数理逻辑基础

赵希顺 编著

(中山大学 逻辑与认知研究所, 广东 广州 510275)

前　言

数理逻辑是关于数学推理的一门学问，主要研究逻辑推理（也叫证明）的形式结构、含义、应用及其局限。它主要包括证明论（研究证明的结构、特性及其局限性），模型论（研究语法和语义之间的联系），递归论（可计算性理论）和公理集合论。

T. Thomas 曾写道：逻辑是科学方法论的基石，因此它是每个科学分支的基础 [13]。正是由于逻辑学的这一特点，高校各个专业都开设逻辑学的专业课。各种逻辑学教材也应运而生。近年来，国内出版的逻辑学教材有如下特点：

- 一些逻辑学教材罗列了多种逻辑系统，内容过于繁杂，实际上并不适合作为本科教材。
- 很多教材都是面向特定领域的，因而包含了该领域的一些专门的知识。
- 很多数理逻辑教材在讲命题演算和谓词演算时，都采用了希尔伯特的系统。主要原因是，希尔伯特系统包含了较少的初始符号、公理和推理规则，便于叙述。但这样可能不便于学生接受。
- 一些数理逻辑教材为了追求通俗易懂，过多地介绍了普通逻辑的内容。不自觉地丢掉了数理逻辑的严谨性，反映不出数理逻辑的思想。
- 国内的逻辑教材大都没有介绍哥德尔不完全性定理。

本书是数理逻辑的入门教材，涉及证明论、模型论和递归论的最基本的知识。在编写过程中，为了适应不同专业的读者，我们去掉了涉及专门的数学和计算机科学的内容。力图做到“少而精”，注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学。本书共有四章。第一章是绪论部分，简要介绍了说理逻辑的发展、形式系统、元语言与元理论以及一些预备知识。第二、第三章分别详细讲解了命题演算、谓词演算。需要指出的是，我们不是为了讲形式系统而讲形式系统，还要通过学习形式系统，锻炼（日常）逻辑推理能力。因此我采用了 S.C. Kleene 的《Introduction to Matemathematics》中的系统，其中把日常所用的联结词和量词都作为初始符号，并引入相应的公理和推理规则。第四章主要介绍哥德尔不完全性定理。首先介绍了皮亚诺算术系统。进而介绍了哥德尔编码、元数学的算术化、可表示性等重要概念。这些都是体现数理逻辑思想的重要概念。然而，为了突出不完全性定理的证明思路，我们省略了很多细节。

书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明．此外，各章都配有适量的习题，希望通过做习题这个环节，来培养、提高学生解决问题的能力和技能．对于带星号的章节，

仅要求学生掌握其中介绍的概念和结论，而不要求掌握其证明。如果教学时间确实有限，也可不讲第四章。

本书是受鞠实儿教授之命，并在他的亲自支持和鼓励下完成的。熊明辉、聂文龙、任远阅读了本书初稿，并提出了宝贵意见。作者曾在 1991 年第一次教授本书的内容。2001 年之后，作者在中山大学逻辑与认知所多次主讲本书内容。期间许多学生曾对本书内容提出过意见。作者在此对他们表示衷心感谢！

在本书出版之际，作者特别感谢导师张锦文先生、丁德成先生；感谢多年来曾教育、指导过本人的老师。感谢多年来同行们、朋友们的支持和帮助。

最后，由于作者水平所限，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

赵希顺

2006 年 11 月

目 录

第一章 绪 论 1

§1.1 数理逻辑发展简介 1

§1.2 形式系统 2

§1.3 元语言与元理论 3

§1.4 集合论 4

§1.4.1 对象及其名称 4

§1.4.2 集合 5

§1.4.3 集合的表示 6

§1.4.4 集合的并、交、差运算 6

§1.4.5 子集 7

§1.4.6 有序对与 n 元序组 7

§1.4.7 集合的笛卡尔积 8

§1.4.8 关系 8

§1.4.9 函数 9

§1.4.10 单射、满射和双射 * 10

§1.4.11 可数集合 * 11

§1.5 归纳定义与归纳证明 12

§1.5.1 归纳定义 12

§1.5.2 归纳证明 13

第二章 命题演算 15

§2.1 命题演算的形式语言 15

§2.1.1 命题逻辑的形式符号 15

§2.1.2 形成规则 15

§2.2 命题演算的语义 17

§2.2.1 赋值、真值表、重言式 18

§2.2.2 代入 21

§2.2.3 语义后承 22

§2.2.4 紧致性定理 * 23

§2.2.5 等价, 替换 24

§2.2.6 联结词的个数 26
§2.3 符号化 27
§2.4 命题演算的公理及推理规则 27
§2.5 形式证明及形式定理 28
§2.6 形式推演 29
§2.7 推演定理 33
§2.8 导出规则及辅助推演规则 34
§2.9 一致性定理 38
§2.10 范式, 完全性定理 40

第三章 一阶谓词演算 45

§3.1 一阶谓词逻辑的形式语言 45
§3.1.1 符号系统 45
§3.1.2 形成规则 46
§3.1.3 自由变元与约束变元 47
§3.2 谓词逻辑的语义 48
§3.2.1 一阶语言的模型 49
§3.2.2 指派与项的取值 50
§3.2.3 满足关系 51
§3.2.4 语义后承 56
§3.3 谓词演算的公理系统及推理规则 56
§3.3.1 谓词演算的形式证明与形式推演 58
§3.3.2 形式推演 58
§3.4 谓词演算的一致性定理 59
§3.5 推演定理 62
§3.5.1 依赖性与变化性 62
§3.5.2 推演定理 64
§3.6 谓词演算的推演规则 67
§3.7 前束范式 72
§3.8 谓词演算的完全性定理与紧致性定理 74

第四章 哥德尔不完全定理 77

§4.1 皮亚诺算术系统 PA 77
§4.1.1 皮亚诺算术系统 78

§4.1.2 PA 的语义 79
§4.1.3 序关系 80
§4.2 可表示性 81
§4.3 哥德尔编码 84
§4.4 元数学的算术化 86
§4.5 哥德尔不完全定理的证明 88
§4.6 递归函数和递归关系 * 92
§4.6.1 原始递归函数 93
§4.6.2 递归函数 95
§4.6.3 递归关系 96

参考文献 **101**

第一章　绪　论

现在，对逻辑的理解已经很宽泛了。一般而言，逻辑学是研究推理的有效性（或称正确性）的。通俗地讲，推理规则就是从前提得出结论的方法。一个有效的推理规则是指，如果前提是真的，则由该规则得出的结论必然是真的。经典的逻辑学就是要研究哪些推理规则是有效的。

§1.1　数理逻辑发展简介

逻辑学的研究可以追溯到两千多年前的亚历士多德（Aristotle)。他对概念、判断、推理作了全面的研究和阐述。后经过中世纪的演变一直沿用到十九世纪（乃至今天)。通常我们称亚理士多德的逻辑为传统逻辑。但到了十九世纪，人们越来越觉得传统逻辑的研究范围有很大局限性。第一，传统逻辑仅限于主宾式语句。第二，传统逻辑仅限于研究三段论。第三，传统逻辑缺乏对量词的处理。传统逻辑的这些不足，是导致数理逻辑兴起与发展的动力之一。

一般认为，数理逻辑的创始者是德国数学家兼哲学家莱布尼兹 (G.W.Leibnitz)．根据莱布尼兹在 17 世纪的一些零星话语，人们发现他有一个巨大的计划：首先要建立一种理想的 "通用语言"，这种语言使用简单明了的符号、合理的语言规则。其次建立一种推理演算，用以处理通用语言，规定符号的演变规则、运算规则等，从而使得可以将推理划归为计算。这样，当发生争论时，争论双方无需辩论，只需坐在计算机前，面对面地说让我们来计算吧。这就是著名的 "莱布尼兹之梦"。

