2023·秋·数理逻辑　　平时作业汇总　　大家辛苦啦！☕~~

（中文参考答案 + 作业反馈）

hw-1 (2023/09/12)

p3: 1-(h)　If y is an integer then z is not real, provided that x is a rational number.

Answer:

令

$$\begin{aligned} p &: \quad y \text{ is an integer} \\ q &: \quad z \text{ is a real number} \\ r &: \quad x \text{ is a rational number} \end{aligned}$$

因此我们可得 $r \to (p \to \neg q)$ or $(r \wedge p) \to \neg q$. □

.... hw-1: feedback ....

1. 没有把"z is not real"中的**否定联结词**提取出，进而翻译为公式时缺少否定符号 ¬。
2. 对英语的语序产生了错误的判断，将"provided that x is a rational number"这个句子的成分放置到了错误的地方。
3. 一些同学额外做了教材 *p.3* 第一题中的 $(a)-(h)$，但没有注意到 $(c),(e),(g)$ 中的"either ... or ..."表达的是 **不兼容析取**，从而对句子产生了不当的翻译。

hw-2 (2023/09/19)

p10: (7)　Show that the statement form $(((\sim p) \to q) \to (p \to (\sim q)))$ is not a tautology. Find statement forms $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ such that $(((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B})))$ is a contradiction.

Answer:

方法一:

下面的真值表表明公式 $(((\sim p) \to q) \to (p \to (\sim q)))$ 不是一个重言式:

p	q	(¬	p	→	q)	→	(p	→	¬	q)
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T	T	F

当 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是重言式（tautology）时，$(((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\sim \mathscr{B})))$ 将变成一个矛盾式。例如，让 $\mathscr{A} = \mathscr{B} = (p \to p)$ 抑或令 $\mathscr{A} = \mathscr{B} = (p \vee \neg p)$。 □

方法二:

（除了用真值表这种比较直观的手段外，还有诸多方法。以下答案来自黄程同学，经其授权后分享给大家，感谢黄程同学！）

假设 $(((\sim p)\to q)\to(p\to(\sim q)))$ 是重言式。那么在任意的赋值（valuation）下，将永远不出现 $(\sim p)\to q$ 为 T 且 $p\to(\sim q)$ 为 F 的情况。但是如果令 $q=T$ 且 $p=T$, 则 $p\to(\sim q)$ 的真值为 T。矛盾！因此 $(((\sim p)\to q)\to(p\to(\sim q)))$ 不是重言式。

根据上述回答，当 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 永远为 T 的时候，$(((\sim\mathscr{A})\to\mathscr{B})\to(\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{B})))$ 会是一个矛盾式。换而言之，此时 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是重言式即可，比如 $\mathscr{A}=(p\vee(\sim p))$ 且 $\mathscr{B}=p\to(q\to p)$。 □

.... hw-2: feedback ....

1. 本次作业一共有两问，但存在同学只回答第一问的情况，请大家以后细心。
2. 用 0 和 1 来替代 F 和 T 是可以的，有时这样会更为简洁。
3. 第一问有同学用一种「简化真值表」来回答，如

(	¬	p	→	q	)	→	(	p	→	¬	q	)
	F	T	T	T		F		T	F	F	T	
	F	T	T	F		T		T	T	T	F	
	T	F	T	T		T		F	T	F	T	
	T	F	F	F		T		F	T	T	F	

   这是可行且正确的。不过建议还是把 p 和 q 的真值单独列在表前，这样在画真值表找「析取范式」的时候不容易眼花，不过这不是强制性的。

4. 第二问要求大家确实为 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 找到某种「命题形式」，很多同学只是声明其为重言式而没有找出具体的「命题形式」，严格来说这是不够的，不过默认大家都掌握了。

`hw-3 (2023/09/26)`

p15: 11-(a) Show, using **Proposition 1.14** and **1.17**, that the statement form $((\neg(p\vee(\neg q)))\to(q\to r))$ is logically equivalent to each of the following.

