Минобрнауки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тульский государственный университет»

Кафедра информационной безопасности

Теория систем и системный анализ

Практическая работа № 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Тула 2023

Цель работы

Изучить простейшие методы выбора наилучших альтернатив при использовании экспертных методов оценивания, основанных на ранжированиях.

Краткие теоретические сведения

Методы *экспертных оценок* - это методы организации работы со специалистами-экспертами и обработки мнений экспертов. Эти мнения обычно выражены частично в количественной, частично в качественной форме. Экспертные исследования проводят с целью подготовки информации для принятия решений ЛПР (напомним, ЛПР – лицо принимающее решение).

Рассмотрим конкретные практические методы для выбора наилучшей альтернативы при использовании экспертных методов оценивания, основанных на ранжированиях.

Ранжирование является распространенной процедурой получения экспертной информации. Эксперту предъявляется набор альтернатив, подлежащих оцениванию, и предлагается упорядочить их по предпочтениям. Упорядочение выполняется путем выстраивания альтернатив в ряд. Выстроенные альтернативы нумеруются подряд числами натурального ряда. Эти числа обозначают место, которое занимает каждая альтернатива после их упорядочения, и называются рангами. Такие ранги также называют *нормализованными*.

Например, наиболее предпочтительная альтернатива оказывается на первом месте и получает ранг 1, следующая за ней альтернатива оказывается на втором месте и получает ранг 2 и т.д.

В процессе ранжирования может возникнуть ситуация, когда эксперт считает некоторые альтернативы неразличимыми (одинаковыми), т.е. с его точки зрения эти объекты должны располагаться на одном месте. При нумерации всех альтернатив оказывается безразличным, какой из соответствующих подряд идущих номеров присвоить альтернативам, занимающим одно место. Таким образом, нормализованные ранги уже не соответствуют местам, которые заняты альтернативами (различных мест меньше, чем номеров), и вносят искусственный порядок там, где его нет. В этом случае альтернативам приписывают так называемые стандартизированные ранги, значение которых определяется средним суммы нормализованных рангов (номеров неразличимых объектов), поделенных между неразличимыми объектами.

Таким образом, сумма стандартизированных рангов для любого эксперта, полученная в результате ранжирования n объектов, будет равна сумме чисел конечного натурального ряда, т.е.

$$S = \sum_{j=1}^{n} r_j = \frac{n(n+1)}{2},$$

где r_j- ранг альтернативы a_j, n- число альтернатив в ранжировке.

В результате выполнения всеми экспертами *ранжирования* должна быть заполнена таблица 1, где r_{ij} - ранг, проставленный i-м экспертом j-ой альтернативе.

Таблица 1

Эксперт	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	r_1^1	r_2^1	r_3^1	r_4^1	r_5^1	r_6^1
2	r_1^2	r_2^2	...	...	...	r_2^2
.						
i	r_1^i	r_2^i	...	...	...	r_6^i
.						
.						
N	r_1^N	r_2^N	...	...	...	r_6^N
r_Σ	$\sum_{i=1}^{N} r_1^i$	$\sum_{i=1}^{N} r_2^i$	...	...	...	$\sum_{i=1}^{N} r_6^i$

Метод суммарного ранга

В таблице 1 в (N+1)-й строке стоят суммы рангов, полученных объектами от всех экспертов. По значению этих сумм все альтернативы могут быть упорядочены в соответствии с величиной суммарного ранга r_Σ. На первое место ставится альтернатива, у которой r_Σ минимально и т.д.

Принцип Кондорсе

Пусть эксперты упорядочили все альтернативы. Тогда табл. 1 может быть представлена в другом виде (таб. 2). В этой таблице каждый j-й столбец соответствует упорядоченному по предпочтениям j-го эксперта списку P_j ранжируемых альтернатив.

Таблица 2

Номер в ранжировке	Эксперты 1	2	... j	... N	Результирующее ранжирование $F(a_1, ..., a_n)$
1	.	.	a_2	.	a_{j1}
2	.	.	a_n	.	a_{i2}
.	.	.	.	.	.
i	.	.	a_1	.	.
.	.	.	.	.	.
n	.	.	a_i	.	a_{kn}

В таблице 2 для примера указана ситуация, когда j-й эксперт наибольшее предпочтение отдал альтернативе a_2 , следующая за ней идет альтернатива a_n и т.д. Последней по предпочтению оказалась альтернатива a_i.