莱布尼兹之后，数理逻辑研究处于不活跃的停顿时期。这段时间内，逻辑学家们 (例如，哈密尔顿 (W. Hamilton)、德 · 摩根 (A. de Morgen)) 大都致力于传统逻辑的修补工作。到了 1847 年，英国数学家布尔 (G. Boole) 发表了《逻辑的数学分析》一文。他把逻辑中的合取与析取看成了数值运算，进而创建了能表示逻辑演算的代数系统（称为：逻辑代数，命题代数，或命题函数代数）。布尔明确指出，凡是能用传统逻辑处理的问题，用命题代数也能处理。他还举出很多问题，用传统逻辑来处理这些问题非常困难，但用命题代数处理却很容易。

然而，最成功的当属德国逻辑学家弗雷格 (G. Frege)。他于 1879 年出版了《表意符号》一书，其中他引入了量词、约束变元。在这本书中，弗雷格完备地发展了命题演算，近乎完备地发展了谓词演算．可以说，莱布尼兹的计划到弗雷格已经接近完成。

1885 年，皮尔斯 (C.S. Peirce) 也独立地引进了量词。后来他的工作由施罗德 (E. Schröder) 继承并发展，最后集中在《逻辑代数讲义》一书中。所以皮尔斯的工作影响较

大。可是，即使《在逻辑代数讲义》一书中，其谓词演算仍然没有弗雷格的那样完善。

之后，到 1894 年，皮亚诺 (G. Peano) 利用命题演算和谓词演算来表达数学公式、数学推导。他的关于自然数论的五个公理（皮亚诺公理）一直沿用至今。罗素 (和弗雷格一样) 利用集合论定义自然数，证明了自然数满足皮亚诺公理。他和怀特海德 (A.N. Weitehead) 合著的《数学原理》一书是当时数理逻辑成果总汇。

数理逻辑的发展主要有两个动力：其一是上面谈到的，人们感到传统逻辑的不足，需要加以改进。另一个动力则是数学基础的研究产生了大量与逻辑有关的问题。

历史上，数学曾经发生了三次大危机：第一次是古希腊时期无理数的发现，这次危机导致了非欧几何的兴起。第二次则是十七、八世纪关于微积分基础的争论。不管是（欧氏或非欧）几何学还是微积分理论，它们的基础都依赖于实数理论的协调性（即无矛盾性）。19 世纪中期，康托 (G. Cantor) 创立了集合论。戴德金 (Dedekind) 和康托利用集合来定义实数。根据这个定义，可以纯逻辑地推出极限理论，于是也可以推出整个微积分学。从而，整个数学基础就建立在了集合论之上了。因此集合论的协调性就占有至关重要的地位。

然而正当人们全然关注集合论，并试图证明它的协调性时，罗素 (B. Russell) 却发现集合论是自相矛盾的。[1] 从而引发了第三次数学危机。这次危机导致了数理逻辑的蓬勃发展。发展到现在，数理逻辑分为四个分支：公理集合论、证明论、可计算性理论以及模型论。它们都以逻辑演算（命题演算和谓词演算）为基础。如果也把逻辑演算看作一部分的话，那么数理逻辑就有五个部分了。

§1.2 形式系统

弗雷格的书《表意符号》当时根本没有受到人们的注意，他的学说一直没人理睬。直到罗素完成了自己的研究以后，才看懂了弗雷格的书，发现两人竟然不谋而合。之后，经罗素的宣扬，弗雷格的工作才受到人们的关注。今天看来，弗雷格应该是第一个发展形式系统的人。从数理逻辑的发展历史看，完全严格的逻辑演算系统是由希尔伯特和阿克曼在其合著的《理论逻辑基础》中给出的。

形式系统是一种 符号系统, 这些符号本身是毫无意义的.

建立形式系统的第一步是给出形式符号, 之所以称之为形式符号, 是因为它们没有任何意义. 但为了记忆和叙述的方便, 我们根据符号的 (将来的) 解释意义起了相应的直观的名字.

[1]即罗素悖论

第二步是给出合适公式 (简称公式) 的形成规则, 合适公式是一些由形式符号组成的字符串.

一般地，我们把所有合适公式组成的集合称作形式语言。也就是说，第一步和第二步的工作就是为了构造形式语言。

第三步就是给出形式证明的形成规则. 形式证明是合适公式的有穷序列，其中每个合适公式要么是公理，要么是根据根据前面公式利用推理规则得到. 因此为了定义形式证明, 还必须先引入公理和推理规则. 具有形式证明的公式称作可证公式, 亦称作形式定理。

实际上，对逻辑的形式处理，即以语句的形式结构来描述推理规则，是由亚历士多德发现的。现在的形式系统是对它的极大改进。

形式系统本身是毫无意义的. 因此, 我们必须对形式系统做出解释. 如果我们把某一形式系统解释为某一理论, 则我们称该形式系统是这一理论的形式化. 例如, 皮亚诺算术系统就被认为是数论的形式化. 由于任何一门数学理论都离不开逻辑推理，因此，数学理论的形式化首先包括逻辑推理的形式化。

§1.3 元语言与元理论

自从莱布尼兹提出他的通用语言想法以后, 经过布尔、皮尔斯、施罗德、弗雷格、皮亚诺、罗素的研究, 终于建立了（一部分）数学理论的形式系统。

当建立了一个形式系统（通常试图作为某一理论的形式化）之后，希尔伯特 (D. Hilbert) 特别强调要把整个形式系统作为研究的对象。例如，我们最关心的问题有：该系统会不会导出矛盾？是不是足够丰富的（即，被形式化的理论中的真理是不是在形式系统中可证）。

研究整个形式系统的理论称作元理论, 或叫元数学，也叫证明论. 当处理一个具体的形式系统时, 该形式系统本身也是一套理论体系, 我们称之为对象理论. 值得注意的是, 我们必须把形式系统内的符号和元数学符号、形式系统内的概念与元数学概念严格区分开来。

问题是，我们所用的元理论可靠吗？我们的元理论是不是协调的 (会不会推出矛盾)? 如果元理论不协调，或者我们无从知道元理论是否协调，那么我们如何保证关于形式系统的结论的可靠性呢？这样我们就得研究元理论的可靠性。要研究元理论的可靠性，我们又需要元元理论。那么，元元理论的可靠性又如何得到保证呢? 如此下去，我们就陷入了无穷回归的泥潭而不能自拔。

为了解决这个问题，希尔伯特主张用有穷性方法来建立和研究形式系统。所谓有穷

性是指，形式系统的建立必须是构造性的。首先，我们必须能够机械地在有穷步骤内判定一符号是不是形式系统的形式符号。其次，形式系统的形成规则必须都是能行的，也就是说，每个形式表达式都是按照一定规则在有穷步内机械的得到的。再次，公理和推理规则都是能行可判定的。即，对任何一个表达式我们都可以在有穷步骤内机械地判定它是不是一条公理；一组公式可否由某一规则导出另一组公式可在用穷步骤内机械地判定。最后，每一个形式证明是由公理出发通过使用推理规则在有穷步骤内得到。

元理论中首先包括元语言和元逻辑。本书中的元语言主要是汉语，附加一些外文符号（可带上下标）。在我们的元语言中，有诸如"非"、"并且"、"或者"，"如果 — 则 —"、"对任意的" [2]、"存在"，等逻辑联结词和量词。同时，元逻辑中也用各种推理规则（我们在普通逻辑中已经学过了这些规则）。这样我们仍然陷入用逻辑来研究逻辑的困境。一般我们采用妥协的办法来面对这一窘况：第一，我们所使用的元理论的推理规则在形式系统中所对应的推理规则都是有效的（如果前提真，结论必真），因而是不会有问题的。第二，我们使用元理论处理的都是有穷对象，而且采用的是构造性方法，因此也不会有问题。

§1.4 集合论

在研究形式系统过程中，我们的元理论还需要集合论。本节将介绍集合论中的一些基本内容。需要指出的是，我们不是研究集合论的，我们只是要用集合论来研究形式系统的。在这个意义下，我们把集合论中的各种符号看作是元语言（在本书中元语言为汉语）的扩充。

集合论本身就是一门非常深奥的理论，好在我们仅需要集合论中的最基本的内容。

§1.4.1 对象及其名称

什么是对象? 我们把对象看成是: 人们感知和思维中确定的单个的事物. 通常我们总是使用对象的名称来谈论那个对象. 例如:

北京是中华人民共和国的首都.

