Лекция 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОЖЕСТВ

План лекции:

1. Обзор содержания курса.
2. Основные понятия теории множеств.
3. Способы задания множеств.
4. Операции над множествами.
5. Теоретико-множественные тождества.
6. Прямое произведение множеств.

1. Обзор содержания курса

Дискретная математика – часть математики, которая зародилась в глубокой древности. Как следует из названия курса, главной его спецификой является дискретность, которая является антиподом непрерывности. Дискретность и непрерывность вместе составляют единство, которое характерно для математики. В качестве примера можно привести числовые системы: множество натуральных чисел – дискретный объект, а множество действительных чисел – непрерывный. Другой пример: при численном решении какой-либо задачи, связанной с исследованием и расчетом непрерывного объекта (расчет траектории движения материального тела, определение формы поверхности, преобразование непрерывного сигнала, анализ временных рядов и др.) главным этапом является дискретизация задачи, т. е. выбор адекватной дискретной модели, результаты расчета которой с заданной степенью точности позволяют найти искомые величины в непрерывной задаче.

Классическая математика – это математика непрерывных величин. Основное понятие классической математики, понятие предела, связано с представлением о непрерывной действительной прямой – континууме. Основная модель классической математики – система дифференциальных уравнений, описывающая движение по непрерывной траектории в фазовом пространстве.

Элементы дискретной математики зародились в рамках классической, но до середины XX века не занимали в ней заметного места.

В широком смысле дискретная математика включает в себя и такие сложившиеся разделы математики, как теория чисел, алгебра, математическая логика и ряд разделов, которые наиболее интенсивно стали развиваться в середине XX века в связи с научно-техническим прогрессом, прежде всего связанным с широким использованием компьютеров. Последнее привело к необходимости изучения сложных управляющих систем. В узком смысле слова дискретная математика ограничивается только этими новыми разделами. Именно в узком смысле понимается дискретная математика при изучении данного курса. К упомянутым новым разделам, составляющим содержание курса, относятся: комбинаторный анализ, теория графов и сетей, теория функциональных систем (теория булевых функций), теория конечных автоматов и формальных языков, теория алгоритмов. Кроме того, можно добавить следующие разделы, которые в данном курсе не рассматриваются: теория кодирования, целочисленное программирование и др.

В настоящее время дискретная математика является не только фундаментом математической кибернетики, но и важным звеном математического образования. Главная задача данного курса – это обучение методам и мышлению, характерным для дискретной математики.

2. Основные понятия теории множеств

Понятие *множества* является первичным и поэтому формально не может быть определено. Обычно множество объясняют, следуя основателю теории множеств Г.

Кантору, как совокупность объектов произвольной природы, рассматриваемую, как единое целое.

Объекты, составляющие множество, называют его *элементами*. Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита (X, Y, ...), элементы множеств – строчными буквами (x, y, ...).Утверждение «элемент x принадлежит множеству X» записывается следующим образом: $x \in X$ ($\in$ – символ принадлежности). В противном случае – $x \notin X$ (или $x \overline{\in} X$).

Если каждый элемент множества X входит в множество Y, то X называется *подмножеством* Y. При этом пишут: $X \subseteq Y$ или $Y \supseteq X$. Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то пишут $X \subset Y$ или $Y \supset X$. Здесь $\subseteq, \subset$, $\supseteq$, $\supset$ – символы включения. Множества X и Y равны, если они состоят из одних и тех же элементов, иначе говоря, если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* (обозначается $\varnothing$). Множество называется *истинным*, если оно не пустое.

Из определения подмножества следует, что каждое множество является подмножеством самого себя: $X \subseteq X$. Кроме того, считают, что пустое множество есть подмножество любого множества X : $\varnothing \subset X$.

Различают два вида подмножеств множества X: само X и $\varnothing$ называют *несобственными* подмножествами; все остальные подмножества, если они существуют, – *собственными*.

В теории множеств для удобства и краткости записей используют специальные обозначения:

$\forall$ – квантор общности (означающий «любой», «для всех», «каков бы ни был»);

$\exists$ – квантор существования (означающий «существует», «найдется», «можно найти»);

$\Rightarrow$ – импликация (символ следствия, означающий «влечет за собой).

С помощью этих символов условие $X \subset Y$ запишется так:

$$\forall x : x \in X \Rightarrow x \in Y .$$

Множество X называется *эквивалентным* множеству Y (обозначается $X \sim Y$), если между элементами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие. Различают *конечные* и *бесконечные* множества. Число элементов множества X называется его *мощностью* или *кардинальным числом* и обозначается $|X|$ или card X (англ. *cardinality* – мощность). Таким образом, конечное множество, содержащее n элементов, имеет мощность $|X| = n$. Если X эквивалентно множеству натуральных чисел N, то его называют *счетным* и его мощность обозначается через N_0. Множество X, эквивалентное множеству действительных чисел R, называется *континуальным*, а его кардинальное число c – *мощностью континуума*.

3. Способы задания множеств

Для задания множества существуют различные способы. Множество считают заданным, если о каждом элементе можно сказать, принадлежит он данному множеству или нет.

Задание множества с использованием общепринятых обозначений. Для числовых множеств имеем: N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; Q – множество рациональных чисел; R – множество действительных чисел; C – множество комплексных чисел.

Задание множества перечислением его элементов. Конечное множество можно задать перечислением его элементов и записать в виде

$$X = \{x_1,\ x_2, ...,\ x_n\}.$$

Например, {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} – множество десятичных цифр.

Задание множества с помощью характеристического свойства его элементов. Характеристическое свойство – это свойство, которым обладают все элементы данного множества и только они. Этот способ применим для конечных и бесконечных множеств.

Пусть $P(x)$ – утверждение, заключающееся в том, что элемент x обладает свойством P. Тогда запись

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

означает, что рассматривается множество всех элементов x, обладающих свойством P.

Например, отрезок [0, 1] действительной прямой можно определить следующим образом

$$[0,\ 1] = \{x \mid x \in R,\ 0 \le x \le 1\}.$$

Рекурсивное задание множества. Этот способ заключается в следующем:

1°. Указываются некоторые исходные элементы, входящие в множество.

2°. Описывается механизм, позволяющий получить новые элементы из имеющихся.

3°. Объявляется, что в множестве нет никаких других объектов кроме тех, которые можно получить из исходных, применяя описанный в п. 2° механизм.

Например, множество $X = \{1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots\} \subset N$ можно задать рекурсивно:

1°. $x = 1 \in X$.

2°. $\forall x \in X \Rightarrow 2 \cdot x \in X$.

3°. X – наименьшее подмножество натурального ряда, удовлетворяющее условиям 1° и 2°.

Условие 3° определяет X как пересечение всех множеств, удовлетворяющих условиям 1° и 2°.

В дальнейшем при рекурсивном задании множеств последний пункт, как правило, не указывается, но всякий раз это требование подразумевается.

В качестве еще одного примера рекурсивного задания множества определим совокупность всех слов в данном алфавите.

Пусть $X = \{x_1,\ x_2, \ldots, x_m\}$ – произвольное конечное множество, элементы которого будем называть буквами, а само множество алфавитом. Элементы определяемого множества X^* будем называть словами.

1°. Каждая буква является словом: $x_i \in X^*$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

2°. Результат приписывания к слову любой буквы является словом:

$$\forall x \in X^* \Rightarrow xx_1 \in X^*,\ xx_2 \in X^*,\ \ldots,\ xx_m \in X^*.$$

Например, если $X = \{0,\ 1\}$, то X^* содержит следующие элементы:

0, 1 (согласно 1°);

00, 01, 10, 11 (согласно 2°);

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 (согласно 2°) и так далее.

Теория множеств, рассматриваемая без ограничений на способы задания множеств, называется *наивной теорией множеств*. В этой теории еще при жизни ее создателя Г. Кантора были обнаружены многочисленные парадоксы. Приведем один из известных парадоксов Б. Рассела, открытый им в 1903 г.

Пусть M – множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли множество M само себя в качестве элемента? Если да, то, по определению M, оно не должно быть элементом M – противоречие. Если нет – то, по определению M, оно должно быть элементом M – вновь противоречие.

Этот парадокс имеет много популярных формулировок. Приведем некоторые из них.

1) Одному полковому брадобрею приказали «брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется». Как он должен поступить с собой?

2) В одной стране вышел указ: «Мэры всех городов должны жить не в своем городе, а в специальном Городе мэров». Где должен жить мэр Города мэров?

3) Некая библиотека решила составить библиографический каталог, в который входили бы все те и только те библиографические каталоги, которые не содержат ссылок на самих себя. Должен ли такой каталог включать ссылку на себя?

Для преодоления противоречий в наивной теории множеств было предложено несколько возможных ее аксиоматизаций, в рамках которых утверждение о существовании *множества всех множеств* было бы невыводимым.

4. Операции над множествами

Во многих случаях удается избежать противоречий наивной теории множеств, если выбрать некоторое так называемое *универсальное множество* U и ограничиться рассмотрением только его подмножеств.

Если некоторые множества взять в качестве исходных, то из них можно получить новые с помощью следующих операций.

Объединением множеств X и Y (обозначение $X \bigcup Y$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X или Y:

$$X \bigcup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}.$$

Вместо символа объединения $\bigcup$ используется также символ +.

Пересечением множеств X и Y (обозначение $X \bigcap Y$) называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств X и Y:

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}.$$

Для операции пересечения используются также другие обозначения:

$$X \bigcap Y = X \cdot Y = XY.$$

Аналогично определяются объединение и пересечение произвольной совокупности множеств X_α, $\alpha \in A$. Здесь A – множество индексов. Если A – множество n первых натуральных чисел, то употребляются обозначения $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$, а в случае если $A = N$, то будем писать $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$.

Разностью множеств X и Y (обозначение $X \setminus Y$) называется множество, состоящее из всех элементов X, не принадлежащих Y:

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}.$$

В отличие от двух предыдущих операций разность некоммутативна: $X \setminus Y \neq Y \setminus X$. Если $X \setminus Y = \varnothing$, то $X \subseteq Y$.

Симметрической разностью множеств X и Y (обозначение $X \Delta Y$) называется множество элементов X и Y, которые содержатся только в одном из этих множеств:

$$X \Delta Y = \{x \mid x \in (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X)\}.$$

Дополнением к множеству X (обозначение $\overline{X}$) относительно универсального множества U называется множество:

$$\overline{X} = U \setminus X \text{ или } \overline{X} = \{x \mid x \notin X\}.$$

Операции объединения, пересечения и дополнения часто называют *булевыми операциями* над множествами. Так как операция разности не обладает свойством ассоциативности, то ее выражают через другие операции, например, операции дополнения и пересечения:

$$A \setminus B = A \cdot \overline{B}.$$

Универсальное множество позволяет геометрически изображать множества и операции над ними с помощью *диаграмм Венна* (рис. 1).

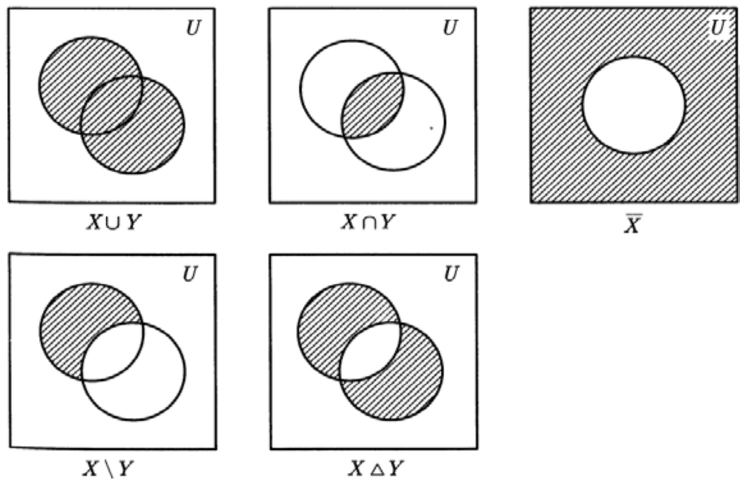


Рис. 1. Диаграммы Венна

5. Теоретико-множественные тождества

Пусть U – универсальное множество, а X, Y, Z – его подмножества. Тогда имеют место следующие тождественные равенства.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (X \bigcup Y)\bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z) \\ 2.\ (X \bigcap Y)\bigcap Z = (X \bigcup Y)\bigcap Z \end{array}\right\} \text{ – ассоциативность объединения и пересечения.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3.\ X \bigcup Y = Y \bigcup X \\ 4.\ X \bigcup Y = Y \bigcup X \end{array}\right\} \text{ – коммутативность объединения и пересечения.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5.\ (X \bigcup Y)\bigcap Z = (X \bigcap Z)\bigcup (Y \bigcap Z) \\ 6.\ (X \bigcap Y)\bigcup Z = (X \bigcup Z)\bigcap (Y \bigcup Z) \end{array}\right\} \text{ – дистрибутивность.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 7.\ X \bigcup X = X \\ 8.\ X \bigcap X = X \end{array}\right\} \text{ – идемпотентность.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 9.\ \overline{X \bigcup Y} = \overline{X} \bigcap \overline{Y} \\ 10.\ \overline{X \bigcap Y} = \overline{X} \bigcup \overline{Y} \end{array}\right\} \text{ – законы де Моргана.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 11.\ X \bigcup \overline{X} = U \\ 12.\ X \bigcap \overline{X} = \varnothing \end{array}\right\} \text{ – дополнимость.}$$

13. $\overline{\overline{X}} = X$ – закон двойного дополнения.

$$\left.\begin{array}{l} 14.\ X \bigcup \varnothing = X \\ 15.\ X \bigcup U = U \\ 16.\ X \bigcap \varnothing = \varnothing \\ 17.\ X \bigcap U = X \end{array}\right\} \text{ – существование универсальных границ.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 18.\ \overline{U} = \varnothing \\ 19.\ \overline{\varnothing} = U \end{array}\right\} \text{ – законы дополнения.}$$

Приведенная система тождеств является полной в том смысле, что любое соотношение между множествами является следствием этих тождеств: Справедливость равенств 1 – 19 можно установить, используя *принцип равнообъёмности*, согласно которому нужно доказать, что множества, стоящие в левой и правой частях равенства состоят из одних и тех же элементов. В качестве примера приведем доказательство равенства 9. Остальные тождества доказываются аналогично. Имеем:

$$x \in \overline{X \bigcup Y} \Rightarrow x \notin X \bigcup Y \Rightarrow x \notin X \text{ и } x \notin Y \Rightarrow x \in \overline{X} \text{ и } x \in \overline{Y} \Rightarrow x \in \overline{X} \bigcap \overline{Y};$$

$$x \in \overline{X} \bigcap \overline{Y} \Rightarrow x \in \overline{X} \text{ и } x \in \overline{Y} \Rightarrow x \notin X \text{ и } x \notin Y \Rightarrow x \notin X \bigcup Y \Rightarrow x \in \overline{X \bigcup Y}.$$

6. Прямое произведение множеств

Прямым произведением множеств X и Y называют множество $X \times Y$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $(x,\ y)$, такие, что $x \in X$, $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x,\ y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Эта операция над множествами, в отличие от рассмотренных ранее, изменяет природу элементов: в новом множестве элементами являются пары.