(a) $((\neg(q\to p))\to((\neg q)\vee r))$

Recall that

- **Proposition 1.14**: If $\mathscr{B}_1$ is a statement form arising from the statement form $\mathscr{A}$ by substituting the statement form $\mathscr{B}$ for one or more occurrences of the statement form $\mathscr{A}$ in $\mathscr{A}_1$, and if $\mathscr{B}$ is logically equivalent to $\mathscr{A}$, then $\mathscr{B}_1$ is logically equivalent to $\mathscr{A}_1$.
- **Proposition 1.17 (De Morgan's Laws)**: Let $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots\mathscr{A}_n$ be any statement forms. Then:

1. $(\bigvee_{i=1}^n(\neg\mathscr{A}_i))$ is logically equivalent to $(\neg(\bigwedge_{i=1}^n\mathscr{A}_i))$.
2. $(\bigwedge_{i=1}^n(\neg\mathscr{A}_i))$ is logically equivalent to $(\neg(\bigvee_{i=1}^n\mathscr{A}_i))$.

Answer: 令 $\varphi=((\neg(p\vee(\neg q)))\to(q\to r))$ 且 $\chi=((\neg(q\to p))\to((\neg q)\vee r))$.

据教材 **Prop. 1.14**, 我们只需要说明: $\neg(p\vee(\neg q))$ 逻辑等值(logically equivalent)于 $(\neg(q\to p))$ 且 $(q\to r)$ 逻辑等值于 $(\neg q)\vee r)$, 那么就有 φ 逻辑等值 χ 。

不过很容易验证（比如说用真值表），

$$\begin{array}{rcll} \neg(p \vee (\neg q)) & \leftrightarrow & (\neg(q \to p)) & \quad 和 \\ (q \to r) & \leftrightarrow & (\neg q) \vee r) & \end{array}$$

都是重言式，这也意味着 $(\neg(p \vee (\neg q)))$ 和 $(\neg(q \to p))$，$(q \to r)$ 和 $(\neg q) \vee r)$ 互相逻辑等值。 □

. . . . no feedback for hw-3 . . . .

hw-4 (2023/10/10)

p.19: 13-(a) Find statement forms in **conjunctive normal form** which are logically equivalent to the following:

$$(a) \qquad (((\neg p) \vee q) \to r)$$

Answer: 下面我们将用 3 种方法来寻找公式 $(\neg p \vee q) \to r$ 的合取范式（**conjunctive normal forms**，CNF），前两种可以在教材上找的，而后一种是额外的补充内容。

不过首先，令

$$\varphi = (\neg p \vee q) \to r.$$

方法一

首先我们画出公式 φ 否定 （即 $\neg\varphi$）的真值表:

p	q	r	$\neg$	$(($	$\neg$	p	$\vee$	q	$)$	$\to$	r	$)$
1	1	1	0		0		1			1		
<u>1</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	1		0		1			0		
1	0	1	0		0		0			1		
1	0	0	0		0		0			1		
0	1	1	0		1		1			1		
<u>0</u>	<u>1</u>	<u>0</u>	1		1		1			0		
0	0	1	0		1		1			1		
<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	1		1		1			0		

由上表可知，使得 $\neg\varphi$ 为 1 的真值组合分别是 110、010 以及 000。因此 $\neg\varphi$ 的一个析取范式（**disjunctive normal form**）是

$$\chi = (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

显然 χ 逻辑等值于 $\neg\varphi$，因此 $\neg\chi$ 逻辑等值于 $\neg\neg\varphi$，即 φ。

由德摩根律（the **De Morgan's laws**）有

$$\begin{aligned} \neg\chi &= \neg[(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)] \\ &\equiv \neg(p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee \neg\neg r) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q \vee \neg\neg r) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q \vee \neg\neg r) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \end{aligned}$$

因此 $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$ 是一个 φ 的合取范式。 □

(**注意**: 此处我们使用符号“$\alpha \equiv \beta$” 来表示公式 α 和 β 是逻辑等值的)