这句话实际上是关于一座城市的命题. 由于我们不可能真的把一座城市塞进一句话里, 所以我们不得不使用城市的名称来代替它.

然而对象的名称本身也可以作为对象. 这时候我们通常用引号来加以区别, 以避免混淆. 例如:

"北京" 是一个名词.

如果我们写成

[2]'对任意的"、"对所有的"、"对每一" 的意思一样

北京是一个名词，

就会产生混淆.

总之, 当我们说 "用 x 表示一个对象", 或说 "x 是一个对象时", 我们指的是 "x" 代表该对象的一个名称.

对象与对象之间有相等关系. 说两个对象 x, y 相等, 记作 $x = y$, 是指: "x" 和 "y" 为同一个对象的 (不同) 名称.

例如, $1, 2, 3, 4, \cdots$ 都是对象. 地球、太阳、火星、木星、金星、水星、土星、银河系等等, 也都是对象. 我们强调:

对于任意两个对象 x, y, 要么 $x = y$ 要么 $x \neq y$.

§1.4.2 集合

集合的概念是数学中的一个基本概念, 也就是说不能用更简单的数学概念来给集合下一个确切定义, 只能有语言来描述它.

集合是具有某种性质的、确定的、互异的对象所组成的整体.

设 X 为一集合, x 为一对象. 若 x 在 X 中, 则称 x 为 X 的元素, 或说 x 属于 X, 或说 X 含有 x. 如果 x 是 X 的元素, 则记作 $x \in X$. 否则, 记作 $x \notin X$.

通常, 我们用大写外文字母 X、Y、Z、Γ、Σ 等表示集合; 小写字母 $x, y, z, \cdots$ 来表示元素.

- 确定性 是指对任集合 X 及任对象 x, 要么 x 是 X 的元素, 要么 x 不是 X 的元素, 客观上是确定的.

- 互异性 是指一个集合中任意两个对象是不相等的.

例如，所有自然数组成的整体是集合.

然而，相当大的自然数的整体则不是集合. 这因为，"相当大的数" 是一个不确定的概念。什么样的数才是相当大的呢？10000 算不算相当大的呢？

所有使得 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间没有素数的自然数 n 的全体是集合, 只是由于人类科学水平的限制, 到现在为止还不知道该集合中有哪些元素。

两个集合 X 和 Y 相等当且仅当 X 和 Y 含有相同的元素。换言之，

$X = Y$ 当且仅当 对任意的 x, 若 $x \in X$ 则 $x \in Y$, 且对任意的 x, 若 $x \in Y$ 则 $x \in X$.

直观地讲，一个集合由属于它的元素唯一地确定的。

§1.4.3 集合的表示

当集合 X 只含有有穷多个元素时, 则我们可以把 X 中的元素全部列出来, 然后用花括号括起来表示这个集合. 例如, 所有不超过 10 的自然数组成的集合, 可以表示为

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

特别地，对任意给定的对象 x, $\{x,x\}$ 是一个集合。根据互异性，$\{x,x\}=\{x\}$. 因此，$\{x\}$ 是以 x 为其唯一元素的集合。称这个集合为由 x 组成的单点集。对任意两个对象 x,y, $\{x,y\}=\{y,x\}$, 这是因为它们含有同样的元素。

不含任何对象的集合叫作空集，记为 $\varnothing$.

如果一个集合中的元素太多, 甚至有无穷多个元素, 上述表示方法就很不方便甚至是不可能的. 这是因为我们无法把无穷多个对象全都列出来. 不过, 集合大都由某个确定的性质 R 所刻划. 这时我可以用如下形式来表示所有具有性质 R 的对象组成的集合:

$$\{x : x \text{ 具有性质 } R\}, \quad \text{或者} \quad \{x \,|\, x \text{ 具有性质 } R\}$$

例如, 方程 $x^2-1=0$ 的所有根组成的集合, 所有大于 0 小于 1 的有理数组成的集合 分别表示为

$$\{x \,|\, x^2-1=0\}, \quad \{x \,|\, x>0 \text{ 且 } x<1 \text{ 且 } x \text{ 为有理数}\}$$

今后，我们总用 $\mathbb{N}$ 表示所有自然数组成的集合.

§1.4.4 集合的并、交、差运算

设 X 和 Y 为两个集合。那么所有属于 X 或属于 Y 的元素组成的整体称作是 X 与 Y 的并集，记作 $X\cup Y$. 容易看出，

$$X\cup Y=\{x \mid x\in X \text{ 或者 } x\in Y\}.$$

例子 1.4.1　设 $X=\{a,b,e\}$, $Y=\{b,c,d\}$, $Z=\{c,e,g\}$, $W=\{a,b,d,f\}$. 则
$X\cup Y=\{a,b,c,d,e\}$, $Y\cup Z=\{b,c,d,e,g\}$, $Z\cup W=\{a,b,c,d,e,f,g\}$.

设 X 和 Y 为两个集合。那么所有既属于 X 又属于 Y 的元素组成的整体称作是 X 与 Y 的交集，记作 $X\cap Y$. 容易看出，

$$X\cap Y=\{x \mid x\in X \text{ 且 } x\in Y\}.$$

如果 $X\cap Y$ 是空集，则我们称 X 和 Y 不交。

例子 1.4.2 设 $X=\{a,b,e\}$, $Y=\{b,c,d\}$, $Z=\{c,e,g\}$, $W=\{a,b,d,f\}$. 则
$X\cap Y=\{b\}$, $X\cap W=\{a,b\}$, $Y\cap W=\{b,d\}$, $Z\cap W=\varnothing$.

设 X 和 Y 为两个集合。那么所有属于 X 但不属于 Y 的元素组成的整体称作是 X 与 Y 的差集, 记作 $X-Y$. 容易看出,

$$X-Y=\{x\mid x\in X \text{ 且 } x\notin Y\}.$$

直观上看, $X-Y$ 就是从 X 中去掉 Y 中的元素得到的集合。

当然, 还有很多集合运算, 但因与本书关系不大, 故略去。

§1.4.5 子集

我们把全体偶数所组成的集合记作 $\mathbb{E}$. 且把所有整数组成的集合记作 $\mathbb{Z}$. 那么, $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{Z}$ 之间有什么联系呢? $\mathbb{E}$ 的每个元素都是 $\mathbb{Z}$ 的元素, 即, $\mathbb{Z}$ 含有 $\mathbb{E}$ 的每个元素。

定义 1.4.1 设 X 和 Y 为两个集合。如果 Y 的每个元素都是 X 的元素, 则称 Y 是 X 的*子集*. 如果 Y 是 X 的子集, 我们也称 Y 包含于 X 中, 或称 X 包含 Y. 我们用 "$\subseteq$" 表示包含关系, 即用 "$Y\subseteq X$" 表示 "Y 是 X 的子集".