Прямое произведение в общем случае не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности: $X \times Y \neq Y \times X$, $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$.

Пусть теперь даны n множеств: $X_1,\ X_1,\ ...,\ X_n$. Упорядоченный набор из n элементов, таких, что $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2, \ldots,$ $x_n \in X_n$, называется *вектором* или *кортежем*. Множество таких векторов представляет собой прямое произведение множеств $X_1,\ X_1,\ ...,\ X_n$:

$$X_1 \times X_2 ... \times X_n = \{(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in X_2,\ ...,\ x_n \in X_n\}.$$

Если $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, то множество $X_1 \times X_2 \times \ ... \times X_n$ называется *степенью* (прямой) множества X и обозначается через X^n.

Проекцией вектора $v = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ на i-ю ось (обозначение $\text{пр}_i v$) называется его i-я компонента. Проекцией вектора v на оси с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ называется вектор $(x_{i_1}, x_{i_2},\ ..., x_{i_k})$ длины k (обозначение $\text{пр}_{i_1, i_2, ..., i_k} v$).

Пусть V – множество векторов одинаковой длины. Тогда проекцией множества V на i-ю ось называется множество проекций всех векторов на i-ю ось: $np_i V = \{np_i v \mid v \in V\}$. Аналогично определяется проекция множества V на несколько осей: $np_{i_1, ..., i_k} V = \{np_{i_1, ..., i_k} v \mid v \in V\}$.

Пример 1. Пусть $X = Y = R$. Тогда прямым произведением $X \times Y = R^2$ является множество точек плоскости, то есть пар вида $(x,\ y)$, где $x,\ y \in R$ и являются координатами точек плоскости.

Координатное представление точек плоскости, предложенное французским математиком и философом Р. Декартом, является исторически первым примером прямого произведения. Потому прямое произведение называют также *декартовым*.

Пример 2. Пусть $X = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$, $Y = \{1,\ 2,\ ...,\ 8\}$. Тогда $X \times Y$ – множество, содержащее обозначения всех 64 клеток шахматной доски.

Лекция 2. СООТВЕТСТВИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ, ОТНОШЕНИЯ

План лекции:
7. Соответствие между множествами.
8. Понятие отображения множеств.
9. Отношения на множестве.

7. Соответствие между множествами

Соответствием между множествами X и Y называется подмножество $G \subseteq X \times Y$. Если $(x, y) \in G$, то говорят, что y соответствует x при соответствии G. Множество $\text{пр}_1 G \subseteq X$ называется *областью определения*, а множество $\text{пр}_2 G \subseteq Y$ – *областью значений* соответствия. Если $\text{пр}_1 G = X$, то соответствие называется *всюду определенным* или *полностью определенным* (в противном случае – *частичным*); если $\text{пр}_2 G = Y$, то соответствие называется *сюръективным* или *сюръекцией*.

Множество всех $y \in Y$, соответствующих элементу $x \in X$, называется *образом* x в Y при соответствии G. Множество всех $x \in X$, которым соответствует элемент $y \in Y$, называется *прообразом* y в X при соответствии G.

Соответствие G называется *инъективным* или *инъекцией*, если прообразом любого элемента из $\text{пр}_2 G$ является единственный элемент из $\text{пр}_1 G$. Соответствие G называется *функциональным* или *однозначным*, если образом любого элемента из $\text{пр}_1 G$ является единственный элемент из $\text{пр}_2 G$. Соответствие G называется *взаимно однозначным* или *биекцией*, если оно всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.

8. Понятие отображения множеств

Отображением f множества X во множество Y называется функциональное соответствие (обозначение $f : X \to Y$). Множество X называется *областью определения* отображения, элемент $x \in X$ – *аргументом* отображения, элемент $f(x) \in Y$ – *образом* x при отображении f. При этом пишут $x \to f(x)$. Часто, когда множества X, Y – числовые, отображение называют *функцией*. Если числовое только множество Y, то отображение называют *функционалом*.

Образом подмножества $A \subseteq X$ при отображении f называется множество

$$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A\}.$$

Прообразом подмножества $B \subseteq Y$ при отображении f называется множество

$$f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

По аналогии с соответствиями различают сюръективные, инъективные и биективные отображения.

Пример 1. Обозначим через $R^+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$. Рассмотрим следующие три отображения

$$f : R \to R^+; \; g : R^+ \to R; \; h : R^+ \to R^+,$$

которые зададим одной формулой: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2$; $h(x) = x^2$. Они различны, так как различны исходные множества. При этом f является сюръективным, но не инъективным; g – инъективно, но не сюръективно; h – биективно.

Отображения вида $X \to X$ называются *преобразованиями* множества X. Преобразование e_X называется *тождественным*, если $\forall x \in X : e_X(x) = x$.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ – некоторые отображения. *Суперпозицией* этих отображений называется отображение $gf : X \to Z$, определяемое следующим образом:

$$(gf)(x) = g(f(x)),\ x \in X .$$

Отметим, что суперпозиция определена не для любых пар отображений. Однако суперпозиция двух преобразований одного и того же множества определена всегда.

Операция суперпозиции ассоциативна: $(hg)f = h(gf)$, где $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to V$ – отображения.

Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. Отображение g называется *обратным* к отображению f (а отображение f *обратным* к g), если

$$fg = e_Y,\ gf = e_X .$$

Обратное отображение обозначается f^{-1}. Если обратное отображение существует, то оно единственно. Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения дает следующая теорема.

Теорема 1. Отображение f имеет обратное тогда и только тогда, когда оно биективно.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$.

Необходимость. Пусть существует обратное отображение $f^{-1} = g : Y \to X$. Рассмотрим $\forall y \in Y$ и $x = g(y)$. Тогда $f(x) = f(g(y)) = y$, где x – прообраз y при отображении f. Таким образом $\forall y \in Y$ имеет прообраз x, т. е. f сюръективно.

Далее, если $x,\ x_1 \in X$, причем $f(x) = f(x_1)$, то $g(f(x)) = g(f(x_1))$. Следовательно, $e_X(x) = e_X(x_1)$, т. е. $x = x_1$ и f инъективно. Отсюда f биективно, и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть f биективно. Определим отображение $g : Y \to X$ следующим образом. Положим $g(y) = x$, если $f(x) = y$. В силу биективности f отображение g определено на всем Y, и $g = f^{-1}$. ■

9. Отношения на множестве

Бинарным отношением α на множестве X называется подмножество $\alpha \subseteq X^2$. Тот факт, что $x \in X$ находится в отношении α с $y \in X$, обозначается следующим образом: $x\alpha y$

Областью определения бинарного отношения α на множестве X называется множество

$$\delta_\alpha = \{x \mid \exists y \Rightarrow x\alpha y\},$$

а областью значений – множество

$$\gamma_\alpha = \{y \mid \exists x \Rightarrow y\alpha x\}.$$

Пример 2. Примеры отношений:

– отношение равенства «=» на множестве X состоит из всех пар вида $(x,\ x)$, $x \in X$. Если элемент x находится в отношении равенства к элементу y, то пишут $x = y$;

– отношение неравенства «$<$» на множестве R: $\{(x,\ y) \in R^2 \mid x < y\}$;

– отношение делимости «|»на множестве Z: $\{(x, y) \in Z^2 \mid \exists c \in Z :\ x = y \cdot c\}$.

Так как отношения определяются как подмножества, то над ними можно производить теоретико-множественные операции.

Дополнением бинарного отношения α на множестве X считается множество

$$\overline{\alpha} = X^2 \setminus \alpha .$$

Например, если α – отношение «=», то $\overline{\alpha}$ =«$\neq$», а $\alpha+\overline{\alpha}$ =«$\leq$».

Обратным отношением (*обращением*) для бинарного отношения α называется множество

$$\alpha^{-1}=\{(x,\ y)\,|\,(y,\ x)\in\alpha\}.$$

Произведением отношений α и β называется отношение

$$\alpha\cdot\beta=\{(x,\ y)\ \mid\ \exists c:\ (x,\ c)\in\alpha\wedge(c,\ y)\in\beta\}.$$

Всякое подмножество $\rho\subseteq X^n$ называют n*-местным отношением* на множестве X.

Совокупность всех отношений на множестве X, для которых заданы операции суммы, произведения, разности, дополнения и обращения, образуют *алгебру отношений* (*исчисление отношений*) множества X. В частности, последняя находит применение при разработке реляционных баз данных.

Свойства отношений. Отношения делятся на различные виды в зависимости от того, обладают или не обладают некоторыми свойствами.

1. *Рефлексивность*: $\forall x\in X: x\alpha y$. Например, рефлексивно на множестве прямых отношение «прямая x пересекает прямую x».

2. *Симметричность*: $\forall x,\ y\in X: x\alpha y\Rightarrow y\alpha x$. Например, симметрично отношение параллельности на множестве прямых плоскости.

3. *Транзитивность*: $\forall x,\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}\in X: x\alpha y\wedge y\alpha z\Rightarrow x\alpha z$. Например, транзитивно на множестве отрезков отношение «отрезок x длиннее отрезка y».

Среди различных бинарных отношений выделяются два специальных типа, играющих важную роль в разнообразных математических конструкциях и доказательствах.

Отношение эквивалентности. Отношение α на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Отношение эквивалентности $x\alpha y$ часто обозначают: $x\sim y$.

Пример 3. Примеры отношения эквивалентности:

– отношение «одного роста» на множестве X людей;

– отношение подобия на множестве треугольников;

– отношение принадлежности двух студентов к одной студенческой группе.

Смежным классом (*классом эквивалентности*) элемента x по эквивалентности α называется множество

$$[x]_\alpha=x/\alpha=\{y\,|\,x\alpha y\}.$$

Любой элемент $y\in[x]_\alpha$ называется *представителем* этого класса.

Множество классов эквивалентности элементов множества X по эквивалентности α называется *фактор-множеством* X *по* α и обозначается X/α.

С каждым отношением эквивалентности связано разбиение множества на непересекающиеся подмножества, которое лежит в основе всевозможных классификаций.

Разбиением множества X называется всякое представление этого множества в виде суммы непересекающихся подмножеств:

$$X=\bigcup_{i\in I}X_i,\ i\neq j\Rightarrow X_i\cap X_j=\varnothing.$$

Здесь I – множество индексов, которое может быть конечным, счетным или несчетным. Множества X_i называют *слоями* разбиения.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы отношение α позволяло разбить множество X на классы, необходимо и достаточно, чтобы α было отношением эквивалентности.

Пример 4. Плоскость R^2 разбита на прямые

$$\{(x,y)\,|\,x+y=c\},\ c\in R.$$

Этому разбиению соответствует отношение α такое, что $(x_1, y_1)\alpha(x_2, y_2)$ если $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

Покажем, что каждая эквивалентность $\alpha \subseteq X^2$ отвечает некоторому разбиению множества X.

Для каждого $x \in X$ обозначим через $[x]$ класс всех элементов, эквивалентных x:

$$[x] = \{y \mid y\alpha x\}.$$

Из рефлексивности α следует, что $x \in [x]$. Далее, если $y \in [x]$, то есть $y\alpha x$, то $\forall z \in [y] \Rightarrow z\alpha y$. Из транзитивности имеем, что $z\alpha x$, то есть $z \in [x]$. Таким образом, $[y] \subseteq [x]$. В силу симметричности отношения $y\alpha x \Rightarrow x\alpha y$, то есть $x \in [y]$. Повторяя рассуждения, получим, что $[x] \subseteq [y]$. Следовательно, $[x] = [y]$. Таким образом, каждый элемент $x \in X$ входит в некоторый класс $[x]$ и различные классы не пересекаются, то есть классы образуют разбиение множества X, отвечающее отношению эквивалентности α.

Приведем примеры использования отношения эквивалентности для образования математических понятий.

1. *Понятие вектора*. Сначала вводится понятие направленного отрезка, как пары точек $(A,\ B)$. Два отрезка $(A,\ B)$ и $(C,\ D)$ объявляются эквивалентными, если середины отрезков $(A,\ D)$ и $(C,$ B$)$ совпадают. Далее проверяется, что это отношение между направленными отрезками рефлексивно, симметрично и транзитивно. Класс эквивалентных отрезков и есть вектор.

2. *Построение рациональных чисел из целых*. Рассмотрим всевозможные пары $(a,\ b)$ из целых чисел такие, что $b \neq 0$. Пары $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ объявляются эквивалентными, если $a \cdot d = b \cdot c$. Далее проверяется рефлексивность, симметричность и транзитивность. Класс эквивалентных пар – рациональное число.

Отношение порядка. Бинарное отношение β на множестве X называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Последнее свойство означает: $x\beta y \wedge y\beta x \Rightarrow x = y$.

Пример 5. Примеры отношений порядка:

– отношение «$\leq$» на множестве действительных чисел. Отношение «$<$» порядком не является, так как оно не рефлексивно;

– отношение «$\subseteq$» на множестве подмножеств некоторого множества;

– на множестве двоичных слов длины n можно ввести отношение порядка следующим образом. Пусть $\tilde{\alpha} = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ и $\tilde{\beta} = \beta_1\beta_2...\beta_n$ – двоичные слова. Положим $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, если для $\forall i\ \tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\beta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть β – отношение порядка на множестве X. Элементы $x, y \in X$ называются *сравнимыми*, если $x\beta y$ или $y\beta x$, в противном случае – *несравнимыми*.

Порядок называется *линейным*, если любые два элемента сравнимы. В противном случае говорят о *частичном* порядке. Множество A с заданным на нем порядком (частичным или линейным) называется *упорядоченным* (частично или линейно). Первое отношение в примере 5 задает линейный порядок, два других отношения порядка – частичные. Например, двоичные слова 011 и 110 несравнимы.

Элемент a частично упорядоченного множества X называется *максимальным* (*минимальным*), если из того, что $a \leq x$ следует $a = x$. Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* (*наименьшим*), если $x \leq a$ ($a \leq x$) для всех $x \in X$.