Столбец $F(a_1, ..., a_n)$ соответствует результирующей ранжировке, основанной на объединении информации, полученной от всех экспертов. В этом столбце некоторый объект a_{pq} соответствует альтернативе a_p в исходной индексации до ранжирования, которая получила номер q в результирующем ранжировании. Таким образом, последняя строка в табл. 1 определяет результирующее ранжирование F в табл. 2.

Различные методы поиска наилучшей альтернативы были разработаны из-за того, что часто определение наилучшей альтернативы путем простого подсчета голосов по правилу большинства оказывается недостаточно обоснованным.

Для поиска наилучшей альтернативы французский ученый Кондорсе предложил следующий подход. На основании анализа таблицы 2 для каждой пары альтернатив a_l, a_k; l, k = 1,…, n подсчитаем число s_{lk} - это число экспертов, считающих альтернативу a_l более предпочтительной, чем a_k.

Если $s_{lk} \geq s_{kl}$, то альтернатива a_l признается более предпочтительной, чем a_k. Предпочтительность обозначается специальным символом: $a_l \succ a_k$.

Необходимо отметить следующее. Принято считать, что на числовой оси значения возрастают слева направо. Также обычно считают, что большее значение некоторого свойства объекта, которое характеризует качество, говорит о лучшем качестве. В этом случае для двух наблюдений на числовой оси $x_i<x_j$, где $x_i=x(a_i)$, $x_j=x(a_j)$ справедливо $a_i \prec a_j$. Таким образом, направления знаков «<» и «≺» совпадают, т.е. a_i хуже (менее предпочтительно) a_j и предшествует a_j по расположению на числовой оси.

При ранжировании альтернатив мы не вводили никакой числовой оси. Так как более предпочтительные альтернативы выбирались первыми, то ранжирование выстраивает альтернативы в порядке ухудшения качества слева направо, т.е. улучшения качества в обратном порядке справа налево. Поэтому запись $a_i \succ a_j$ означает, что в построенном ранжировании a_i по-прежнему хуже a_j, но следует за a_j по расположению в ранжировании. Очевидно, что запись $a_j \succ a_i$ отражает порядок альтернатив в ранжировании.

Альтернатива a_l объявляется наилучшей (альтернативой *Кондорсе*), если $s_{lk} \geq s_{kl}$ для всех $l \neq k$, т.е она является не менее предпочтительной относительно всех остальных альтернатив.

Таким образом, для поиска альтернативы Кондорсе строится квадратная таблица T размером n × n попарных сравнений альтернатив с элементами t_{lk}; l, k = 1,…,n, где

$$t_{lk} = \begin{cases} 1, \text{\textit{если} } s_{lk} \geq s_{kl} \\ 0, \text{\textit{в противном случае}} \end{cases}$$

Диагональные элементы такой таблицы являются единичными, т.к. всякая альтернатива является не менее предпочтительной самой себя. Альтернативе Кондорсе a_{i1} соответствует строка, которая полностью состоит из единиц.

Результирующее ранжирование $F(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ строится путем последовательного исключения очередной альтернативы Кондорсе из таблицы T и поиска следующей такой альтернативы среди оставшихся альтернатив.

Основным недостатком принципа Кондорсе является возникновение парадокса, когда альтернативы Кондорсе не существует. Например, в случае трех альтернатив этому соответствует случай: $s_{12} > s_{21}$, $s_{23} > s_{32}$, но $s_{13} < s_{31}$.

Принцип Борда.

Альтернативам, представленным в таблице 2, вместо рангов приписываются следующие числа: последней по предпочтениям - 0, предпоследней - 1 и т.д. Если через s_i обозначить сумму чисел, приписанных альтернативе a_i, то наилучшей альтернативой a_{i1} является альтернатива Борда, для которой имеем $\max s_i$, а результирующим объявляется ранжирование $a_i \succ a_j$

$a_{i1} \succ a_{i2} \succ \ldots \succ a_{in}$, для которого $s_{i1} \geq s_{i2} \geq \ldots \geq s_{in}$.

Принцип Борда также имеет недостатки. Например, альтернатива Кондорсе может оказаться невыбранной в качестве альтернативы Борда.