方法二

$$
\begin{array}{lll}
\varphi & = & (\neg p \vee q \to r) \\
& \equiv & \neg(\neg p \vee q) \vee r \qquad \text{(由实质蕴含 \textbf{material implication} 的含义, cf. p.7: Example 1.4-(a))} \\
& \equiv & (\neg\neg p \wedge \neg q) \vee r \qquad \text{(由德摩根律（the \textbf{De Morgan's laws}））} \\
& \equiv & (p \wedge \neg q) \vee r \\
& \equiv & (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \qquad \text{($\vee$-$\wedge$ 间的分配, cf. p.10, Exercises-6-(b))}
\end{array}
$$

因此 $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ 是一个 φ 的合取范式。 □

方法三

类似地，我们画出 φ 的真值表 (注意哟，不是 φ 否定的真值表):

p	q	r	($\neg$	p	$\vee$	q)	$\to$	r
1	1	1	0	1	1	1	1	1
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	1	0	1	0	0	0

令 φ 为 0 的真值组合分别是 110、010 和 000。随后根据这些真值组合，可以构造出如下 3 个析取公式:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi_1 & = & (\neg p \vee \neg q \vee r) \\
\varphi_2 & = & (p \vee \neg q \vee r) \\
\varphi_3 & = & (p \vee q \vee r)
\end{array}
$$

接下来，我们将上面这三个公式合取起来，

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

容易验证 $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ 是一个 φ 的合取范式。 □

[ps. 正如我们所见，方法一和方法三所得的合取范式是相同的]

p.26: 21 Suppose that $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ is a valid argument form. Prove that $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ is also a valid argument form.

Proof:

首先，假设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ 是有效的 (valid) 论证形式，但 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}; \therefore (\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ 不是。

那么存在一个真值指派，使得 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_{n-1}$ 为 T 而 $(\mathscr{A}_n \to \mathscr{A})$ 为 F，即 $\mathscr{A}_n$ 为 T 且 $\mathscr{A}$ 为 F。然而，这同我们的假设 —— $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ 是有效的论证形式 —— 矛盾！ □

.... hw-4: feedback ....

1. 还是有同学少写题目呀，题目少写的话想给你们找分都很难了。考试的时候也差不多，尽量不要空题不做呀 ☹

2. 还有很多同学写证明的时候，一句话中往往不写「定语」和「状语」，比如会出现如下情况：

   所以 φ ....

   所以 φ 什么呢？φ 是重言式？φ 是矛盾式？这些都是需要额外加以说明的。

hw-5 (2023/10/17)

p.36: 1-(c) Write out proofs in L for the following wfs.

$$(c) \qquad (p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$$

Proof:

方法一

1. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2))$ (instance of $L2$)
2. $[(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2))] \to$ $[((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))]$ (instance of $L2$)
3. $((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))$ $(1+2, MP)$
4. $p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_1)$ (instance of $L1$)
5. $[p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_1)] \to [(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)]$ (instance of $L2$)
6. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)$ $(4+5, MP)$
7. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$ $(3+6, MP)$

当然 (c) 的证明不是唯一的。 □

方法二

1. $p_1 \to ((p_1 \to p_1) \to p_1)$ (instance of $L1$)
2. $(p_1 \to ((p_1 \to p_1) \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to p_1))$ (instance of $L2$)
3. $(p_1 \to (p_1 \to p_1)) \to (p_1 \to p_1)$ $(1+2, MP)$

4. $p_1 \to (p_1 \to p_1)$ (instance of $L1$)

5. $(p_1 \to p_1)$ $(3+4, MP)$

6. $(p_1 \to p_1) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1))$ (instance of $L1$)

7. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)$ $(5+6, MP)$

8. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2))$ (instance of $L2$)

9. $[(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to p_1) \to (p_1 \to p_2))] \to$
   $[((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))]$ (instance of $L2$)

10. $((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_1)) \to ((p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2))$ $(8+9, MP)$

11. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$ $(7+10, MP)$

方法三

1. $\{(p_1 \to p_2) \to [((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)]\} \to$
   $\{[(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2))] \to [(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)]\}$ (instance of $L2$)

2. $(p_1 \to p_2) \to [((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)]$ (instance of $L1$)

3. $[(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2))] \to [(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)]$ $(1+2, MP)$

4. $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2))$ (instance of $L1$)

5. $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)$ $(3+4, MP)$

6. $[(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)] \to [((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_2)]$ (instance of $L2$)

7. $((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_2)$ $(5+6, MP)$

8. $[((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_2)] \to$
   $[p_1 \to (((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_2))]$ (instance of $L1$)

9. $p_1 \to (((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_2))$ $(7+8, MP)$

10. $[p_1 \to (((p_1 \to p_2) \to p_1) \to ((p_1 \to p_2) \to p_2))] \to$
    $[(p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_1)) \to (p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_2))]$ (instance of $L2$)

11. $(p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_1)) \to (p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_2))$ $(9+10, MP)$

12. $p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_1)$ (instance of $L1$)

13. $p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_2)$ $(11+12, MP)$

14. $[p_1 \to ((p_1 \to p_2) \to p_2)] \to [(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)]$ (instance of $L2$)

15. $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$ $(13+14, MP)$

(ps. 上面公式中的 中括号 [ ] 和 花括号 { } 是起辅助作用的，为的是方便大家观看。但应注意的是，其本身不是命题逻辑公理系统 L 中的符号!!!)

p.37: 5 The rule HS is an example of a legitimate additional rule of deduction for L. Is the following rule legitimate in the same sense: from the wfs. $\mathscr{B}$ and $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$, deduce $(\mathscr{A} \to \mathscr{C})$?

Answer:

方法一（不用**演绎定理** (Deduction Theorem) ）

1. $\mathscr{B}$ (假设)
2. $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$ (假设)
3. $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$ $(L2)$
4. $((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$ $(2+3, MP)$
5. $(\mathscr{B} \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}))$ $(L1)$
6. $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ $(1+5, MP)$
7. $(\mathscr{A} \to \mathscr{C})$ $(6+4, MP)$

因此该规则对于系统 L 来说是合法的。 $\square$

方法二（使用**演绎定理** (Deduction Theorem) ）

首先我们表明

$$\{\mathscr{B}, (\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))\} \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_L \mathscr{C}.$$

下面是其一个演绎：

1. $\mathscr{B}$ (假设)
2. $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))$ (假设)
3. $\mathscr{A}$ (假设)
4. $(\mathscr{B} \to \mathscr{C})$ $(2+3, MP)$
5. $\mathscr{C}$ $(1+4, MP)$

因此，由 **演绎定理**可知 $\{\mathscr{B}, (\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C}))\} \vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{C}$. $\square$

.... hw-5: feedback ....

- 很多同学都误解了什么是一个「L 中的证明」，在其中，是不能出现“假设”、“因为-所以”这样的字眼的。因此 *p.36* 1-(c) 的证明也不能用「演绎定理」，这个是内定理证明，证明的序列中出现的只能是公理或者由前面的公式使用 MP 得到。还请大家特别要注意这点！

hw-6（2023/10/31）**期中作业**

p.44: (8) Let $\mathscr{A}$ be a *wf.* $((\neg p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \neg p_2))$. Show that L^+, obtained by including this $\mathscr{A}$ as a new axiom, has a larger set of theorems than L. Is L^+ a consistent extension of L? (注意：此题有两问)

Proof:

p_1	p_2	($\neg$	p_1	$\to$	p_2)	$\to$	(p_1	$\to$	$\neg$	p_2)
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T	T	F

一：

据上面的真值表，显然 $\mathscr{A} = ((\neg p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \neg p_2))$ 不是重言式。因此由 **可靠性（Soundness Theorem）**，$\mathscr{A}$ 不是 L 的定理（theorem），而它却是 L^+ 的定理。因此 L^+ 的定理集比 L 的大。