Верхней (нижней) гранью подмножества Y частично упорядоченного множества X называется такой элемент $x \in X$, что

$$\forall y \in Y \Rightarrow y \leq x\ (\forall y \in Y \Rightarrow x \leq y).$$

Точной верхней (нижней) гранью подмножества $Y \subseteq X$ называется наименьшая верхняя (наибольшая нижняя) грань для Y. Точная верхняя и точная нижняя грани обозначаются соответственно $\sup Y$ и $\inf Y$.

Линейный порядок на множестве X называется *полным*, если каждое непустое подмножество множества X имеет наименьший элемент. В этом случае множество X называется *вполне упорядоченным*.

Частично упорядоченное множество X называется *решёткой*, или *структурой*, если для любых двух элементов $x,\ y \in X$ существует точная нижняя и точная верхняя грани.

Пример 6. Примеры решёток:

– множество всех подмножеств данного множества, упорядоченное по включению;

– всякое линейно упорядоченное множество; причем, если $x \le y$, то $\sup(x,\ y) = y$, $\inf(x,\ y) = x$.

Лекция 3. Общие ПРАВИЛА комбинаторики. Метод включений и исключений

1. Краткий исторический очерк развития комбинаторики

Комбинаторным анализом, или короче комбинаторикой, называют часть дискретной математики, в которой изучаются перечислительные задачи теории конечных множеств. К типичным комбинаторным задачам относятся:

1) установление существования и подсчет числа подмножеств конечных множеств, обладающих заданными свойствами;

2) определение числа способов, которыми можно расположить элементы конечных множеств при заданных условиях на эти расположения и др.

Комбинаторика возникла в XVI веке в связи с проблемами азартных игр (игра в кости, карточные игры и лотереи). Одним из первых занялся подсчетом числа возможных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Первые теоретические исследования проблем комбинаторики были проведены в XVII веке французскими учеными Паскалем и Ферма. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера. Тогда же сложилась и принятая в комбинаторике терминология (сочетания, размещения, перестановки и др.). К началу XX века комбинаторика считалась в основном завершенным разделом математики, лежащим вне основного русла развития математики и ее приложений. Но с середины XX века роль комбинаторики возросла в связи с развитием теории вычислительных систем и теории информации. В настоящее время комбинаторика является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики.

2. Правило суммы

Это правило позволяет найти число элементов в объединении двух конечных множеств X и Y:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|. \qquad (1)$$

Если множества X и Y не пересекаются ($X \cap Y = \varnothing$), то

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|. \qquad (2)$$

Несмотря на кажущуюся тривиальность этого правила, оно применяется в большинстве комбинаторных задач. Идея его применения состоит в том, что, если в исходной задаче прямой подсчет затруднителен, то нужно все изучаемые комбинации разбить на несколько классов, причем каждая комбинация должна входить только в один класс. В этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Иногда правило суммы формулируют следующим образом: *если объект X можно выбрать m способами, а объект Y – n способами, то выбор «либо X , либо Y » можно осуществить $m+n$ способами.*

Пример 1. Сколько имеется путей из вершины a в вершину b на решетке, показанной на рис. 1?

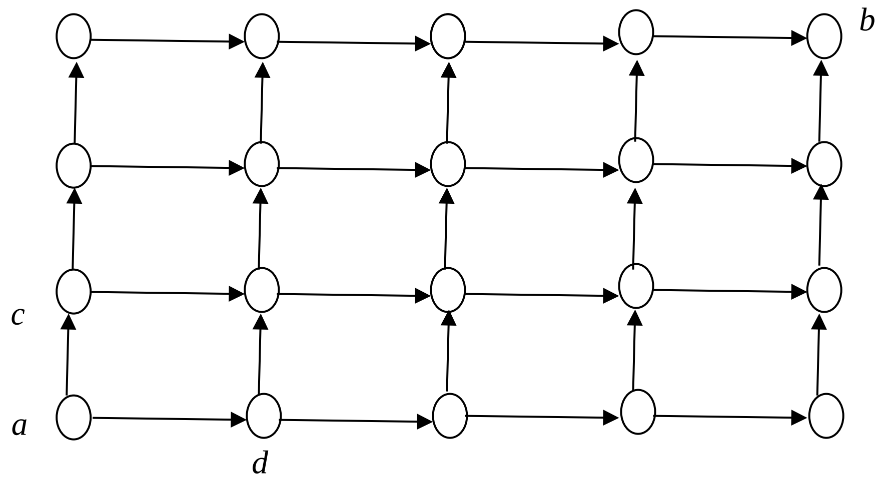


Рис.1. Решетка размером $[4\times 5]$

Обозначим множество всех путей из a в b через L_{ab} и разобьем его на два непересекающиеся подмножества: L_{acb} – множество путей, проходящих через вершину c, L_{adb} – множество путей, проходящих через вершину d. Тогда $|L_{ab}| = |L_{acb}| + |L_{adb}|$.

Очевидно, что искомое количество путей зависит только от размеров решетки. Обозначим через $l_{m,\,n}$ количество путей в решетке размером $[m\times n]$, где m, n – соответственно количество горизонтальных и вертикальных путей. Тогда $l_{m,\,n} = l_{m-1,\,n} + l_{m,\,n-1}$, причем $l_{m,\,n} = l_{n,\,m}$. Пользуясь этим соотношением для данного примера $(m=4,\ n=5)$, получим:

$$l_{4,\,5} = l_{3,\,5} + l_{4,\,4} = l_{2,\,5} + l_{3,\,4} + l_{3,\,4} + l_{4,\,3} = l_{2,\,5} + 3\cdot l_{3,\,4} = l_{1,\,5} + l_{2,\,4} + 3\cdot(l_{2,\,4} + l_{3,\,3}) = l_{1,\,5} + 4\cdot l_{2,\,4} + 3\cdot l_{3,\,3} =$$
$$= l_{1,\,5} + 4\cdot(l_{1,\,4} + l_{2,\,3}) + 3\cdot(l_{2,\,3} + l_{3,\,2}) = l_{1,\,5} + 4\cdot l_{1,\,4} + 10\cdot l_{2,\,3} = l_{1,\,5} + 4\cdot l_{1,\,4} + 10\cdot(l_{1,\,3} + l_{2,\,2}) =$$
$$= l_{1,\,5} + 4\cdot l_{1,\,4} + 10\cdot l_{1,\,3} + 10\cdot(l_{1,\,2} + l_{2,\,1}) = l_{1,\,5} + 4\cdot l_{1,\,4} + 10\cdot l_{1,\,3} + 20\cdot l_{1,\,2} = 1 + 4\cdot 1 + 10\cdot 1 + 20\cdot 1 = 35.$$

3. Правило произведения

Это правило позволяет подсчитать число кортежей, которые можно составить из элементов данных конечных множеств. Для двух множеств X и Y

$$|X\times Y| = |X|\cdot|Y|. \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что число упорядоченных пар, которые можно составить из элементов множеств X и Y равно произведению числа элементов в этих множествах.

Это правило можно сформулировать иначе:

если объект X можно выбрать m способами и после каждого из таких выборов другой объект Y можно выбрать n способами, то выбор « X и Y » можно осуществить $m\cdot n$ способами.

По индукции правило умножения можно распространить на любое число сомножителей в декартовом произведении:

$$|X_1\times\ldots\times X_n| = |X_1|\cdot\ldots\cdot|X_n|. \tag{4}$$

Наиболее часто последнее равенство применяется, когда $X_1 = \ldots = X_n = X$:

$$|X^n| = |X|^n. \tag{5}$$

В этом случае множество X называют алфавитом, его элементы – буквами, а элементы декартова произведения X^n – словами в алфавите X. Слова записывают как в обычном языке, то есть без разделения букв запятыми и без внешних скобок: $x_1x_2...x_n$. Число n называют длиной слова.

Пусть $|X| = m$. Тогда правило (5) можно сформулировать следующим образом:

число слов длины n в алфавите из m букв равно m^n.

Пример.2. Из 80 студентов 40 играют в футбол, а 50 – в волейбол, причем 27 студентов играют и в футбол и в волейбол. Сколько студентов играют хотя бы в одну из этих игр? Сколько студентов играют лишь в одну из этих игр? Сколько студентов не играют ни в одну из этих игр?

Пусть X – множество студентов, играющих в футбол, Y – множество студентов, играющих в волейбол. Тогда $|X| = 40$, $|Y| = 50$, $|A \bigcap B| = 27$.

Число студентов, играющих хотя бы в одну из этих игр, согласно формуле (2.1): $|X \bigcup Y| = 40 + 50 - 27 = 63$. Число студентов, играющих только в футбол: $|X| - |X \bigcap Y|$, а только в волейбол: $|Y| - |X \bigcap Y|$. Число студентов, играющих только в одну из этих игр: $|X| + |Y| - 2 \cdot |X \bigcap Y| = 40 + 50 - 2 \cdot 27 = 36$. Число студентов, не играющих ни в одну из этих игр: $|\overline{X} \bigcap \overline{Y}| = 80 - |X \bigcap Y| = 80 - 63 = 17$.

Пример 3. Сколько существует 6-значных телефонных номеров?

Алфавит состоит из 10 цифр, номер – слово длины 6 в этом алфавите. Поэтому количество номеров равно 10^6.

Пример 4. Найти число слов, содержащих 4 буквы, в которых любые две соседние буквы различны (число букв в алфавите равно 33).

Первую букву можно выбрать 33-мя способами, вторую, третью и четвертую – 32 способами. Число слов равно $33 \cdot 32^3 = 1081344$.

4. Правило биекции

Это правило, которое называется также *принципом взаимно однозначного соответствия*, формулируется следующим образом:

если между множествами X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), то $|X| = |Y|$.

В качестве примера применения этого принципа найдем мощность множества всех подмножеств данного множества X. Такое множество называют *булеаном* множества X и обозначают символом $B(X)$.

Пусть X – n-множество. Так как мощность множества не зависит от природы его элементов, то можно принять $X = \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$.

Поставим в соответствие произвольному подмножеству $Y \subseteq X$ двоичное слово $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ по следующему правилу:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in Y; \\ 0, \text{ если } i \notin Y; \end{cases} \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Это соответствие взаимно однозначное. Отсюда следует, что число всех подмножеств n-множества равно числу двоичных слов длины n, то есть $|B(X)| = 2^n$.

5. Метод включений и исключений

Поставим задачу подсчитать количество элементов в объединении конечных множеств $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_m$, которые могут иметь непустые пересечения между собой, т. е. это объединение в общем случае не является разбиением.

Для двух множеств имеем формулу (1). Обозначим $X_1 \bigcup X_2 = X$ и применим эту формулу для трех множеств, используя дистрибутивность операций объединения и пересечения множеств:

$$\begin{gathered}\left|X_1 \bigcup X_2 \bigcup X_3\right| = \left|X \bigcup X_3\right| = |X| + |X_3| - \left|X \bigcap X_3\right| = \left|X_1 \bigcup X_2\right| + |X_3| - \left|X_1 \bigcap X_3 \bigcup X_2 \bigcap X_3\right| = \\ = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cdot X_2| - |X_1 \cdot X_3| - |X_2 \cdot X_3| + |X_1 \cdot X_2 \cdot X_3|.\end{gathered} \tag{6}$$

В результате по индукции получаем *формулу включений и исключений*:

$$\begin{gathered}\left|\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right| = \sum_{i=1}^{m} |X_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} \left|X_i \bigcap X_j\right| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} \left|X_i \bigcap X_j \bigcap X_k\right| - \ldots + \\ +(-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \left|X_{i_1} \bigcap X_{i_2} \bigcap \ldots \bigcap X_{i_k}\right| + \ldots + (-1)^{m+1} \cdot \left|X_1 \bigcap X_2 \bigcap \ldots \bigcap X_m\right|.\end{gathered} \tag{7}$$

Название этой формулы подчеркивает использование последовательных включений и исключений элементов подмножеств.

Часто формулу (7) записывают в другом виде. Рассмотрим некоторое N-множество элементов Y и m-множество свойств $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$, которыми элементы могут обладать или не обладать. Пусть подмножество $X_i \subseteq Y$ состоит из элементов, обладающих свойством p_i, $i = 1, \ldots, m$. Тогда подмножество $X = \left|\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right|$ объединяет элементы из Y, которые обладают хотя бы одним из свойств множества P. Дополнение $\overline{X}$ составляют элементы, которые не обладают ни одним из свойств p_i, $i = 1, \ldots, m$. Пересечения вида $\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}$ объединяют элементы, обладающие одновременно свойствами $p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$. Если обозначить число таких элементов через $N(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$, то для числа элементов множества $\overline{X}$ имеем *формулу обращения*

$$\begin{gathered}N(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m) = N - \sum_{i=1}^{m} N(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le m} N(p_i, p_j) - \ldots + \\ +(-1)^k \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} N(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}) + \ldots + (-1)^m \cdot N(p_1, \ldots, p_m).\end{gathered} \tag{8}$$

Использование формулы (8) в комбинаторике называют *методом включений и исключений.*

Пример 5. Рассмотрим слова длины n в алфавите $\{0, 1, 2\}$. Сколько имеется слов, в которых встречаются все три цифры?

Обозначим через X_i множество всех слов, в которых не встречается цифра i, $i = 0, 1, 2$. Тогда $|X_0| = |X_1| = |X_2| = 2^n$. Кроме того, $\left|X_0 \bigcap X_1\right| = \left|X_0 \bigcap X_2\right| = \left|X_1 \bigcap X_2\right| = 1$. Наконец, $\left|X_0 \bigcap X_1 \bigcap X_2\right| = 0$. В множество $X_0 \bigcup X_1 \bigcup X_2$ входят слова, в которых отсутствует хотя бы одна цифра. По формуле (7)

$$\left|X_0 \bigcup X_1 \bigcup X_2\right| = 2^n + 2^n + 2^n - 1 - 1 - 1 + 0 = 3 \cdot (2^n - 1).$$

По формуле обращения число слов, в которых присутствуют все три цифры, равно $3^n - 3 \cdot (2^n - 1) = 3 \cdot (3^{n-1} - 2^n + 1)$.

Лекция 4. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ

План лекции:
1. Понятие выборки.
2. Размещения.
3. Перестановки.
4. Сочетания.
5. Свойства чисел C_n^k.
6. Задача о беспорядках.