Метод «Медиан». Вычисляются значения r_{ij} — расстояние между мнениями i-го и j-го экспертов. Вычислять расстояние между двумя векторами (вектор — это мнение эксперта по кортежу проектов) можно по-разному. Расстояние в математике называется **нормой**. Есть пифагорова норма, манхэттенская, Минковского и т. д. В данной практической вычислим расстояние между мнениями экспертов по *манхэттенской норме*. Итак, расстояние мнений по манхэттенской норме — это сумма разностей (по абсолютной величине) мнений двух экспертов по каждой альтернативе.

Эти значения заносятся в таблицу (матрицу расстояний). Затем вычисляются значения R_i — расстояние от i-го эксперта до всех остальных — как сумма расстояний между мнением этого эксперта и остальных экспертов (табл. 3).

Таблица 3

	Эксперт 1	**Эксперт 2**	**Эксперт 3**	**Эксперт 4**	$\boldsymbol{R_i}$
Эксперт 1	0	r_{12}	r_{13}	r_{14}	$0 + r_{12} + r_{13} + r_{14} = R_1$
Эксперт 2	r_{21}	0	r_{23}	r_{24}	$r_{21} + 0 + r_{23} + r_{24} = R_2$
Эксперт 3	r_{31}	r_{32}	0	r_{34}	$r_{31} + r_{32} + 0 + r_{34} = R_3$
Эксперт 4	r_{41}	r_{42}	r_{43}	0	$r_{41} + r_{42} + r_{43} + 0 = R_4$
					$\min(R_1, R_2, R_3, R_4)$

Среди вычисленных суммарных расстояний ищется минимум из R_i. Мнение соответствующего i-го эксперта (с минимальным R) является самым средним и объявляется результатом экспертизы.

Пример. Пусть рассматривается 6 видов марок мобильных телефонам. Мы произвели опрос 6 независимых экспертов и получили ранжирование марок мобильных телефонов по критерию удобства работы с ними. Названия моделей мобильных телефонов заменим на символьные метки и результаты ранжирования оформим в таблицу 4.

Таблица 4

Место в ранжировке	**Эксперт 1**	**Эксперт 2**	**Эксперт 3**	**Эксперт 4**	**Эксперт 5**	**Эксперт 6**
1	a1	a3	a3	a1	a3	a3
2	a3	a1	a2	a3	a1	a1
3	a2	a5	a1	a2	a4	a4
4	a4	a2	a4	a4	a5	a5
5	a6	a4	a5	a6	a2	a2
6	a5	a6	a6	a5	a6	a6

1. Найдем наилучшую альтернативу методом суммарных рангов. Наиболее предпочтительной является альтернатива, имеющая минимальный суммарный ранг. Следующая по предпочтительности – альтернатива, имеющая минимальный

суммарный ранг из оставшихся и так далее. Оформим результаты в виде табл. 5.

Таблица 5. Поиск наилучшей альтернативы методом суммарных рангов

Эксперт	**a1**	**a2**	**a3**	**a4**	**a5**	**a6**
1	1	3	2	4	6	5
2	2	4	1	5	3	6
3	3	2	1	4	5	6
4	1	3	2	4	6	5
5	2	5	1	3	4	6
6	2	5	1	3	4	6
Суммарный ранг	**11**	**22**	**8**	**23**	**28**	**34**

Имеем следующее ранжирование по методу суммарных рангов:

a3≻ a1≻ a2 ≻a4≻ a5 ≻a6

2. Найдем наилучшую альтернативу по принципу Кондорсе. Допишем к таблице 4 результирующее ранжирование (суммарный ранг, последняя срока в таблице 5). Получим таблицу 6.

Таблица 6. Модификация таблицы 4

Место в ранжировке	**Эксперт 1**	**Эксперт 2**	**Эксперт 3**	**Эксперт 4**	**Эксперт 5**	**Эксперт 6**	**Результирующее ранжирование**
1	a1	a3	a3	a1	a3	a3	11
2	a3	a1	a2	a3	a1	a1	22
3	a2	a5	a1	a2	a4	a4	8
4	a4	a2	a4	a4	a5	a5	23
5	a6	a4	a5	a6	a2	a2	28
6	a5	a6	a6	a5	a6	a6	34

Для поиска наилучшей альтернативы по принципу Кондорсе посчитаем число s_{lk} - это число экспертов, считающих альтернативу a_l более предпочтительной, чем a_k. Для этого смотрим в таблицу 6. Начнем с пары альтернатив a1 и a2. Смотрим сколько экспертов поставило альтернативу a1 выше, чем a2. Получаем 5. Следовательно, для пары альтернатив a2 и a1 количество экспертов, поставивших a2 выше, чем a1 равно 1. И так далее. Результат представлен в таблице 7 (по строке идет индекс l, по столбцу – индекс k). По диагонали имеем для таблицы 7 пустоту (чтобы не путаться), а для таблицы 5 – единичку, т.к. это сравнение альтернативы самой с собой.