- $Y\subseteq X$ 当且仅当 对任意的 x, 如果 $x\in Y$ 则 $x\in X$.
- $X=Y$ 当且仅当 $X\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$.
- 我们用 $Y\subset X$ 表示 $Y\subseteq X$ 但 $X\neq Y$. 直观地讲, $Y\subset X$ 表示 Y 是 X 的*真子集*.
- $Y\not\subseteq X$ 当且仅当 存在 x 使得 $x\in Y$ 但 $x\notin X$.
- 如果 $Z\subseteq Y$ 且 $Y\subseteq X$, 则 $Z\subseteq X$.
- $Y\subseteq X$ 当且仅当 $Y\cap X=Y$

§1.4.6 有序对与 n 元序组

我们回忆一下平面解析几何中的众所周知的方法。相对于某一确定的直角坐标系, 平面上的每一点都可以用数对 (x,y) 来表示, 称作该点的的坐标。坐标中两个数的顺序十分重要。如果 $x\neq y$, 则 (x,y) 和 (y,x) 代表两个不同的点, 也就是说, $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$。因此, 我们把 (x,y) 称作有序对。

一般地, 对于 $n>1$, 我们用 $(x_1,\cdots,x_n)$ 表示对象 $x_1,\cdots x_n$ 的 n 元序组。

§1.4.7 集合的笛卡尔积

给定两个集合 X, Y. 对任意一元素 $x \in X$, 及任意一元素 $y \in Y$, 就有一个有序对 (x, y). 所有这样的有序对组成的集合叫作 X, Y 的笛卡尔积，记作 $X \times Y$. 更确切地，$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ 且 } y \in Y\}$

例子 1.4.3 设 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5\}$. 则

$$X \times Y = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}.$$

更一般地，集合 $X_1, \cdots, X_n$ 的笛卡尔积定义为

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n\}.$$

对于任意集合 X 和自然数 $n > 1$, 我们把集合

$$\overbrace{X \times X \times \cdots \times X}^{n}$$

简记作 X^n，即

$$X^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X, \cdots, x_n \in X\},$$

称之为 X 的 n 次笛卡尔积.

为了今后叙述方便，我们定义 X^1 就是 X 自身，即 $X^1 = X$.

习题 1.4.1 设集合 X 恰含有 n 个元素，集合 Y 恰含有 m 个元素. 问 $X \times Y$ 含有几个元素？

§1.4.8 关系

所谓关系，即指一类对象与另一类对象的联系。如：人与人之间的 “婚姻” 关系；“父子” 关系。数学对象之间也有许多关系，如：直线间的 “平行” 关系，“垂直” 关系；数与数之间的 “相等” 关系，“大小” 关系；集合间的 “包含” 关系等等。

我们可以用有序对的集合来表示关系。比如：“父子” 关系就可表示为集合

$$R = \{(x, y) \,|\, x \text{ 是 } y \text{ 的父亲}\}.$$

对任意两个人 x, y, 如果 x 是 y 的父亲，则有序对 (x, y) 属于 R; 反之，如果有序对 (x, y) 属于 R, 则表明 x 是 y 的父亲。

定义 1.4.2　如果一集合 R 中的元素都是有序对，即如果对 R 中的每个元素 z 都存在 x, y 使得 $z = (x, y)$，则称 R 为一个*二元关系*，简称*关系*. 通俗地讲，关系是有序对的集合.

设 X, Y 为两个集合，如果 $R \subseteq X \times Y$，则称 R 为从 X 到 Y 的关系。如果 $R \subseteq X \times X$，则称 R 为 X 上的二元关系。

更一般地，对于集合 X 和 $n \geq 1$，如果 $R \subseteq X^n$，则我们称 R 的为 X 上的 n 元关系。特别地，X 的子集也称做是 X 上的性质或属性。

设 R 是集合 X 上的 n 元关系，如果 $(x_1, \cdots, x_n) \in R$ 则我们说 $(x_1, \cdots, x_n)$ 具有 R 关系. 我们常常以 $R(x_1, \cdots, x_n)$ 表示 $(x_1, \cdots, x_n) \in R$. 对于 $n = 2$ 的情况，我们有时也以 xRy 来表示 $(x, y) \in R$，即 x 和 y 有 R 关系。

例子 1.4.4　(1) 空集 $\varnothing$ 是一个关系，称作零关系。

(2) 设 X 为两个集合，则 X^2 为 X 上的关系，称作全关系.

(3) 设 X 为一集合，$\{(x, x) \mid x \in X\}$ 为 X 上的相等关系.

(4) $\{(m, n) \mid n, m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$ 为 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系。

(5) 自然数间的整除关系为

$$\mathrm{div} = \{(m, n) \mid n, m \in \mathbb{N},\ \text{存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } mk = n\}$$

可以看出，$\mathrm{div}(n, m)$ 当且仅当 n 能被 m 整除。

§1.4.9　函数

我们在中学都学过函数的概念。一般说来，一个函数总把一集合 X 中的每一个元素与一个集合 Y 中的唯一的一个元素相对应。由此看来，函数建立了一集合 X 与一集合 Y 中元素间的关系。因此函数可看作是一类特殊的关系。

定义 1.4.3　设 X, Y 为两个集合，f 为 X 到 Y 间的关系 (即 $f \subseteq X \times Y$). 如果 f 满足条件: 对任意 $x \in X$，都存在唯一的 $y \in Y$ 使得 $(x, y) \in f$，则称 f 为 X 到 Y 的*函数*，记作：$f : X \to Y$.

有时我们也把函数称作*映射*.

设 $f : X \to Y$. 则对 X 中任意一个元素 x，都有 Y 中唯一的一个元素 y 使得 $(x, y) \in f$，称 y 为 f 在 x 处的值，记作 $f(x)$，即 $f(x) = y$.

例子 1.4.5　(1) 设 X 为一个集合，则

$$\mathrm{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

为函数，称作 X 上的*恒等函数*, 即对任意 $x \in X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$.

(2) 设 X, Y 是集合，b 为 Y 中的一个固定元素，令

$$g = \{(x, b) \mid x \in X\}.$$

则 g 为函数，称作 X 到 Y 的以 b 为值的*常 (值) 函数*，即对任意 $x \in X$, $g(x) = b$.

(3) 令

$$Z = \{(n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

则 Z 为函数，称之为*零函数*, 即对任意 $n \in \mathbb{N}$, $Z(n) = 0$.

(4) 令

$$S = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

则 S 为函数，称之为*后继函数*, 即对任意 $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = n + 1$.

虽然我们把函数看成集合，但在定义函数时，我们并不一定非得以集合形式把它写出来，而常常是指明所要定义的函数在每个点处的值。例如，“对任意自然数 n, 令 $g(n) = 2n$” 这句话就定义了自然数集上的函数 $g = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

定义 1.4.4　设 $f : X^k \to Y$ 为函数，则我们称 f 为从 X 到 Y 的 k 元函数。从而，对 X 中的任意元素 $x_1, \cdots, x_k$ 都存在 Y 中的唯一元素 y 使得 $((x_1, \cdots, x_k), y) \in f$, 称 y 为 f 在 $(x_1, \cdots, x_k)$ 处的值, 记作 $f(x_1, \cdots, x_k)$. [3]

例子 1.4.6　设 k, i 为自然数，$1 \le i \le k$. 定义函数 $U_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 如下：对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k$, $U_i^k(n_1, \cdots, n_k) = n_i$. 称 U_i^k 为*投影函数*.