1. Понятие выборки

Набор элементов $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ из множества $X = \{x_1, ..., x_n\}$ называется *выборкой* объема k из n элементов или (n, k)-выборкой. Выборка называется *упорядоченной*, если порядок следования элементов в ней задан. Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются *различными*. Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется *неупорядоченной*. В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов. В зависимости от способа формирования все выборки в комбинаторике классифицируют как размещения, перестановки и сочетания с повторениями и без повторений элементов.

2. Размещения

k*-размещением с повторениями* из n элементов называется упорядоченная (n, k)-выборка, в которой элементы могут повторяться. Число всех таких выборок, которые отличаются друг от друга составом элементов или их порядком, равно числу векторов в декартовом произведении X^k. Это число обозначают $\overline{A}_n^k$ (от французского слова arrangement – размещение). По правилу произведения получаем

$$\overline{A}_n^k = |A|^k = n^k. \tag{1}$$

Пример 1. Для запирания сейфа используется диск, на который нанесены 12 символов, а секретное слово состоит из 5 символов. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Общее число комбинаций равно $\overline{A}_{12}^5 = 12^5 = 248832$. Значит, неудачных попыток может быть 248831.

k*-размещением без повторений* из n элементов называется упорядоченная (n, k)-выборка, в которой элементы не повторяются. Число всех упорядоченных k-множеств с различными элементами, которые можно составить из элементов n-множества X, обозначают A_n^k.

Для вычисления A_n^k необходимо сделать k выборов. 1-й элемент можно выбрать n способами, 2-й – ($n-1$) способами и т. д. Последний k-й элемент можно выбрать $(n-k+1)$ способами. По правилу произведения

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Здесь $n! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot(n-1)\cdot n$ – «n-факториал» (0!=1!=1).

Пример 2. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Ответ: $A_{25}^4 = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 303600$.

3. Перестановки

Решим следующую комбинаторную задачу.

Сколькими способами можно упорядочить n-множество X ?

Перестановками без повторений называют различные упорядоченные n-множества, которые состоят из одних и тех же элементов, а отличаются друг от друга лишь порядком. Число таких перестановок обозначают P_n (от французского слова permutation – перестановка).

Формулу для P_n получаем из выражения (2) при $k = n$:

$$P_n = A_n^n = n!. \tag{3}$$

Пример 3. Сколькими способами можно посадить на скамейку 9 человек?

Ответ: P_9=9!=362880.

К *перестановкам с повторениями* приводит следующая задача.

Имеется n-множество X, состоящее из k различных элементов ($k \le n$). Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа,…, n_k элементов k-го типа?

Перестановки элементов каждого типа можно делать независимо друг от друга. Поэтому по правилу произведения элементы множества можно переставлять друг с другом $n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!$ способами так, что перестановки не изменятся. Тогда число различных перестановок с повторениями буде равно

$$P(n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}, \tag{4}$$

где $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$.

Пример 4. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

В данном случае $n = 9$, $n_1 = 1$ («М»), $n_2 = 4$ («и»), $n_3 = 3$(«с»), $n_4 = 1$ («п»). По формуле (4)

$$P(1,\ 4,\ 3,\ 1) = \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = 2520.$$

4. Сочетания

В тех случаях, когда не имеет значения порядок элементов в подмножестве некоторого множества, а лишь его состав, говорят о сочетаниях. К сочетаниям без повторений приводит следующая задача комбинаторики.

Сколько k-элементных подмножеств с различными элементами можно составить из элементов n-множества X ?

Такие подмножества называют *сочетаниями без повторений из n элементов по k* или короче $(n,\ k)$*-сочетаниями*, а их число обозначают C_n^k (от французского слова combinaison – сочетание). Другими словами, сочетаниями без повторений называется неупорядоченная $(n,\ k)$-выборка, в которой элементы не повторяются.

Формулу для числа сочетаний легко получить из формулы (2) для числа размещений. Выберем какое-нибудь k-элементное подмножество $Y \subseteq X$. Его можно упорядочить $k!$ способами, а число таких подмножеств есть C_n^k. Тогда справедлива формула

$$A_n^k = k!\cdot C_n^k, \tag{5}$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}. \quad (6)$$

Пример 5. Сколько всего партий играется в шахматном турнире с n участниками?

Ответ: C_n^2, так как каждая партия однозначно определяется двумя ее участниками.

Пусть множество X состоит из элементов n различных типов: $\{x_1,..., x_n\}$. Множество M, составленное из $x_1,..., x_n$, в котором элементы могут повторяться, называется *мультимножеством*. Для задания мультимножества надо указать число вхождений в него каждого элемента:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \ ... \ x_n \\ k_1 \ ... \ k_n \end{pmatrix}, \ k_i \geq 0, \ i = 1,..., \ n,$$

где $k_1 + ... + k_n = k$ – мощность мультимножества.

Число мультимножеств мощности k, составленных из элементов n-множества X, называют *сочетаниями с повторениями* и обозначают $\overline{C}_n^k$. Другими словами, сочетаниями с повторениями называется неупорядоченная $(n, \ k)$-выборка, в которой элементы могут повторяться.

Зашифруем каждую комбинацию из k элементов с помощью нулей и единиц: для каждого типа напишем столько единиц, сколько элементов этого типа входит в комбинацию, а различные типы отделим друг от друга нулями. Если элементы какого-нибудь типа не вошли в комбинацию, то надо писать два или большее число нулей. При этом получим k единиц и $n-1$ нулей. Тогда число $\overline{C}_n^k$ будет равно числу перестановок с повторениями из k единиц и $n-1$ нулей: $\overline{C}_n^k = P(k, \ n-1)$. Так как

$$P(k, \ n-1) = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}, \text{ то}$$

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k. \quad (7)$$

Встречаются задачи, в которых на сочетания с повторениями налагается дополнительное условие – в них обязательно должны входить элементы r фиксированных типов $(r \leq m)$. В этом случае $\overline{C}_m^{k-r} = C_{m+k-r-1}^{k-r}$. В частности, если $m \leq k$ и требуется, чтобы в k-подмножество с повторениями входил по крайней мере один элемент каждого из типов $(r = m)$, то получим C_{k-1}^{k-m} мультимножеств.

Пример 6. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Мощность мультимножества $k = 7$, число различных элементов $n = 4$. Число способов покупки пирожных равно $\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \dfrac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$.

5. Свойства чисел C_n^k

Числа C_n^k обладают целым рядом замечательных свойств, которые выражают различные соотношения между k-подмножествами n-множества X.

1) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Это свойство непосредственно следует из определения чисел C_n^k: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = |B(X)|$.

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Для доказательства поставим в соответствие подмножеству $Y \subseteq X$ его дополнение $\overline{Y} = X \setminus Y$. Это соответствие взаимно-однозначное. При этом, если $|Y| = k$, то $|\overline{Y}| = n - k$. Следовательно, по принципу биекции число подмножеств, составленных из k элементов столько же, сколько подмножеств, составленных из $n-k$ элементов.

Формально это свойство вытекает также из формулы (6).

3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Для доказательства разобьем все k-элементные подмножества множества X на два класса:

а) подмножества, не содержащие элемент n. Это будут k-элементные подмножества $(n-1)$-множества, поэтому число их равно C_{n-1}^k;

б) подмножества, содержащие элемент n. Если из каждого такого подмножества удалить элемент n, то получим $(k-1)$-элементные подмножества $(n-1)$-множества, число которых равно C_{n-1}^{k-1}. Свойство 3) вытекает, таким образом, из правила сложения.

Это свойство можно доказать также формально, используя формулу (6).

При $k=0$ имеем $C_n^0 = C_{n-1}^{-1} + C_{n-1}^0$. Так как $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, то полагают $C_{n-1}^{-1} = 0$. Кроме того, придерживаются соглашения $C_n^k = 0$ при $k > n$. Тогда свойство 3) позволяет последовательно вычислить числа C_n^k при $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Вычисления представляют в виде *треугольника Паскаля* по имени французского математика Б. Паскаля (1623 – 1662), в трудах которого он применяется. Это название исторически неточно, так как такую таблицу знал уже арабский математик Омар Хайям (XIII в.). Этот треугольник имеет вид:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}
$$

……………………………………………..

6. Задача о беспорядках

Как применение метода включений и исключений рассмотрим *задачу о беспорядках* или *задачу о встречах*, предложенную Монмором, которая представляет интерес для различных приложений.

Сколькими способами можно разместить n элементов множества $A = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ в n ячеек множества $B = \{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\}$ (по одному в каждой) так, чтобы никакой элемент a_i не попал в ячейку b_i?

Перестановку без повторений можно представить как биекцию множества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ на себя:

$$\pi : \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\} \to \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\},\ i \to \pi(i).$$

Перестановку π называют *беспорядком*, если в ней каждый элемент стоит не на своем месте, то есть $\pi(i) \neq i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Задача о беспорядках состоит в том, чтобы подсчитать число D_n перестановок-беспорядков. Например, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$.

Обозначим через X_i множество все перестановок π, в которых элемент i стоит на i-ом месте:

$$X_i = \{\pi \mid \pi(i) = i\},\ i = 1,\ 2,\ldots,\ n.$$

Множество $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ состоит из перестановок, в которых хотя бы один элемент стоит на своем месте, а все остальные перестановки будут беспорядками. Тогда по формуле обращения

$$D_n = n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right|. \tag{8}$$

Подсчитаем число перестановок в каждом из множеств X_i и в их пересечениях. Если $\pi(i) = i$, то сужение отображения π на множество $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\} \setminus \{i\}$ является биекцией этого множества на себя. Следовательно, $|X_i| = (n-1)!,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Множество $X_i \bigcap X_j$ составлено из перестановок π, в которых $\pi(i) = i$, $\pi(j) = j$. Сужение отображения π на множество $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\} \setminus \{i,\ \mathrm{j}\}$ является биекцией этого множества на себя. Следовательно, $\left|X_i \bigcap X_j\right| = (n-2)!,\ 1 \le i < j \le n$.

По индукции находим, что $\left|X_{i_1} \bigcap X_{i_2} \bigcap \ldots \bigcap X_{i_k}\right| = (n-k)!,\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

По формуле включений и исключений

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n}(n-1)! - \sum_{i<j}(n-2)! + \ldots + (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n}(n-k)! + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot 1.$$

В каждой из этих сумм слагаемые не зависят от индекса суммирования, поэтому для вычисления надо знать только их количество. В первой сумме n слагаемых, число слагаемых во второй сумме равно количеству всевозможных пар $\{i,\ j\}$, которые можно составить из n индексов $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то есть C_n^2. Аналогично в k-ой сумме имеем C_n^k слагаемых. Отсюда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = n \cdot (n-1)! - C_n^2 \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^{k+1} \cdot C_n^k \cdot (n-k)! + \ldots + (-1)^{n+1}.$$

После подстановки в уравнение (8) и несложных преобразований находим

$$D_n = n! \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой частичную сумму ряда, сходящегося к e^{-1}, поэтому $D_n \approx n!/e$. Можно показать, что D_n равно целому числу, ближайшему к $n!/e$: $D_n = E(n!/e)$, где $E(x)$ – целая часть числа x.

Лекции 5. МЕТОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

1. Основные определения и примеры рекуррентных соотношений

Часто решение одной комбинаторной задачи удается свести к решению аналогичных задач меньшей размерности с помощью некоторого соотношения, называемого рекуррентным (от латинского слова *recurrere* – возвращаться). Тем самым решение сложной задачи можно получить, последовательно находя решение более легких задач, и далее, пересчитывая по рекуррентным соотношениям, находить решение трудной задачи.

Рекуррентным соотношением k *-го порядка* между элементами последовательности чисел $(a_n)=(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ называется формула вида

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2},..., a_{n-k}),\ n = k+1,\ k+2,\ ... . \tag{1}$$

Частным решением рекуррентного соотношения является любая последовательность $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, обращающая соотношение (1) в тождество. Соотношение (1) имеет бесконечно много частных решений, так как первые k элементов последовательности можно задать произвольно. Например, последовательность $2, 4, 8, ..., 2^n, ...$ является решением рекуррентного соотношения $a_{n+2} = 3\cdot a_{n+1} - 2\cdot a_n$, так как имеет место тождество $2^{n+2} = 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 2^n$.

Решение рекуррентного соотношения k -го порядка называется *общим* , если оно зависит от k произвольных постоянных $c_1,\ c_2..., c_k$, и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения. Например, для соотношения

$$a_{n+2} = 5\cdot a_{n+1} - 6\cdot a_n \tag{2}$$

общим решением будет

$$a_n = c_1\cdot 2^n + c_2\cdot 3^n . \tag{3}$$

Действительно, легко проверить, что последовательность (3) обращает соотношение (2) в тождество. Поэтому надо только показать, что любое решение соотношения (2) можно представить в виде (3). Но любое решение этого соотношения однозначно определяется значениями a_1 и a_2. Поэтому надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие значения c_1 и c_2, что

$$\begin{cases} 2\cdot c_1 + 3\cdot c_2 = a, \\ 2^2\cdot c_1 + 3^2\cdot c_2 = b. \end{cases}$$

Так как эта система имеет решение при любых значениях a и b, то решение (3) действительно является общим решением соотношения (2).

Пример 1. **Числа Фибоначчи.** В 1202 г. знаменитым итальянским математиком Леонардо Пизанским, который известен больше по своему прозвищу Фибоначчи (Fibonacci – сокращенное filius Bonacci, т. е. сын Боначчи), была написана книга «Liber abacci» («Книга об абаке»). До нас эта книга дошла во втором своем варианте, который относится к 1228 г. Рассмотрим одну из множества приведенных в этой книге задач.

Пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара кроликов, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 пар кроликов и т. д.

Обозначим через F_n количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Тогда через $n+1$ месяцев будут эти F_n пар и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце $(n-1)$-го месяца, то есть еще F_{n-1} пар. Таким образом, имеет место рекуррентное соотношение

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}. \qquad (4)$$

Так как $F_0 = F_1 = 1$, то последовательно находим: $F(2) = 2,\ F(3) = 3,\ F(4) = 5$ и т. д. Эти числа составляют последовательность

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…,

которую называют *рядом Фибоначчи*, а его члены – *числами Фибоначчи*. Они обладают целым рядом замечательных свойств. Числа Фибоначчи связаны со следующей комбинаторной задачей.

Найти число двоичных слов длины n*, в которых никакие две единицы не идут подряд.*

Будем называть такие слова *правильными* и обозначим их число через a_n. Разобьем множество этих правильных слов на два класса: слова, оканчивающиеся на ноль, и слова, оканчивающиеся на единицу. Обозначим количество слов в этих классах $a_n^{(0)}$ и $a_n^{(1)}$ соответственно. По правилу сложения

$$a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(1)} \qquad (5)$$

Очевидно, что у слова, оканчивающегося на ноль, первые $n-1$ символов образуют правильное слово длины $n-1$, или другими словами, имеется биекция между множеством правильных слов длины n, оканчивающихся на ноль, и множеством правильных слов длины $n-1$, то есть $a_n^{(0)} = a_{n-1}$.