二：

L^+ 是一致的（consistent）。假设 L^+ 不一致，则存在公式 $\mathscr{B}$ 使得 $\vdash_{L^+} \mathscr{B}$ 且 $\vdash_{L^+} \neg\mathscr{B}$。因为 L^+ 是在 L 的基础上添加额外的公理 $\mathscr{A} = ((\neg p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \neg p_2))$ 而得到的，因此可得（注意 $\vdash$ 的下标）

$$\mathscr{A} \vdash_L \mathscr{B} \quad \text{and} \quad \mathscr{A} \vdash_L \neg\mathscr{B}.$$

由**演绎定理（Deduction Theorem）**，

$$\vdash_L \mathscr{A} \to \mathscr{B} \quad \text{and} \quad \vdash_L \mathscr{A} \to \neg\mathscr{B},$$

由**可靠性（Soundness Theorem）**，这意味着 $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 和 $(\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B})$ 都是重言式。由定义，对任意的赋值 v，$v(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = T$ 且 $v(\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B}) = T$，这表明 $v(\mathscr{A}) = F$，即 $\mathscr{A}$ 是**矛盾式**（*contradiction*）。但由上面 $\mathscr{A}$ 的真值表我们知道这是不可能的。矛盾！ □

p.44: (10) Let L^{++} be the extension of L obtained by including as a fourth axiom *scheme*:

$$((\neg\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B})).$$

Show that L^{++} is inconsistent. (Hint: see Chapter 1 exercise 7 (p.10))

Proof:

方法一

令 $\top = (p \to p)$ 且 $\varphi = (\neg\top \to \top) \to (\top \to \neg\top)$。显然 $\vdash_{L^{++}} \varphi$ (即令 $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \top$). 容易验证，$\varphi$ 是一个矛盾式，因此 $\neg\varphi$ 是重言式。由 **完全性**（**Completeness Theorem**），$\vdash_L \neg\varphi$, 因为 L^{++} 是一个 L 的扩张，因此 $\vdash_{L^{++}} \neg\varphi$。

但此时我们同时有 $\vdash_{L^{++}} \varphi$ 且 $\vdash_{L^{++}} \neg\varphi$，据定义，$L^{++}$ 不一致。 □

方法二

(下面这个证明来自 吴家儒 同学，这种证明很直接且颇具暴力美学，再次感谢家儒同学为我们带来如此精彩的证明！)

因为 $\vdash_L (p \to p)$ (参见 *Example 2.7-(a)* in page 31)，故 $\vdash_{L^{++}} (p \to p)$。令 $(L4)$ 表示 L^{++} 的第四条公式模式（*the fourth axiom scheme*）, 即

$$(L4) \qquad ((\neg\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B})).$$

考虑如下 L^{++} 中的证明:

1. $[\neg(p \to p) \to (p \to p)] \to [(p \to p) \to \neg(p \to p)]$ ($L4$ 的实例)
2. $[(\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to ((p \to p) \to \neg(p \to p))] \to$
   $[((\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to (p \to p)) \to ((\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to \neg(p \to p))]$ ($L2$ 的实例)
3. $((\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to (p \to p)) \to ((\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to \neg(p \to p))$ $(1+2, MP)$
4. $(p \to p) \to [(\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to (p \to p)]$ ($L1$ 的实例)
5. $(p \to p)$ ($(p \to p)$ 是 L^{++} 的定理)
6. $(\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to (p \to p)$ $(4+5, MP)$
7. $(\neg(p \to p) \to (p \to p)) \to \neg(p \to p)$ $(6+3, MP)$
8. $(p \to p) \to (\neg(p \to p) \to (p \to p))$ ($L1$ 的实例)
9. $\neg(p \to p) \to (p \to p)$ $(5+8, MP)$
10. $\neg(p \to p)$ $(9+7, MP)$

因此 $\vdash_{L^{++}} \neg(p \to p)$，这和 $\vdash_{L^{++}} (p \to p)$ 共同说明了 L^{++} 是不一致的。 □

.... hw-6: feedback ....