§1.4.10　单射、满射和双射 *

定义 1.4.5　设 $f : X \to Y$ 为映射。称 f 为*单射*(或*内射*) 如果对任意 $x_1, x_2 \in X$，当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时必有 $x_1 = x_2$，也就是说，当 $x_1 \neq x_2$ 时，必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

显然，恒等函数为单射，但常函数一般不是单射。

例子 1.4.7　定义 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下：对任意 $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$。则 f 是单射。

习题 1.4.2　设 $f : X \to Y$ 为映射。定义 $g : X \to X \times Y$ 如下：对任意 $x \in X$, $g(x) = (x, f(x))$. 试证明 g 是单射。

[3] 虽然我们用 $f(x_1, \cdots, x_k)$ 表示函数在 $(x_1, \cdots, x_k)$ 处的值，但对于自然数集上的加法运算 $+$ 和乘法运算 $\bullet$，我们仍用 $n + m$, $n \bullet m$ (有时还省略 “$\bullet$”) 表示两个自然数的和与积，而不是表示为 $+(n, m)$, $\bullet(n, m)$.

定义 4.2 设 $f: X \to Y$ 为映射。称 f 为 X 到 Y 上的*满射*如果对任意 $y \in Y$ 总存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$.

显然，恒等映射 id_X 为 X 到 X 上的满射。

例子 1.4.8　设 X, Y 为两个集合，定义映射 $f: X \times Y \to X$ 如下：对任意 $(x, y) \in A \times B$, $f((x, y)) = x$. 则 f 为满射。

定义 1.4.6　设 $f: X \to Y$ 为映射。如果 f 既是单射又是满射则称 f 为*双射*。

显然，恒等映射 id_X 是 X 到 X 上的双射。

单射也称为 1-1 映射，双射也可称为 1-1 对应。

§1.4.11　可数集合 *

要比较两个集合的元素多寡，可以数一数这两个集合各有多少个元素即可。但有时，也采用另外一个办法：例如，在一个大会场，要知道准备的椅子够不够，可以先让大家坐下，一个人只能坐一个座位。如果有人没有椅子可坐，说明准备的椅子没有与会的人多。在古代，人们还没有数目的概念之前，人们是如何知道一个集合元素的多寡呢？相传，在古印度有一位牧羊人，他早上把羊放出去，到晚上再把羊赶回羊圈。他怎么知道，晚上赶回的羊和早上放出的羊一样多呢？他就想了一个办法：他找来一根绳子，在早上每放出一只羊，就在绳上打一个结。这样他就知道，羊的只数和绳上的结点的个数是一样的。到晚上，他一只一只地把羊赶进圈里。每进圈一只羊，他就数一个结。如果，羊进完了结也数完了，说明放出去的和赶进来的一样多；如果，羊进完了，还有结子没有数完，说明有羊丢了；反之，说明羊多了。这实际上是采用了对应的办法，如果两个集合间存在一一对应，说明这两个集合有同样多的元素。

通俗地讲，一个无穷集合是可数的如果它和自然数集 $\mathbb{N}$ 具有同样多的元素。

定义 1.4.7

(1) 称一个集合 X 为*有穷集合*如果存在自然数 n 和 $\{1, \cdots, n\}$ 到 X 上的一一对应。

　不是有穷集合的集合称作*无穷集合*。

(2) 称一个集合 X 为*可数集合*如果 X 是有穷集合或者存在 $\mathbb{N}$ 到 X 上的一一对应。

(3) 如果 X 既是无穷集又是可数集则称 X 为*可数无穷集合*。

实际上，X 是可数集合当且仅当存在 $\mathbb{N}$ 到 X 上的满射。

例子 1.4.9　集合 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$、$\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 都是可数集合。

定理 1.4.1
(1) 对每一自然数 $k \geq 1$, $\mathbb{N}^k$ 为可数集合。
(2) $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}^k \cup \cdots$ 也是可数集。

证明 略去，读者可参考集合论的教科书 [5, 11]。

我们把 $\mathbb{N}$ 的所有子集组成的集合记作 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, 称其为 $\mathbb{N}$ 的幂集。

定理 1.4.2 (Cantor 定理) $\mathbb{N}$ 的幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可数的。

证明 要证 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可数的，我们只需证明不存在 $\mathbb{N}$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上的满射。用反证法。假设 $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 为满射。令 $B = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \notin f(n)\}$. 注意 $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. 又 f 为满射，故存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f(m) = B$. 下面我们导出矛盾. 如果 $m \in B$, 根据 B 的定义, $m \notin f(m) = B$, 矛盾. 故应有 $m \notin B$. 再根据 B 的定义, $m \in f(m) = B$, 矛盾。从而不存在 $\mathbb{N}$ 到 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上的满射，所以 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 是不可数的。

§1.5 归纳定义与归纳证明

§1.5.1 归纳定义

我们知道，一个集合由它所包含的元素唯一地确定。因此要定义一集合，我们只需确定它所包含的元素即可。那么如何来确定一个集合所包含的元素呢？我们来介绍一种称之为归纳定义的方法。这种定义方法首先确定要定义集合中的初始元素，而其它元素总是从初始元素出发通过某些运算在有穷步骤内产生的。

归纳定义（模式）：设 X 为一集合，$a_1, \cdots, a_k$ 为 X 中的元素，$f_1, \cdots, f_s$ 为 X 上的一元函数，而 $g_1, \cdots, g_t$ 为 X 上的二元函数 $(k, s, t \in \mathbb{N})$。我们可以按如下方法来定义 X 的一个子集 Y.

(1) $a_1, \cdots, a_k$ 都属于 Y（我们称 $a_1, \cdots, a_k$ 为 Y 的初始元素），
(2) 如果 y 属于 Y, 则 $f_1(y), \cdots, f_s(y)$ 也属于 Y,
(3) 如果 y_1, y_2 属于 Y，则 $g_1(y_1, y_2), \cdots, g_t(y_1, y_2)$ 也属于 Y,
(4) Y 中的所有元素都是使用 (1)-(3) 经有穷步骤得到的。

- 在上面定义中，为了方便我们只用了一元函数和二元函数，在实际的归纳定义中，也可以用多元函数。
- 归纳定义亦称作递归定义。

为了便于理解，我给出一些递归定义的简单例子。

例子 1.5.1　设 M 是按如下递归定义的集合。

(1) 7 属于 M,

(2) 如果 n, m 属于 M, 则 $n+m$ 也属于 M,

(3) M 中的每个元素都是使用 (1)-(2) 经有穷步骤得到的。

则 $M = \{7i \mid i \geq 1\}$.

例子 1.5.2　设 M 是按如下递归定义的集合。

(1) 0 属于 M,

(2) 如果 n 属于 M, 则 $n+1$ 也属于 M,

(3) M 中的每个元素都是使用 (1)-(2) 经有穷步骤得到的。

则 M 为全体自然数的集合，即 $M = \mathbb{N}$.

