grad} W = -\text{grad}(-\vec{p}_m \cdot \vec{B}) = p_m \text{grad} B},$$

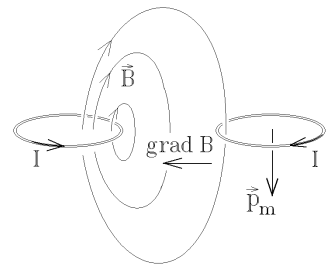
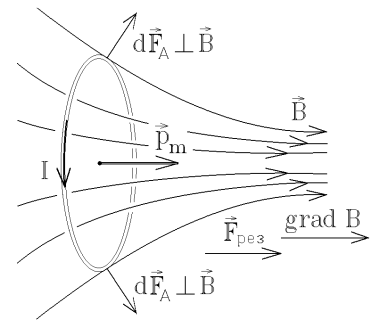
которая равна нулю в случае однородного поля  $\vec{B} = \text{const}$ . Эта сила действует на контур с током или на постоянный магнит с моментом  $\vec{p}_m$  и **втягивает их в область более сильного магнитного поля**.

*Пример:* два круговых витка с противоположно направленными токами расположены в одной плоскости. Как видно из рисунка справа, потенциальная энергия взаимодействия магнитного момента  $\vec{p}_m$  правого витка с магнитным полем  $\vec{B}$ , созданным левым витком, будет уменьшаться, по мере удаления витков друг от друга:



$W = -p_m |\text{grad} B| \cos 0^\circ$ . Поэтому силы Ампера притягивают витки с противоположно направленными токами.

Это легко увидеть, если заменить витки с током постоянными магнитами с эквивалентными магнитными моментами (рисунок слева). Если токи будут течь в одну сторону, то витки будут отталкиваться.



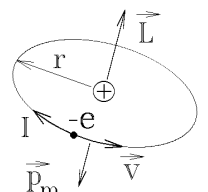
## 6. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### 6.1. Намагничивание среды и вектор намагниченности

При внесении ряда веществ (особенно таких, как железо) в магнитное поле, оно изменяется. Подобные среды называются **магнетиками**. Очевидно, в них возникает какое-то дополнительное магнитное поле. Но магнитное поле создается только токами (или движущимися зарядами), т.е. в магнетиках или магнитных средах существуют дополнительные токи, которые Ампер назвал **молекулярными токами**.

Примером такого тока будет движение электрона, вращающегося вокруг положительного ядра по орбите радиуса  $r$  со скоростью  $v$  и совершающего один оборот за время  $\Delta t = T = 2\pi r / v$ . При таком движении электрона переносится заряд  $\Delta q = e$ , что эквивалентно появлению кругового

тока  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{ev}{2\pi r}$ . Этот ток  $I$  направлен противоположно скорости  $\vec{v}$  отрицательно заряженного



электрона и создает орбитальный магнитный момент, имеющий величину  $p_m = I \cdot \pi r^2 = evr/2$ . Заметим, что магнитный момент  $\vec{p}_m$  вращающегося электрона связан с его моментом импульса (механическим моментом)  $L = mvr$  соотношением

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m} \vec{L} \quad (\text{направлены эти векторы противоположно}).$$

Приведенное соотношение называется гиромагнитным отношением.

Все молекулярные токи создаются движением электронов по замкнутым орбитам вокруг ядра, молекулы, или, может быть, группы молекул вещества. Таким образом, все молекулярные токи являются замкнутыми и обладают маг-

нитным моментом  $p_m = I_{\text{мол}} S_{\text{орбиты}} \approx \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$ .

Ясно, что в среде слишком много движущихся в разных направлениях электронов, и если все молекулярные токи направлены хаотично, то их магнитные моменты в сумме компенсируются, и вещество не создает дополнительного магнитного поля, т.е. практически не является магнетиком (дерево, пластик).

Но если молекулярные токи каким-либо образом ориентированы, то в сумме они создают магнитное поле. В этом случае говорят, что вещество намагничено.

Сложим векторно магнитные моменты всех молекулярных токов в достаточно малом объеме  $\Delta V$  вещества, разделим на этот объем и перейдем к пределу  $\Delta V \rightarrow 0$ . Полученный вектор

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}$$

называется вектором намагниченности среды (магнетика). Заметим, что это определение аналогично определению вектора поляризованности диэлектрика:  $\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \vec{p}_e / \Delta V$ .

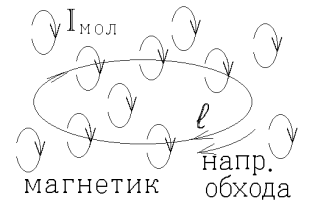
Если микроскопические молекулярные токи  $I_{\text{мол}}$  в магнетике каким-либо образом ориентированы, то, складываясь, они создают результирующие токи намагничивания. Такие токи, в отличие от обычных токов проводимости, не приводят к перемещению заряда по магнетику. Действительно, двигаясь по замкнутым микроскопическим орбитам, электроны "привязаны" к данной точке среды, т.е. не свободны. На них не действует никакое электрическое поле, заставляющее их перемещаться, просто они не могут находиться в покое.

Роль токов намагничивания заключается только в создании дополнительного магнитного поля в веществе. В отличие от токов проводимости, эти токи и созданное ими дополнительное магнитное поле будем отмечать штрихом.

## 6.2. Магнитная проницаемость среды и вектор напряженности магнитного поля

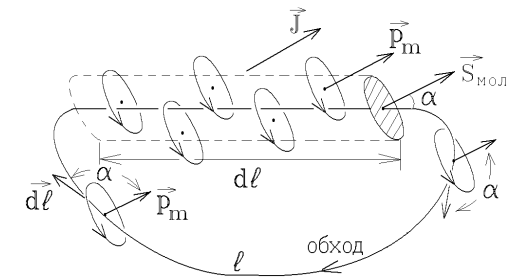
Молекулярные токи  $I_{\text{мол}}$  и образуемые ими токи намагничивания создают дополнительное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}'$ . Чтобы найти это поле, выберем внутри магнетика любой замкнутый контур  $l$  и запишем для него теорему о циркуляции  $\vec{B}'$ :

$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{мол}}$  – токи, охватываемые контуром.



Но кольцевые токи  $I_{\text{мол}}$ , полностью лежащие внутри контура, не дают вклада в сумму: они охватываются дважды, протекая в противоположных направлениях, т.е. в сумме надо учесть только те молекулярные токи, которые, в свою очередь, охватывают линию контура  $l$ , как показано на рисунке справа.

Если взять элемент контура длины  $dl$ , то это те токи, центры которых лежат внутри косого цилиндра с основанием  $S_{\text{мол}}$ , равным площади кругового молекулярного тока. Объем этого цилиндра  $dV = S_{\text{мол}} dl \cos \alpha$ , где угол  $\alpha$  – это угол между направлением обхода



контура  $d\vec{l}$  и магнитными моментами  $\vec{p}_m$  всюду одинаково ориентированных молекулярных токов (направление их ориентации определяется вектором  $\vec{J}$ ). Если  $n$  – концентрация молекулярных токов в магнетике (число таких токов в единице объема), то малый цилиндр длины  $dl$  содержит  $n S_{\text{мол}} dl \cos \alpha$  молекулярных токов, а при обходе по всему замкнутому контуру их число равно  $\oint n S_{\text{мол}} \cos \alpha dl$ .

Умножая это число на величину одного молекулярного тока  $I_{\text{мол}}$ , получим сумму молекулярных токов, охватываемых контуром  $l$  и входящих в теорему о циркуляции:

$$\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint n I_{\text{мол}} S_{\text{мол}} \cos \alpha dl.$$

Примем во внимание, что  $p_m = I_{\text{мол}} S_{\text{мол}}$  – магнитный момент одного молекулярного тока. Тогда при одинаково ориентированных молекулярных токах вектор намагниченности будет равен суммарному магнитному моменту единицы

объема магнетика:  $\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} = n\vec{p}_m$ . При этом  $\oint \vec{B}' \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint J dl \cos \alpha = \mu_0 \oint \vec{J} \cdot d\vec{l}$ , а так как это равенство выполняется для любого контура  $l$ , то получаем величину индукции дополнительного магнитного поля, созданного всеми молекулярными токами среды:

$$\boxed{\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}}.$$

В сумме все молекулярные токи создают результирующий ток намагничивания с плотностью  $\vec{j}'$ . Учитывая теорему о циркуляции  $\vec{B}'$  в дифференциальной форме:  $\text{rot } \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}'$ , получаем теорему о циркуляции вектора намагниченности  $\vec{J}$  в дифференциальной форме:

$$\boxed{\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'}$$

Это выражение определяет плотность токов намагничивания, создающих дополнительное магнитное поле. (В электростатике аналогичной формулой будет выражение для плотности связанных зарядов, создающих дополнительное электрическое поле:  $\rho' = -\text{div } \vec{P}$ ).

Магнитное поле в среде создается и обычными токами проводимости, и токами намагничивания. Однако вычислить магнитное поле в некоторых случаях можно, пользуясь распределением только обычно известных токов проводимости. Для этого учтем, что для суммарного поля в среде  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}')$ , и подставим сюда полученную формулу для

плотности тока намагничивания  $\vec{j}' = \text{rot } \vec{J}$ . После подстановки находим:  $\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B} - \text{rot } \vec{J} = \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) = \vec{j}$ . Выражение в

круглых скобках называют вектором напряженности магнитного поля  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J}$ , для которого  $\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j}}$ .

Обычно ориентация молекулярных токов происходит под действием внешнего магнитного поля. Энтропийные силы, с другой стороны, стремятся разориентировать магнитные моменты  $\vec{p}_m$  молекулярных токов, поэтому их магнитные моменты лишь частично ориентированы вдоль поля  $\vec{B}$ . Чем сильнее магнитное поле  $\vec{B}$ , тем больше степень ориентации моментов  $\vec{p}_m$ , т.е.  $\sum \vec{p}_m \sim \vec{J} \sim \vec{B} \sim \vec{H}$ .

Такую линейную зависимость вектора намагниченности среды  $\vec{J}$  от величины внешнего магнитного поля принято записывать в виде  $\boxed{\vec{J} = \chi \vec{H}}$ . Постоянная  $\chi$  называется магнитной восприимчивостью (сравните с формулой для вектора поляризованности среды во внешнем электрическом поле:  $\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$ ).

Подставляя это выражение для  $\vec{J}$  в определение  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}$ , находим  $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$ . Величину  $\mu = 1 + \chi$  называют магнитной проницаемостью среды.

Следовательно, в изотропном магнетике связь индукции и напряженности магнитного поля имеет вид:

$$\boxed{\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}}.$$

В вакууме, а также в любой немагнитной среде  $\chi = 0$ ,  $\vec{J} = 0$  и  $\mu_{\text{вакуума}} = 1$ . Заметим следующее: если однородный изотропный магнетик с проницаемостью  $\mu$  полностью заполняет объем, ограниченный замкнутой поверхностью, образованной линиями  $\vec{B}_{\text{пр}}$  (где  $\vec{B}_{\text{пр}}$  – индукция поля, созданного **только токами проводимости**), то индукция магнитного поля в таком магнетике будет в  $\mu$  раз больше, чем в вакууме:  $\vec{B} = \mu \vec{B}_{\text{вак}}$ . В частности, это справедливо для магнетика, заполняющего все бесконечное пространство (так как  $B|_{\infty} = 0$ ). В таком случае при удалении магнетика ни величина, ни направление напряженности магнитного поля не изменятся:  $\vec{H} = \vec{B} / \mu \mu_0 = \vec{B}_{\text{вак}} / \mu_0 = \vec{H}_{\text{вак}}$ .

### 6.3. Теорема о циркуляции вектора напряженности и вектора намагниченности

Выше было получено выражение  $\boxed{\text{rot } \vec{H} = [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j}}$ , которое является теоремой о циркуляции вектора  $\vec{H}$  в дифференциальной форме. В эту формулу входит только плотность обычных токов проводимости  $\vec{j}$ . Для определения  $\text{rot } \vec{H}$  не надо учитывать неизвестное распределение молекулярных токов или токов намагничивания (сама напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  зависит как от токов проводимости, так и от токов намагничивания).

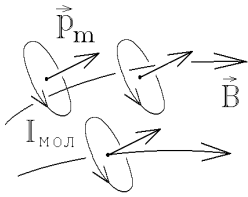
Используя теорему Стокса, получаем  $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  или  $\boxed{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i}$

- Это теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$  в интегральной форме:

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме обычных токов проводимости, охватываемых этим контуром.

Аналогично, формула  $\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'$  приводит к теореме о циркуляции вектора намагниченности  $\vec{J}$  по любому замкнутому контуру: циркуляция  $\vec{J}$  равна алгебраической сумме токов намагничивания, охватываемых этим контуром:

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = \sum I'_{\text{охват}}.$$



Нельзя считать, что вектор  $\vec{J}$  определяется только токами намагничивания  $\vec{j}'$ . Сами молекулярные токи ориентируются, когда их магнитные моменты  $\vec{p}_m$  поворачиваются вдоль линий индукции внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ , которое создается обычными токами проводимости  $\vec{j}$ . Иначе говоря, намагничивание среды может быть вызвано магнитным полем

обычных токов проводимости. Поэтому вектор  $\vec{J}$  определяется распределением всех токов: и токов намагничивания  $\vec{j}'$ , и токов проводимости  $\vec{j}$  в среде.

Заметим, что благодаря связи  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в однородном магнетике с проницаемостью  $\mu$  запишется как

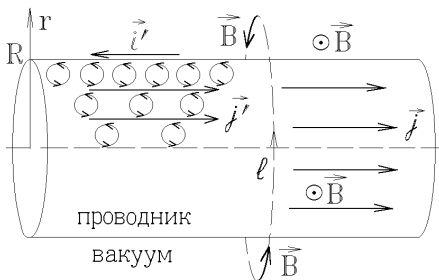
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu \sum I_i.$$

Наконец отметим, что основными характеристиками электрического и магнитного полей являются векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Вспомогательные векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  используют для определения полей в ряде задач, чтобы не учитывать явно распределение связанных зарядов и токов намагничивания.

#### 6.4. Магнитное поле в магнетиках. Поле постоянного магнита

Рассмотрим проводник радиуса  $R$ , сделанный из однородного магнетика с проницаемостью  $\mu$ , по которому течет ток проводимости с плотностью  $\vec{j}$ . Из теоремы о циркуляции для напряженности  $\vec{H}$ , получим

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r = \begin{cases} j \cdot \pi R^2 = I & \text{при } r \geq R \\ j \cdot \pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2} & \text{при } r \leq R \end{cases} \quad \text{откуда } H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} & \text{при } r \geq R, \\ \frac{Ir}{2\pi R^2} & \text{при } r \leq R, \end{cases}$$

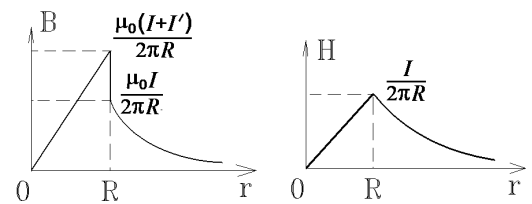


т.е. несмотря на присутствие токов намагничивания в проводнике величину напряженности  $H$  можно найти только по известному распределению токов проводимости  $\vec{j}$ .

Однако, чем больше магнитное поле, созданное токами проводимости, тем сильнее ориентируются магнитные моменты молекулярных токов в этом поле, тем больше их сумма  $\vec{J}$  и величина плотности  $\vec{j}'$  токов намагничивания (см. рисунок). Суммируясь, токи  $\vec{j}'$  увеличивают величину индукции  $B$ , но на границе проводника с вакуумом они исчезают, и по поверхности

проводника, как видно на рисунке, **в противоположную сторону** течет поверхностный ток с плотностью  $\vec{i}'$ , полностью компенсирующий вклад объемного тока намагничивания. Индукция магнитного поля уменьшается на границе скачком. Напряженность магнитного поля этого скачка не испытывает.

Другой причиной появления токов намагничивания в объеме магнетика будет его неоднородность. Например, увеличение концен-

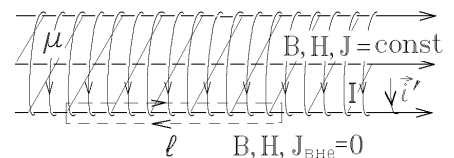


трации молекул среды  $\text{grad } n_{\text{мол}} \neq 0$  приводит к такому же увеличению концентрации молекулярных токов, их нескомпенсированности в каждой точке среды и к появлению нескомпенсированного тока  $\vec{j}'$ , как показано на рисунке слева.

**Объемных токов намагничивания нет в однородном магнетике, в котором отсутствуют токи проводимости. Если поместить такой магнетик во внешнее магнитное поле, то токи намагничивания возникнут только на поверхности (на границе) магнетика.**

В качестве другого примера рассмотрим длинную катушку-соленоид, у которой на длину  $l$  приходится  $N$  витков обмотки, по которой течет ток  $I$ . Внутри катушки помещен сердечник из магнетика с проницаемостью  $\mu$ . Запишем теорему о циркуляции для  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  по очень узкому прямоугольному замкнутому контуру длины  $l$ , охватывающему  $N$  витков с током  $I$ :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{\text{внутри}} \cdot l = IN \quad \text{или} \quad H_{\text{внутри}} = I \frac{N}{l};$$

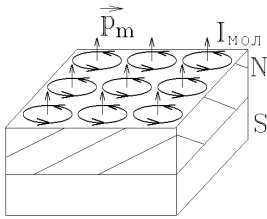


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_{\text{внутри}} \cdot l = \underbrace{\mu_0 (IN + i'l)}_{\text{охватываемые токи}} = \mu_0 l (H_{\text{внутри}} + J)$$

Подставив в последнее выражение  $J = \chi H$ , найдем  $B_{\text{внутри}} = \mu_0 (1 + \chi) H_{\text{внутри}} = \mu_0 \mu H_{\text{внутри}} = \mu \mu_0 IN / l$ . Индукция магнитного поля  $\vec{B}$  внутри очень длинного соленоида возрастает в  $\mu$  раз при введении в соленоид сердечника с магнитной проницаемостью  $\mu$ .