Если правильное слово длины n оканчивается на единицу, то предыдущий символ этого слова должен быть нулем, а первые $n-2$ символа должны образовывать правильное слово длины $n-2$. Как и в предыдущем случае, снова имеем биекцию между множеством правильных слов длины n, оканчивающихся на единицу, и множеством правильных слов длины $n-2$. Следовательно. $a_n^{(1)} = a_{n-2}$. Из формулы (5) получаем рекуррентное соотношение

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \qquad (6)$$

Для использования рекуррентного соотношения необходимы для данного n вычисления всех предыдущих значений. Например, если нам нужно знать количество правильных слов из 10 символов, то его можно найти, последовательно заполняя следующую таблицу:

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Первые два значения находятся непосредственно ($a_1 = 2$ – слова 0 и 1; $a_2 = 3$ – слова 000, 010, 101), а остальные – по формуле (6).

***Пример 2.* Задача о расстановке скобок в выражении с неассоциативной бинарной операцией.** Пусть “$\circ$” обозначает некоторую бинарную операцию. Рассмотрим выражение $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$, в котором символ $\circ$ обозначает некоторую бинарную неассоциативную операцию. Сколько имеется различных способов расстановки скобок в этом выражении?

Как пример неассоциативной операции можно привести векторное произведение. Другой пример – обычное сложение и умножение, выполняемое на компьютере. В силу того, что представление каждого числа в памяти компьютера ограничено определенным количеством разрядов, при выполнении каждой операции возникает погрешность и суммарный результат этих погрешностей зависит от расстановки скобок. Пусть ε –

машинный ноль. Это означает, что $1+\varepsilon=1$. Тогда $(1+\varepsilon)+\varepsilon=1$, в то время как $1+(\varepsilon+\varepsilon)=1+2\cdot\varepsilon\neq 1$.

Обозначим число всевозможных способов расстановки скобок через D_n. Тогда

$D_1=D_2=1$: (a_1), (a_1,a_2); $D_3=2$: $(a_1\circ a_2)\circ a_3$, $a_1\circ(a_2\circ a_3)$; $D_4=5$: $((a_1\circ a_2)\circ a_3)\circ a_4$, $(a_1\circ(a_2\circ a_3))\circ a_4$, $(a_1\circ a_2)\circ(a_3\circ a_4)$, $a_1\circ((a_2\circ a_3)\circ a_4)$, $a_1\circ(a_2\circ(a_3\circ a_4))$.

Назовем операцию $\circ$ условно произведением. Для произвольного n разобьем все способы расстановки скобок на классы, включив в k-ый класс способы, при которых сначала вычисляется произведение первых k и последних $n-k$ операндов с какой-то расстановок скобок, а потом вычисляется их произведение:

$$(a_1\circ\ldots\circ a_k)\circ(a_{k+1}\circ\ldots\circ a_n) \tag{7}$$

где $k=1,\ 2,\ldots,\ n-1$.

По определению количество способов расстановки скобок для вычисления первых k операндов равно D_k, последних – D_{n-k}. По правилу произведения число расстановок скобок для выражения (4) равно $D_k\cdot D_{n-k}$. По правилу сложения

$$D_n=\sum_{k=1}^{n-1}D_k\cdot D_{n-k}\ ,\ n=2,\ 3,\ \ldots \tag{8}$$

Например, $D_5=D_1\cdot D_4+D_2\cdot D_3+D_3\cdot D_2+D_4\cdot D_1=1\cdot5+1\cdot2+2\cdot1+5\cdot1=14$.

2. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пусть функция F в соотношении (1) является линейной

$$a_n=\alpha_1\cdot a_{n-1}+\alpha_2\cdot a_{n-2}+\ldots+\alpha_k\cdot a_{n-k}\ ,\ n=k+1,\ k+2,\ldots, \tag{9}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_{n-k}$ – некоторые числа. Такие соотношения называют *линейными соотношениями k-го порядка с постоянными коэффициентами.*

Сначала исследуем подробно соотношения второго порядка, а затем перейдем к общему случаю. При $k=2$ из формулы (9) получим

$$a_n=\alpha_1\cdot a_{n-1}+\alpha_2\cdot a_{n-2}\ ,\ n=3,\ 4,\ldots. \tag{10}$$

Решение этих соотношений основано на следующих легко доказываемых утверждениях.

Лемма 1. Пусть $(a_n)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ – решение соотношения (10), а c – любое число. Тогда последовательность $c\cdot(a_n)=(c\cdot a_1,\ c\cdot a_2,\ \ldots,\ c\cdot a_n,\ \ldots)$ также является решением этого соотношения.

Лемма 2. Пусть $(a_n)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ и $b_n=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots)$ – решения соотношения (10). Тогда последовательность $(a_n+b_n)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots,\ a_n+b_n,\ldots)$ также является решением этого соотношения.

Из этих двух простых лемм можно сделать следующий важный вывод. Совокупность всевозможных последовательностей $(a_n)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots)$ с операциями покоординатного сложения и умножения на скаляр образует векторное пространство. Совокупность последовательностей, являющихся решениями соотношения (10), представляет собой подпространство этого пространства. Объемлющее пространство всевозможных последовательностей бесконечномерно, но подпространство решений линейного рекуррентного соотношения имеет конечную размерность, равную порядку уравнения.

Лемма 3. *Размерность пространства решений рекуррентного соотношения (10) равна двум.*

Из леммы 3 следует, что для определения всех решений уравнения (12) необходимо отыскать два линейно независимых решения. Любое другое решение будет представляться линейной комбинацией этих базисных решений.

Рассмотрим рекуррентное соотношение первого порядка

$$a_n = \lambda \cdot a_{n-1}, \tag{11}$$

где λ – константа.

Если $a_1 = 1$, то из (11) имеем

$$a_n = \lambda^n, \tag{12}$$

то есть решением рекуррентного уравнения первого порядка является геометрическая прогрессия.

Будем искать решение рекуррентного соотношения второго порядка также в виде (12). Тогда, подставляя (12) в (9), получим

$$\lambda^n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} + \alpha_2 \cdot \lambda^{n-2}. \tag{13}$$

При λ=0 имеем нулевое решение, которое не представляет интереса. Считая $\lambda \neq 0$, поделим последнее соотношение на λ^{n-2}:

$$\lambda^2 = \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_2. \tag{14}$$

Таким образом, геометрическая прогрессия (12) является решением рекуррентного соотношения (10), если знаменатель прогрессии λ является корнем квадратного уравнения (14). Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для рекуррентного соотношения (9).

Построение базисных решений зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (14).

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$). В этом случае имеем два решения λ_1^n и λ_2^n, которые линейно независимы. Чтобы убедиться в этом, покажем, что из формулы

$$a_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n \tag{15}$$

путем соответствующего выбора констант можно получить любое решение соотношения (10). Рассмотрим произвольное решение $(a_n^*) = (a_1^*,\ a_2^*, ..., a_n^*, ...)$. Выберем константы c_1^* и c_2^* так, чтобы $a_n = a_n^*$ при $n = 1$ и $n = 2$:

$$\begin{cases} c_1^* \cdot \lambda_1^1 + c_2^* \cdot \lambda_2^1 = a_1^*, \\ c_1^* \cdot \lambda_1^2 + c_2^* \cdot \lambda_2^2 = a_2^*. \end{cases} \tag{16}$$

Определитель линейной системы (16)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

следовательно, система имеет единственное решение, а значит формула (15) – общее решения соотношения (10).

2) $\lambda_1 = \lambda_2$. В случае кратных корней характеристическое уравнение (13) имеет вид $(\lambda - \lambda_1)^2 = 0$ или $\lambda^2 = 2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda - \lambda_1^2$. Тогда $\alpha_1 = 2 \cdot \lambda_1$, $\alpha_2 = -\lambda_1^2$, а для соотношения (10) получим уравнение $a_n = 2 \cdot \lambda_1 \cdot a_{n-1} - \lambda_1^2 \cdot a_{n-2}$, которое дает два базисных решения λ_1^n и $n \cdot \lambda_1^n$. Общее решение представляется в виде

$$a_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot n \cdot \lambda_1^n. \tag{17}$$

В случае соотношения k-го порядка (9) имеют место утверждения, аналогичные тем, которые были рассмотрены для уравнений 2-го порядка.

1) Совокупность всех решений уравнения (9) является подпространством в пространстве всех последовательностей.

2) Размерность этого пространства равна k, то есть каждое решение однозначно определяется своими первыми k значениями.

3) Для определения базиса подпространства решений составляется характеристическое уравнение

$$\lambda^k = \alpha_1 \cdot \lambda^{k-1} + \alpha_2 \cdot \lambda^{k-2} + \ldots + \alpha_k . \qquad (18)$$

Многочлен

$$H(x) = x^k - \alpha_1 \cdot x^{k-1} - \alpha_2 \cdot x^{k-2} - \ldots - \alpha_k \qquad (19)$$

называется *характеристическим многочленом* рекуррентного соотношения (9).

4) Если характеристическое уравнение имеет k различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то общее решение рекуррентного соотношения (9) имеет вид

$$a_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n + \ldots + c_k \cdot \lambda_k^n . \qquad (20)$$

При заданных начальных значениях решения $a_i = a_i^*$, $i = 1, 2, \ldots, k$, константы c_i находятся из системы

$$c_1 \cdot \lambda_1^i + c_2 \cdot \lambda_2^i + \ldots + c_k \cdot \lambda_k^i = a_i^*,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

5) Если λ – корень характеристического уравнения кратности e, то соотношение (9) имеет следующие решения

$$\lambda^n,\ n \cdot \lambda^n,\ \ldots,\ n^{e-1} \cdot \lambda^n .$$

Пусть характеристическое уравнение (18) имеет корни: $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_r$ кратности соответственно $e_1,\ e_2, \ldots,\ e_r$, причем $e_1 + e_2 + \ldots + e_r = k$. Тогда характеристический многочлен и общее решение соотношения (9) представятся в виде

$$H(x) = (x - \lambda_1)^{e_1} \cdot (x - \lambda_2)^{e_2} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_r)^{e_r},$$

$$a_n = \sum_{i=1}^{r} (c_1^{(i)} + c_2^{(i)} \cdot n + \ldots + c_{e_i}^{(i)} \cdot n^{e_i - 1}) \cdot \lambda_i^n .$$

Пример 3. **Формула Бине**. Поставим задачу получить формулу в явном виде для чисел Фибоначчи. Для этого найдем решение рекуррентного соотношения (4) при условии, что $F_0 = F_1 = 1$. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$, найдем его корни $\lambda_{1,\,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ и получим общее решение $F_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n$. Константы c_1 и c_2 определим из начальных условий: $c_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Тогда $F_n = \dfrac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$ или

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\phi - (-\phi)^{-1}}, \qquad (21)$$

где $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ – золотое сечение. Формула (21) называется *формулой Бине*. При этом $(-\phi)^{-1} = 1 - \phi$. Из формулы Бине следует, что $F_n = E\left(\dfrac{\phi_n}{\sqrt{5}} \right)$.

Лекция 6. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

1. Определение производящей функции

Производящей функцией, или обычной производящей функцией, последовательности чисел $\{a_n\} = (a_0,\ a_1, ..., a_n, ...)$ называется формальный ряд

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n, \tag{1}$$

где t – формальная переменная. При этом будем писать $a_n = Coef_{t^n}\{A(t)\}$.

Пусть, например, $\{a_n\} = (1,\ 1, ..., 1, ...)$. Тогда

$$A(t) = 1 + t + t^2 + ... + t^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t},\ 1 = Coef_{t^n}\left\{\frac{1}{1-t}\right\}.$$

Аналогично

$$\{a_n\} = (1,\ \lambda,\ \lambda^2, ..., \lambda^n, ...) \to A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot t^n;\ \lambda^n = Coef_{t^n}\left\{\frac{1}{1-\lambda \cdot t}\right\}.$$

Экспоненциальной производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется ряд

$$E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{t^n}{n!}. \tag{2}$$

Для обычных производящих функций $A(t)$ вводится алгебра формальных степенных рядов, или алгебра Коши, с операциями сложения, умножения, суперпозиции, подстановки, дифференцирования и интегрирования. Алгебра степенных рядов $E(t)$, определяющих экспоненциальные производящие функции, известна как символическое исчисление Блиссара. Далее под производящей функцией будем понимать обычную производящую функцию $A(t)$.

Производящие функции позволяют установить различные свойства последовательностей $\{a_n\}$, в том числе связанные с комбинаторными задачами. Кроме того, с помощью производящих функций можно решать рекуррентные соотношения.

2. Свойства производящих функций

1) Линейной комбинации последовательностей взаимно однозначно соответствует линейная комбинация их производящих функций:

$$\{c_n\} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \{a_n^{(i)}\} \Leftrightarrow C(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot A^{(i)}(t),\ n = 0,\ 1,\ ...$$

2) Дифференцирование производящей функции $A(t)$: $A'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$.

Например, дифференцируя функцию $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, получим

$$1 + 2 \cdot t + 3 \cdot t^2 + ... + n \cdot t^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-t)^2},$$

то есть производящей функцией последовательности $(1,\ 2, ..., n, ...)$ является функция $\frac{1}{(1-t)^2}$: $n+1 = coeff_{t^n}\left\{\frac{1}{(1-t)^2}\right\}$.

Дифференцируя m раз функцию $A(t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$, будем иметь

$$m!+[(m+1)\cdot m\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2]\cdot t+\ldots+[(m+n)\cdot(m+n-1)\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot(n+1)]\cdot t^n+\ldots=\frac{m!}{(1-t)^{m+1}}.$$

После деления на $m!$ получим производящую функцию для сочетаний

$$1+C_{m+1}^{m}\cdot t+C_{m+2}^{m}\cdot t^2+\ldots+C_{m+n}^{m}\cdot t^n+\ldots=\frac{1}{(1-t)^{m+1}}. \qquad (3)$$

3) Умножение производящей функции на t соответствует сдвигу членов последовательности $\{a_n\}$ на одну позицию вправо. Если $A(t)\to(a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n,\ldots)$, то $t\cdot A(t)\to(0,\ a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n,\ldots)$.