以上两个例子都是归纳定义自然数集的子集。其他集合的归纳定义的例子在今后各章中陆续给出。

§1.5.2　归纳证明

我们的元理论中除了包含各种逻辑推理方法，还有一种非常重要的论证方法，即归纳证明。设集合 Y 是按如下方式归纳定义的：

(1) $a_1, \cdots, a_k$ 都属于 Y ,

(2) 如果 y 属于 Y, 则 $f_1(y), \cdots, f_s(y)$ 也属于 Y,

(3) 如果 y_1, y_2 属于 Y，则 $g_1(y_1, y_2), \cdots, g_t(y_1, y_2)$ 也属于 Y,

(4) Y 中的所有元素都是使用 (1)-(3) 经有穷步骤得到的。

再设 R 为一个性质. 那么我如何证明 Y 中的每个元素都具有性质 R 呢？只要我们证明了以下 3 个条件，我们就可得出：Y 中的每个元素都具有性质 R。这三个条件是：

(1) 每个初始元素都具有性质 R。

(2) 对任意的 $y \in Y$, 如果 $R(y)$ 成立，则 $R(f_1(y)), \cdots, R(f_s(y))$ 也成立。

(3) 对任意 $y_1, y_2 \in Y$, 如果 $R(y_1)$ 和 $R(y_2)$ 均成立，则 $R(g_1(y_1, y_2)), \cdots, R(g_t(y_1, y_2))$ 也成立。

- 证明以上三个条件的过程，叫做归纳证明 (也叫递归证明), 而把 $R(y)$ 称作归纳命题。
- 证明初始元素具有性质 R 的过程叫做归纳基始。

- 证明 (2) 和 (3) 的过程叫做归纳步骤。要证明 (2), 即要证：对任意的 $y \in Y$, 如果 $R(y)$ 成立，则 $R(f_i(y))$ $(i = 1, \cdots, s)$ 也成立，我们总是假设 $R(y)$ 成立，然后证明 $R(f_i(y))$ 也成立。这个假设叫做归纳假设。同理在证明 (3) 的过程中，我们也要先假设 $R(y_1)$ 和 $R(y_2)$ 均成立，这也是归纳假设。

特别地，要证明每个自然数都具有某性质 R, 只需证明

(1) 0 具有性质 R.

(2) 对任意自然数 n, 如果 n 具有 R 性质，则 $n+1$ 也具有性质 R.

证明以上两个条件的过程，叫做数学归纳法。

例子 1.5.3　试证明：对任意自然数 n, 都有

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

证明　对任意自然数 n, 令 $S_n = 0+1+2+\cdots+n$. 我们的归纳命题就是：$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
基始：当 $n = 0$ 时，$S_n = 0$ 且 $\frac{n(n+1)}{2} = 0$. 所以 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
归纳步骤：设 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$。则

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

从而，对任意自然数 n, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

注记 1.5.1　在使用数学归纳法完成归纳推步骤时，我们需要假设 $R(n)$，然后证明 $R(n+1)$. 但有时为了证明 $R(n+1)$ 我们不仅仅假设 $R(n)$ 成立，而是假设对所有 $m \leq n$，$R(m)$ 都成立。这种修改的归纳法叫做强数学归纳法。

第二章　命题演算

命题演算是命题逻辑的形式系统。对形式系统的研究有两种方法：语义方法与语法方法。语义方法亦称模型论方法，研究命题的语义 (即命题的意义或真值)、重言式、语义后承等。语法方法亦称证明论方法，研究形式推演、形式定理。命题演算的一致性定理和完全性定理表明，语法方法和语义方法是等价地，特别地，一命题是重言式当且仅当它是形式定理。

§2.1　命题演算的形式语言

形式语言一般分为两部分：形式符号，和形成规则（亦称语法规则）。

§2.1.1　命题逻辑的形式符号

命题逻辑的形式符号有：

原子命题符:　$\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \cdots, \mathrm{p}_n, \cdots$ [1]

逻辑联结词:　$\neg$ (否定),　$\wedge$ (合取),　$\vee$ (析取),　$\rightarrow$ (蕴涵)

括号:　(,　)

为了方便起见，我们把所有原子命题符组成的集合记作 At, 即 $\mathrm{At}=\{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \cdots, \mathrm{p}_n, \cdots\}$.

注记 2.1.1　每个逻辑联结词后边括号中的汉字可看作它们的读名，也可看作是对它们的解释。不过必须注意，所有这些符号不具任何意义，不代表任何对象。这些解释只不过是为了表述上的方便。

§2.1.2　形成规则

形式符号是形式语言中的最基本的符号。由形式符号组成的（有穷长的）符号串称作形式表达式。不过我们只对一类形式表达式感兴趣，即合适公式。

定义 2.1.1　(合适公式) 命题演算的合适公式可递归定义为:

(1) 每一原子命题符都是合适公式,

(2) 如果 A 是合适公式, 则 $(\neg A)$ 也是合适公式,

[1]需要指出的是，为了方便，我们以自然数作为下标来区分不同的原子命题符。这并不表明我们要建立的形式系统包括自然数。实际上，我们可以把 p_n 理解为 $\mathrm{p}|\cdots|$ (p 后面有 n 个 “|”)，但要把它看成是一个单独的符号。

(3) 如果 A, B 是合适公式, 则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ 也是合适公式,

(4) 只有这些合适公式, 也就是说, 每一合适公式都是使用 (1)-(3) 经有穷步骤得到的。

所有合适公式组成的集合记作 PF.

注记 2.1.2

- 在上述定义中，我们使用了大写英文字母 A, B, C。这些符号不是形式语言中的符号，而是元语言中的符号。不过，它们代表形式语言中的合适公式。今后，我们必须区分清楚两类符号：一类是形式语言中的符号，即我们讨论的对象；另一类是元语言的符号，是用来讨论形式语言中的符号的。特别地，命题演算的形式语言中的原子命题符都是正体，但我们总是用斜体 p, q(或带下标）来谈论原子命题符。
- 上述定义方式是归纳定义 (也称递归定义). 这种定义方法首先确定要定义集合中的初始元素，而其它元素总是从初始元素出发通过某些运算在有穷步骤内产生的。

例子 2.1.1　设 A, B, C, D, E 为合适公式 (简称公式)。则以下表达式都是（合适）公式

(1) $(\neg((A \vee (\neg B)) \wedge ((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge (\neg(\neg C))))))$

(2) $((((\neg A) \vee B) \vee D) \vee (\neg E))$

虽然使用括号可以避免误解, 带来技术上的便利, 但从例子 2.1.1 看出, 一个公式中可能有很多层括号出现, 反而使得阅读起来相当困难. 为了尽可能少的使用括号, 我们规定逻辑联结词的结合强度按如下从左到右的次序由强变弱.

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \rightarrow$$

对于同样强度的联结词, 规定它们与左边的公式优先结合, 例如, $A \vee B \vee C$ 即是公式 $(((A \vee B) \vee C))$ 的简化.

例子 2.1.2　设 A, B, C, D, E 为公式。

(1) $((\neg B) \wedge C)$ 可简化为: $\neg B \wedge C$.

(2) $((A \wedge (\neg B)) \rightarrow C)$ 可简化为: $A \wedge \neg B \rightarrow C$

(3) $((\neg C) \rightarrow ((\neg A) \vee B))$ 可简化为: $\neg C \rightarrow \neg A \vee B$

(4) $(\neg((A \vee (\neg B)) \wedge ((\neg A) \vee ((\neg B) \wedge (\neg(\neg C))))))$ 可简化为:
$\neg((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee (\neg B \wedge \neg\neg C)))$

(5) $((((\neg A) \vee B) \vee D) \vee (\neg E))$ 可简化为: $\neg A \vee B \vee D \vee \neg E$.

在第一章中我们仅介绍了如何归纳定义集合. 实际上我们还可归纳定义函数. 特别地，我们可以用归纳定义的方法来定义 PF 上的函数. 方法如下：首先确定最简单公式 (即原子命题) 所对应的值，而复杂的公式所对应的值由构成它的简单公式所对应的值确定。下面是一个具体的例子。

定义 2.1.2 设 $A \in \mathrm{PF}$. 则用 $\mathrm{suppt}(A)$ 表示所有在 A 中出现的原子命题符组成的集合。实际上 $\mathrm{suppt}(A)$ 可归纳定义如下：[2]

(1) 如果 A 是一原子命题符 p, 则 $\mathrm{suppt}(A) = \{p\}$.

(2) 如果 A 为 $\neg B$, 则 $\mathrm{suppt}(A) = \mathrm{suppt}(B)$.