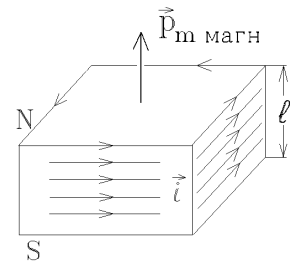
Отметим еще один важный факт:

формулы  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{J} = \chi \vec{H}$ ,  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}$  справедливы только в однородном изотропном магнетике, в котором эффект намагничивания создан магнитным полем обычных токов проводимости. В постоянных магнитах (в ферромагнитных средах), где остаточные токи намагничивания и созданное этими токами остаточное магнитное поле  $\vec{B}'_{\text{ост}}$  сохраняются даже в отсутствие внешнего магнитного поля, записанные выше формулы не применимы. Но соотношение  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$  выполняется в любом случае.



В постоянных магнитах молекулярные токи ориентированы в одном направлении. Если среда однородна, то в каждой точке внутри среды молекулярные токи направлены навстречу друг другу и компенсируют друг друга как показано на рисунке.

Поэтому сохраняется только результирующий поверхностный ток намагничивания с плотностью  $\vec{i}'$ , обтекающий боковую поверхность магнита и создающий его магнитный момент  $\vec{p}_m$ . Такая классическая картина наглядна, но не верна. Как показал Н.Бор, классические токи намагничивания должны компенсировать друг друга и появление дополнительного магнитного поля  $\vec{B}'$  в любой среде – это следствие квантовых эффектов.



Тем не менее, картина появления поверхностного тока  $\vec{i}'$ , показанная на рисунках, позволяет рассчитать поле магнита.

В качестве примера рассмотрим очень длинный цилиндрический постоянный магнит радиуса  $r$ . Его магнитное поле и линии  $\vec{B}$  имеют такой же вид, как и в случае длинной катушки – соленоида с током  $I$ .

Молекулярные токи образуют поверхностный ток намагничивания с линейной плотностью  $i'$ . Других токов нет. Охватим участок поверхности магнита очень узким контуром длины  $l$ , показанным на рисунке штриховой линией. Вне очень длинного магнита  $\vec{J} = 0$ ,  $\vec{B} \approx 0$ . Внутри –  $\vec{J} = \text{const}$ . Тогда по теореме о циркуляции вектора  $\vec{J}$  для этого контура  $\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = J l = i' l$  (где  $i' l$  – охватываемый ток намагничивания), т.е.  $J = i'$ , а по теореме о циркуляции для вектора  $\vec{B}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \underbrace{B'_{\text{ост}} \cdot l}_{\text{внутри}} + \underbrace{B'_{\text{вне}} \cdot l}_{=0} = \mu_0 i' l \quad \text{или} \quad B'_{\text{ост}} = \mu_0 i' = \mu_0 J - \text{это индукция поля внутри}$$

ри магнита. Она называется остаточной индукцией намагничивания. Токов проводимости

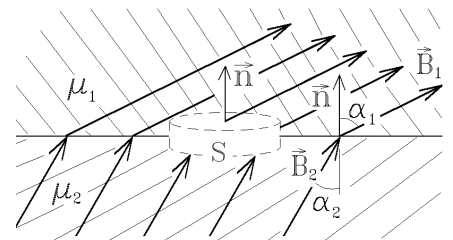
здесь нет и напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  внутри такого магнита  $H = \frac{B'_{\text{ост}}}{\mu_0} - J = 0$  и вне, и внутри магнита, хотя

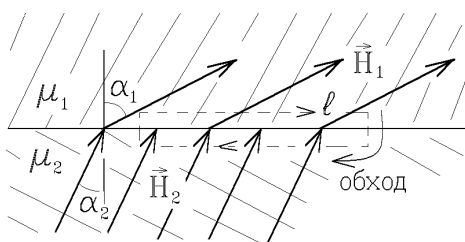
$$B_{\text{внутри}} = B'_{\text{ост}} \neq 0, \text{ т.е. несправедлива связь } \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

## 6.5. Поле на границе магнетика. Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля

На плоской границе двух достаточно протяженных (бесконечных) магнетиков с различными магнитными проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  линии индукции  $\vec{B}$  и напряженности  $\vec{H}$  магнитного поля испытывают излом.

Для замкнутой поверхности в виде цилиндра с бесконечно малой высотой, одно основание  $S$  которого лежит в одной среде, а другое – в другой, теорема Гаусса для  $\vec{B}$  дает:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{1n} S - B_{2n} S = 0$  (линии индукции практически пересекают только основания  $S$  цилиндрической замкнутой поверхности), т.е.  $B_{1n} = B_{2n}$ .





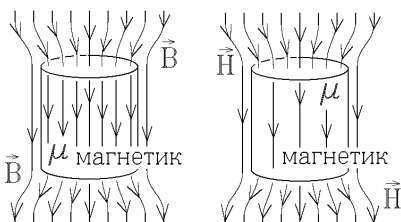
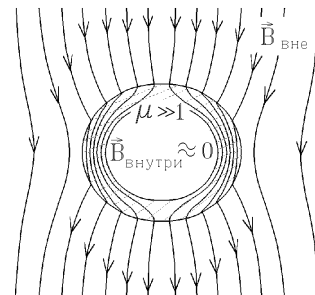
С другой стороны, если на границе отсутствуют токи проводимости, то для очень узкого прямоугольного замкнутого контура длины  $l$ , охватывающего часть границы, из теоремы о циркуляции  $\vec{H}$  получим  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1\tau}l - H_{2\tau}l = 0$ , так как охватываемый ток проводимости равен нулю.

Следовательно, на границе двух сред сохраняется тангенциальная составляющая вектора напряженности и нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля:

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Если среды не являются ферромагнитными, то на границе их раздела с учетом связи  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  должны выполняться условия:  $\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ,  $\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ . Поэтому  $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1\tau}/B_{1n}}{B_{2\tau}/B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между линией индукции (напряженности) и нормалью к поверхности раздела магнетиков.

*Замечание:* линии вектора  $\vec{B}$  всегда замкнуты, они нигде не могут обрываться или возникать. Поэтому при внесении в магнитное поле оболочки из магнетика с большим  $\mu$  линии  $\vec{B}$  отклоняются к ее внешней поверхности, где они сгущаются, и поле  $\vec{B}$  усиливается. Соответственно, внутри оболочки поле  $\vec{B}$  будет заметно ослабевать, т.е. замкнутые железные оболочки ( $\mu_{\text{железа}} \gg 1$ ) можно использовать в качестве магнитной защиты (экранировка постоянного магнитного поля).



Что касается линий  $\vec{H}$ , то для рассматривавшейся ранее замкнутой цилиндрической поверхности  $S$  получим  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = H_{1n}S - H_{2n}S \neq 0$ , так как  $H_{1n} \neq H_{2n}$ . Тогда из теоремы Остроградского  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int \text{div } \vec{H} dV \neq 0$  следует, что на границе раздела двух различных магнетиков  $\text{div } \vec{H} \neq 0$ , т.е. на этой границе (как уже отмечалось ранее) линии  $\vec{H}$  могут возникать или обрываться.

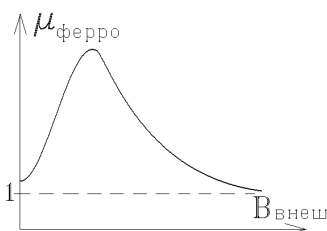
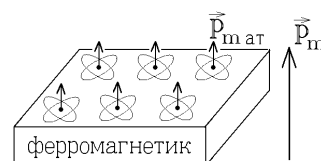
## 6.6. Причины появления диа-, пара- и ферромагнетизма

По своим магнитным свойствам все магнетики делятся на три типа в зависимости от величины магнитной проницаемости  $\mu$ :

- 1)  $\mu = 1 + \chi \gg 1$  - это ферромагнетики (Fe, Ni, Co и т.п.);
- 2)  $\mu = 1 + \chi \geq 1$  (магнитная восприимчивость  $\chi \approx 10^{-4} \ll 1$ ) – это парамагнетики (кислород, большинство металлов);
- 3)  $\mu = 1 + \chi \leq 1$  ( $\chi \approx -10^{-5} < 0$ ) - это диамагнетики (водород, вода, Cu, благородные газы).

### 1. Ферромагнетизм

В ферромагнетиках начинают действовать большие по величине силы квантовой природы, названные обменными силами. Эти силы заставляют магнитные моменты  $\vec{p}_{\text{мат}}$  всех атомов в некоторой области **выстраиваться строго параллельно**. Такая область ферромагнетика называется доменом и обладает очень большим результирующим магнитным моментом  $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{\text{мат}}$  т.е. обладает свойствами постоянного магнита.



Ориентируясь вдоль направления внешнего магнитного поля, домены способны создать очень сильное намагничение среды, чем объясняется большая величина  $\mu \gg 1$ .

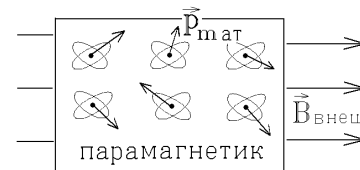
Заметим только, что степень этой ориентации зависит от величины внешнего поля. Поэтому проницаемость  $\mu$  ферромагнитной среды также не постоянна и зависит от величины  $B_{\text{внеш}}$ . В очень сильных внешних магнитных полях ферромагнетик приближается по своим свойствам к парамагнетику ( $\mu \rightarrow 1$ ).



## 2. Парамагнетизм

Движение электронов по замкнутым орбитам в атомах создает молекулярные токи с магнитными моментами  $\vec{p}_{\text{м орб}}$ . Но, кроме того, как оказывается, все элементарные частицы – электроны, протоны, нейтроны – сами ведут себя как крошечные магниты, т.е. обладают некоторыми собственными магнитными моментами  $\vec{p}_{\text{м собст}}$  (их природа будет рассмотрена дальше). Магнитные моменты атомов среды складываются из всех этих магнитных моментов составляющих атом частиц:  $\vec{p}_{\text{м ат}} = \sum (\vec{p}_{\text{м орб}} + \vec{p}_{\text{м собст}})$ .

В парамагнетике обменные силы не действуют, и магнитные моменты отдельных атомов направлены хаотически в разные стороны. При помещении парамагнетика во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_{\text{внеш}}$  магнитным моментам атомов энергетически выгодно быть ориентированными по полю. С другой стороны, тепловое движение препятствует ориентации  $\vec{p}_{\text{м ат}}$  вдоль линий  $\vec{B}_{\text{внеш}}$ , разориентируя их (и увеличивая энтропию среды). Поэтому магнитные моменты атомов лишь частично (и очень слабо) ориентированы по полю, вследствие чего степень этой ориентации  $\chi$  мала.



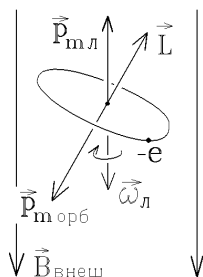
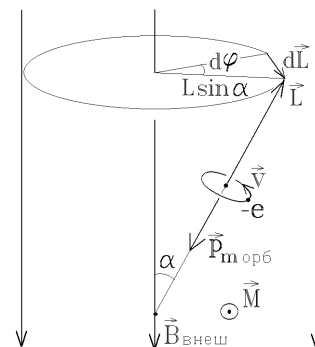
## 3. Диамагнетизм

Для некоторых веществ сумма орбитальных и собственных магнитных моментов всех составляющих атом частиц равна нулю:  $\vec{p}_{\text{м ат}} = \sum (\vec{p}_{\text{м орб}} + \vec{p}_{\text{м собст}}) = 0$ , т.е. атомные магнитные моменты, способные ориентироваться по внешнему магнитному полю, отсутствуют. Но каждый электрон вращается вокруг атомного ядра и образует маленький волчок, гироскоп, на который во внешнем магнитном поле действует момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p}_{\text{м орб}}, \vec{B}_{\text{внеш}}].$$

Такой гироскоп совершает прецессию. Его момент импульса  $\vec{L}$  (или ось) поворачивается за время  $dt$  на угол  $d\varphi \approx \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{M dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_{\text{м орб}} B_{\text{внеш}} \sin \alpha dt}{L \sin \alpha}$ . Учитывая, что гиромангнитное отношение  $\frac{p_{\text{м орб}}}{L} = \frac{e}{2m_e}$ , где  $m_e$  – масса,  $e$  – заряд электрона, находим циклическую частоту прецессии, которая называется ларморовой частотой прецессии:

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e B_{\text{внеш}}}{2m_e}.$$



Но если волчок совершает прецессию, то и любая точка на волчке тоже вращается с угловой скоростью  $\omega_L$  вокруг линий  $B_{\text{внеш}}$ . Это дополнительное вращение создает дополнительный молекулярный ток и дополнительный нескомпенсированный магнитный момент  $\vec{p}_{\text{м л}}$  ориентированный против поля  $\vec{B}_{\text{внеш}}$  (рисунок слева). Поэтому эффект ларморовой прецессии магнитных моментов молекулярных токов  $\vec{p}_{\text{м орб}}$  во внешнем магнитном поле ослабляет это поле ( $\chi < 0$ ).

Этот эффект имеется, естественно, у всех веществ, но он очень мал, и в ферро- и парамагнитных средах перекрывается выстраиванием ненулевых магнитных моментов атомов по полю.

Замечен он только в диамагнетиках, где  $\vec{p}_{\text{м ат}} = 0$ .

Ещё раз отметим, что обоснование пара- и диамагнетизма с помощью приведенных здесь аргументов классической физики наглядно, но приводит к противоречиям при объяснении различных опытных данных. Как и ферромагнетизм, пара- и диамагнетизм магнитных сред (магнетиков) может быть последовательно объяснен только с помощью законов квантовой физики.

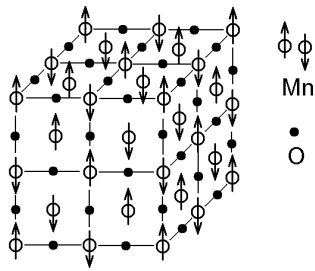
## 6.7. Доменная структура ферромагнетика, ферримагнетика и сегнетоэлектрика

Ряд твердых сред (металлов, полупроводников и диэлектриков), в кристаллических решетках которых имеются ионы переходных элементов (это ионы с незаполненными до конца внешними электронными оболочками) имеют очень большие значения магнитной восприимчивости или магнитной проницаемости  $\chi, \mu \gg 1$ . Их называют ферро- или ферри- магнетиками. Ферромагнетиками, например, являются чистые металлы Fe, Mn, Ni или Co (для Fe  $\mu_{\text{max}} = 5000$ ).

Общее свойство ферромагнетиков состоит в том, что при нагревании выше температуры  $T_K$ , называемой температурой Кюри или точкой Кюри, они теряют ферромагнитные свойства и превращаются в парамагнетики.

Следовательно, при температурах ниже температуры Кюри магнитные моменты атомов в решетке ферромагнетика должны упорядочиваться, выстраиваясь параллельно под действием обменных сил и создавая огромную намагниченность  $\vec{J}_0$ . Такое сильное упорядочение магнитных моментов частиц конденсированной среды называется её магнитным упорядочением.

Заметим, что параллельные магнитные моменты атомов в соседних слоях кристаллической решетки могут быть направлены в одну сторону, образуя ферромагнитную среду (ферромагнетик).



антиферромагнетик,  $J_0 \approx 0$

Но могут быть направлены в противоположные стороны, компенсируя друг друга. Такая среда называется антиферромагнитной (антиферромагнетик, например MnO).

Атомы (ионы) разного сорта имеют разные по величине магнитные моменты  $\vec{p}_m$ . Поэтому антиферромагнитные среды из таких атомов по-прежнему должны обладать огромной намагниченностью. Такие среды называют ферри-магнитными (ферримагнетики, например  $\text{NiOFe}_2\text{O}_3$ ).

**По своим магнитным свойствам ферримагнетики аналогичны ферромагнетикам.** Их преимущество в том, что многие ферримагнетики – ферриты – не проводят ток, т.е. являются магнитными диэлектриками (например, у феррит-граната  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  удельная проводимость  $\sigma = 10^{-8} \div 10^{-10} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ).

Это позволяет использовать ферриты во всех устройствах, где имеется переменное электромагнитное поле, и надо избежать огромных потерь энергии (в проводящих ферромагнетиках электромагнитное поле создает индукционные токи, быстро затухающие с выделением тепла). *Пример* – ферритовые сердечники трансформаторов, которые не греются.

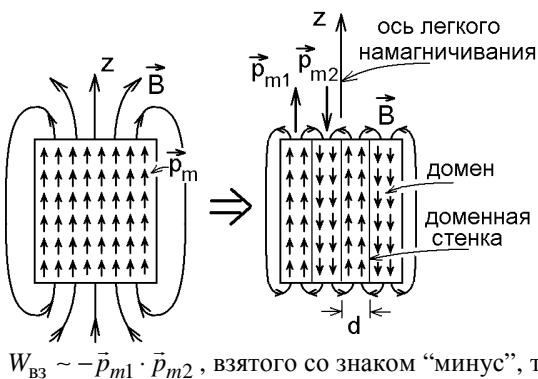
Как и в случае ферромагнетиков, при достижении критической температуры  $T_N$ , которая называется температурой Нееля или точкой Нееля, магнитное упорядочение в антиферромагнетиках и ферримагнетиках исчезает, и при  $T > T_N$  они превращаются в парамагнетики.

В ферромагнитных и ферримагнитных средах магнитное упорядочение создает огромную постоянную намагниченность  $\vec{J}_0 = \sum_{V=1} \vec{p}_{m\parallel}$ , которая сохраняется в отсутствие внешнего магнитного поля с напряженностью  $\vec{H}$ . В таких средах связь между  $\vec{J}$  и  $\vec{H}$  имеет вид  $\vec{J} = \vec{J}_0 + \chi \vec{H}$ , а индукция магнитного поля в такой среде вычисляется по формуле

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}).$$

Но если собственные магнитные моменты  $\vec{p}_{ms}$  **всех** частиц ферромагнетика направлены в одну сторону, то намагниченность среды будет огромной:  $J \approx J_0 = \langle p_m \rangle \cdot n$ , где  $n$  – концентрация атомов, а  $\langle p_m \rangle$  – среднее значение магнитного момента одного атома. Для железа, например,  $\langle p_{m\text{Fe}} \rangle \approx 2 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}$ ,  $n_{\text{Fe}} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$  и должно появиться магнит-

ное поле с огромной плотностью энергии  $w_{\text{магн}} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 J_0^2}{2} = \frac{\mu_0 (\langle p_m \rangle n)^2}{2} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^3$ .