Например, производящей функцией последовательности (0, 1, 2, …, n, …) является функция $\frac{t}{(1-t)^2}$: $n=coeff_{t^n}\left\{\frac{t}{(1-t)^2}\right\}$.

4) Интегрирование производящей функции $A(t)$: $\int_0^t A(z)\cdot dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot t^{n+1}$.

В качестве примера найдем $\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$. Используем формулу бинома Ньютона

$$(t+a)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot t^k\cdot a^{n-k}\ . \qquad (4)$$

Числа C_n^k называют *биномиальными* коэффициентами. При $a=1$:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot t^k=(1+t)^n. \qquad (5)$$

Из равенства (5) следует, что функция $(1+t)^n$ является производящей для последовательности $(C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^k,\ \ldots,\ C_n^n,\ 0,\ 0,\ \ldots)$. Можно также написать

$$C_n^k=Coef_{t^k}\left\{(1+t)^n\right\}. \qquad (6)$$

Интегрируя левую часть соотношения (5), получим

$$\int_0^t\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot z^k\cdot dz=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\int_0^t z^k\cdot dz=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\frac{t^k}{k+1}.$$

Для правой части имеем

$$\int_0^t(z+1)^n\cdot dz=\frac{(t+1)^{n+1}-1}{n+1}.$$

При $t=1$ находим

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Формула бинома Ньютона для вещественного показателя. Название формулы (4) биномом Ньютона исторически неверно, так как эту формулу хорошо знали среднеазиатские математики Омар Хайям, Гиясэддин и др. В Западной Европе задолго до Ньютона ее знал Паскаль. Заслуга же Ньютона заключалась в том, что ему удалось обобщить формулу для $(t+a)^n$ на случай произвольного вещественного показателя степени $n=\alpha\in R$, если в качестве биномиальных коэффициентов использовать числа

$$C_\alpha^k=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}, \qquad (7)$$

причем вместо конечного числа слагаемых мы имеем бесконечный ряд:

$$(t+a)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}a^{\alpha-k}\cdot C_{\alpha}^{k}\cdot t^{k} \qquad (8)$$

Из формулы (8) многие производящие функции получаются как частные случаи. Во-первых, при $\alpha=n$ имеем формулу (4), так как $C_n^k=0$ при $k>n$. Во-вторых, при $a=1$, $\alpha=-(m+1)$ и замене t на $-t$ приходим к формуле (3).

5) Производящая функция для свертки последовательностей. *Сверткой* последовательностей $\{a_n\}=(a_0,\ a_1,...,\ a_n,...)$ и $\{b_n\}=(b_0,\ b_1,...,\ b_n,...)$ называется последовательность $\{c_n\}=(c_0,\ c_1,...,\ c_n,...)$, элементы которой вычисляются по правилу:

$c_0=a_0\cdot b_0$, $c_1=a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0$, $c_2=a_0\cdot b_2+a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_0$, …, $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot b_{n-i}$, …

Операция свертки является основной в цифровой обработке сигналов: после свертывания последовательности отсчетов сигнала со специально подобранной последовательностью происходит *фильтрация* – усиление одних частот и подавление других.

Свертка обозначается звездочкой: $\{c_n\}=\{a_n\}*\{b_n\}$.

Производящая функция свертки равна произведению производящих функций свертываемых последовательностей:

$$\{c_n\}=\{a_n\}*\{b_n\}\Rightarrow C(t)=A(t)\cdot B(t).$$

Действительно, при перемножении $A(t)$ и $B(t)$ n-ая степень переменной t складывается из всевозможных произведений $a_i\cdot t^i\cdot b_{n-i}\cdot t^{n-i}$, в которых первый сомножитель из $A(t)$, а второй из $B(t)$.

Пример. **Формула Вандермонда**. Пусть

$$A(t)=(t+1)^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\cdot t^i,\ B(t)=(t+1)^n=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\cdot t^j.$$

По правилу свертки $C(t)=A(t)\cdot B(t)=(t+1)^{m+n}=\sum_{k=0}^{m+n}C_{m+n}^k\cdot t^k$. С другой стороны,

$$C(t)=\left(\sum_{i=0}^{m}C_m^i\cdot t^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n}C_n^j\cdot t^j\right)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_m^i\cdot C_n^j\cdot t^{i+j}\overset{(i+j=k)}{=}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=i}^{m+n}C_m^i\cdot C_n^{k-i}\cdot t^k=\sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}C_m^i\cdot C_n^{k-i}\cdot t^k.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k}C_m^i\cdot C_n^{k-i}=C_{m+n}^k. \qquad (9)$$

3. Решение рекуррентных соотношений методом производящих функций

Определение числа расстановок скобок в выражении с неассоциативной бинарной операцией. Ранее для числа D_n расстановки скобок в неассоциативном произведении была получена формула

$$D_n=\sum_{k=1}^{n-1}D_k\cdot D_{n-k},\ n=2,\ 3,\ ... \qquad (10)$$

Введем для последовательности $\{D_n\}$ производящую функцию: $D(t)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cdot t^n$.

Заменим коэффициенты D_n их выражениями из рекуррентного соотношения (10). Так как это соотношение имеет место, начиная с $n=2$, то первый член $D_1\cdot t=1\cdot t=t$ отделим от суммы:

$$D(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} D_k \cdot D_{n-k}\right)\cdot t^n .$$

Последовательность $\left(\sum_{k=1}^{n-1} D_k \cdot D_{n-k}\right)$ представляет собой свертку последовательности $\{D_n\}$ с собой. В силу свойства 5) имеем

$$D(t) = t + [D(t)]^2 . \qquad (12)$$

Таким образом, $D(t)$ можно найти как решение квадратного уравнения (12):

$$D(t) = (1 - \sqrt{1 - 4\cdot t}) / 2 \qquad (13)$$

Перед корнем выбран знак минус, так как $D(0) = 0$. Чтобы найти D_n, надо разложить в ряд по степеням t правую часть уравнения (13). Для этого используем формулу бинома Ньютона (8) при $a = 1$ и $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1 - 4\cdot t} = (1 - 4\cdot t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/2}^{n} \cdot (-4\cdot t)^n ,$$

где

$$C_{1/2}^{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\cdot n - 3)}{2^n \cdot n!} .$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на произведение последовательных четных чисел от 2 до $2\cdot n - 2$: $2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2\cdot n - 2) = 2^{n-1}\cdot(n-1)!$.

Тогда

$$C_{1/2}^{n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2\cdot n - 2)!}{2^n \cdot n!\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}\cdot 4^{-n}\cdot\frac{(2\cdot n - 2)!}{(n-1)!\cdot(n-1)!} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}\cdot 4^{-n}\cdot C_{2\cdot n-2}^{n-1} .$$

Из формулы (13) получим

$$D(t) = 1/2\cdot[1 - C_{1/2}^{0} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}\cdot 4^{-n}\cdot C_{2\cdot n-2}^{n-1}\cdot(-4\cdot t)^n] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot C_{2\cdot n-2}^{n-1}\cdot t^n .$$

Таким образом, число расстановок скобок в неассоциативном произведении равно

$$D_n = Coef_{t^n} D(t) = \frac{1}{n}\cdot C_{2\cdot n-2}^{n-1} .$$

Решение линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами. Пусть последовательность $\{a_n\} = (a_0,\ a_1,\ldots,\ a_n,\ldots)$ является решением линейного рекуррентного соотношения

$$a_n = \alpha_1\cdot a_{n-1} + \alpha_2\cdot a_{n-2} + \ldots + \alpha_k\cdot a_{n-k} ,\ n = k,\ k+1,\ldots \qquad (14)$$

Для производящей функции (1) этой последовательности обозначим начальные отрезки ряда

$$A_j(t) = \sum_{n=0}^{j-1} a_n\cdot t^n,\ \ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\ A_0(t) = 0.$$

Заменим коэффициенты, начиная с k-го, по формуле (14)

$$A(t) = A_k(t) + \sum_{n=k}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\cdot a_{n-j}\right)\cdot t^n = A_k(t) + \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\cdot t^j\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-j}\cdot t^{n-j} . \qquad (15)$$

Внутреннюю сумму представим в виде

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_{n-j}\cdot t^{n-j} = A(t) - A_{k-j}(t)$$

и подставим в (15):

$$A(t) = A_k(t) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot t^j \cdot [A(t) - A_{k-j}(t)].$$

Из этого уравнения найдем производящую функцию $A(t)$:

$$A(t) = P(t) / Q(t), \tag{16}$$

где $P(t) = A_k(t) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot t^j \cdot A_{k-j}(t)$, $Q(t) = 1 - \alpha_1 \cdot t - ... - \alpha_k \cdot t^k$.

Сравнивая $Q(t)$ с характеристическим многочленом

$$H(t) = t^k - \alpha_1 \cdot t^{k-1} - \alpha_2 \cdot t^{k-2} - ... - \alpha_k,$$

найдем

$$Q(t) = t^k \cdot H(1/t).$$

Если $H(t)$ имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ кратности соответственно $e_1, e_2, \ldots, e_r$, то

$$H(t) = (t - \lambda_1)^{e_1} \cdot (t - \lambda_2)^{e_2} \cdot ... \cdot (t - \lambda_r)^{e_r}.$$

Тогда

$$Q(t) = (1 - \lambda_1 \cdot t)^{e_1} \cdot (1 - \lambda_2 \cdot t)^{e_2} \cdot ... \cdot (1 - \lambda_r \cdot t)^{e_r}.$$

Раскладывая дробь (16) на простые, получим

$$A(t) = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{C_{i,e_i}}{(1 - \lambda_i \cdot t)^{e_i}} + \frac{C_{i,e_i - 1}}{(1 - \lambda_i \cdot t)^{e_i - 1}} ... + \frac{C_{i,1}}{1 - \lambda_i \cdot t} \right), \tag{17}$$

где $C_{i,\, e_i}$, i=1, ..., r – константы.

Используя степенные ряды (3) для простых дробей, получим

$$\frac{1}{(1 - \lambda_i \cdot t)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n}^{m} \cdot \lambda_i^n \cdot t^n. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17) и определяя коэффициент при t^n, можно убедиться, что $A_n = Coef_{t^n}\{A(t)\}$ представляется линейной комбинацией функций

$$C_{m+n}^{m} \cdot \lambda_i^n,\ m = 0,\ 1, ..., e_i - 1;\ i = 1, ..., r. \tag{19}$$

Другими словами, функции (19) образуют базис в пространстве решений рекуррентного соотношения (14). Ранее без доказательства было сформулировано, что решениями этого соотношения являются линейные комбинации функций

$$n^m \cdot \lambda_i^n,\ m = 0,\ 1, ..., e_i - 1;\ i = 1, ..., r. \tag{20}$$

Можно показать, что функции (19) линейно выражаются через функции (20). Например, при $m = 2$

$$C_{n+2}^{2} \cdot \lambda^n = \frac{(n+2)!}{2! \cdot n!} \cdot \lambda^n = \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} \cdot \lambda^n = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \lambda^n + \frac{3}{2} \cdot n \cdot \lambda^n + \cdot \lambda^n.$$

Таким образом, метод производящих функций позволил строго обосновать сформулированную ранее процедуру решения линейного рекуррентного соотношения.

Лекция 7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Если необходимо в наглядной форме представить систему взаимосвязанных объектов, то прибегают к такому построению: на плоскости или в пространстве изображаются несколько точек и некоторые пары точек соединяются линиями. Объект, который получается в результате такого построения, называется *графом*. Примерами графов являются блок-схема алгоритма, схема соединений электрических приборов, карта дорог на местности, генеалогическое дерево и др.

В последнее время теория графов стала мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем. Это проблемы проектирования интегральных схем и схем управления, исследования автоматов, логических цепей, блок-схем программ, экономики и статистики, химии и биологии, теории расписаний и дискретной оптимизации.

1. Теоретико-множественное определение графа

Граф отличается от геометрических конфигураций, которые также состоят из точек-вершин и сторон-линий тем, что в графе несущественны расстояния между точками, форма соединяющих линий и углы между ними. Важно, лишь соединена ли данная пара точек линией или нет. Поэтому граф иногда называют геометрическим объектом, т. е. объектом, свойства которого не изменяются при растяжении, сжатии, искривлении. По этой же причине граф является дискретным объектом, который может быть задан двумя дискретными множествами: множеством точек и множеством линий, соединяющих некоторые точки. Это можно осуществить теоретико-множественным, геометрическим и матричным способами.

Пусть задано непустое множество X. Обозначим через $V(X)$ множество всех пар (упорядоченных или неупорядоченных) его различных элементов.

Графом G называется пара (X, U), где $U \subseteq V(X)$. Элементы из X называются *вершинами* графа, а элементы из U – его *ребрами*. Если U – множество упорядоченных пар, то граф называется *ориентированным* (*орграфом*) (рис. 1, а), в противном случае – *неориентированным* (рис. 1, б). Элементы множества U, то есть пары вершин, для неориентированного графа, называются *ребрами*, а для ориентированного – *дугами*. В случае когда в орграфе $G = (X, U)$ необходимо пренебречь направленностью дуг, то неориентированный граф, соответствующий G, обозначается как $\overline{G} = (X, \overline{U})$ и называется *неориентированным дупликатом* (или *неориентированным двойником*).

В ряде случаев естественно рассматривать *смешанные* графы (рис. 1, в), имеющие как ориентированные, так и неориентированные ребра. Например, план города можно рассматривать как граф, в котором ребра представляют улицы, а вершины – перекрестки; при этом по одним улицам может допускаться лишь одностороннее движение, и тогда на соответствующих ребрах вводится ориентация; по другим улицам движение двустороннее, и на соответствующих ребрах ориентация не вводится.

Граф, не имеющий ребер ($U = \varnothing$), называется *пустым* или *нуль-графом*. Все вершины пустого графа изолированные. Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется *полным*. Полный n-вершинный неориентированный граф обозначается K_n; для каждой его вершины x имеем $\sigma(x) = n-1$ (рис. 2). Для полного графа $U = V(X)$, а число ребер равно $C_n^2 = n \cdot (n-1)/2$.

Граф с кратными ребрами называют *мультиграфом*. Если в мультиграфе имеются петли, то он называется *псевдографом*. Граф без петель и кратных ребер называется *простым* графом. В большинстве приложений теории графов можно отбрасывать петли и заменять кратные ребра одним ребром.

Важнейшими количественными характеристиками графа являются: число вершин $n = |X|$, определяющее *порядок* графа, и число ребер $m = |U|$. Граф с n вершинами и m ребрами называется $(n,\ m)$-*графом*.