(3) 如果 A 为 $B \wedge C$, 则 $\mathrm{suppt}(A) = \mathrm{suppt}(B) \cup \mathrm{suppt}(C)$.

(4) 如果 A 为 $B \vee C$, 则 $\mathrm{suppt}(A) = \mathrm{suppt}(B) \cup \mathrm{suppt}(C)$.

(5) 如果 A 为 $B \to C$, 则 $\mathrm{suppt}(A) = \mathrm{suppt}(B) \cup \mathrm{suppt}(C)$.

习题 2.1.1 设 $A, B \in \mathrm{PF}$. 如果 B 是 A 的一部分，则称 B 是 A 的子公式。例如 $(\neg p_3)$, $(p_1 \wedge p_2)$ 均是 $((p_1 \wedge p_2) \to ((\neg p_3) \vee p_2))$ 的子公式。当然，一个公式也是其自身的子公式. 我们用 $\mathrm{subf}(A)$ 表示公式 A 的所有子公式组成的集合。试给出 $\mathrm{subf}(A)$ 的归纳定义。

§2.2 命题演算的语义

我们说过，形式语言中的符号都是无意义的。但是，我们可以赋予它意义。例如，我们可以把原子命题符号 p 解释为一个命题, 从而它就有了意义，不是真就是假。也就是

[2] $\mathrm{suppt}(A)$ 的归纳定义也可表述为：

(1) 对任意原子命题符 $p \in \mathrm{At}$, $\mathrm{suppt}(p) = \{p\}$.

(2) 对任意公式 $A \in \mathrm{PF}$, $\mathrm{suppt}(\neg A) = \mathrm{suppt}(A)$.

(3) 对任意公式 $A, B \in \mathrm{PF}$, $\mathrm{suppt}(A \wedge B) = \mathrm{suppt}(A) \cup \mathrm{suppt}(B)$.

(4) 对任意公式 $A, B \in \mathrm{PF}$, $\mathrm{suppt}(A \vee B) = \mathrm{suppt}(A) \cup \mathrm{suppt}(B)$.

(5) 对任意公式 $A, B \in \mathrm{PF}$, $\mathrm{suppt}(A \to B) = \mathrm{suppt}(A) \cup \mathrm{suppt}(B)$.

说，我们可以把原子命题符赋值为真或假（今后我们用 1 代表 “真”，而用 0 代表 “假”）。而把逻辑联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$ 分别解释为通常的 “非”、“并且”、“或者”[3]、“蕴涵”[4]。

容易看出，“A 并且 B” 的真假依赖于 A 和 B 的真假。只有当 A 和 B 都为真时，“A 并且 B” 才是真的。因此，“并且” 实际上是从 $\{0,1\}\times\{0,1\}$ 到 $\{0,1\}$ 上的函数，我们用 $\dot\wedge$ 表示之。类似地，“非”、“或者”、“蕴涵” 也都可以看作是函数，分别记作 $\dot\neg$、$\dot\vee$、$\dot\to$. 按照通常的含义，它们可以表示为如下表.[5]

x	$\dot\neg x$
1	0
0	1

x	y	$x\dot\wedge y$	$x\dot\vee y$	$x\dot\to y$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	1	1	1

§2.2.1 赋值、真值表、重言式

定义 2.2.1

(1) 每一个从 At 到 $\{0,1\}$ 的映射 v 称作是一个赋值。

(2) 设 v 为任意赋值, 我们可递归定义任意公式 A 在 v 下的真值 $\hat v(A)$ 如下：

- 对任意 $p\in \mathrm{At}$, $\hat v(p)=v(p)$,
- 对任意 $A\in \mathrm{PF}$, $\hat v(\neg A)=\dot\neg(\hat v(A))=\begin{cases}1, & \text{如果 } \hat v(A)=0,\\ 0, & \text{如果 } \hat v(A)=1.\end{cases}$
- 对任意 $A,B\in \mathrm{PF}$, $\hat v(A\wedge B)=\hat v(A)\dot\wedge\hat v(B)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \hat v(A)=1 \text{ 且 } \hat v(B)=1,\\ 0, & \text{如果 } \hat v(A)=0 \text{ 或 } \hat v(B)=0.\end{cases}$
- 对任意 $A,B\in \mathrm{PF}$, $\hat v(A\vee B)=\hat v(A)\dot\vee\hat v(B)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \hat v(A)=1 \text{ 或 } \hat v(B)=1,\\ 0, & \text{如果 } \hat v(A)=0 \text{ 且 } \hat v(B)=0.\end{cases}$
- 对任意 $A,B\in \mathrm{PF}$, $\hat v(A\to B)=\hat v(A)\dot\to\hat v(B)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \hat v(A)\le\hat v(B),\\ 0, & \text{如果 } \hat v(A)=1 \text{ 但 } \hat v(B)=0.\end{cases}$

[3]在日常语言中，“或者” 的含义会发生变化，有时指 “与或”，而有时为 “异或”。为清晰期间，我们规定 “或者” 总是指 “与或”。

[4]在日常语言中，“蕴涵” 指 “因果蕴涵”。例如，“如果他考试不及格，他就不会被录取” 这句话是有意义的。然而，“如果兔子会飞，则月亮是三角形的” 这句话就没有意义，因为兔子是否会飞和月亮的形状没有因果关系。然而在我们这里，如果 A 是假的，那么不管 B 是真还是假，“如果 A 则 B” 总是真的. 这种 “蕴涵” 称之为 “实质蕴涵”。

[5]为了和联结词相对应，我们把 $\dot\neg(x)$ 写作 $\dot\neg x$; 而把 $\dot\wedge(x,y)$、$\dot\vee(x,y)$、$\dot\to(x,y)$ 分别写作 $x\dot\wedge y$、$x\dot\vee y$、$x\dot\to y$.

由上定义可知，一旦原子命题符号的取值确定，则每一公式的真值也就唯一确定。

我们知道，对任意公式 A, A 中只有有穷多个原子命题符号，即，$\mathrm{suppt}(A)$ 是有穷集。那么，当 $\mathrm{suppt}(A)$ 之外的原子命题符的取值发生变化时，A 的真值是否也发生变化呢？下面引理表明，公式 A 的取值不受 $\mathrm{suppt}(A)$ 之外的原子命题符的取值的影响。

引理 2.2.1　设 v_1, v_2 是任意两个赋值。对任意 A 为一公式，如果对任意 $p \in \mathrm{suppt}(A)$ 都有 $v_1(p) = v_2(p)$, 则必有 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$.

在证明该引理之前，我们回顾一下归纳证明方法。设 R 是一个（元）性质，根据公式的归纳定义 (定义 2.1.1)，要证明任意公式 A 都具有性质 R，我们只需证明如下条件：

(1) 当 A 是原子命题符时，A 具有性质 R.

(2) 当 A 为 $(\neg B)$，且 B 具有性质 R 时，A 也具有性质 R.

(3) 当 A 为 $(B \wedge C)$，且 B, C 都具有性质 R 时，A 也都具有性质 R.

(4) 当 A 为 $(B \vee C)$，且 B, C 都具有性质 R 时，A 也都具有性质 R.

(5) 当 A 为 $(B \to C)$，且 B, C 都具有性质 R 时，A 也都具有性质 R.

证明上述 (1)-(5) 的过程称作是归纳于公式结构的证明。

下面我就归纳于公式结构来证明引理 2.2.1. 这里的 (元) 性质 R 为：如果对任意 $p \in \mathrm{suppt}(A)$ 都有 $v_1(p) = v_2(p)$, 则必有 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$. 我们要证明任意公式 A 都具有性质 R.