$W_{Bz} \sim -\vec{p}_{m1} \cdot \vec{p}_{m2}$ , взятого со знаком “минус”, т.е. становится положительной и достигает максимума.

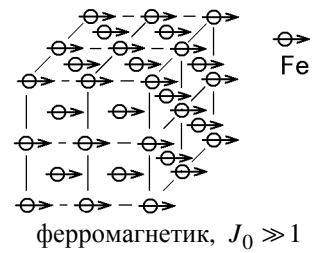
Уменьшение энергии магнитного поля  $E_{\text{поля}}$  в объеме ферромагнетика, вызванное уменьшением размера доменов, компенсируется ростом энергии доменных стенок  $E_{\text{стен}}$ , пропорциональной их суммарной площади.

Поэтому размер домена  $d$  не может быть очень малым. Он определяется условием минимума суммарной энергии

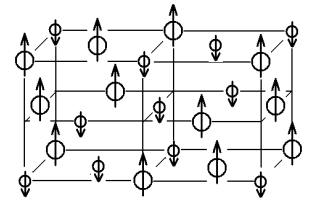
$$E_{\text{поля}} + E_{\text{стенок}} = \min.$$

Как правило, магнитные домены имеют размер  $d \sim 10^{-4} \div 10^{-6} \text{ м}$ .

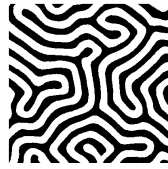
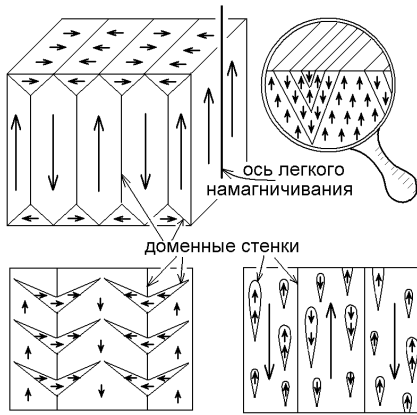
На поверхности ферромагнетика доменная структура становится более сложной. Появляются клиновидные домены, замыкающие линии  $\vec{B}$ , наблюдается их ветвление, как показано на рисунке ниже. В зависимости от угла наклона оси легкого намагничивания к поверхности ферромагнетика возникают доменные структуры в виде “ёлочек” или “капель”. На поверхности толстых ферромагнитных образцов может возникнуть лабиринтная доменная структура где светлая и темная окраска означает противоположные направления магнитных моментов  $\vec{p}_m$ .



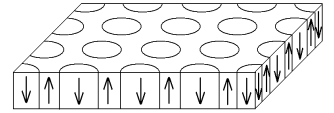
ферромагнетик,  $J_0 \gg 1$



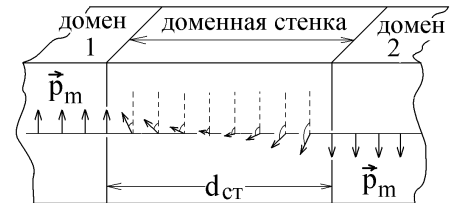
ферримагнетик,  $J_0 \gg 1$



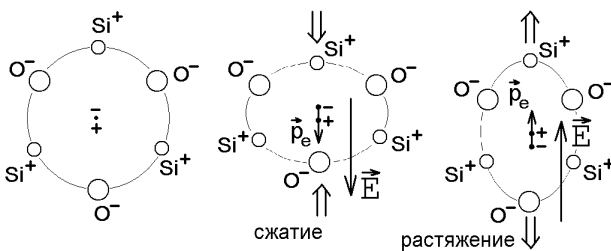
В тонких ферро- и ферромагнитных пленках, обычно используемых в качестве магнитного носителя информации, домены ориентируются перпендикулярно поверхности пленки, образуя структуру цилиндрических магнитных доменов (рисунков справа).



Кристаллическая решетка во всех доменах совершенно одинакова. Различны только ориентации собственных магнитных моментов ионов решетки. Убедиться в существовании всех перечисленных доменных структур можно, посыпав ферромагнетик тонким слоем мельчайших железных опилок и наблюдая в микроскоп разную ориентацию этих опилок в магнитных полях разных доменов (метод Биттера).



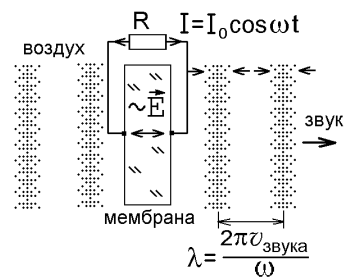
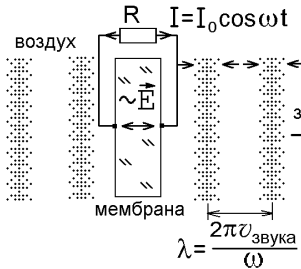
Доменные стенки имеют конечную толщину  $d_{ст} \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$  м, в сотни раз меньшую размера домена. В пределах доменной стенки ориентация магнитных моментов ионов не изменяется скачком, а плавно поворачивает на  $180^\circ$  в плоскости, параллельной границе домена, как показано на рисунке.



Аналогичная доменная структура образуется не только в магнетиках, но и в диэлектриках, в которых в отсутствии внешнего электрического поля может возникнуть поляризация среды, характеризующаяся отличным от нуля вектором поляризованности  $\vec{P}$ . Один из механизмов появления такой поляризации – пьезоэффект. Под воздействием механических сил кристаллическая решетка пьезоэлектрика (например – кварца  $\text{SiO}_2$ ) деформируется. Центры положительного и отрицательного зарядов его ионов смещаются и возникают дипольные электрические моменты  $\vec{p}_e$ ,

которые направлены в одну сторону (вдоль направления деформации) и создают электрическое поле  $\vec{E} = \vec{P}/\epsilon_0(\epsilon - 1)$ .

Пьезоэлектрики широко используют в качестве преобразователей акустических звуковых колебаний в электрические. Звуковая волна с частотой  $\omega$  (колебания плотности или давления воздуха) воздействует на мембрану из пьезоэлектрика, заставляя ее сжиматься или растягиваться с той же частотой  $\omega$ . Возникающее в пьезоэлектрике индуцированное электрическое поле  $\vec{E}$  приводит к появлению во внешней цепи переменного тока  $I = I_0 \cos \omega t$ .

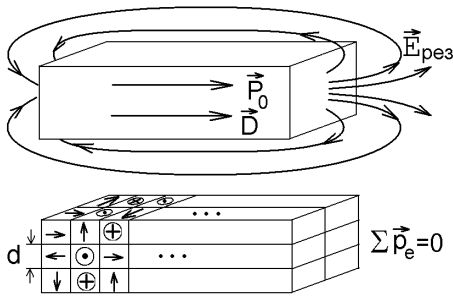


Наоборот, если в электрическую цепь включить внешний источник переменной ЭДС с частотой  $\omega$ , то созданное им в пьезоэлектрике поле  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  приводит к механическим деформациям – сжатию и растяжению решетки пьезоэлектрика с той же частотой  $\omega$ . Это – обратный пьезоэффект. Возникшие колебания мембраны передаются воздуху, т.е. происходит преобразование электрических колебаний в звуковые (акустические).

Существуют среды (электреты), в которых исчезновение возникшей поляризации происходит очень медленно за время  $\tau$ , достигающее 1000 лет! Изготовить электрет можно из большинства диэлектриков, если расплавить их и включить сильное электрическое поле. В жидком состоянии молекулы среды легко ориентируются по полю. Если, не выключая внешнее поле, охладить среду, и только после ее отвердевания убрать это поле, то молекулы "застынут" в ориентированном положении, сохраняя поляризованность  $\vec{P} \neq 0$  и создавая собственное электрическое поле. Используют электреты как твердые электролиты в аккумуляторах, или как источники постоянной ЭДС в разнообразных приборах и устройствах электронной памяти.

У некоторых пьезоэлектриков дипольные электрические моменты  $\vec{p}_e$  молекул отличны от нуля и направлены в одну сторону даже в отсутствии внешнего механического воздействия. Нарушается связь  $\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \vec{E}$ , обычно используемая в изотропных диэлектрических средах, но по-прежнему справедливо определение электрической индукции  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ .

Если величина подобной спонтанной (самопроизвольной) поляризованности  $\vec{P}_0 = \sum_{V=1} \vec{p}_e$  велика, то среда называется сегнетоэлектриком и обладает очень большим значением диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . При температуре, превышающей температуру Кюри  $T > T_K$  эффект спонтанной поляризации исчезает и сегнетоэлектрик превращается в обычный диэлектрик.

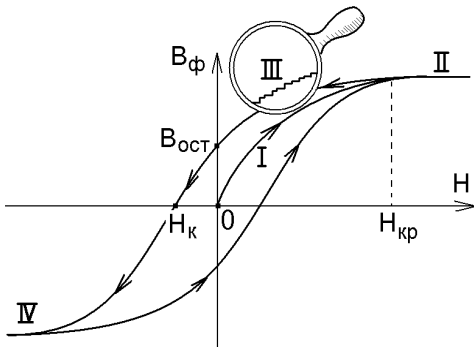
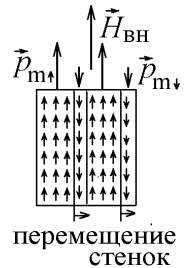


нами разнонаправленные поля компенсируют друг друга, и результирующее поле  $\vec{E}_{рез}$ , созданное всем сегнетоэлектриком, практически равно нулю.

## 6.8. Явление гистерезиса в ферромагнитных и сегнетоэлектрических средах.

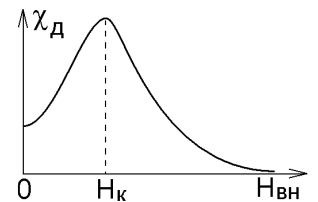
### Кривая намагничивания. Применение гистерезиса. Ферромагнитный зонд

Если на ферромагнетик подействовать внешним магнитным полем с напряженностью  $\vec{H}_{вн}$ , то домены, с магнитными моментами  $\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{m\text{ атомов}}$  приобретают энергию  $W_{дом} = -\mu_0 \vec{p}_m \vec{H}_{вн}$ , которая минимальна для тех доменов, направление магнитного момента  $\vec{p}_{m\uparrow}$  которых совпадает с направлением  $\vec{H}_{вн}$ . Эти домены энергетически выгодны и начинают расти за счет того, что магнитные моменты атомов из соседнего, энергетически невыгодного домена с магнитным моментом  $\vec{p}_{m\downarrow}$  начинают слоями менять направление ориентации, присоединяясь к энергетически выгодному домену. Происходит перемещение доменных стенок – границ между двумя доменами.

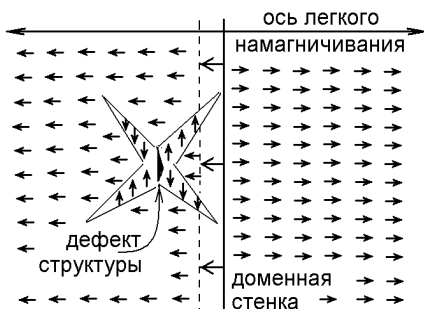


Петля магнитного гистерезиса

При этом **внутри** магнетика возникает магнитное поле с индукцией  $\vec{B}_ф$ , которое будет суперпозицией внешнего поля и поля, созданного упорядоченными магнитными моментами самого ферромагнетика. Поэтому между  $\vec{B}_ф$  и  $\vec{H}_{вн}$  нет линейной зависимости, и величина  $\vec{B}_ф$  растет с ростом  $\vec{H}_{вн}$  нелинейным образом (кривая I на рисунке). Постепенно магнитные моменты всех доменов поворачиваются вдоль поля  $\vec{H}_{вн}$  и ферромагнетик превращается в один домен, намагниченный вдоль поля  $\vec{H}$ . Говорят, что ферромагнетик намагничен до насыщения (участок II на рисунке). Величина дифференциальной магнитной восприимчивости  $\chi_d$  будет стремиться к нулю и среда в сильном магнитном поле ведет себя как парамагнетик. График зависимости  $\chi_d$  от напряженности внешнего поля  $\vec{H}_{вн}$  называют кривой Столетова.



Начнем уменьшать внешнее поле  $\vec{H}_{вн}$  (кривая III на рисунке). Вблизи поверхности намагниченного до насыщения однодоменного ферромагнетика при возникнут зародыши перемагничивания – крохотные домены, ориентированные в другом направлении. Они растут, т.е. происходит процесс изменения доменной структуры, обратный намагничиванию. Но кривые намагничивания I и размагничивания III ферромагнетика при увеличении или уменьшении внешнего поля  $H_{вн}$  не совпадают. Такое несимметричное поведение среды при усилении и ослаблении внешнего поля называется гистерезисом (в данном случае – магнитным гистерезисом).



Его причина – наличие дефектов в кристаллической решетке. Вокруг таких дефектов возникает структура из вторичных доменов кинжаловидной формы, намагниченных в противоположных направлениях чтобы уменьшить энергию магнитного поля. Для перемещения доменной стенки эта структура должна быть разрушена, что требует дополнительных затрат энергии. Поэтому доменные стенки в процессе перемагничивания задерживаются на дефектах структуры, перемещаются скачками от одного дефекта к другому. Это явление скачкообразного изменения индукции поля  $B_ф$  в ферромагнетике при плавном изменении внешнего магнитного поля  $H_{вн}$  называется эффектом Баркгаузена. Скачки изменения  $B_ф$  очень мелкие и сливаются в почти непрерывную кривую перемагничивания III.

Из-за задержки доменных стенок на дефектах структуры при выключении внешнего магнитного поля ( $H_{вн} = 0$ ) доменная структура остается преимущественно ориентированной в направлении прежнего намагничивания, и ферромагне-

тик или ферромагнетик сохраняет остаточную индукцию  $\vec{B}_{\text{ост}} = \mu_0 \langle \vec{J} \rangle$ . В этом – причина существования магнитного поля в постоянных магнитах.

Чтобы размагнитить ферромагнетик, надо приложить к нему внешнее магнитное поле обратного направления с напряженностью  $H_K$ , называемой коэрцитивной силой. Величина коэрцитивной силы не одинакова для разных сред и меняется от 0,1 А/м до  $10^3$  А/м в магнитно-мягких ферромагнитных средах и от  $10^3$  А/м до  $10^7$  А/м в магнитно-твердых средах.

Размагнитить ферромагнетик можно и другими способами:

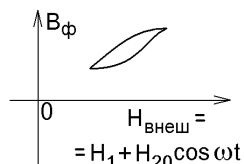
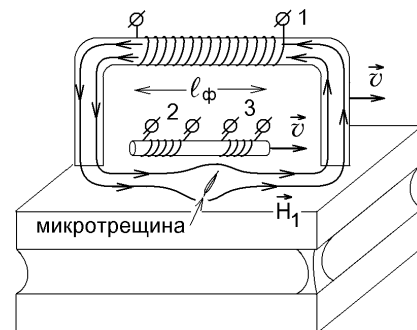
- 1) можно подействовать на него переменным высокочастотным электромагнитным полем, устраняющим остаточную намагниченность;
- 2) величина остаточной индукции поля в ферромагнетике зависит от его температуры  $T$  (рисунок слева). Можно нагреть ферромагнетик выше температуры Кюри  $T_K$ . Произойдет фазовый переход 2-го рода, и среда станет парамагнитной. Доменная структура исчезнет. При охлаждении ниже  $T_K$  образуется новая доменная структура, не имеющая остаточной намагниченности, если отсутствует внешнее магнитное поле.

Продолжая увеличивать напряженность  $H_{\text{вн}}$  внешнего поля в обратном направлении (кривая IV), ферромагнетик перемагничивают. Он будет намагничен до насыщения вдоль нового направления поля  $\vec{H}_{\text{вн}}$ . Замкнутая кривая зависимости индукции магнитного поля в ферромагнетике от напряженности внешнего магнитного поля называется петлей магнитного гистерезиса.

Площадь петли гистерезиса на графике зависимости  $B_\phi = B_\phi(H_{\text{вн}})$  равна работе, затрачиваемой на перемагничивание единицы объема ферро- или ферримагнетика.

Пример использования явления магнитного гистерезиса – измерение ничтожных изменений магнитного поля с помощью феррозонда. Измерительный узел феррозонда – это крошечный ферритовый сердечник с намотанными на нем намагничивающей 2 и контрольной 3 катушками.

Покажем, как работает феррозонд в практической задаче определения дефектов (трещин) как на поверхности, так и внутри рельсов железнодорожного пути. Специальный вагон-дефектоскоп движется вместе с поездом со скоростью  $v$ , а намагничивающее устройство между его колесами (обмотка 1 с током) создает в рельсе магнитное поле  $\vec{H}_1$ . Вблизи трещин это поле изменяется. Вместе с намагничивающим устройством со скоростью  $v$  движется и феррозонд, в катушке 2 которого все время пульсирует высокочастотный ток с частотой  $\omega$ . На сердечник феррозонда действует как внешнее поле  $\vec{H}_1$ , так и поле  $\vec{H}_2 = \vec{H}_{20} \cos \omega t$ , созданное током в катушке 2. В результате действия переменного поля полный цикл перемагничивания феррита не происходит, и петля гистерезиса оказывается несимметричной и смещенной в сторону. Колебания индукции магнитного поля  $B_\phi$  в феррите приводят к появлению индукционного тока в катушке 3 феррозонда. При прохождении феррозонда над трещиной поле  $H_1$  в рельсе изменяется, петля гистерезиса на рисунке смещается и деформируется, а в катушке 3 феррозонда появляется всплеск индукционного тока.