1. 大部分人还是没有区分「元语言」和「对象语言」，所以严格来说很多人的回答都是不合法的甚至是错误的。不过改作业的时候已经采取十分宽容的态度了，还希望大家一定要重视这点，这对后续的逻辑学习是十分重要的。
2. 依旧强烈建议不要使用「简化真值表」，这并不是说「简化真值表」是什么洪水猛兽大家碰不得，只不过照现在的作业来看，一画「简化真值表」就容易画错。
3. 虽然很多同学借鉴了教材 *p.205* 的提示，但这种提示往往省略了超多细节，这些细节应该要补充完整的，直接抄书行不得！一个证明首先要说服自己才能说服别人！

4. 建议用**黑笔! 黑笔! 黑笔!** 作答，期末考试时也是一样的。

5. 很多同学都误用了 $(L3)$: $(\neg\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 公理，如下的公式并不是 $(L3)$ 公理的一个实例：

$$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p) \qquad \text{或} \qquad (p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$$

单单只使用公理模式 $(L3)$ 得不到上述公式是 L 的定理的，注意否定符号的位置。

6. 同样容易误用的是 **Proposition 2.19**:

> Let L^* be a consistent extension of L and let φ be a formula which is not a theorem of L^*. Then L^{**} is also consistent, where L^{**} is the extension of L obtained from L^* by including $(\neg\varphi)$ as an additional axiom. (p. 40)

显然 L 是其本身的一个一致扩张，并且很多人做第 8 题第二问的时候，确实证明了 $\nvdash_L \neg\mathscr{A}$，然后直接运用 **Prop. 2.19** 就说 L^+ 是 L 的一致扩张，这中间其实还有一个 gap 要补充的。

根据 **Prop. 2.19** 和 $\nvdash_L \neg\mathscr{A}$ 我们只能得到 $L \cup \{\neg\neg\mathscr{A}\}$ 是一致的（注意否定的个数），而题目中的是 $L^+ = L \cup \{\mathscr{A}\}$。虽然语义直观上 $\mathscr{A}$ 和 $\neg\neg\mathscr{A}$ 是一个意思，但是仅仅作为字符串来说二者是完全不同的东西。因此，如果硬是要用 **Prop. 2.19** 的话，我们就必须还得论证：$L \cup \{\neg\neg\mathscr{A}\}$ 和 $L \cup \{\mathscr{A}\}$ 是同一个系统。然而这在教材中是没有明确说明的。

7. 抄作业的情况有点严重呀！虽然鼓励同学们相互讨论，但写作业的时候也别直接抄呀，都做对就还好啦，错都错一样的话就很难说过去了 *:(*

`hw-7 (2023/11/07)`

p.49: 2-(c) Translate each of the following statements into symbols, first using no existential quantifiers, and second using no universal quantifiers.

(c) *No mouse is heavier than any elephant.*

（注意：题目要求大家要分别用“全称量词”和“存在量词”符号化句子，因此你的翻译至少有两句）

Answer:

令

$$\begin{aligned} M(x):&\quad x \text{ is a } \mathit{mouse} \\ E(x):&\quad x \text{ is an } \mathit{elephant} \\ H(x,y):&\quad x \text{ is } \mathit{heavier\ than}\ y \end{aligned}$$

不使用**存在量词**（existential quantifier）：

1. $(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge E(y) \to \neg H(x,y))$, 或

2. $(\forall x)(\forall y)(M(x) \to (E(y) \to \neg H(x,y)))$, 或

3. $(\forall x)(M(x) \to (\forall y)(E(y) \to \neg H(x,y)))$, 或

4. 其余任何合理的答案。

不使用**全称量词**（universal quantifier）：

1. $\neg(\exists x)(\exists y)(M(x) \wedge E(y) \wedge H(x,y))$, 或
2. $\neg(\exists x)(M(x) \wedge (\exists y)(E(y) \wedge H(x,y)))$, 或
3. 其余任何合理的答案。 □

.... hw-7: feedback ....