Часто описание орграфа G состоит в задании множества вершин X и *соответствия* Γ, которое показывает как между собой связаны вершины. Соответствие Γ называется *отображением* множества X в X, а граф в этом случае обозначается парой $G = (X,\ \Gamma)$.

Для графа на рис. 1, а имеем $\Gamma(x_1) = \{x_2,\ x_5\}$, т. е. вершины x_2 и x_5 являются конечными вершинами дуг, у которых начальной вершиной является x_1; $\Gamma(x_2) = \{x_1,\ x_3\}$; $\Gamma(x_3) = \{x_1\}$; $\Gamma(x_4) = \varnothing$; $\Gamma(x_5) = \{x_4\}$.

В случае неориентированного или смешанного графов предполагается, что соответствие Γ задает такой эквивалентный орграф, который получается из исходного графа заменой каждого неориентированного ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же самые вершины. Так, например, для графа, приведенного на рис. 1, а имеем $\Gamma(x_5) = \{x_1,\ x_3,\ x_4\}$, $\Gamma(x_1) = \{x_5\}$ и т. д.

Поскольку $\Gamma(x_i)$ представляет собой множество таких вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга $(x_i,\ x_j)$, то через $\Gamma^{-1}(x_i)$ естественно обозначить множество вершин x_k, для которых в графе G существует дуга $(x_k,\ x_i)$. Отношение $\Gamma(x_i)$ принято называть *обратным соответствием*. Для графа, изображенного на рис. 1 а, имеем $\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_2,\ x_3\}$, $\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1\}$ и т. д.

Очевидно, что для неориентированного графа $\forall x_i \in X :\ \Gamma^{-1}(x_i) = \Gamma(x_i)$.

Когда отображение Γ действует на множество вершин $X_q = \{x_1,\ ...,x_q\}$, то под $\Gamma(X_q)$ понимают объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{q} \Gamma(x_i)$. Для графа на рис. 1, а $\Gamma(\{x_2,\ x_5\})=\{x_1,\ x_3, x_4\}$, $\Gamma(\{x_1,\ x_3\})=\{x_2,\ x_5, x_1\}$.

Отображение $\Gamma(\Gamma(x_i))$ записывается как $\Gamma^2(x_i)$. Аналогично «тройное» отображение $\Gamma(\Gamma(\Gamma(x_i)))$ записывается как $\Gamma^3(x_i)$ и т. д. Для графа на рис.1, а имеем:

$$\Gamma^2(x_1) = \Gamma(\Gamma(x_1)) = \Gamma(\{x_2,\ x_5\}) = \{x_1,\ x_3, x_4\},$$

$$\Gamma^3(x_1) = \Gamma(\Gamma^2(x_1)) = \Gamma(\{x_1,\ x_3, x_4\}) = \{x_1,\ x_2, x_5\}$$

и т. д. Аналогично понимаются обозначения $\Gamma^{-2}(x_i)$, $\Gamma^{-3}(x_i)$ и т. д.

2. Геометрическая интерпретация и реализация графов

При наглядном представлении графа вершины изображаются точками, ребра – линиями, соединяющими точки, а дуги – направленными линиями. Зафиксируем на плоскости произвольным образом n точек, которые в любом порядке обозначим как $x_1, x_2, ..., x_n$. Затем для каждой пары точек (x_i, x_j) таких, что $(x_i, x_j) \in U$, проведем линию, соединяющую точки x_i и x_j В результате таких действий получим некоторый рисунок, который и называется *геометрической интерпретацией* графа. Заметим, что одному и тому же графу соответствует много рисунков, которые могут быть его геометрическими интерпретациями (рис. 3).

Пусть в графе $G = (X, U)$ каждой вершине $x_i \in X$ ($i = 1, ..., n$) взаимно однозначно соответствует точка a_i в евклидовом пространстве, а каждому ребру $u = (x_i, x_j) \in U$ – непрерывная кривая l, соединяющая точки x_i и x_j и не проходящая через другие точки. Если все кривые, соответствующие ребрам, не имеют общих точек, кроме, быть может, концевых, то это множество точек и кривых называется *геометрической реализацией графа* G *в евклидовом пространстве*. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждый конечный граф можно реализовать в трехмерном евклидовом пространстве.*

3. Степени вершины

Если в графе $G = (X, U)$ пара вершин x_i, x_j такова, что $(x_i, x_j) \in U$, то вершины x_i, x_j называются *смежными*; в этой ситуации каждая из них называется *инцидентной ребру* (x_i, x_j), а ребро (x_i, x_j) называется *инцидентным* каждой из вершин x_i, x_j. Если вершина x_i и ребро u_j инцидентны, то пишут $x_i \in u_j$.

Количество ребер, инцидентных данной вершине x, называется ее *степенью* или *локальной степенью* графа в вершине x и обозначают через $d(x)$. Для неориентированного графа $d(x) \equiv |\Gamma(x)|$. Вершина с нулевой степенью называется *изолированной*. Вершина, степень которой равна единице, называется *висячей*.

Если ребро (дуга) инцидентно только одной вершине, то его называют *петлей*. Ребра называют *кратными*, если они инцидентны одним и тем же вершинам.

Исторически первой теоремой теории графов является утверждение, принадлежащее Эйлеру и связывающее количество ребер, вершин и их степеней.

Теорема 2. *Сумма степеней вершин* (n, m)*-графа равна удвоенному числу его ребер*:

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2 \cdot m .$$

Доказательство. Поскольку любое ребро инцидентно двум вершинам, то в сумме степеней всех вершин графа каждое ребро учитывается дважды.

Следствие. *В любом графе число вершин нечетной степени четно.*

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 – множества вершин четной и нечетной степени соответственно. Очевидно, что

$$\sum_{x \in X_1} d(x) + \sum_{x \in X_2} d(x) = 2 \cdot m.$$

Первое слагаемое четно (как сумма четных чисел). Значит второе слагаемое также должно быть четным, а это при суммировании нечетных чисел возможно, если только их количество четно.

Для орграфов вместо степени вершины вводят понятие полустепеней: *полустепень исхода* $d_-(x)$ – это число дуг, выходящих из вершины x; *полустепень захода* $d_+(x)$ – это число дуг, входящих в вершину x. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} d_-(x) = \sum_{i=1}^{n} d_+(x) = m.$$

4. Матрицы смежности и инциденций

Матрицей смежности $(n,\ m)$-графа G называется квадратная матрица $S = [s_{ij}]$ размера n, которая определяется следующим образом:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i,\ x_j) \in U, \\ 0, & (x_i,\ x_j) \notin U. \end{cases}$$

Для графа, изображенного на рис. 4, матрица смежности имеет вид:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например,

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = d_-(x_i),\ \sum_{i=1}^{n} s_{ij} = d_+(x_j),\ i = 1, \ldots, n.$$

Множество столбцов, имеющих 1 в i-ой строке, есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 в j-ом столбце, совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_j)$.

Для неориентированного графа без кратных ребер и петель матрица смежности симметрична и имеет нули по главной диагонали. Для такого графа

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = d(x_i),\ i = 1, \ldots, n.$$

Возведем матрицу смежности в квадрат. Элемент $s_{ij}^{(2)}$ матрицы $S^2(G)$ определяется по формуле

$$s_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} \cdot s_{kj} .$$

Слагаемое в этом уравнении равно 1 тогда и только тогда, когда оба числа равны 1, в противном случае оно равно 0. Поскольку из равенства $s_{ik} = s_{kj}$ следует существование пути длины 2 из вершины x_i в вершину x_j, проходящего через вершину x_k, то $s_{ij}^{(2)}$ равно числу путей длины 2, идущих из x_i в x_j.

Аналогично если $s_{ij}^{(p)}$ является элементом матрицы S^p, то $s_{ij}^{(p)}$ равно числу путей длины p, идущих от x_i к x_j.

Матрицей инциденций $(n,\ m)$-графа G называется прямоугольная матрица $C = [c_{ij}]$ размерности $[n \times m]$, определяемая следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \ - \text{ конец дуги или ребра } u_j; \\ -1, \text{ если } x_i \ - \text{ начало дуги } u_j \text{ (для ребра +1)}; \\ 0, \text{ если } x_i \notin u_j. \end{cases}$$

Для графа, приведенного на рис. 4, матрица инциденций имеет вид:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Поскольку каждая дуга (ребро) инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга (ребро) образует петлю (в этом случае элементы соответствующего столбца равны 0), то в каждом столбце матрицы – два ненулевых элемента.

Если в матрице инциденций нет нулевых элементов, то имеем полный орграф, который называется *турниром*.

5. Подграфы

Пусть $G_1 = (X_1,\ U_1)$, $G_2 = (X_2,\ U_2)$ – два графа, для которых $X_1 \subseteq X_2$, $U_1 \subseteq U_2$; тогда говорят, что G_1 является *подграфом* графа G_2. В свою очередь, граф G_2 по отношению к своему подграфу G_1 является *надграфом*. Если $X_1 = X_2$ и $U_1 \subseteq U_2$, то такой подграф называется *остовным*. Любой остовный подграф $G_1 = (X,\ U_1)$ графа $G_2 = (X,\ U_2)$ может быть получен путем удаления подмножества $U_2 \setminus U_1$ ребер надграфа.

Подграфы другого типа получаются, если выбрать подмножество $X^{'}$ вершин надграфа и присоединить к ним все ребра, концы которых принадлежат $X^{'}$. Это *вершинно-порожденные* подграфы. Любой вершинно-порожденный подграф $G_v = (X^{'},\ U^{'})$ графа $G = (X,\ U)$ можно получить путем удаления подмножества $X \setminus X^{'}$ вершин и всех инцидентных им ребер надграфа.

Наконец, *реберно-порожденным* будем называть подграф $G_r = (X^{'},\ U^{'})$, полученный на основе произвольно выбранного подмножества $U^{'}$ ребер надграфа, причем множество вершин $X^{'}$ подграфа составляют концы только этих ребер. Любой реберно-порожденный подграф можно сформировать, если в надграфе сперва удалить подмножество ребер $U \setminus U^{'}$, а затем в получившемся остовном подграфе удалить все изолированные вершины.

6. Изоморфизм графов

Пусть имеются изображения графов одного порядка с одинаковым числом ребер. Требуется установить, разные это графы или один, только по разному изображенный. Для решения этой задачи используется понятие изоморфизма.

Изоморфизмом называют взаимно однозначное соответствие между множествами вершин двух графов G_1 и G_2, сохраняющее отношение смежности, а сами графы называются *изоморфными. Автоморфизмом* называется изоморфное отображение графа на себя. Примеры изоморфных графов показаны на рис. 3. Для установления изоморфности достаточно составить списки вершин всех графов, указав для каждой из них все ее соседние вершины. В данном случае все эквивалентные вершины пронумерованы одинаково, что упрощает решение задачи. Задача усложняется, если эквивалентные вершины имеют разные номера. В этом случае процедуру работы со списками придется повторять неоднократно, каждый раз меняя нумерацию вершин одного из графов, пока не будет обнаружен изоморфизм, т. е. получены идентичные списки вершин. В худшем случае потребуется проверить $n!$ вариантов нумерации вершин. Доказать неизоморфизм графов можно, только выполнив все проверки. Существенно сократить их количество можно, если использовать инварианты.

Инвариантом называют некоторую числовую характеристику графа G, которая принимает одно и то же значение для любого графа, изоморфного G. Только при совпадении значений инвариантов переходят к перебору допустимых вариантов нумерации вершин. Тривиальными инвариантами графа являются $|X|$ и $|U|$. К числу инвариантов относится и степенная последовательность графа, т. к. при изоморфизме степень вершины не изменяется. Есть множество других инвариантов, однако не известна (возможно не существует) система инвариантов, позволяющая решать задачу изоморфизма для всех видов графов.

Понятие изоморфизма графов имеет следующее наглядное представление. Представим ребра графа эластичными нитями, связывающими узлы – вершины графа. Тогда изоморфизм можно представить как перемещение узлов и растяжение нитей.

Оценку сверху для числа $\gamma(m)$ попарно неизоморфных графов дает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. $\forall m \in N:\ \gamma(m) < (15 \cdot m)^m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что число вершин в каждом из рассматриваемых графов не превосходит $2 \cdot m$.Занумеруем их числами 1, 2, …, $2 \cdot m$. Каждое ребро определяется двумя вершинами (концами), не обязательно различными, так что для каждого ребра имеется не более $(2 \cdot m)^2$ возможностей выбора концов, а для m ребер – не более, чем $\bar{C}^m_{4 \cdot m^2} = C^m_{4 \cdot m^2 + m - 1}$. Следовательно, $\gamma(m) \le C^m_{4 \cdot m^2 + m - 1} \le \frac{(5 \cdot m^2)^m}{m!}$. Используя неравенство $m! > \left(\frac{m}{3}\right)^m$, получаем $\gamma(m) < \frac{(5 \cdot m^2)^m \cdot 3^m}{m^m} = (15 \cdot m)^m$. Теорема доказана.

Лекция 8. ДОСТИЖИМОСТЬ И СВЯЗНОСТЬ В ГРАФАХ

1. Маршруты, цепи и циклы

Ориентированным маршрутом (или *путем*) орграфа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей. На рис. 1 последовательности дуг

$$u_1,\ u_6,\ u_5,\ u_9,\ u_{10},\ u_6,\ u_4, \qquad (1)$$

$$u_6,\ u_5,\ u_9,\ u_8,\ u_4, \qquad (2)$$

$$u_1,\ u_6,\ u_5,\ u_9 \qquad (3)$$

являются путями.

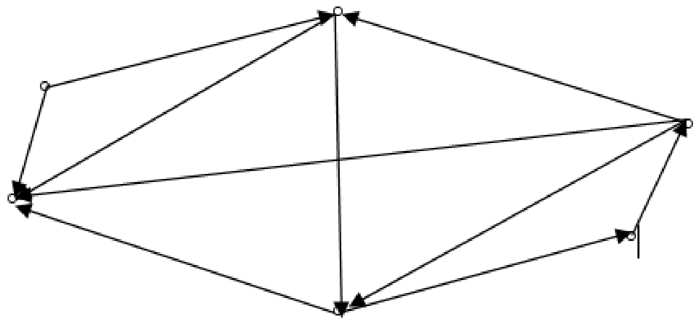


Рис. 1.

Ориентированной цепью (или *орцепью*) называется путь, в котором каждая дуга используется не больше одного раза. Так, например, пути (2) и (3) являются орцепями, а путь (1) не является таким, поскольку дуга u_6 в нем используется дважды.

Простой называется орцепь, в которой каждая вершина используется не более одного раза. Например, орцепь (3) является простой, а орцепь (2) – нет.