Таблица 7 Анализ каждой пары альтернатив

	5	2	6	6	6
1		0	4	3	6
4	6		6	6	6
0	2	0		3	6
0	3	0	3		4
0	0	0	0	2	

Если $s_{lk} \geq s_{kl}$, то альтернатива a_l признается более предпочтительной, чем a_k. Результаты представлены в таблице 8.

Таблица 8. Т

1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1

Наиболее предпочтительной альтернативой по принципу Кондорсе будет альтернатива, имеющая в строке максимальное количество единиц. Следующей по предпочтительности альтернативой будет с максимальным оставшимся числом единиц в строке и так до конца. Таким образом, из анализа таблицы 8 получим следующее ранжирование по принципу Кондорсе.

a3≻ a1≻ a2 ~a5≻ a4 ≻a6

3. Найдем наилучшую альтернативу по принципу Борда. Для этого альтернативам, представленным в таблице 5, вместо рангов припишем следующие числа: последнему по предпочтениям – 0, предпоследнему – 1 и т.д. Наилучшей будет альтернатива Борда с максимальной суммой чисел, приписанных альтернативе a_i. Следующей за ней будет альтернатива с максимальным числом из оставшихся и т.д. Результаты замены представлены в таблице 9.

Таблица 9. Поиск наилучшей альтернативы по принципу Борда.

Альтер-натива	Эксперт 1	Эксперт 2	Эксперт 3	Эксперт 4	Эксперт 5	Эксперт 6	Сумма чисел
a1	5	4	3	5	4	4	25
a2	3	2	4	3	1	1	14
a3	4	5	5	4	5	5	28
a4	2	1	2	2	3	3	13
a5	0	3	1	0	2	2	8
a6	1	0	0	1	0	0	2

Таким образом, имеем следующее ранжирование по принципу Борда:

a3≻ a1≻ a4 ≻a2≻ a5 ≻a6

4. Найдем наилучшую альтернативу по методу медиан.

Используя таблицу 5, вычислим в матрице расстояние между мнениями эксперта 1 и эксперта 2 по *манхэттенской норме*:

$$r_{12} = |1-2| + |3-4| + |2-1| + |4-5| + |6-3| + |5-6| = 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 1 = 8.$$

Эти значения заносятся в таблицу (матрицу расстояний).

Таблица 10. Матрица расстояний

	Эксперт 1	**Эксперт 2**	**Эксперт 3**	**Эксперт 4**	**Эксперт 5**	**Эксперт 6**	R_i
Эксперт 1	0	8	6	0	8	8	0+8+6+0+8+8= *30*
Эксперт 2	8	0	6	8	4	4	8+0+6+8+4+4=30
Эксперт 3	6	6	0	6	5	5	6+6+0+6+5+5=28
Эксперт 4	0	8	6	0	8	8	0+8+6+0+8+8=30
Эксперт 5	8	4	5	8	0	0	8+4+5+8+0+0=25
Эксперт 6	8	4	5	8	0	0	8+4+5+8+0+0=25
							5 и 6

Очевидно, что наименьшее расстояние от остальных мнений — у экспертов 5 и 6, поэтому их мнение объявляется результатом.

a3≻ a1≻ a4 ≻a5≻ a2 ≻a6

Задание на работу

1. Взять 5 альтернатив из предыдущей практической работы
2. Выступить в роли эксперта и отранжировать альтернативы, попросить еще 4-х друзей отранжировать ваши альтернативы.
3. На основании полученных ранжировок рассматриваемого множества альтернатив необходимо выбрать наилучшую альтернативу, используя:

- Суммарный ранг;
- Принцип Кондорсе;
- Принцип Борда;
- Метод медиан

Контрольные вопросы

1. Что такое ранг и как его определяют?
2. Как определяется стандартизованный ранг?
3. Каким методом можно построить результирующую ранжировку?
4. В чем заключается принцип Кондорсе?
5. Как найти результирующую ранжировку методом Борда?
6. Какие виды шкал существуют?
7. Почему существуют различные принципы ранжирования?
8. В чем состоит парадокс Кондорсе?