这次作业大部分人都写得很好，但有两点还请大家要尤其注意下：

1. 对谓词的拆解不完全。有人的用诸如 $D(x)$ 这样的符号来表示谓词“x 比老鼠重”，便会有如下的翻译（$E(x)$ 表示“x 是大象”）：

$$(\forall x)(E(x) \to D(x))$$

这种翻译就没有把谓词“... 比 ... 重”符号化。

2. 如果用 $H(x,y)$ 表示 “x 比 y 重”，有些同学会把 $H(y,x)$ 理解为 $H(x,y)$ 的否定，即认同 $H(y,x) = \neg H(x,y)$，进而有如下的翻译：

$$(\forall x)(\forall y)(M(x) \wedge E(y) \to H(y,x)) \qquad (*)$$

这种翻译直观上好像可以，但仔细想想，如果我们令 $x = y$，就会产生下面的问题

$$H(x,x) \qquad = \qquad \neg H(x,x)$$

采用这种翻译的同学其实在脑海中预设了 $H(x,y)$ 是一个*严格偏序关系*（即“反自反 + 传递”），但这就需要额外的一阶公式来说明 H 是一个严格偏序关系，因此严格来说上面的翻译 $(*)$ 是不符合题意的。不过改作业还是采取了宽容的态度，但这并不说明这种答案可行，请特别注意这点！

`hw-8 (2023/11/14)`

p.56: 9-(d) In each case below, let $\mathscr{A}(x_1)$ be the given *wf.*, and let t be the term $f_1^2(x_1,x_3)$. Write out the *wf.* $\mathscr{A}(t)$ and hence decide in each case whether t is free for x_1 in the given *wf.*

$$(d) \qquad (\forall x_2)A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \to (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(x_1,x_3)).$$

Recall that

- $\mathscr{A}(t)$: if x_i does occur free in $\mathscr{A}(x_1)$, then $\mathscr{A}(t)$ denotes the result of substituting term t for every free occurrence of x_i. (cf. *p.54*)

- t is free for x in a *wf.* ϕ:

定义 3.11*. (Revised defintion) 当一个项 t 可以替换 $\mathscr{A}$ 中变元 x_i 的所有自由出现，且不会使得 t 中任何变元与 $\mathscr{A}$ 的其他部分相互作用，我们就称 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 是自由的。

(注意此题有两问: 你需要 1) 写出 $\mathscr{A}(t)$，且 2) 回答 t 在 $\mathscr{A}(x_1)$ 中是否对 x_1 自由)

Answer:

注意到在

$$(d) \qquad (\forall x_2)A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \to (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(x_1, x_3)).$$

中 x_1 有 三处出现是自由的（free），因此

$$\mathscr{A}(t) = (\forall x_2)A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), f_1^1(f_1^2(x_1, x_3)), x_2) \to (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_3))$$

显然 t 对 (d) 中的 x_1 不是自由的。 □

.... hw-8: feedback ....

1. 关于代入后的结果。对 x_1 的自由出现代入 t 后，一定得在所得的公式中把 t 展开了，仅仅写成

$$(\forall x_2)A_1^3(t, f_1^1(t), x_2) \to (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(t, x_3))$$

这个样子是不可行滴，且就定义而言，上面这个符号串也不是一个合式公式（因为一阶语言的字母表中并没有 t 这样的符号，t 只是元语言中的符号）。

2. 关于符号的写法。对于全称量词或存在量词，可以采取书上的写法，即 $\forall x_i$ 和 $\exists x_i$ 外面有对括号：$(\forall x_i)\varphi$ 、$(\exists x_i)\varphi$。比较现代的记法一般省略会这对括号，直接写作：$\forall x_i\varphi, \exists x_i\varphi$。但有些同学会在把变元用括号括起来，从而有形如

$$\forall(x_i)\varphi \qquad \exists(x_i)\varphi$$

这样的写法。不过这种写法既不太美观也不通用，有时还会让人看得比较困惑，所以还是建议不要自创记法为好。

3. 关于代入自由。一个项 t 对于某个公式 φ 中的变元 x 是自由的，一定是相对于整个公式 φ 来说的，当 φ 是一个蕴含式（或者其他复合公式）时，没有「t 对 φ 的前件代入自由」或者「t 对 φ 的后件不是代入自由」这类说法。