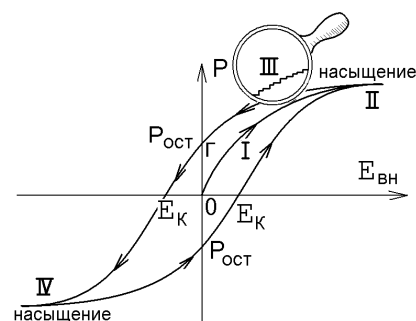


Феррозонды определяют смещение петли гистерезиса при изменении внешнего магнитного поля  $H_1$  и могут измерить изменение величины  $\Delta H_1 \sim 10^{-8}$  А/м, что важно, например, для измерения ничтожных колебаний геомагнитного поля Земли. Размер сердечника феррозонда  $l_\phi$  может быть уменьшен до долей миллиметра, что позволяет использовать феррозонды в микрохирургии для определения положения крошечных ферромагнитных инородных тел (железных опилок и т.п.).

Аналогично возникает явление электрического гистерезиса, когда на электрические домены сегнетоэлектрика действует внешнее электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}_{\text{вн}}$ . Если убрать внешнее поле после того, как сегнетоэлектрик был наэлектризован до насыщения, в нем сохранится остаточная поляризация  $P_{\text{ост}}$ , которую можно убрать или прилагая обратное электрическое поле с величиной коэрцитивной силы  $E_K$ , или действуя на сегнетоэлектрик высокочастотным электромагнитным полем, или нагревая его выше температуры Кюри  $T_K$ .

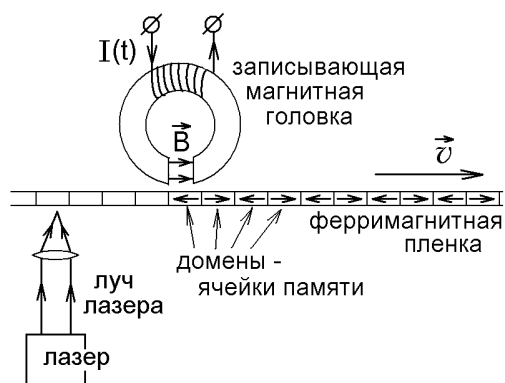
Явление гистерезиса, т.е. нелинейной зависимости поляризованности  $P$ , а вместе с ней и эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon(E_{\text{вн}}) = 1 + P/(\epsilon_0 E_{\text{вн}})$  от величины внешнего поля, позволяет, например, использовать сегнетоэлектрики для создания варикондов – конденсаторов, заполненных сегнетоэлектриком и меняющих свою емкость при изменении приложенного напряжения.

Возможно получение сегнетоэлектрика, прозрачного для волн оптического диапазона. Оптические устройства (линзы) из такого материала будут изменять фокусное расстояние или коэффициент увеличения не за счет перемещения линз (механический zoom в фотоаппаратах), а за счет изменения показателя преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$  под действием электрического поля, созданного батареей.

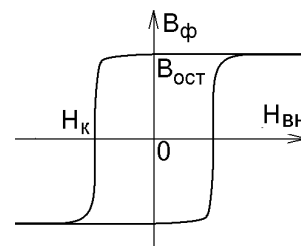


## 6.9. Принцип записи и считывания информации с помощью доменной структуры

Для некоторых магнитно-твердых сред (ферритов) петля гистерезиса практически прямоугольна. При выключении внешнего поля сохраняется большая остаточная намагниченность. Это позволяет использовать подобные материалы в качестве ячеек магнитной памяти в компьютерах.



Например, крохотный участок ферромагнитной пленки размером практически в один магнитный домен на поверхности магнито-оптического диска нагревается лучом лазера до температуры выше температуры Кюри и превращается в парамагнетик, т.е. теряет спонтанную намагниченность. Магнитная головка, в обмотке которой течет ток одного или другого направления, создает сильное магнитное поле  $B \sim 0,2$  Тл и намагничивает домен, образующийся после охлаждения пленки, в одну или в другую сторону. Так происходит стирание и запись информации на магнитный носитель.



Считывание информации происходит с помощью того же лазера, но работающего в другом режиме и не нагревающего пленку до температуры Кюри. Луч лазера – это плоскополяризованная световая волна. В магнитном поле  $\vec{B}_d$  домена плоскость поляризации светового вектора  $\vec{E}$  этой волны поворачивается на угол, величина которого пропорциональна величине  $B_d$  (эффект Фарадея). Домены, намагниченные в разных направлениях, поворачивают плоскость  $\vec{E}$  в разные стороны, что позволяет определить направление их остаточного намагничивания и считать записанную на ферромагнитной пленке информацию.

Надо учитывать, что сохранность записанной информации сильно зависит от чистоты магнетика. В реальных магнетиках всегда имеются дефекты кристаллической структуры (дислокации, атомы примеси). Их диффузия приводит к перестройке доменной структуры, т.е. к смещению доменных стенок спустя некоторое время, а следовательно может привести к потере бита информации, записанной на перестроившемся домене.

Легко подсчитать, что при размере ферромагнитного домена  $10^{-6}$  м на диске с радиусом 5 см можно записать не более  $\pi \cdot (0,05)^2 / (10^{-6})^2 = 7,8 \cdot 10^9$  бит информации.

Большие перспективы имеют сегнетоэлектрические ячейки памяти, которые могут иметь значительно меньший размер около 1 нм. Такая ячейка (сегнетоэлектрический домен) способна сохранить одно из двух значений остаточной поляризации (сигнал "0" или "1") и эквивалентна используемой сейчас ячейке "магнитной памяти" – магнитному домену. Но время его перемагничивания  $\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$  с велико, и запись информации на магнитных доменах производится лишь для ее длительного хранения на жестких дисках компьютеров. Чтобы перерабатывать эту информацию с частотой современных компьютеров, превышающей  $\nu = 1/\tau = 10^9$  Гц, используют оперативную память – микросхему из множества транзисторов на кремниевой подложке. Управляются транзисторы электрическим полем и представляют собой крошечные емкости-конденсаторы, очень быстро теряющие электрический заряд. Поэтому оперативную память приходится в процессе работы непрерывно "подкачивать" – восстанавливать заряды на транзисторах тысячи раз за секунду. А после окончания вычисления – переписывать полученную информацию в магнитную память жестких носителей.

Время переполаризации молекул сегнетоэлектрика  $\tau \leq 10^{-13}$  с намного меньше, а создавать электрическое поле в малых объемах проще, чем магнитное. Поэтому сегнетоэлектрические ячейки памяти можно использовать и для быстрого преобразования информации, и для ее последующего длительного хранения, т.е. совместить оперативную память с постоянной. При включении и выключении такому компьютеру не надо будет загружать программы в оперативную память и не надо будет записывать полученную информацию на жесткие диски, она будет запоминаться на них автоматически.

## 7. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

### 7.1. Природа ЭДС электромагнитной индукции в проводниках, движущихся

в магнитном поле. Принцип действия электромотора и генератора электрического тока

Свернем проводник в замкнутый контур и будем изменять магнитный поток через поверхность, ограниченную этим контуром. Тогда в замкнутом проводнике возникает квазистационарный ток (его линии должны быть замкнутыми), названный индукционным. Это явление называется электромагнитной индукцией.

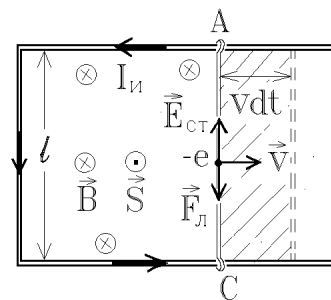
Магнитный поток  $\Phi_B = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  (или  $\Phi = BS \cos \alpha$  для плоского контура в однородном магнитном поле) можно изменять разными способами: изменяя величину индукции магнитного поля  $B$ , площадь контура  $S$  или угол  $\alpha$  между ними.

Пусть изменяется площадь  $S$  проводящего контура, находящегося в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Например, пусть однородное постоянное поле  $\vec{B}$  направлено перпендикулярно к плоскости рамки с током  $I$ , у которой одна сторона  $AC$  скользит со скоростью  $\vec{v}$ , как показано на следующем рисунке.

Вместе с проводником АС в магнитном поле движутся и все находящиеся в нем свободные электроны. На них действует магнитная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_M = -e[\vec{v}, \vec{B}]$ , заставляющая их двигаться по проводнику, т.е. создавать ток  $I_{\text{и}}$ . Эта сила неэлектростатической природы является **сторонней**. Благодаря ей в движущемся проводнике возникает э.д.с. электромагнитной индукции

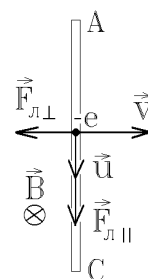
$$\varepsilon_{\text{и}} = \int_A^C \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \frac{\vec{F}_M \cdot d\vec{l}}{-e} = \int_A^C [\vec{v}, \vec{B}] \cdot d\vec{l} = vBl.$$

За время  $dt$  проводник сместится на расстояние  $vdt$ . Тогда  $lvdt = dS$  – это бесконечно малое приращение площади рамки, что даёт  $\varepsilon_{\text{и}} = BdS/dt$ . Но площадь задается вектором  $\vec{S}$ , направление которого определяют по правилу винта, вращая его по направлению возникающего индукционного тока  $I_{\text{и}}$ . Поэтому векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{S}$  направлены противоположно, и, внося постоянную величину  $\vec{B} = \text{const}$  под знак производной, находим  $\varepsilon_{\text{и}} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$ .



Причиной возникновения э.д.с. электромагнитной индукции в проводнике, движущемся в магнитном поле, является действие магнитной составляющей силы Лоренца на свободные электроны в проводнике.

При этом магнитная составляющая силы Лоренца перпендикулярна к скорости заряженных частиц и поэтому работу совершать не должна. Однако, в нашем случае  $\varepsilon_{\text{и}} \sim \int \vec{F}_M \cdot d\vec{l} \neq 0$ . Дело в том, что создавая ток  $I_{\text{и}} = eniS$ , свободные электроны, имеющие концентрацию  $n$ , движутся по проводнику поперечного сечения  $S$  со средней дрейфовой скоростью  $\vec{u}$ , и на них действует еще одна, перпендикулярная составляющая силы Лоренца  $\vec{F}_{\perp} = -e[\vec{u}, \vec{B}]$ , которая **препятствует перемещению проводника в магнитном поле** (см. рисунок). Поэтому работа этой силы за время  $dt$  при перемещении свободного электрона вместе с проводником отрицательна:  $dA_1 = -|\vec{F}_{\perp}| \cdot vdt = -euB \cdot vdt$  и компенсирует работу э.д.с. индукции по перемещению того же электрона вдоль проводника за то же время  $dt$ :  $dA_2 = +|\vec{F}_{\parallel}| \cdot udt = +evB \cdot udt$ . Суммарная работа силы Лоренца равна нулю!



**Выводы:** 1) при перемещении замкнутого проводника в магнитном поле возникает сила, препятствующая этому перемещению;  
2) индукционный ток возникает за счет **механической** работы, совершенной при перемещении проводника против такой силы. В итоге эта работа преобразуется в джоулево тепло, выделяемое током.

По той же причине, если проводник с поперечным размером  $l$  движется в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  перпендикулярно линиям индукции со скоростью  $v$ , то сила Лоренца  $\vec{F}_{\parallel}$  заставляет собираться свободные электроны вблизи одного из концов проводника, на другом конце образуется нескомпенсированный из-за оттока электронов положительный заряд. Т.е. на противоположных концах проводника возникнет разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 = |\varepsilon_{\text{и}}| = vBl$ .

Можно показать, что выражение  $\varepsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt$  **справедливо при любом перемещении контура в магнитном**

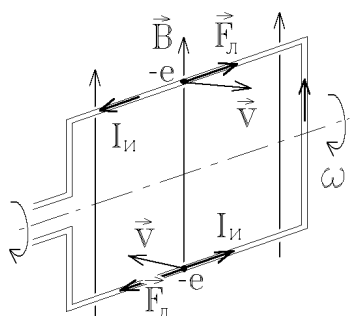
**поле**, например, при вращении рамки в магнитном поле; когда угол  $\alpha$  между линиями индукции  $\vec{B}$  и вектором площади  $\vec{S}$  изменяется с течением времени:  $\alpha = \omega t$ . Тогда  $\Phi = BS \cos \omega t$  и  $\varepsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt = BS\omega \sin \omega t$ .

Если рамку с сопротивлением  $R$  вращать в магнитном поле, то в ней появляется индукционный ток  $I_{\text{и}} = \frac{\varepsilon_{\text{и}}}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$ . Такая система будет **генератором переменного тока**. Наоборот, если рамку подключить к внешнему источнику тока, то момент сил Ампера начнет поворачивать ее в магнитном поле. Такая система может работать как **электродвигатель** или **электромотор**. Однако действующий на рамку момент сил  $\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}] = [I_{\text{и}}\vec{S}, \vec{B}]$  меняет направление при повороте вектора площади

рамки  $\vec{S}$  на  $180^\circ$ . Поэтому в постоянном магнитном поле  $\vec{B} = \text{const}$  этот момент сил будет вращать рамку то в одну, то в другую сторону, и она будет совершать колебания вокруг положения равновесия.

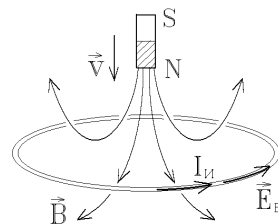
Чтобы рамка все время вращалась в одну сторону, надо одновременно с её поворотом менять направление магнитного поля  $\vec{B}$ , например, по гармоническому закону  $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$ , где частота  $\omega$  совпадает с частотой собственных колебаний рамки.

**Замечание:** работа по повороту рамки происходит не за счет энергии внешнего магнитного поля, а за счет дополнительной работы внешнего источника тока против возникающей э.д.с. электромагнитной индукции.



## 7.2. Вихревое электрическое поле и причина его появления

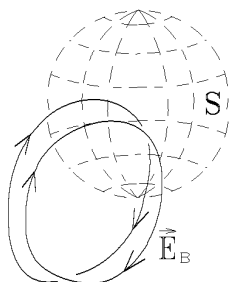
Фарадей экспериментально доказал, что тот же закон  $\epsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt$  справедлив в случае, когда контур **не движется** в магнитном поле, а изменяется само магнитное поле  $\vec{B}$ . Пусть, например, постоянный магнит приближается к покоящемуся проводящему контуру (суммарные силы Лоренца, действующие на хаотически движущиеся в проводнике электроны, равны нулю). Начавшееся упорядоченное движение свободных электронов под действием э.д.с.  $\epsilon_{\text{и}}$  можно объяснить только появлением нового электрического поля  $\vec{E}_{\text{в}}$ , силовые линии которого направлены вдоль контура, т.е. **замкнуты**, аналогично линиям индукции магнитного поля. Это поле  $\vec{E}_{\text{в}}$  **неэлектростатической природы** называется **вихревым**.



Циркуляция напряженности  $\vec{E}_{\text{в}}$  по замкнутому контуру создает э.д.с. индукции  $\epsilon_{\text{и}} = \oint \vec{E}_{\text{в}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . Применяя

теорему Стокса,  $\oint \vec{E}_{\text{в}} \cdot d\vec{l} = \int \text{rot } \vec{E}_{\text{в}} \cdot d\vec{S}$ , получаем уравнение  $\text{rot } \vec{E}_{\text{в}} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , смысл которого заключается в том, что

вихревое электрическое поле  $\vec{E}_{\text{в}}$  порождается не электрическими зарядами, а изменяющимся со временем магнитным полем.



С другой стороны, **поток вектора  $\vec{E}_{\text{в}}$  по любой замкнутой поверхности  $S$  равен нулю**:  $\oint \vec{E}_{\text{в}} \cdot d\vec{S} = 0$  или  $\text{div } \vec{E}_{\text{в}} = 0$  (действительно, сколько замкнутых линий  $\vec{E}_{\text{в}}$  входит внутрь этой поверхности, столько же и выходит из нее).

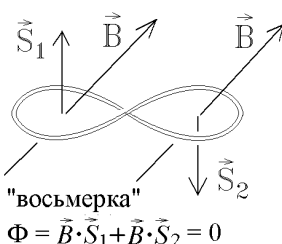
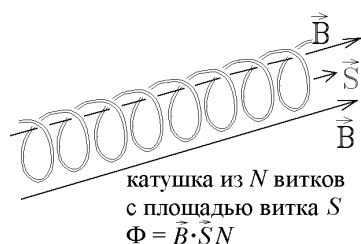
Свободная заряженная частица начинает двигаться в вихревом электрическом поле вдоль замкнутых линий  $\vec{E}_{\text{в}}$ , все время ускоряясь под действием силы  $\vec{F}_э = q\vec{E}_{\text{в}}$ . Это причина ускорения заряженных элементарных частиц в ускорителе – **бетатроне**.

## 7.3. Закон Фарадея и правило Ленца

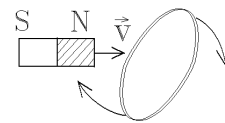
Суммируя приведенные результаты, можно сформулировать **закон Фарадея**:

при изменении магнитного потока через поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый проводящий контур, в контуре возникает э.д.с. электромагнитной индукции  $\epsilon_{\text{и}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt}$ . Эта э.д.с. возникает за счет сил Лоренца, если проводник движется в магнитном поле, пересекая линии  $\vec{B}$ , или за счет возникновения вихревого электрического поля, если со временем меняется само магнитное поле  $\vec{B}$ .

Закон Фарадея  $\epsilon_{\text{и}} = -d\Phi/dt$  справедлив и тогда, когда действуют обе причины возникновения  $\epsilon_{\text{и}}$ , т.е. и проводник движется в магнитном поле, и само это поле  $\vec{B}$  меняется со временем.



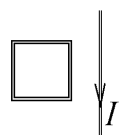
Заметим также, что замкнутый проводник может образовывать **несколько витков**. Поэтому в законе Фарадея надо учитывать полный магнитный поток  $\Phi = \Phi_1 N$ , где  $\Phi_1$  – магнитный поток через один виток, а  $N$  – число витков



Вспоминая теперь, что возникающие силы противодействуют движению проводника в магнитном поле. Можно сформулировать общее правило – **правило Ленца**:

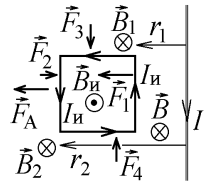
э.д.с. электромагнитной индукции создает в замкнутом проводнике индукционный ток, текущий в таком направлении, что порождаемый этим током магнитный поток стремится скомпенсировать изменение первоначального магнитного потока. Иначе говоря, э.д.с. индукции противодействует изменению магнитного потока, являющегося причиной ее возникновения.