Маршрут есть неориентированный двойник пути, т. е. последовательность ребер $\overline{u}_1,\ \overline{u}_2,\ \ldots,\ \overline{u}_l$, в которой каждое ребро $\overline{u}_i$, за исключением первого и последнего, связано концевыми вершинами с ребрами $\overline{u}_{i-1}$ и $\overline{u}_{i+1}$. Черта над символом дуги означает, что ее рассматривают как ребро.

Аналогично тому, как мы определили орцепи и простые цепи, можно определить цепи и простые цепи.

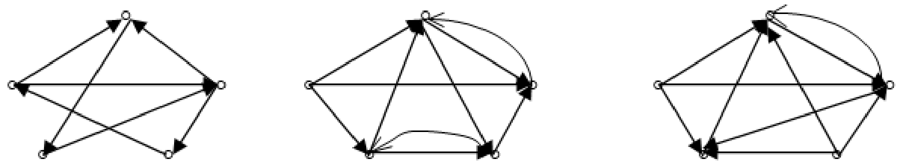
Путь или маршрут можно изображать также последовательностью вершин. Например, путь (1) можно записать в виде: $x_1, x_2, x_5, x_4, x_3, x_2, x_5, x_6$.

Путь $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_l$ называется *замкнутым*, если в нем начальная вершина дуги u_1 совпадает с конечной вершиной дуги u_l. Замкнутые орцепи (цепи) называются *орциклами* (*циклами*). Орциклы называют также *контурами*. Замкнутые простые орцепи (цепи) называются *простыми орциклами* (*циклами*). *Замкнутый маршрут* является неориентированным двойником замкнутого пути.

1. Связность графа и компоненты связности

Говорят, что вершина x_j в орграфе G достижима из вершины x_i, если существует путь $(x_i \to \ldots \to x_j)$. Если при этом x_i достижима из x_j, то об этих вершинах говорят, что они взаимно достижимы.

Орграф называют *сильно связным* или *сильным*, если любые две вершины в нем взаимно достижимы. Пример сильного орграфа приведен на рис. 2 а. Поскольку в графе имеется орцикл $(x_1,\ x_4,\ x_2,\ x_5,\ x_1)$, включающий все вершины, то любые две из них взаимно достижимы



а б в

Рис. 2.

Орграф называется *односторонне связным* или *односторонним*, если в любой паре его вершин хотя бы одна достижима из другой. Пример одностороннего графа приведен на рис. 2 б. В этом графе есть орцикл $(x_1,\ x_4,\ x_3,\ x_1,\ x_2,\ x_1)$, включающий четыре взаимно достижимые вершины. Вершина x_5 имеет нулевую степень захода, а это значит, что не существует путей, ведущих в эту вершину. При этом из x_5 достижима любая из четырех остальных вершин.

Орграф называется *слабо связным* или *слабым*, если в нем любые две вершины соединены *полупутем*. Полупуть, в отличие от пути, может иметь противоположно направленные дуги. Пример слабого орграфа приведен на рис. 2 в. Очевидно, что в графе нет пути между вершинами x_3 и x_5, но существует полупуть, состоящий из противоположно направленных дуг $(x_3,\ x_4)$ и $(x_5,\ x_4)$.

Если для некоторой пары вершин не существует маршрута, соединяющего их, то такой орграф называется *несвязным*.

Для орграфа определены три типа компонент связности: *сильная компонента* – максимально сильный подграф, *односторонняя компонента* – максимальный односторонний подграф и *слабая компонента* – максимально слабый подграф.

Понятие сильной компоненты иллюстрирует рис. 3.

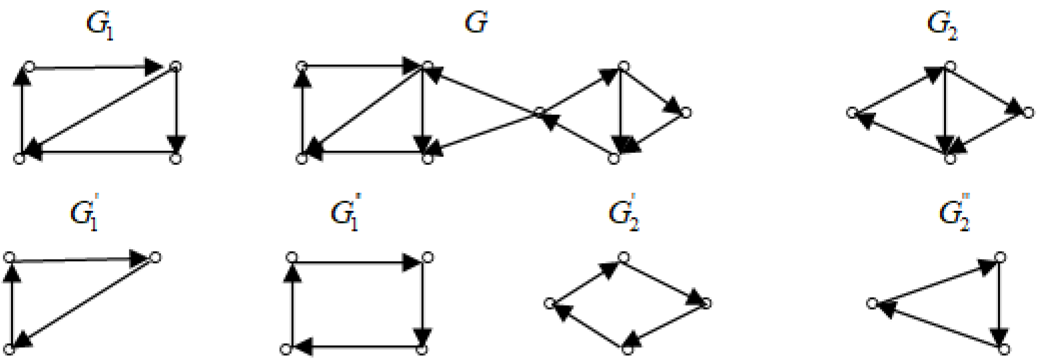


Рис. 3

Граф G, который является односторонне связным, содержит шесть сильных подграфов $G_1,\ G_1',\ G_1'',\ G_2,\ G_2',\ G_2''$, из которых только G_1 и G_2 являются сильными компонентами. Аналогично иллюстрируется понятие односторонней компоненты. В данном примере односторонняя компонента совпадает с самим графом. Если же сменить ориентацию дуги, например, $(x_4,\ x_1)$ на противоположную, то получим слабый граф с двумя односторонними компонентами, одна из которых образована вершинами $(x_1,\ x_4)$, а другая – вершинами $(x_2,\ x_8)$.

Для неориентированного графа G определим на множестве его вершин X бинарное отношение, полагая $x \sim y$, если имеется цепь, связывающая x с y. Это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то есть является отношением эквивалентности. Оно разбивает множество вершин на непересекающиеся классы: $X = \bigcup\limits_{k=1}^{p} X_k$. Две вершины из одного класса эквивалентны, то есть в графе имеется цепь, соединяющая их, для вершин из разных классов такой цепи нет. Так как концы любого ребра находятся в отношении $\sim$, то множество ребер графа G также разобьется на непересекающиеся классы: $U = \bigcup\limits_{k=1}^{p} U_k$, где через U_k обозначено множество всех ребер, концы которых принадлежат X_k, $k = 1,\ \ldots,\ p$.

Графы $G_k = (X_k,\ U_k),\ k = 1,\ \ldots,\ p$ являются связными и в сумме дают граф $G = (X,\ U)$. Эти графы называются *компонентами связности* графа G. Число p – еще одна числовая характеристика графа. Для связного графа $p = 1$, если граф несвязный, то $p \geq 2$.

Если данный граф не является связным и распадается на несколько компонент, то решение какого-либо вопроса относительно этого графа, как правило, можно свести к изучению отдельных компонент, которые связны. Поэтому в большинстве случаев имеет смысл предполагать, что заданный граф связный.

2. Диаметр, радиус и центр графа

Для связного графа G определим *расстояние* между двумя его вершинами x и y как длину самой короткой цепи, соединяющей эти вершины, и обозначим через $d(x,\ y)$. Длина цепи – это количество ребер, составляющих цепь. Нетрудно проверить, что введенное расстояние удовлетворяет аксиомам метрики:

1) $d(x,\ y) \ge 0;\ d(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

2) $d(x,\ y) = d(y,\ x)$;

3) $d(x,\ y) \le d(x,\ z) + d(z,\ y)$.

Определим расстояние от каждой вершины x графа G до самой далекой от нее вершины

$$e(x) = \max_y d(x,\ y),$$

которое называется *эксцентриситетом*. Очевидно, что эксцентриситет для всех вершин в полного графа равен единице, а для вершин простого цикла C_n – $E\left(\left|U_{C_n}\right|/2\right)$.

Максимальный эксцентриситет $d(G) = \max_x e(x)$ носит название *диаметра* графа, а минимальный $r(G) = \min_x e(x)$ – *радиуса* графа G. В полном графе имеем $d(K_n) = r(K_n) = 1$, а в простом цикле C_n – $d(C_n) = r(C_n) = E\left(\left|U_{C_n}\right|/2\right)$.

Вершина x_0 называется центральной, если $e(x_0) = r(G)$. Граф может иметь несколько таких вершин, а в некоторых графах все вершины являются центральными. В простой цепи при нечетном числе вершин только одна является центральной, а при четном их числе таких вершин две. В полном графе и для простого цикла центральными являются все вершины. Множество центральных вершин называется *центром* графа.

Пример 1. Найти диаметр, радиус и центр графа, приведенного на рис. 4.

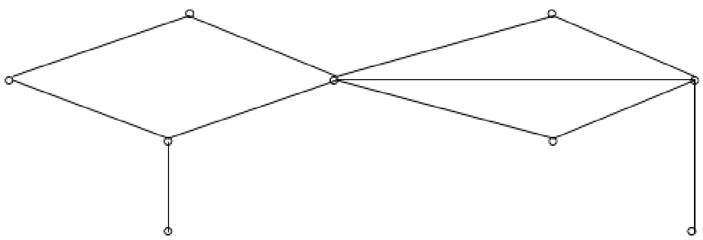


Рис. 4.

Для решения этой задачи удобно предварительно вычислить *матрицу расстояний* между вершинами графа. В данном случае это будет матрица размером $[9\times 9]$, в которой на месте $(i,\ j)$ стоит расстояние от вершины i до вершины j:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
0&1&1&2&2&3&3&3&3&3\\
1&0&1&2&1&2&2&2&3&3\\
1&1&0&1&1&2&2&2&2&2\\
2&2&1&0&2&3&3&2&1&3\\
2&1&1&2&0&1&1&1&2&2\\
3&2&2&3&1&0&2&1&2&3\\
3&2&2&3&1&2&0&1&2&3\\
3&2&2&2&1&1&1&0&1&3\\
3&3&2&1&2&2&2&1&0&3
\end{array}\right).$$

Для каждой строки матрицы находим наибольший элемент и записываем его справа от черточки. Наибольшее из этих чисел равно диаметру графа $d(G) = 3$, наименьшее – радиусу графа $r(G) = 2$. Центр графа составляют центральные вершины $x_0^1 = 3$ и $x_0^2 = 3$.

Понятия центральной вершины и центра графа появились в связи с задачами оптимального размещения пунктов массового обслуживания, таких как больницы, пожарные части, пункты охраны общественного порядка и т. п., когда важно минимизировать наибольшее расстояние от любой точки некоторой сети до ближайшего пункта обслуживания.

3. Матрицы достижимостей и контрадостижимостей

Матрица достижимостей $R = [r_{ij}]$ определяется следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Множество вершин $R(x_i)$ графа G, достижимых из заданной вершины x_i, состоит из таких элементов x_j, для которых (i, j)-й элемент в матрице R равен 1. Это множество можно представить в виде

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^1(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \ \dots \ \cup \Gamma^p(x_i) .$$

Матрица контрадостижимостей (*обратных достижимостей*) $Q = [q_{ij}]$ определяется следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i \text{ достижима из } x_j, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично построению достижимого множества $R(x_i)$ можно сформировать множество $Q(x_i)$, используя следующее выражение:

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \ \dots \ \cup \Gamma^{-p}(x_i) .$$

Из определений следует, что i-й столбец матрицы Q совпадает с i-й строкой матрицы R, т. е. $Q = R^t$, где R^t – матрица, транспонированная к матрице R.

Пример 2. Найти матрицы достижимостей и контрадостижимостей для графа, приведенного на рис. 5.

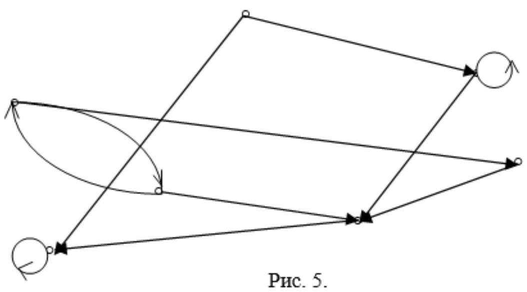


Рис. 5.

Определим множества достижимостей для вершин графа:

$R(x_1) = \{x_1\} \bigcup \{x_2,\ x_5\} \bigcup \{x_2,\ x_4,\ x_5\} \bigcup \{x_2,\ x_4,\ x_5\} = \{x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5\}$,

$R(x_2) = \{x_2\} \bigcup \{x_2,\ x_4\} \bigcup \{x_2,\ x_4,\ x_5\} \bigcup \{x_2,\ x_4,\ x_5\} = \{x_2,\ x_4,\ x_5\}$,

$R(x_3) = \{x_3\} \bigcup \{x_4\} \bigcup \{x_5\} \bigcup \{x_5\} = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$,

$R(x_4) = \{x_4\} \bigcup \{x_5\} \bigcup \{x_5\} = \{x_4,\ x_5\}$,

$R(x_5) = \{\{x_5\} \bigcup \{x_5\} = \{x_5\}$,

$R(x_6) = \{x_6\} \bigcup \{x_3,\ x_7\} \bigcup \{x_4,\ x_6\} \bigcup \{x_3,\ x_5,\ x_7\} \bigcup \{x_4,\ x_5,\ x_6\} = \{x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7\}$,

$R(x_7) = \{x_7\} \bigcup \{x_4,\ x_6\} \bigcup \{x_3,\ x_5,\ x_7\} \bigcup \{x_4,\ x_5,\ x_6\} = \{x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6, x_7\}$.

Следовательно, матрицы достижимостей и контрадостижимостей имеют вид:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ Q = R^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как $R(x_i) \bigcap Q(x_j)$ – множество таких вершин, каждая из которых принадлежит по крайней мере одному пути, идущему от x_i к x_j, то вершины этого множества называются *существенными* или *неотъемлемыми* относительно концевых вершин x_i и x_j. Все остальные вершины $x_k \notin R(x_i) \bigcap Q(x_j)$ называются *несущественными* или *избыточными*, поскольку их удаление не влияет на пути от x_i к x_j.

Можно определить также матрицы *ограниченных* достижимостей и контрдостижимостей, если потребовать, чтобы длины путей не превышали некоторого заданного числа. Тогда p будет верхней границей длины допустимых путей.

Граф называют *транзитивным*, если из существования дуг $(x_i,\ x_j)$ и $(x_j,\ x_k)$ следует существование дуги $(x_i,\ x_k)$. *Транзитивным замыканием* графа $G = (X,\ U)$ является граф $G_t = (X,\ U \bigcup U^{'})$, где $U^{'}$ – минимально возможное множество дуг, необходимых для того, чтобы граф G_t был транзитивным. Очевидно, что матрица достижимостей R графа G совпадает с матрицей смежности S графа G_t, если в матрице S на главной диагонали поставить единицы.