`hw-9 (2023/11/21)`

p.59: 11 Let $\mathscr{L}$ be the first order language which includes (besides variables, punctuation, connectives and quantifier) the individual constant a_1, the function letter f_1^2 and the predicate letter A_2^2. Let $\mathscr{A}$ denote the *wf*.

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \to A_2^2(x_1, x_2)).$$

Define an interpretation I of $\mathscr{A}$ as follows. D_I is $\mathbb{Z}$, $\bar{a}_1$ is 0, $\bar{f}_1^2(x, y)$ is $x - y$, $\bar{A}_2^2(x, y)$ is $x < y$. Write down the interpretation of $\mathscr{A}$ in I. Is this a true statement or a false one? Find another interpretation in which $\mathscr{A}$ is interpreted by a statement with the opposite truth value.

(注意此题有三问: 1) 用自然语言（中文/英语）写出 $\mathscr{A}$ 在 I 下的直观含义; 2) 回答在 I 下 $\mathscr{A}$ 是

为真还是为假; 3) 基于你对第二问的回答，为公式 $\mathscr{A}$ 找一个新的解释，且在这个新解释中，$\mathscr{A}$ 的真值与你第二问的答案恰好相反)[所以你对第二问的回答很重要]

Answer:

(1) 公式 $\mathscr{A}$ 在解释 I 中的直观含义如下：

对于任意整数 x_1, x_2: 如果 $(x_1 - x_2) < 0$ 那么 $x_1 < x_2$.

(2) 上面对 $\mathscr{A}$ 在 I 中的解释显然是**真的**（*true*）。

(3) 令 $D_I = \mathbb{N}$, $\bar{a}_1$ 指代 0, $\bar{f}_1^2(x, y)$ 意指 $x \times y$, $\bar{A}_2^2(x, y)$ 是 $x > y$。自然，$\mathscr{A}$ 在这个新解释中为**假**（false）。

[当然，其他任何合理的解释都是可接受的] □

......................................hw-9: feedback......................................

1. 对于第三问，当规定了论域 D_I ，一定要小心对常元 a_1 和函数符号 $f_1^2(x_1, x_2)$ 的解释是否对论域 D_I **封闭**！比如：若我们规定 D_I 为所有**正整数**，那么就不能让 $\bar{a}_1 = 0$，因为 0 不是正整数！同理此时不能把 $f_1^2(x_1, x_2)$ 解释为 $x_1 - x_2$，因为正整数不对（通常意义上的）减法封闭！我们当然可以重新定义那种对正整数封闭的“减法运算”，不过这就得额外给出明确的形式定义。因此，当考虑为一个一阶语言中的公式寻找解释的时候，一定要注意对非逻辑符号的解释是否**对论域封闭**的问题。

hw-10 (2023/12/13)

p.70: 22-(a) Show that none of the following *wfs.* is logically valid.

$$(a) \qquad (\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2).$$

Proof:

只需要找到一个翻译 I 使得 $I \not\models (\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ 即可。

令 $D_I = \mathbb{N}$，$\bar{A}_1^2(x, y)$ 表示 ‘$x < y$’。

显然闭公式（close *wf.*）$(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2)$ 在这个解释中为**真**，而 $(\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ 在这个解释中为**假**。因此，每个满足前件的赋值都不满足后件。因此不存在解释 I 上的赋值满足 (a) 中的公式。进而该公式不是逻辑有效的。 □

......................................hw-10: feedback......................................

1. 在找反例的时候，建议大家多找找数学上的例子。日常生活中的很多现象，比如“朋友关系”等都有很大的模糊性，不同人对这些观念的理解可能相差甚大。