**Пример:** прямолинейный ток  $I$  параллелен стороне квадратного проводящего контура, сделанного из тонкой проволоки. Величину тока  $I$  медленно увеличивают. Индукция  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  магнитного поля, созданного этим током, также увеличивается и по контуру против часовой стрелки потечет индукционный ток



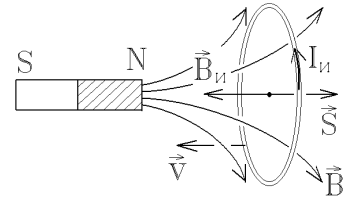


$I_{\text{и}}$ , создающий магнитное поле  $B_{\text{и}}$ , направленное в противоположную сторону и препятствующее изменению магнитного потока  $\Phi$  через площадь контура. Направления сил Ампера  $\vec{F}_i = I_{\text{и}} [\vec{l}, \vec{B}]$ , действующих на каждую из сторон квадрата, также их величины изображены стрелками на следующем рисунке. Сумма этих сил  $\vec{F}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  направлена налево, отталкивая контур от провода с током  $I$ . Это соответствует правилу Ленца: чтобы скомпенсировать увеличение магнитного потока  $\Phi = \int B dS$ , контур стремится отодвинуться на большее расстояние  $r$ , чтобы величина индукции  $B = \mu_0 I / (2\pi r)$  не менялась.



#### 7.4. Проводник и постоянный магнит в переменном магнитном поле. Индукционные токи (токи Фуко)

Чтобы лучше понять действие правила Ленца, рассмотрим в качестве примера проводящее кольцо, которое перемещают в область более сильного магнитного поля. Поток  $\Phi = \int \vec{B}_{\text{магнита}} d\vec{S}$  растет. Поэтому индукционный ток  $I_{\text{и}}$  потечет в таком направлении, чтобы созданный им магнитный поток  $\Phi_{\text{и}} = \int \vec{B}_{\text{и}} d\vec{S}$  был отрицателен и компенсировал увеличение потока  $\Phi$ .



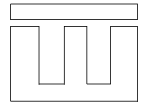
То же самое произойдет при приближении к магниту куска металла (или при приближении магнита к куску металла). С одной стороны, в металле возникают токи намагничивания, которые делают металл магнитом, притягивающимся к постоянному магниту (ферро- или парамагнетизм). Но с другой стороны, каждый замкнутый контур внутри металла является проводящим контуром, и в нем появится индукционный ток  $I_{\text{и}}$ . Сила Ампера, действующая на этот ток со стороны магнитного поля магнита, будет **отталкивать** его от магнита.

Такие индукционные токи, возникающие в проводнике при изменении магнитного поля, называются **токами Фуко**. Они **препятствуют** внесению проводника в магнитное поле. Но токи Фуко - это токи проводимости. В отличие от токов намагничивания они быстро затухают из-за сопротивления проводника, а их энергия переходит в джоулево тепло  $Q = \int I_{\text{и}}^2 R dt$ .

**Работа, производимая против сил Ампера при внесении проводника в магнитное поле, идет на его нагревание.**

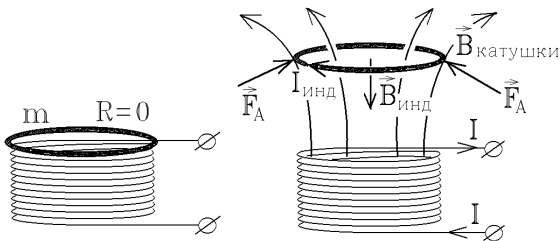
Это явление используется, например, для плавления металлолома конверторным методом (в быстропеременном магнитном поле). Следует иметь в виду, что вблизи мощных установок с быстропеременным магнитным полем могут сильно нагреваться металлические кольца на пальцах и, что еще хуже, металлические зубы.)

Для предотвращения индукционного нагрева сердечники первых трансформаторов делали из тонких пластинок, чтобы разорвать замкнутый контур в поперечном к пластинкам направлении и устранить токи Фуко (сейчас их изготавливают из феррита, не проводящего ток).



Индукционный ток в тонком замкнутом проводнике с сопротивлением  $R$  выражается, как  $I_{\text{и}} = \frac{\epsilon_{\text{и}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$ .

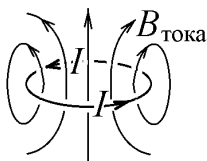
**В сверхпроводящем состоянии** (при низких температурах  $T \rightarrow 0$ )  $R = 0$  и так как ток  $I_{\text{и}}$  не может стать бесконечным, то  $d\Phi/dt = 0$  или  $\Phi = \text{const}$ . Как бы ни двигать, как бы ни деформировать в магнитном поле контур из сверхпроводника, магнитный поток через него не изменяется! Иначе говоря, незатухающий индукционный ток **в сверхпроводнике** всегда имеет такую величину, чтобы полностью скомпенсировать изменение потока внешнего магнитного поля.



*Пример:* кольцо из сверхпроводника весом  $mg$  лежит на отключенной катушке электромагнита. Электромагнит включают. Но созданное им поле должно компенсироваться полем возникающего индукционного тока (снова  $\Phi = 0$ ). Появляются силы Ампера  $\vec{F}_A = \oint I_{\text{и}} [d\vec{l}, \vec{B}_{\text{катушки}}]$ , которые в неоднородном магнитном поле катушки выталкивают сверхпроводящий виток с током  $I_{\text{и}}$  вверх. Когда  $F_A \geq mg$  виток повиснет в воздухе над электромагнитом.

Такая идея "подвески" в неоднородном магнитном поле осуществляется для транспорта на магнитной "подушке". Вагон, в проводящем днище которого циркулируют возникающие индукционные токи, приподнимается на высоту нескольких миллиметров над электромагнитом. Отсутствие силы трения позволяет обеспечить огромную скорость такого транспорта.

## 7.5. Коэффициент индуктивности. Индуктивность соленоида

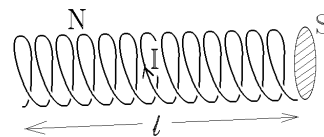


Протекая по замкнутому проводнику, ток  $I$  создает магнитное поле  $\vec{B}_{\text{тока}}$  и магнитный поток  $\Phi = \int \vec{B}_{\text{тока}} d\vec{S}$ , пронизывающий площадь, охватываемую проводником. А так как  $B_{\text{тока}} \sim I$ , то величина такого магнитного потока пропорциональна величине тока в проводнике:

$$\Phi = LI.$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется индуктивностью проводника. В системе СИ индуктивность измеряется в генри [Гн]. 1 Гн - это индуктивность такого контура, для которого магнитный поток равен 1 Вб при протекающем по контуру токе 1 А.

Вычислим, например, индуктивность **очень длинного** соленоида с площадью каждого витка  $S$ , в котором на длину  $l$  приходится  $N$  витков. Если по соленоиду, заполненному магнетиком с проницаемостью  $\mu$ , течет ток  $I$ , то, пренебрегая ослаблением поля на краях соленоида, получаем внутри него индукцию магнитного поля  $B = \mu_0 \mu N I / l$ .

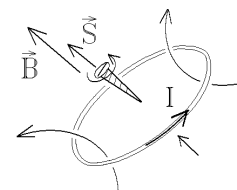


Тогда полный магнитный поток через все  $N$  витков будет равен  $\Phi = BSN = \mu_0 \mu N^2 SI / l = LI$ . Отсюда индуктивность со-

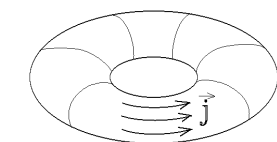
леноида

$$L_{\text{соленоида}} = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S.$$

Так как магнитный поток  $\Phi$  создается самим током  $I$ , то по правилу винта векторы  $\vec{B}_{\text{тока}}$  и  $\vec{S}$  направлены в одну сторону и  $\Phi > 0$ . Поэтому индуктивность проводника  $L$  всегда положительна.

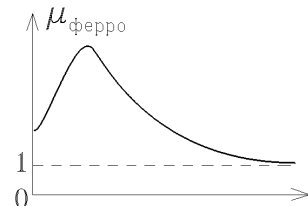


Заметим также, что формула  $\Phi = LI$  **применима только для тонких проводников**, в которых проводящий контур практически совпадает с осью проводника. Для толстых проводников (как показано на левом рисунке) выбор контура в определении  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{S}$  (выбор площади, пронизываемой линиями



$\vec{B}$ ) неоднозначен, поэтому для толстых проводников формулу  $\Phi = LI$  применять нельзя.

Индуктивность проводников  $L$  постоянна в немагнитных, диамагнитных и парамагнитных средах и **зависит от величины тока  $I$  в присутствии ферромагнетика** (в котором от тока зависит проницаемость  $\mu$ ). В очень сильных полях ферромагнетик ведет себя как парамагнетик, так как  $\mu \rightarrow 1$ . По такому же закону будет меняться коэффициент  $L$ .



## 7.6. Плотность энергии магнитного поля

При изменении магнитного потока  $\Phi = LI$  через площадь проводящего контура в нем должна возникнуть э.д.с. электромагнитной индукции. Вспоминая формулу для работы по перемещению заряда в электрическом поле и определение тока, находим, что работа по перемещению заряда  $dq$  против этой э.д.с. равна

$$\delta A = dq \cdot |\varphi_1 - \varphi_2| = dq \cdot |\varepsilon_{\text{и}}| = dq \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot d(LI) = I \cdot d(LI) = dW.$$

(эта работа идет на изменение энергии  $W$  создаваемого в контуре тока). Пусть ток возрастает от 0 до  $I$ , тогда в случае от-

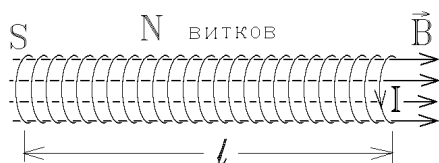
сутствия ферромагнетика  $L = \text{const}$  и

$$W_{\text{тока}} = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

(сравните с формулой для энергии заряженного проводника (конденсатора) с емкостью  $C$ :  $W_{\text{заряда}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}$ ).

Полученная энергия  $W_{\text{тока}}$  проводника с током является одновременно энергией магнитного поля, созданного током  $I$ , текущим по проводнику с индуктивностью  $L$ . Если исчезнет ток, то исчезнет и созданное им магнитное поле.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид с током  $I$ . Постоянное магнитное поле с индукцией  $B = \mu_0 \mu N I / l$  имеется только внутри соленоида, а энергия тока, текущего по участку соленоида длины  $l$ , равна



$$W_{\text{тока}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} SI^2 = \frac{1}{2 \mu_0 \mu} \left( \mu_0 \mu \frac{N}{l} \right)^2 l S = \frac{B^2}{2 \mu_0 \mu} V = W_{\text{магн поля}},$$

где  $V$  – объем участка поля внутри соленоида. Эта энергия будет одновременно энергией магнитного поля, созданного таким током. Отсюда, используя связь  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , получаем выражение для плотности энергии магнитного поля, т.е. для

энергии единицы объема:

$$w_{\text{магн}} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{\mu_0\mu\vec{H}^2}{2}.$$

(сравните с формулой для плотности энергии электрического поля  $w_{\text{элек}} = \frac{\vec{D}^2}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2} = \frac{\epsilon_0\epsilon\vec{E}^2}{2}$ ).

Энергию магнитного поля, заключенного в объеме  $V$ , определяют по формуле:  $W_{\text{магн}} = \int_V w_{\text{магн}} dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0\mu} dV$

(аналогично вычисляется энергия электрического поля  $W_{\text{элек}} = \int_V w_{\text{элек}} dV = \int_V \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} dV$ ). Но эта формула справедлива,

строго говоря, только для неферромагнитной среды. Действительно, в присутствии ферромагнетика, помимо нагревания проводника с током, будут нагреваться и участки окружающей ферромагнитной среды, в которых возникнут заметные токи намагничивания Фуко. На это пойдет часть работы источника тока. Поэтому энергия магнитного поля в ферромагнитной среде, полученная при той же работе сторонней э.д.с., окажется меньше энергии поля в неферромагнитной среде.

### 7.7. Явление самоиндукции и ЭДС самоиндукции

Как было сказано, при изменении тока  $I$  в проводнике меняется вызываемый им магнитный поток  $\Phi = LI$ . Поэтому, согласно закону Фарадея, в проводнике должна появиться э.д.с. индукции, называемая э.д.с. самоиндукции

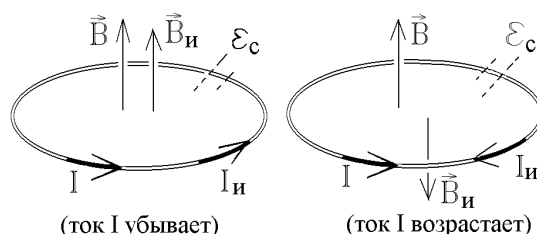
$$\epsilon_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt}$$

(причиной её появления служит не внешняя причина, а изменение тока в самом проводнике. Если **ферромагнетик отсутствует**, то  $L = \text{const}$ , и

$$\epsilon_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Э.д.с. самоиндукции  $\epsilon_c$  создает дополнительный индукционный ток  $I_{\text{и}}$ , направленный так, чтобы уменьшить первоначальное изменение тока  $I$  (см. рисунок). Изменяясь, ток  $I$  порождает э.д.с. самоиндукции, препятствующую этому изменению.

По этой причине работающие приборы чаще загораются при выключении – по цепи ещё течет большой ток, который только начинает уменьшаться, а возникающая при этом огромная э.д.с. самоиндукции может заметно усилить его, создавая вольтову дугу между размыкаемыми контактами.



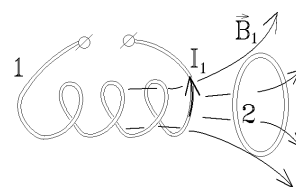
### 7.8. Явление взаимной индукции. Коэффициенты взаимной индуктивности и принцип действия трансформатора. Электромагнитная защита

Магнитный поток, вызывающий появление э.д.с. электромагнитной индукции, вообще говоря, может создаваться магнитным полем какого-то **другого тока**, текущего в другом замкнутом проводнике. Поэтому следует говорить **о системе двух (нескольких) замкнутых проводников (контурах с токами)**.

Например, ток  $I_1$  в первом проводнике создает магнитный поток  $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2$  через второй проводящий контур. Ясно, что с увеличением тока  $I_1$  будет пропорционально увеличиваться поток  $\Phi_2$ :

$$\Phi_2 = L_{21} I_1.$$

Коэффициент пропорциональности  $L_{21}$  называется взаимной индуктивностью (также измеряется в генри). Наоборот, если ток  $I_2$  потечет по проводнику 2, то он создаст через контур 1 магнитный поток  $\Phi_1 = L_{12} I_2$ .



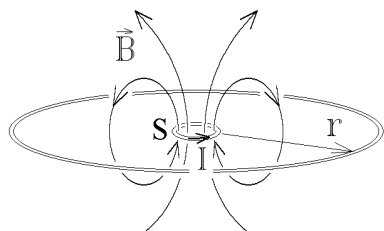
Появляющаяся в одном из контуров э.д.с. индукции, вызванная изменением тока в другом контуре называется

э.д.с. взаимной индукции:  $\epsilon_{вз1} = -\frac{d(L_{12}I_2)}{dt}$  или  $\epsilon_{вз2} = -\frac{d(L_{21}I_1)}{dt}$ .

Имеется замечательная теорема взаимности: в отсутствии ферромагнетика коэффициенты взаимной индуктивности одинаковы:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Теорема взаимности означает, что при пропускании по контурам одинаковых по величине токов  $I_1 = I_2$  они создают в “чужих” контурах одинаковые магнитные потоки  $\Phi_1 = \Phi_2$ . Эта теорема позволяет вычислить коэффициенты взаимной индуктивности. Например, если в центре кругового витка радиуса  $r$  в той же плоскости установлена крохотная рамка с площадью  $S$  и током  $I$ . Пустим тот же ток  $I$  по внешнему витку. В плоскости рамки он создает тот же магнитный поток  $\Phi = \frac{\mu_0 I}{2r} \cdot S$ . Взаимная



индуктивность этих проводников  $L_{12} = \frac{\mu_0 S}{2r}$ . Но в присутствии ферромагнетика  $L_{12} \neq L_{21}$ !

Рассмотрим трансформатор с ферромагнитным сердечником. Практически все линии индукции магнитного поля проходят внутри сердечника. При включении тока  $I_1$  в первой обмотке (катушке) имеем  $B_1 = \mu(I_1)\mu_0 I_1 N_1 / l$ . Во второй обмотке с тем же сечением  $S$  возникает магнитный поток

$$\Phi_2 = B_1 N_2 S = \mu(I_1)\mu_0 N_1 N_2 I_1 S / l = L_{21} I_1.$$

Наоборот, при включении тока  $I_2$  во второй обмотке имеем  $B_2 = \mu(I_2)\mu_0 I_2 N_2 / l$  и

$$\Phi_1 = B_2 N_1 S = \mu(I_2)\mu_0 N_2 N_1 I_2 S / l = L_{12} I_2.$$

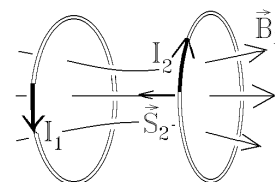
Отсюда видно, что  $L_{12} = \mu(I_2)\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S \neq L_{21} = \mu(I_1)\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$  по причине зависимости магнитной проницаемости  $\mu$  ферромагнетика от величины тока  $I$ . Взаимная индуктивность также начинает зависеть от тока. Но в отсутствие ферромагнетика коэффициенты взаимной индуктивности постоянны.

