

hw-9 (2023/11/21)

姓名:

学号:

p.59: 11 Let \mathcal{L} be the first order language which includes (besides variables, punctuation, connectives and quantifier) the individual constant a_1 , the function letter f_1^2 and the predicate letter A_2^2 . Let \mathcal{A} denote the wf.

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \rightarrow A_2^2(x_1, x_2)).$$

Define an interpretation I of \mathcal{A} as follows. D_I is \mathbb{Z} , \bar{a}_1 is 0, $\bar{f}_1^2(x, y)$ is $x - y$, $\bar{A}_2^2(x, y)$ is $x < y$. Write down the interpretation of \mathcal{A} in I . Is this a true statement or a false one? Find another interpretation in which \mathcal{A} is interpreted by a statement with the opposite truth value.

(注意此题有三问: 1) 用自然语言 (中文/英语) 写出 \mathcal{A} 在 I 下的直观含义; 2) 回答在 I 下 \mathcal{A} 是为真还是为假; 3) 基于你对第二问的回答, 为公式 \mathcal{A} 找一个新的解释, 且在这个新解释中, \mathcal{A} 的真值与你第二问的答案恰好相反)[所以你对第二问的回答很重要]

Your answer:

(10 points)

(1) The formula \mathcal{A} in I intuitively means that,

for any integer x_1, x_2 : if $(x_1 - x_2) < 0$ then $x_1 < x_2$. [3 points]

(2) This interpretation of \mathcal{A} in I is **true**. [3 points]

(3) Let D_I to be \mathbb{N} , \bar{a}_1 to be 0, $\bar{f}_1^2(x, y)$ is $x \times y$, and $\bar{A}_2^2(x, y)$ is $x > y$. Clearly, \mathcal{A} is **false** in this new interpretation. (other reasonable interpretations are acceptable, of course) [4 points]

.....作业反馈

- 对于第三问, 当规则了论域 D_I , 一定要小心对常元 a_1 和运算 $f_1^2(x_1, x_2)$ 的解释是否对论域 D_I **封闭**!

比如: 若我们规则 D_I 为所有**正整数**, 那么就不能让 $\bar{a}_1 = 0$, 因为 0 不是正整数! 同理此时不能把 $f_1^2(x_1, x_2)$ 解释为 $x_1 - x_2$, 因为正整数不对 (通常意义上的) 减法封闭! (当然可以重新定义那种对正整数封闭的“减法运算”, 不过这就得额外给出明确的形式定义)

因此, 当我们考虑为一个一阶语言中的公式寻找解释的时候, 一定要注意对**常元符号**和**函数符号**的解释是否**对论域封闭**的问题。

- 以下是一些书写方面的建议, 不是什么强制性要求, 可以**略过**的哈!

在数学中, 对于数论域, 如自然数、整数、有理数、实数等一般用如下大写空心字母表示 (也有的 (集合论或递归论方面的) 著作喜欢用小写希腊字母 omega — ω — 表示自然数集):

\mathbb{N} \mathbb{Z} \mathbb{Q} \mathbb{R}

当我们手写的时候, 或许可以采取如下的写法:

\mathbb{N} \mathbb{Z} \mathbb{Q} \mathbb{R}

当然以上写法只是“读者友好型”而不是强制性的! 实际上只要在行文中说明得当, 用任何符号都是可行的。