Трансформаторы используют для увеличения или уменьшения амплитуды напряжения, подаваемого на обмотку "1" с сопротивлением  $R_1$ . Пусть оно равно  $U_1 = R_1 I_{01} \cos \omega t$ . Тогда в обмотке "2" с сопротивлением  $R_2$  создается падение напряжения, равное э.д.с. взаимной индукции

$$U_2 = \varepsilon_2 = -\frac{d(L_{21} I_1)}{dt} = -\mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S \frac{d}{dt} \left( \frac{U_{01}}{R_1} \cos \omega t \right) = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l R_1} S \omega U_{01} \sin \omega t = U_{02} \sin \omega t.$$

Меняя число витков  $N_2$  второй обмотки, можно добиться или увеличения амплитуды напряжения на выходе  $U_{02}/U_{01} > 1$  или уменьшения такой амплитуды.

*Замечание:* коэффициенты взаимной индуктивности  $L_{nm}$  в отличие от коэффициентов индуктивности  $L$  не обязательно положительны. Если токи  $I_1$  и  $I_2$  протекают по контурам в противоположных направлениях, то в соответствии с выбранным правилом определения направления вектора  $\vec{S}$  (правило винта) получим  $\Phi_2 = \int_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 < 0$ , откуда  $L_{21} < 0$ .



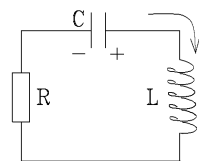
Вблизи любого устройства или системы, имеющей замкнутые проводящие контуры (металлические детали, например) всегда могут находиться источники переменного магнитного поля (цепи переменного тока в других работающих электрических или электронных устройствах, переменные электромагнитные поля или электромагнитные волны в окружающем пространстве и т.п.). Поэтому необходимо постоянно предпринимать меры электромагнитной защиты для предотвращения появления индукционных токов, способных заметно повлиять как на работу любого электронного устройства, так и на самочувствие и здоровье человека. В первую очередь это экранировка внешних электромагнитных полей, устранение накопления статического электричества, обеспечение безопасного расстояния до источника электромагнитного излучения (например, оставленный на ночь вблизи головы спящего человека включенный электронный будильник за несколько лет может серьезно повлиять на состояние его мозговой деятельности).

## 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 8.1. Электрический колебательный контур. Собственные электрические колебания в контурах (незатухающие и затухающие), их характеристики

Электрический колебательный контур – это замкнутая электрическая цепь, обладающая некоторой емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ .

Если конденсатор емкости  $C$  первоначально был заряжен, то он начинает разряжаться, и в цепи возникает ток  $I = dq/dt$ , вызывающий появление э.д.с. самоиндукции  $\varepsilon_c = -L dl/dt$ , препятствующей изменению этого тока. В момент, когда конденсатор полностью разрядится, в цепи протекает ток  $I$ . Э.д.с. самоиндукции препятствует его мгновенному исчезновению, и он, постепенно затухая, начинает перезаряжать конденсатор.

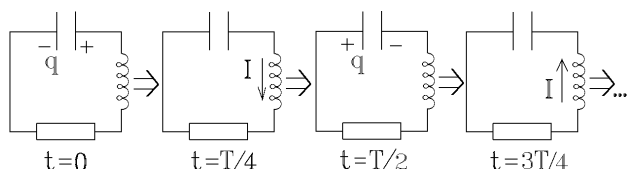


Затем конденсатор снова разряжается, ток течет в противоположном направлении и т.п.

**Электрические колебания происходят за счет превращения электрической энергии заряженного конденсатора в магнитную энергию тока в цепи и наоборот.**

Если к электрическому контуру не подключены никакие внешние источники переменной э.д.с., то колебания называются собственными. Изменяться по периодическому закону будет величина заряда на конденсаторе или величины силы тока и напряжения в цепи.

Получим уравнение этих колебаний. Ток в контуре будет квазистационарным (меняющимся достаточно медленно, чтобы можно было применять законы постоянного тока), если  $l/c \ll T$ , где  $l$  – линейный размер цепи,  $c$  – скорость света,  $T$  – период электрических колебаний. Обычно это условие выполняется и для такого тока, применимо правило



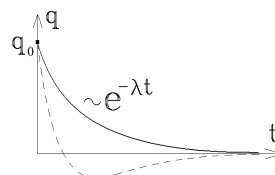
Кирхгофа  $IR + U_C = \varepsilon_c$ . Так как падение напряжения на конденсаторе  $U_C = \frac{q}{C}$ , а сила тока  $I = \frac{dq}{dt}$ , то

$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ . Отсюда получаем  $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$  или  $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$  – это уравнение собственных затухающих колебаний, где коэффициент затухания колебаний  $\boxed{\beta = R/2L}$ , а квадрат циклической частоты незатухающих колебаний  $\boxed{\omega_0^2 = 1/LC}$ .

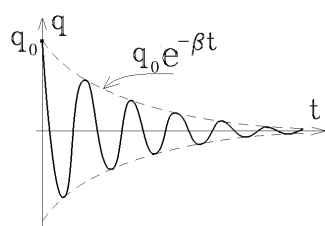
Решение этого уравнения ищем в виде  $q = Ae^{\lambda t}$ , где  $A, \lambda$  – некоторые постоянные. Подставляя это выражение в уравнение колебаний, получаем характеристическое уравнение  $A(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$ , имеющее корни  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

При  $\beta^2 \geq \omega_0^2$  или  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$  колебания в контуре отсутствуют – конденсатор разряжается аperiодически, как показано на рисунке.

Собственные затухающие колебания не возникают, если сопротивление контура  $R$  больше некоторого критического сопротивления  $\boxed{R_{кр} = 2\sqrt{L/C}}$ , т.е. при  $R \geq R_{кр}$ .



Если  $\beta^2 < \omega_0^2$ , вводим обозначение  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ . Тогда  $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$ , и искомое решение уравнения затухающих колебаний является суммой двух решений:  $q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t})$ . Это решение должно быть вещественным:  $q = q^* = e^{-\beta t} (A_1^* e^{-i\omega t} + A_2^* e^{i\omega t})$ , т.е.  $A_2 = A_1^*$ . Введем вместо постоянных  $A_1$  и  $A_2$  новые вещественные постоянные  $q_0$  и  $\varphi$ :  $A_1 = \frac{q_0}{2} e^{i\varphi}$ ,  $A_2 = A_1^* = \frac{q_0}{2} e^{-i\varphi}$ . Тогда  $q = e^{-\beta t} \frac{q_0}{2} (e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)})$ .



Но  $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2 \cos \alpha$ , следовательно

$$\boxed{q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}.$$

Это – решение уравнения собственных затухающих колебаний. Как видно, собственные электрические колебания в контуре происходят с циклической частотой собственных затухающих колебаний

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

Аргумент  $\omega t + \varphi$  гармонической функции, зависящей от времени  $t$ , называется фазой колебаний, а значение фазы при  $t = 0$ , т.е. слагаемое  $\varphi$  – начальной фазой.

Множитель, стоящий при данной гармонической функции ( $\cos$  или  $\sin$ ) или максимальное возможное в данный момент времени значение изменяющейся по гармоническому закону функции является амплитудой колебаний. Как видно, **амплитуда собственных затухающих колебаний экспоненциально уменьшается со временем**:  $\boxed{q_{\max}(t) = q_0 e^{-\beta t}}$ .

Время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, а энергия конденсатора – в  $e^2$  раз называется временем релаксации (временем затухания) электрических колебаний  $\boxed{\tau = 1/\beta}$ . Заметим, что частота  $\omega$  собственных затухающих колебаний уменьшается, а период

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

растет с ростом омического сопротивления  $R$  и становится равным бесконечности при  $R = R_{кр}$ .

Причиной затухания колебаний в электрическом колебательном контуре является превращение части энергии тока в джоулево тепло на омическом сопротивлении  $R$ :  $dQ = I^2 R dt$  и рассеянии этого тепла в окружающую среду.

Если сопротивление контура  $R$  пренебрежимо мало или отсутствует ( $R=0$ ), то колебания в контуре будут незатухающими:  $q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$  с постоянной амплитудой  $q_0 = \text{const}$ , с циклической частотой  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  (это – собственная частота незатухающих колебаний) и с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  (формула Томсона).

Важной характеристикой, характеризующей затухающие колебания является логарифмический декремент затухания колебаний  $\theta$ . Это логарифм отношения амплитуды колебаний в момент времени  $t$  к амплитуде через период. Из

полученных формул следует, что  $\theta = \ln \left( \frac{q_0 \exp(-\beta t)}{q_0 \exp(-\beta(t+T))} \right) = \ln \left( \frac{1}{\exp(-\beta T)} \right)$  или  $\boxed{\theta = \beta T}$ .

Чем больше величина  $\theta$ , тем быстрее затухают колебания.

Вычислим ток в электрическом колебательном контуре:

$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \frac{d}{dt} (e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)) = -\beta q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$ . Разделим и умножим это выражение на

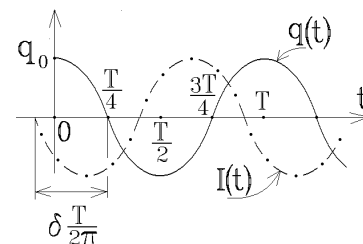
$\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$  и обозначим  $-\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \cos \delta$ ;  $-\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \sin \delta$ . Тогда

$I = q_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} e^{-\beta t} [\cos \delta \cos(\omega t + \varphi) - \sin \delta \sin(\omega t + \varphi)]$ . Но  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$ . Следовательно, ток в

контуре изменяется по закону  $I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \delta)$ , где  $I_0 = q_0 \omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$ .

Затухающие колебания тока происходят с той же частотой, что и колебания заряда  $q$  на конденсаторе (или напряжения  $U_C$  конденсатора), но **опережают их по фазе** на  $\delta = \arctg(-\omega/\beta)$ , а так как  $\cos \delta \leq 0$  и  $\sin \delta > 0$ , то  $\pi/2 \leq \delta < \pi$ .

Когда конденсатор разрядится полностью ( $q = 0$ ,  $\omega t + \varphi = \pi/2$ ), ток в контуре  $I = I_0 e^{-\beta t} \cos(\pi/2 + \delta)$  еще не максимален, как показано на рисунке. И наоборот, когда конденсатор заряжается до амплитудного значения и энергия электрического поля в нем максимальна, в цепи уже течет разряжающий конденсатор ток, и часть энергии системы уже перешла в энергию магнитного поля. Только в том случае, когда электрический контур не имеет омического сопротивления ( $R = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\sin \delta = 1$ ,  $\cos \delta = 0$  и  $\delta = \pi/2$ ), колебания тока в контуре опережают колебания напряжения на конденсаторе на четверть периода ( $\delta = \pi/2$ ), и ток максимален в тот момент, когда конденсатор разряжен. В этом случае энергия электрического поля заряженного конденсатора полностью преобразуется в энергию



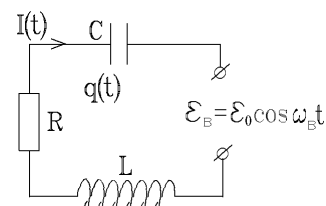
магнитного поля и наоборот:  $W_{\text{элек}} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2 L}{2CL} = q_0^2 \omega_0^2 \frac{L}{2} = \frac{LI_0^2}{2} = W_{\text{магн}}$ .

## 8.2. Вынужденные электрические колебания

Подключим к электрическому колебательному контуру источник внешней э.д.с., изменяющейся по гармоническому закону с частотой  $\omega_b$  и имеющей амплитуду  $\epsilon_0$ . Для этого контура запишем правило Кирхгофа:  $RI + U_C = \epsilon_b + \epsilon_c$ .

Подставляя в это выражение  $U_C = \frac{q}{C}$ ;  $I = \frac{dq}{dt}$ ;  $\epsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}$ , получим урав-

нение вынужденных гармонических колебаний  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \epsilon_0 \cos \omega_b t$  или  $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\epsilon_0}{L} \cos \omega_b t$ .



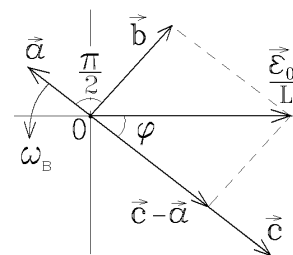
Решение неоднородного дифференциального уравнения с ненулевой правой частью складывается из общего решения однородного уравнения  $\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$  и любого частного решения неоднородного уравнения.

Но возникающие собственные затухающие колебания заряда на обкладках конденсатора  $q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi)$  (общее решение однородного уравнения) **быстро затухают**, и в контуре устанавливаются **вынужденные колебания, происходящие с постоянной амплитудой и частотой  $\omega_b$  внешней э.д.с.**

Ищем это частное решение для вынужденных колебаний в виде  $q = A \cos(\omega_b t - \varphi)$ . Подставляя его в уравнение, получим  $\underbrace{A \omega_b^2}_{=a} \underbrace{[-\cos(\omega_b t - \varphi)]}_{=\cos(\omega_b t - \varphi + \pi)} + \underbrace{2\beta A \omega_b}_{=b} \underbrace{[\sin(\omega_b t - \varphi)]}_{=\cos(\omega_b t - \varphi + \pi/2)} + \underbrace{\omega_0^2 A}_{=c} \cos(\omega_b t - \varphi) = \frac{\epsilon_0}{L} \cos(\omega_b t)$ ,

или  $a \cos(\omega_b t - \varphi + \pi) + b \cos(\omega_b t - \varphi + \pi/2) + c \cos(\omega_b t - \varphi) = \frac{\epsilon_0}{L} \cos(\omega_b t)$ . (\*)

Сумму трех однонаправленных гармонических колебаний с одинаковой частотой  $\omega_b$  в левой части уравнения можно найти с помощью векторной диаграммы, изображенной на рисунке в момент времени  $t = 0$ , на которой все векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{\epsilon}_0/L$  будут одновременно вращаться вокруг оси О с одинаковой угловой скоростью  $\omega_b$ . Поэтому проекции этих векторов на горизонтальную ось дадут уравнение (\*). Чтобы левая часть этого уравнения была равна правой, необходимо, чтобы выполнялись соотношения



$$\left(\frac{\epsilon_0}{L}\right)^2 = b^2 + (c-a)^2, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{b}{c-a}\right).$$

Как видно, колебания заряда  $q$  всегда отстают по фазе на  $\varphi$  от колебаний внешней э.д.с.  $\varepsilon_B$ .

Подставляя в полученные уравнения выражения для  $a = A\omega_B^2$ ;  $b = 2\beta A\omega_B$  и  $c = \omega_0^2 A$ , находим зависимости амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi$  вынужденных колебаний заряда на конденсаторе  $q_{\text{вын}} = A \cos(\omega_B t - \varphi)$  от частоты вынужденной э.д.с. и параметров контура:  $A^2 \left[ (2\beta\omega_B)^2 + (\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 \right] = \left( \frac{\varepsilon_0}{L} \right)^2$ . То есть амплитуда вынужденных электрических колебаний заряда на конденсаторе имеет вид

$$A = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}}, \text{ а начальная фаза таких колебаний}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{2\beta\omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}\right) \quad (\text{вынужденные колебания происходят и в случае } \beta > \omega_0).$$

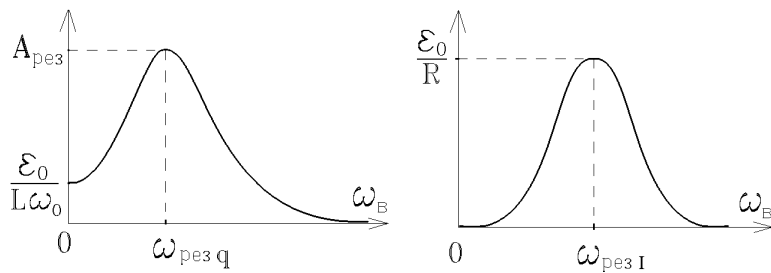
Напряжение на конденсаторе изменяется при этом по закону  $U_C = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon_0\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}} \cdot \cos(\omega_B t - \varphi)$  и от-

стает по фазе точно на  $\pi/2$  от колебаний тока в контуре:

$$I = \frac{dq}{dt} = A\omega_B [-\sin(\omega_B t - \varphi)] = A\omega_B \cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2).$$

### 8.3. Резонанс напряжения на конденсаторе и тока в контуре. Добротность контура

Амплитуды вынужденных колебаний не зависят от времени, т.е. **постоянны**, но зависят от частоты  $\omega_B$  внешней э.д.с. График зависимости амплитуды от этой частоты называется амплитудно-частотной характеристикой контура. Приведем эти графики для амплитуды заряда на конденсаторе и для амплитуды тока в контуре.



При некоторой частоте внешнего источника  $\omega_B$ , как видно, амплитуды колебаний достигают максимума. Это явление называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$ .

Амплитуда тока в контуре:

$$I_0(\omega_B) = \frac{\varepsilon_0\omega_B}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + 4\frac{R^2}{4L^2}\omega_B^2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{L^2}{\omega_B^2}\left(\frac{1}{LC} - \omega_B^2\right)^2 + \frac{L^2 R^2}{\omega_B^2 L^2}\omega_B^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L\right)^2 + R^2}}, \text{ поэтому резонанс тока в контуре наступает при наименьшем}$$

значении знаменателя этого выражения, т.е. при  $\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L = 0$  или при  $\omega_B^2 = \frac{1}{LC}$ . Резонансная частота для тока

$$\omega_{\text{рез} I} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Резонанс напряжения на конденсаторе ищем из условия максимума его амплитуды

$$\frac{dA(\omega_B)}{d\omega_B} = \frac{d}{d\omega_B} \left( \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4\beta^2\omega_B^2}} \right) = 0. \text{ Приравняв нулю производную по } \omega_B \text{ от знаменателя этого выражения, полу-}$$

чим  $\omega_B^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ . Т.е. резонансная частота для напряжения (заряда) на конденсаторе

$$\omega_{\text{рез} q} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

При этой частоте амплитуда заряда на конденсаторе имеет величину

$$q_{\text{max}} = A_{\text{рез}} = \frac{\varepsilon_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{\varepsilon_0/L}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

а резонансное значение амплитуды напряжения на конденсаторе  $U_{C\text{рез}} = \left(\frac{q}{C}\right)_{\text{max}} = \frac{\varepsilon_0/LC}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\varepsilon_0\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ .

При  $\beta = R/2L \rightarrow 0$  (отсутствие активного сопротивления или очень большая индуктивность  $L$ ) амплитуда напряжения на конденсаторе стремится к бесконечности. Таким образом, даже если к контуру прикладывать малое внешнее напряжение  $\varepsilon_B$ , то напряжение на отдельных элементах контура может быть очень большим! В этом отношении **резонансные явления опасны** (пробой конденсатора, возникновение искры и т.п.)

Резонансные явления в электрических цепях характеризуют величиной добротности электрического колебательного контура:  $Q = \frac{\pi}{\theta}$ , где  $\theta = \beta T$  – логарифмический декремент затухания, определенный ранее. Обычно в колебательных контурах затухание мало и поэтому  $\beta^2 \ll \omega_0^2$  и  $T \approx 2\pi\sqrt{LC}$ . Для таких контуров с высокой добротностью

$$\theta \approx \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} \approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{и} \quad Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Например, кварцевый резонатор в электронных часах имеет добротность  $Q \approx 20000$ , для частотно – стабилизированного  $\text{CO}_2$  - лазера  $Q \approx 10^9$ . Чем выше добротность контура, тем слабее затухают собственные колебания в нем, тем меньше потери энергии на выделение джоулева тепла.

#### 8.4. Полное сопротивление (импеданс) контура. Эффективные ток и напряжение

Связь **амплитуды тока** и **амплитуды внешней э.д.с.** обычно записывают в виде  $I_0 = \varepsilon_0 / Z$ , похожем на закон Ома (если в цепь включен источник постоянного напряжения  $U_0 = \text{const}$ , то ам-

плитуды связаны соотношением  $I_0 = U_0 / R$ ). Величину  $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L\right)^2 + R^2}$  называют полным сопротивлением цепи переменному току (или импедансом цепи).

Обычное (омическое) сопротивление  $R$  называют активным сопротивлением, а

$$X = \frac{1}{\omega_B C} - \omega_B L - \text{реактивным сопротивлением цепи.}$$

Как видим, для **переменного тока сопротивлением обладает как емкость, так и индуктивность**. Величину

$$X_C = \frac{1}{\omega_B C} \text{ называют } \underline{\text{емкостным сопротивлением}}, \text{ а } X_L = \omega_B L - \underline{\text{индуктивным сопротивлением}}.$$

**Главное различие активного и реактивного сопротивления состоит в том, что на активном сопротивлении  $R$  выделяется джоулево тепло, а на реактивных сопротивлениях  $X_C$  и  $X_L$  – нет.**

Действительно, средняя мощность, выделяемая переменным током на каком-либо элементе цепи за один период равна  $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U I dt$ , где  $U$  – падение напряжения на этом элементе. Так как падение напряжения на емкости  $U_C = q/C$  отстает при вынужденных колебаниях по фазе на  $\pi/2$  от колебаний тока, то выделяемая на емкости мощность равна нулю:

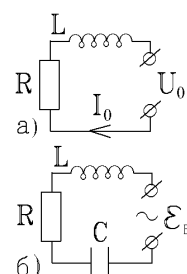
$$\langle P_C \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_{C0} \cos(\omega_B t - \varphi) I_0 \underbrace{\cos(\omega_B t - \varphi + \pi/2)}_{= -\sin(\omega_B t - \varphi)} dt = \frac{U_{C0} I_0}{\omega_B T} \int_0^T \frac{1}{2} d(\cos^2(\omega_B t - \varphi)) = \frac{U_{C0} I_0}{\omega_B T} \frac{\cos^2(\omega_B t - \varphi)}{2} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0.$$

Аналогично не выделяется мощность на индуктивном сопротивлении, на котором падение напряжения  $U_L = -L di/dt$  опережает колебания тока по фазе на  $\pi/2$ . На активном же сопротивлении  $R$  за период выделяется мощность

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I dt = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} R I_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega_B t - \varphi + \pi/2) dt.$$

Последний интеграл в этой формуле равен  $T/2$ , так как  $\cos^2(\omega_B t) = (1 + \cos 2\omega_B t)/2$ , а  $\cos 2\omega_B t$  при интегрировании дает ноль. Поэтому

$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R.$$





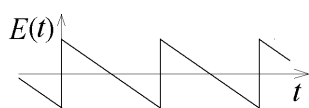
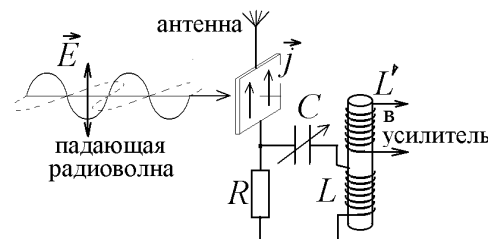
**Вывод:** переменный ток  $I = I_0 \cos \omega_b t$  выделяет в цепи ту же мощность, что и постоянный ток  $I_{\text{эфф}} = I_0 / \sqrt{2}$ , создающий на сопротивлении  $R$  падение напряжения  $U_{\text{эфф}} = U_0 / \sqrt{2}$ . Величины  $I_{\text{эфф}}$  и  $U_{\text{эфф}}$  называются действующими или эффективными значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры, измеряющие переменный ток, проградуированы в эффективных значениях  $I_{\text{эфф}}$  и  $U_{\text{эфф}}$  постоянного тока.

## 8.5. Принцип приема электромагнитного сигнала

Простейший приемный контур радиоприемника является электрическим колебательным контуром с конденсатором переменной ёмкости, которую изменяют ручкой настройки частоты. Этот контур соединен с приемной антенной. Падающая на антенну радиоволна является переменным электромагнитным полем, которое возбуждает в антенне и контуре переменный ток.

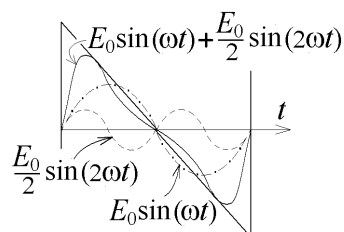
Пусть напряженность электрического поля в падающей волне изменяется со временем по произвольному закону  $\vec{E} = \vec{E}(t)$ . Такую функцию всегда можно представить в виде ряда или интеграла Фурье (суммы гармонических функций):

$$\vec{E}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{E}_{0n} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad \text{или} \quad \vec{E}(t) = \int_0^{\infty} \vec{E}_0(\omega) \cos(\omega t) d\omega$$



где  $\vec{E}_{0n}$  и  $\vec{E}_0(\omega)$  - постоянные величины, не зависящие от времени  $t$ .

Например, периодическую пилообразную функцию (волны такой формы использовали в аналоговом телевидении для образования развертки луча в строки на экране)

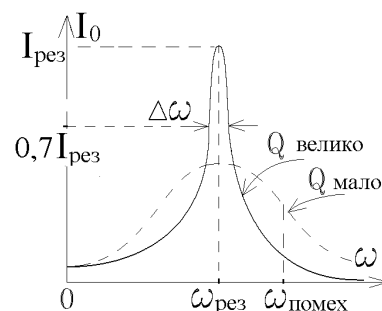


можно представить в виде  $E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_0}{n} \cos(n\omega t)$ . Сумма двух первых слагаемых, как видно из рисунка слева, уже приближается по форме к "пиле".

Меняя емкость входного контура, изменяют его резонансную частоту

$\omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  так, чтобы она совпала с выбранной частотой радиоволны. Добротность

входного контура достаточно велика и характеризует еще одно свойство электрического колебательного контура – его избирательную способность. Снова рассмотрим амплитудно-частотную характеристику напряжения на конденсаторе. Чем меньше затухание  $\beta$ , т.е. чем больше добротность  $Q$  контура, тем сильнее возрастает амплитуда в точке резонанса, т.е. тем **уже и выше** становится пик амплитудно-частотной характеристики. Принято считать, что **контур усиливает сигналы тех частот, для которых амплитуды отличаются от резонансного значения не больше, чем в  $1/\sqrt{2} \approx 0.7$  раз**. Интервал таких частот  $\Delta\omega$  называется полушириной резонанса  $\Delta\omega$ .



Усиленный ток с амплитудой  $I_{\text{рез}}$ , соответствующий сигналу с выбранной частотой  $\omega$  протекает по виткам катушки с индуктивностью  $L$ , навитой на ферритовый сердечник с большой величиной магнитной проницаемости  $\mu$ , создавая в сердечнике переменное магнитное поле, меняющееся с той же частотой.

Это поле создаёт э.д.с. взаимной индукции в другой катушке с индуктивностью  $L'$ , навитой на тот же сердечник (индуктивная связь). Далее ток, созданный этой э.д.с. поступает в усилитель радиоприемника и преобразуется в колебания мембраны репродуктора.

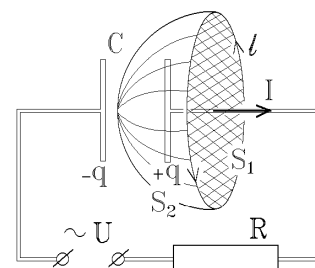
## 9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

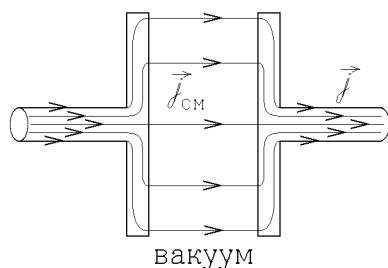
### 9.1. Ток смещения

Переменный ток протекает по цепи, содержащей конденсатор (конденсатор обладает конечным емкостным сопротивлением переменному току). Но это должно нарушать теорему о циркуляции для вектора напряженности  $\vec{H}$  (или индукции  $\vec{B}$ ) магнитного поля. Для того, чтобы не учитывать возможные токи намагничения, рассмотрим теорему о циркуляции  $\vec{H}$ , а не  $\vec{B}$ , для контура  $l$ , изображенного на рисунке:

$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I_{\text{охватыв}} = I$ . Причем  $\int_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} \neq 0$ , а  $\int_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ .

Действительно, согласно теореме Стокса интеграл в правой части можно вычислять по любой поверхности  $S_i$ , ограниченной контуром  $l$ . Но поверхность  $S_1$  линии тока пересекают, и  $j = I / S_{\text{провода}} \neq 0$ , а через поверхность  $S_2$  – полусферу, охватывающую одну из пластин конденсатора — ток проводимости не течет, заряды не переносятся и  $j = 0$ . Линии тока





проводимости  $\vec{j}$  обрываются на пластинах конденсатора, что приводит к противоречию. Для того, чтобы теорема о циркуляции  $\vec{H}$  не нарушалась, Максвелл предположил, что линии переменного тока  $\vec{j}$  нигде не обрываются (всюду замкнуты, как и линии постоянного тока), и между пластинами конденсатора они переходят в линии тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$ .

Но если между пластинами конденсатора находится вакуум, то движения зарядов там нет, и ток смещения не является результатом движения заряженных частиц. Его назвали током только потому, что **аналогично обычному току проводимости  $\vec{j}$  ток смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  создает магнитное поле.**

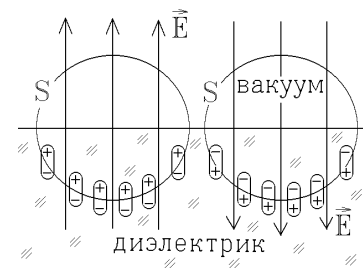
Для вычисления  $\vec{j}_{\text{см}}$  запишем теорему о циркуляции  $\vec{H}$  в дифференциальной форме. С учетом тока смещения имеем  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}$ . Так как дивергенция ротора от любого вектора тождественно равна нулю,  $\text{div}(\text{rot } \vec{H}) \equiv 0$ , то  $\text{div } \vec{j}_{\text{см}} = -\text{div } \vec{j} = -\partial \rho / \partial t$  (это уравнение непрерывности электрического заряда, раздел 16.2). Если подставить в последнее уравнение теорему о циркуляции  $\vec{D}$  в дифференциальной форме  $\rho = \text{div } \vec{D}$ , то приходим к выводу о том, что плотность тока смещения выражается через производную от вектора электрической индукции по времени:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Ток смещения может появиться в любой среде: в вакууме, в диэлектрике, в проводнике. Так как в диэлектрике  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , то  $\vec{j}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ . Второе слагаемое связано с реальным перемещением связанных зарядов, не создающих ток проводимости. Действительно, ток смещения, вытекающий из любой замкнутой поверхности  $S$ , определяется формулой  $\oint_S \vec{j}_{\text{см}} d\vec{S} \sim \frac{d}{dt} \oint_S \vec{P} d\vec{S} \stackrel{\text{теорема Остроградского}}{=} \frac{d}{dt} \int_V \text{div } \vec{P} dV = \frac{d}{dt} \int_V (-\rho'_{\text{связ}}) dV = -\frac{dq'_{\text{связ}}}{dt}$ , где  $q'_{\text{связ}}$  - связанный заряд, вытекающий из поверхности  $S$ .

Из рисунка видно, как под действием переменного электрического поля связанные заряды молекул диэлектрика совместно смещаются то в одну, то в другую сторону. Такое реальное движение связанных зарядов действительно должно создавать магнитное поле. Но магнитное поле создает и вторая компонента тока смещения  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ . Она существует и в веществе, и в вакууме, и не связана ни с каким движением зарядов.

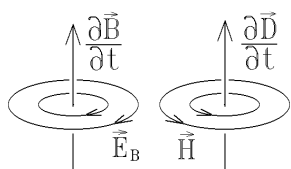
**Магнитное поле создается изменяющимся со временем электрическим полем.**



## 9.2. Система уравнений Максвелла

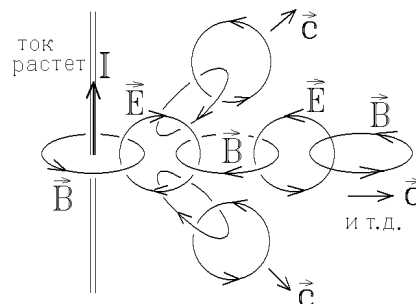
Магнитное и электрическое поля, вообще говоря, нельзя рассматривать порознь. Помимо того факта, что при переходе из одной инерциальной системы в другую электрическое поле превращается в магнитное и наоборот, оказывается, что

в одной и той же системе отсчета переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле  $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ , а переменное электрическое поле порождает ток смещения и, следовательно, переменное магнитное поле:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{см}} = \partial \vec{D} / \partial t$ .



Линии напряженности этих полей замкнуты, охватывают векторы  $\partial \vec{B} / \partial t$  и  $\partial \vec{D} / \partial t$ , но из-за разного знака направлены в противоположные стороны (см. рисунок). Поля эти неразрывно связаны и образуют единое **электромагнитное поле**. Пусть в какой-то точке пространства возник возрастающий ток, порождающий возрастающее магнитное поле, которое в свою очередь приводит к появлению возрастающего вихревого электрического поля и т.д.

Возникающее переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью света  $\vec{c}$ . Причем оно продолжает существовать даже в том случае, когда исчезла первоначальная причина его появления. Поэтому, например, при нажатии выключателя лампочка под потолком загорается практически мгновенно, несмотря на то, что дрейфовая скорость электронов, создающих электрический ток, очень мала:  $u \approx 0,1 \div 0,01$  мм/с. Переменное электромагнитное поле пробегает вдоль электрической цепи, и заставляет все свободные электроны во всех участках цепи практически одновременно двигаться со скоростью  $u$ .



В самом общем случае **любое электромагнитное поле описывается системой уравнений Максвелла**. Эта система представляет собой теоремы о циркуляции и о потоке (теоремы Гаусса) для электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} (1) \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right); \\ (2) \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right); \\ (3) \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_V \rho dV = \sum q_{\text{внутри}}; \\ (4) \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (1) – это закон электромагнитной индукции Фарадея. Циркуляция вихревого электрического поля не равна нулю. Она образует э.д.с. электромагнитной индукции.

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{H}$ , записанная в форме уравнения (2), справедлива всегда. Справа в уравнении (2) стоит алгебраическая сумма токов проводимости и токов смещения, охватываемых замкнутым контуром  $l$ .

В уравнении (3) (это теорема Гаусса для электрического поля) содержится алгебраическая сумма зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью  $S$  и образующих обычное потенциальное электрическое поле.

Уравнение (4) (теорема Гаусса для магнитного поля) обеспечивает замкнутость линий индукции  $\vec{B}$  любого магнитного поля.

Приведенная система уравнений Максвелла записана в интегральной форме. С помощью теорем Остроградского и Стокса ее можно записать в дифференциальной форме: В такой дифференциальной форме уравнения Максвелла можно применять для участков среды с непрерывно меняющимися параметрами. На границах различных сред (вакуум – металл, диэлектрик – металл, металл 1 – металл 2 и т.п.) напряженности и индукции полей меняются скачком, и производные теряют смысл.

Уравнения Максвелла записаны в таком виде, чтобы устранить из них неизвестные связанные заряды  $\rho'$  и токи намагничивания  $\vec{j}'$ . Поэтому, кроме двух основных характеристик электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , в них вошли еще  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ . Для решения системы необходимо дополнить её связью между этими векторами:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_{\text{стоп}})$$

Такие связи называются **материальными уравнениями**.

Кроме того надо задать **граничные условия** на любой границе двух сред:

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}; \quad \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}; \quad \vec{E}_{1\tau} = \vec{E}_{2\tau}; \quad \vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$$

Еще одно важное граничное условие: так как все заряды и токи реально располагаются в ограниченной области пространства, то на бесконечном удалении их поля исчезают:  $\vec{E}|_{\infty} = \vec{B}|_{\infty} = 0$ .

Заметим, что уравнения Максвелла релятивистски инвариантны и не меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

**Вывод:** зная распределение плотности свободных зарядов  $\rho$  и токов проводимости  $\vec{j}$ , и решая систему уравнений Максвелла, можно найти поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в любой точке пространства, И наоборот, зная поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , можно определить распределение создающих их зарядов  $\rho$  и токов  $\vec{j}$ .

Если распределение зарядов и токов не изменяется со временем, то поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  тоже не зависят от времени, и система уравнений Максвелла распадается на две части и описывает независимые постоянные электростатическое и

магнитное поля:

$$\left. \begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= 0 \\ \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \sum q \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \sum I \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

### 9.3. Поток плотности энергии электромагнитного поля.

#### Вектор Пойнтинга и теорема Пойнтинга

Рассмотрим теперь закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Возьмем дивергенцию от векторного произведения напряженностей электрического и магнитного полей:  $\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{\nabla}_E \cdot [\vec{E}, \vec{H}] + \vec{\nabla}_H \cdot [\vec{E}, \vec{H}]$ . Индексы  $E$  и  $H$  у оператора  $\vec{\nabla}$  показывают, что по правилам дифференцирования произведения функций оператор  $\vec{\nabla}$  сначала действует на функцию  $\vec{E}$ , а потом – на  $\vec{H}$ .

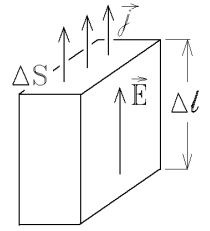
Воспользуемся теперь правилом циклической перестановки векторов и уравнениями Максвелла:

$$\vec{\nabla}_E \cdot [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot [\vec{\nabla}_E, \vec{E}] = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{H} \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} \right); \quad (\text{в однородной среде } \epsilon, \mu = \text{const})$$

$$\vec{\nabla}_H \cdot [\vec{E}, \vec{H}] = -\vec{\nabla}_H \cdot [\vec{H}, \vec{E}] = -\vec{E} \cdot [\vec{\nabla}_H, \vec{H}] = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} \right).$$

Следовательно,  $\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} \right) - \vec{E} \vec{j}$ . Но  $w_{\text{эм}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2}$  – это плотность энергии электромагнитного поля (сумма плотностей энергии электрического и магнитного полей).

Чтобы понять физический смысл слагаемого  $\vec{E} \vec{j}$ , выделим элемент тока в малом объеме среды с сечением  $\Delta S$  с длиной  $\Delta l$  и с объемом  $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$ . Ток  $\vec{j}$  порождается электрическим полем  $\vec{E}$ :  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  (закон Ома в локальной форме). Тогда  $\vec{E} \vec{j} = (E \Delta l) \cdot \frac{j \Delta S}{\Delta l \Delta S} = \frac{UI}{\Delta V} = \frac{I^2 R}{\Delta V}$ , так как  $E \Delta l$  – это разность потенциалов, или падение напряжения  $U$  на участке длины  $\Delta l$  с сопротивлением  $R$ , а  $j \Delta S$  – ток  $I$  через его сечение.



Полученное выражение – это джоулево тепло, выделяемое током за единицу времени в единице объема среды.

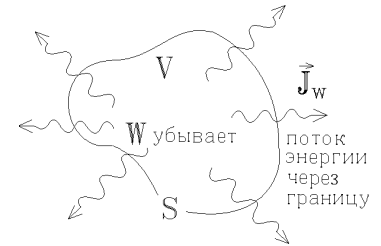
Так как магнитные силы работы по перемещению зарядов не производят, то  $\vec{E} \vec{j}$  – это работа, производимая силами электрического поля в единице объема среды за единицу времени. Эта работа идет на выделение джоулева тепла, т.е. на нагревание среды или на осуществление каких-либо фотохимических реакций.

Проинтегрируем теперь полученное уравнение по любому объему  $V$ , ограниченному замкнутой поверхностью  $S$ :

$$-\int_V \frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t} dV = \int_V \vec{E} \vec{j} dV + \int_V \text{div}[\vec{E}, \vec{H}] dV. \text{ Последнее слагаемое согласно теореме}$$

Остроградского запишется в виде интеграла по замкнутой поверхности:

$$\oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S}. \text{ Получаем равенство, которое выражает закон сохранения энергии:}$$



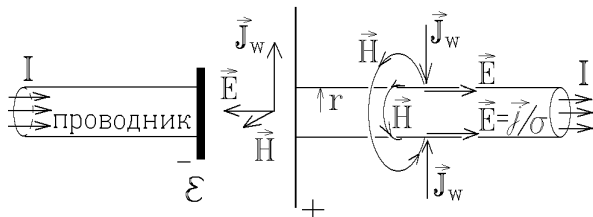
убыль энергии электромагнитного поля за единицу времени внутри объема среды, ограниченного любой замкнутой поверхностью  $S$ , складывается из потока энергии, переносимой через эту поверхность электромагнитным полем, и работы, которую силы электромагнитного поля производят над зарядами в этом объеме среды за единицу времени:

$$-\frac{dw_{\text{эм}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{\epsilon_0 \epsilon \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{2} \right) dV = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{S} + \int_V \vec{E} \vec{j} dV.$$

Этот вывод называется теоремой Пойнтинга.

Работа над электрическими зарядами может быть как положительной, когда заряды движутся под действием электрических сил, так и отрицательной, когда под действием каких-либо сторонних сил заряды движутся против сил электрического поля (например, внутри источника э.д.с.). В последнем случае энергия электромагнитного поля не убывает, а возрастает

Вектор  $\vec{j}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$  называется вектором Пойнтинга. Его величина равна энергии, переносимой электромагнитным полем за единицу времени через единичную площадь, перпендикулярную к направлению распространения электромагнитного поля. Если вектор  $\vec{j}_W$  направлен из замкнутой поверхности, то энергия выносится из нее, и наоборот. Вектор Пойнтинга  $\vec{j}_W$  является вектором плотности потока энергии электромагнитного поля.



Применим теорему Пойнтинга к частному случаю стационарных полей, например, к цепи постоянного тока. Ток  $I$  вызван некоторой разностью потенциалов  $U = \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ , создающей электрическое поле с напряженностью  $E = U/l$  на участке проводника длины  $l$ . Этот ток создает вблизи поверхности проводника магнитное поле с напряженностью  $H = I/2\pi r$ .

Как видно из рисунка, вектор Пойнтинга  $\vec{j}_W = [\vec{E}, \vec{H}]$  направ-

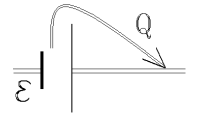
лен к оси проводника. Следовательно, внутрь участка проводника длины  $l$  из окружающего пространства за единицу времени втекает энергия  $\left| \int \vec{j}_W \cdot d\vec{S} \right| = E \cdot H \cdot \sin 90^\circ \cdot 2\pi r l = I \cdot U = I^2 R$  (интеграл был взят по боковой поверхности провода  $2\pi r l$ ). Эта энергия равна мощности  $P$  постоянного тока!

В теореме Пойнтинга она окажется с отрицательным знаком, т.к. вектор  $\vec{j}_W$  направлен противоположно вектору площадки  $d\vec{S}$  на боковой поверхности проводника, а потому полностью компенсируется выделяемой джоулевой

мощностью  $\int_V \vec{E} \vec{j} dV$ . В результате  $-\frac{dw_{\text{эм}}}{dt} = \oint_S \vec{j}_W d\vec{S} + \int_V \vec{E} \vec{j} dV = 0$  и  $w_{\text{эм}} = \text{const}$ . Следовательно электромагнитное поле стационарно и его энергия не меняется.

Джоулево тепло выделяется за счет переноса энергии электромагнитного поля из окружающей среды в проводник.

Откуда эта энергия берется в окружающем пространстве? Она поступает из источника э.д.с., в котором под действием сторонних сил ток течет против линий  $\vec{E}$ , мощность  $P$  сил электрического поля отрицательна, и вектор  $\vec{j}_W$  направлен в окружающее пространство, наружу.



Следует ли из этого вывод, что энергия в цепях постоянного тока вытекает из источника э.д.с. и переносится к потребителю не по проводам, а по воздуху? Ответ в том, что энергия тока, с одной стороны, равна энергии движущихся заряженных частиц, а с другой стороны, – энергии магнитного поля, создаваемого током. Мы их не разделяем. Это одна и та же энергия: если есть движение заряженных частиц – то имеется магнитное поле. Нет тока – нет магнитного поля. Энергия тока в проводнике совпадает с энергией магнитного поля этого тока. Можно рассматривать реальное движение заряженных частиц, переносящих энергию по проводнику. А можно «забыть» об этом движении и учесть магнитное поле, существующее не только в проводнике, но и во всем пространстве. Результат, как видим, один и тот же, но объясняет почти мгновенное зажигание лампочки после включения контакта цепи: электромагнитное поле распространяется вдоль проводов со скоростью света, «втекает» в провода и заставляет электроны в них двигаться со средней дрейфовой скоростью сразу по всей длине проводов.

#### 9.4. Электромагнитное излучение ускоренных зарядов. Волновая зона

Вспомним, что точечный заряд  $q$ , движущийся с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , много меньшей, чем скорость света  $c$ , создает магнитное поле  $\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$ . Учтем, что  $\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{e}_r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right)$ , где  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора  $\vec{r}$ , проведенного от заряда  $q$ . Поэтому вектор  $\vec{B}$  можно записать в виде

$$\vec{B} = -\frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \left[ \vec{v}, \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right), \vec{v} \right] = \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi} \left[ \vec{\nabla}, \frac{\vec{v}}{r} \right] \quad (\text{так как вектор } \vec{v} \text{ постоянен, то оператор производной}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ действует только на функцию } \frac{1}{r}), \text{ и } \vec{B} = \left[ \vec{\nabla}, \frac{\mu\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right] \equiv \text{rot} \left( \frac{\mu\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right).$$

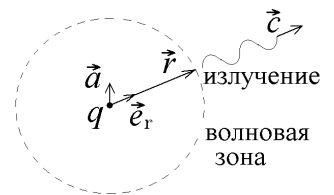
Если заряд начнет двигаться не с постоянной, а с переменной скоростью  $\vec{v}(t)$ , то возникнет вихревое электрическое поле  $\text{rot } \vec{E}_B = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu\mu_0 q \vec{v}}{4\pi r} \right) \right)$ , откуда  $\vec{E}_B = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi} q \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{v}(t)}{r} \right)$ . Оно, в свою очередь, порождает переменное магнитное поле и т. д.

Такое электромагнитное поле распространяется от заряда  $q$  со скоростью света в виде электромагнитных волн. А так как сам заряд движется с очень малой скоростью  $v(t) \ll c$ , то он практически не успевает сместиться за то время, за которое электромагнитные волны проходят большое расстояние  $r$ . Следовательно, приближенно можно считать, что заряд  $q$  практически покоится на месте. Тогда  $\vec{E}_B = -\frac{\mu\mu_0}{4\pi r} q \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ , где  $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}$  – ускорение заряда.

Волновой зоной называется область, удаленная от излучающего заряда на большое расстояние  $r$ , значительно превышающее длину волны электромагнитного излучения. В ней электростатическое поле  $\vec{E}_{\text{электр}} = -\text{grad } \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$ , убывающее с расстоянием по закону

$1/r^2$  пренебрежимо мало по сравнению с вихревым полем  $\vec{E}_B$ , убывающим по закону  $1/r$ . Поэтому

можно считать, что в волновой зоне электромагнитное поле ускоренного заряда проявляется только в виде переменного электромагнитного поля (электромагнитных волн, как покажем дальше), распространяющегося со скоростью света  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  вдоль радиальных направлений.

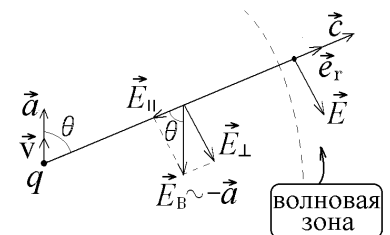


Но электромагнитные волны поперечны. Вектор напряженности  $\vec{E}$  электрического поля такой волны перпендикулярен её скорости  $\vec{c}$ . Поэтому еще до достижения излученным электромагнитным полем волновой зоны в нем должна исчезнуть, затухнуть радиальная составляющая  $\vec{E}_{||}$  вихревого электрического поля, как показано на рисунке.

Вблизи излучающего заряда электромагнитное поле имеет сложный вид, но в волновой зоне распространяется практически плоская электромагнитная волна с вектором напряженности электрического поля, имеющим величину  $E = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} a \cdot \sin \theta$ .

$$E = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} a \cdot \sin \theta.$$

Здесь  $\theta$  – угол между направлением ускорения  $\vec{a}$  заряда и направлением распространения излученной волны.



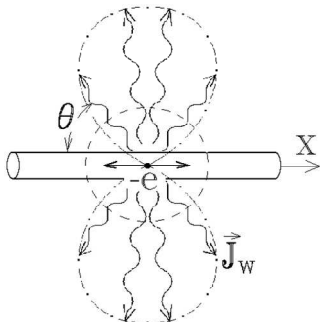
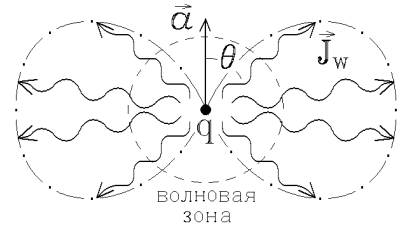
## 9.5. Диаграмма направленности электромагнитного излучения

Источником переменного электромагнитного поля (электромагнитных волн) являются частицы с электрическим зарядом  $q$  (как правило – электроны), движущиеся с ускорением.

Созданное ими вихревое электрическое поле  $E = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} a \cdot \sin \theta$  не распространяется вдоль направления, совпадающего с направлением ускорения  $\vec{a}$  частиц (когда  $\theta = 0$ ). В любом другом направлении согласно уравнениям Максвелла  $\text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  $\text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  создается магнитное поле с напряженностью  $H \sim qa \sin \theta$ , причем, как следует из уравнений Максвелла,  $\vec{H} \perp \vec{E}$ . Поэтому поток энергии электромагнитного поля, излученного ускоренным зарядом (вектор Пойнтинга)

$$|\vec{j}_W| = \left| \left[ \vec{E}, \vec{H} \right] \right| \sim q^2 a^2 \sin^2 \theta$$

различен вдоль разных направлений. Максимум энергии ускоренный заряд излучает в направлении, перпендикулярном к вектору ускорения  $\vec{a}$ , и практически не излучает в направлении, параллельном вектору  $\vec{a}$ .



Такую энергию (электромагнитные волны) испускает излучатель – элемент электрической цепи, по которому протекает быстропеременный ток с частотой  $\omega$ . Создающие его свободные электроны испытывают смещение  $x = x_0 \cos \omega t$  и имеют ускорение  $a_x = d^2 x / dt^2 = -\omega^2 x_0 \cos \omega t$ .

Тогда в волновой зоне  $E, H \sim a \sim \omega^2$ , а излучаемая в пространство энергия  $j_W \sim \omega^4$ .

**Потери на излучение резко растут с ростом частоты переменного тока.**

Любой заряд, движущийся ускоренно, теряет свою энергию, излучая электромагнитные волны. Заметим, например, что электрон, вращающийся вокруг атомного ядра с огромным центростремительным ускорением, как показывает расчет, должен за время  $\sim 5 \cdot 10^{-11}$  с потерять (излучить) всю свою кинетическую энергию и упасть на ядро. Следовательно, с точки зрения классической теории электромагнетизма атомы неустойчивы.

**Классические законы неприменимы внутри атома.**

Диаграмма зависимости излучаемого потока энергии электромагнитного поля  $j_W \sim \sin^2 \theta$  от угла  $\theta$ , показанная на рисунке, называется диаграммой направленности излучения. Её необходимо учитывать при конструировании и компоновке электронных устройств, для того, чтобы не получать постоянное облучение при работе с ними. В частности, подводящие переменный ток провода не должны быть свернуты кольцами и витками, что усиливает их излучение.

## 9.6. Рассеяние электромагнитного излучения

Проходящее в любой среде электромагнитное излучение будет рассеиваться во все стороны атомами среды. С точки зрения классической физики это вызвано тем, что заряженные частицы среды – ионы и, в первую очередь, электроны – ускоряются силой Лоренца и начинают излучать вторичные электромагнитные волны во все стороны, как показано на диаграмме направленности излучения.

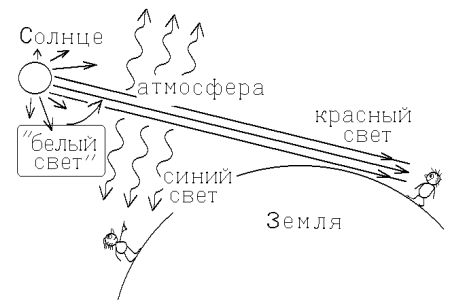
В действительности рассеяние электромагнитного излучения в среде определяется законами атомной (квантовой) физики. Если частота  $\omega$  падающего на среду излучения, которое состоит из отдельных фотонов, совпадает с частотой возбуждения атома, то атомы поглощают падающее излучение, а потом излучают вторичные электромагнитные волны с той же частотой  $\omega$  согласно диаграмме направленности (рассеяние Рэлея).

Поток плотности энергии этого вторичного, рассеянного излучения описывается классическим выражением  $j_W \sim \omega^4 \cdot \sin^2 \theta$  – чем больше частота падающих электромагнитных волн, тем сильнее их рассеяние. Вторичное излучение прямо пропорционально четвертой степени частоты и обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего света:

$$j_W \sim \omega^4 \sim 1/\lambda^4. \text{ Это - закон Рэлея для рассеяния света.}$$

Для примера можно рассмотреть прохождение “белых” лучей солнечного света в атмосфере Земли. Наиболее легко рассеиваются синие и голубые лучи с малыми  $\lambda$ , а красные лучи с большими  $\lambda$  проходят атмосферу, рассеиваясь меньше. Это объясняет синий и голубой цвет неба днем (преобладание голубых лучей в рассеянном свете) и красный цвет закатов и восходов (преобладание красных лучей в волнах, прошедших через атмосферу без рассеяния).

Заметим, что наиболее сильно рассеяние происходит не на отдельных атомах, а на микроскопических флуктуациях плотности среды – микроскопических неоднородностях атмосферы, микроскопических капельках водяного пара в ней. Это – **эффект Тиндаля**. Небо днем выглядело бы черным и усыпанным звездами, как и ночью, если бы таких флуктуаций в атмосфере не было.



Чтобы продемонстрировать эффект Тиндаля, пропустите свет фонарика сквозь стакан молока – жидкость, заполненную капельками жира микронного размера. Сбоку стакан молока будет испускать голубоватое свечение, а на просвет выглядеть красноватым.