(1) 当 A 是原子公式 p 时，$\mathrm{suppt}(A) = \{p\}$. 如果 $v_1(p) = v_2(p)$, 则根据定义 2.2.1, $\hat{v}_1(A) = v_1(p) = v_2(p) = \hat{v}_2(A)$.

(2) A 为 $(\neg B)$，且 B 具有性质 R. 这时有 $\mathrm{suppt}(A) = \mathrm{suppt}(B)$ (见定义 2.1.2). 设 v_1, v_2 为任意两个赋值, 且设对任意 $p \in \mathrm{suppt}(A)$ 都有 $v_1(p) = v_2(p)$. 则对任意 $p \in \mathrm{suppt}(B)$ 都有 $v_1(p) = v_2(p)$. 由于公式 B 具有 R 性质，故 $\hat{v}_1(B) = \hat{v}_2(B)$. 从而由定义 2.2.1 知, $\hat{v}_1(A) = 1 - \hat{v}_1(B) = 1 - \hat{v}_2(B) = \hat{v}_2(A)$.

(3) A 为 $(B \wedge C)$, 且 B, C 都具有性质 R. 这时，由定义 2.1.2, $\mathrm{suppt}(A) = \mathrm{suppt}(B) \cup \mathrm{suppt}(C)$. 设 v_1, v_2 为任意两个赋值。且设对任意 $p \in \mathrm{suppt}(A)$ 都有 $v_1(p) = v_2(p)$. 则对任意 $p \in \mathrm{suppt}(B)$ 都有 $v_1(p) = v_2(p)$. 由于 B 具有性质 R, 故 $\hat{v}_1(B) = \hat{v}_2(B)$. 同理可证，$\hat{v}_1(C) = \hat{v}_2(C)$. 从而根据定义 2.2.1 可知，$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$.

(4) 当 A 为 $(B \vee C)$，且 B, C 都具有性质 R 时，证明与 (3) 类似。

(5) 当 A 为 $(B \to C)$，且 B, C 都具有性质 R 时，证明与 (3) 类似.

于是，每个公式 A 的取值只依赖于其中的原子命题符的取值。这样，我们就可以以表的形式列出 A 的所有可能的取值。这种表称作 A 的真值表。

注记 2.2.1 我们实际上把联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ 分别解释为函数 $\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}, \dot{\rightarrow}$. 但是为了方便起见，我们以后将省略 $\dot{\neg}$、$\dot{\wedge}$、$\dot{\vee}$、$\dot{\rightarrow}$ 上的点. 读者可根据上下文分辨什么时候它们是联结词还是相应的函数。

例子 2.2.1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 的真指表为：

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1

例子 2.2.2 $(p \vee q) \wedge \neg r$ 的真指表为：

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \wedge \neg r$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

例子 2.2.3 $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ 的真指表为：

p	q	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

定义 2.2.2 设 A 为一公式，v 为一个赋值。如果 $\hat{v}(A) = 1$, 则我们称 v 满足公式 A.

定义 2.2.3 设 A 为一公式.

- 如果任意赋值都满足 A, 则称 A 是永真的, 或称 A 为重言式。
- 如果不存在满足 A 的赋值, 则称 A 是永假的, 亦称 A 是不可满足的.

- 如果 A 不是永假的, 则称 A 是可满足的.

例子 2.2.4　容易看出，例子 2.2.1 中的公式是永真的，例子 2.2.3 中的公式是永假的，例子 2.2.2 中的公式是可满足的. 当然，永真公式总是可满足的。

命题 2.2.1　下列公式都是重言式：

(1) $p_1 \to (p_2 \to p_1)$.

(2) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$.

(3) $p_1 \to (p_2 \to (p_1 \wedge p_2))$.

(4) $p_1 \wedge p_2 \to p_1$.

(5) $p_1 \wedge p_2 \to p_2$.

(6) $p_1 \to (p_1 \vee p_2)$.

(7) $p_2 \to (p_1 \vee p_2)$.

(8) $(p_1 \to p_3) \to ((p_2 \to p_3) \to (p_1 \vee p_2 \to p_3))$.

(9) $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \to \neg p_2) \to \neg p_1)$.

(10) $\neg\neg p_1 \to p_1$.

(11) $p \vee \neg p$.

(12) $\neg(p \wedge \neg p)$.

证明　由读者验证。

习题 2.2.1　试证明: 如果 A 是永真的，则 $\neg A$ 是不可满足的。

§2.2.2　代人

定义 2.2.4　(代入) 设 A 为一公式，$p_1, \cdots, p_m$ 为 A 中的若干原子命题符, $B_1, \cdots, B_m$ 为 m 个公式。则 $A[p_1/B_1, \cdots, p_m/B_m]$ 为把 A 中的 $p_1, \cdots, p_m$ 的每次出现都分别换成 $B_1, \cdots, B_m$ 后得到的公式。

注记 2.2.2　上述是一个形象而直观的定义。请读者给出其严格的递归定义。

例子 2.2.5　设公式 A 为 $(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$, 公式 B_1 为 $(p_2 \to p_3)$, 公式 B_2 为 $(\neg p_4 \to p_1)$. 则 $A[p_1/B_1, p_2/B_2]$ 为公式

$$((p_2 \to p_3) \vee (\neg p_4 \to p_1)) \wedge (\neg(p_2 \to p_3) \vee \neg(\neg p_4 \to p_1)).$$

引理 2.2.2　(代入引理) 设 A 是永真公式, p 是 A 中的一个原子命题符, B 为一公式. 则 $A[p/B]$ 也是永真的.

证明　假设引理不成立, 则存在赋值 v 使得 $\hat{v}(A[p/B]) = 0$. 定义赋值 v' 如下：

$$v'(q) := \begin{cases} \hat{v}(B), & \text{如果 } q = p, \\ v(q), & \text{如果 } q \neq p. \end{cases}$$

因为, $v'(p) = \hat{v}(B)$, 不难看出, $\hat{v}'(A) = \hat{v}(A[p/B]) = 0$. 这与 A 是永真的与假设矛盾. 引理得证. □

注记 2.2.3

- 上引理的一般情形也是成立的. 如果 A 永真, 则 $A[p_1/B_1, \cdots, p_m/B_m]$ 也是永真的.
- 上述证明只是一个直观的证明, 读者可给出其归纳证明.
- 由代入引理及命题 2.2.1 知, 有无穷多个永真公式.

§2.2.3　语义后承

定义 2.2.5　设 Γ 为一集公式, v 是一个赋值.

(1) 如果 v 满足 Γ 中的每个公式, 则称 v 满足 Γ.

(2) 称 Γ 是可满足的, 如果存在满足 Γ 的赋值.

(3) 设 A 是一个公式. 如果满足 Γ 的每个赋值都满足 A, 则称 A 是 Γ 的语义后承, 记作, $\Gamma \models A$.

注记 2.2.4

- 如果 Γ 是空集, 即 $\Gamma = \varnothing$, 则我们把 $\varnothing \models A$ 简记作 $\models A$. 显然, $\models A$ 当且仅当 A 是永真的。
- 假设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_k\}$, 则我们也可把 $\Gamma \models A$ 写为 $A_1, \cdots, A_k \models A$.
- 我们把 $\Gamma \cup \{B\} \models A$ 简记作 $\Gamma, B \models A$.

习题 2.2.2　试证明：

(1) $A, (A \to B) \models B$.

(2) $A \to B$ 是重言式 当且仅当 $A \models B$.

习题 2.2.3　试证明：

(1) $A \models A$.

(2) 如果 $\Gamma \models A$, 则 $\Gamma, B \models A$.

(3) 如果 $\Gamma, A \models B$ 则 $\Gamma \models A \to B$

(4) $A, B \models A \wedge B$.

(5) $A \wedge B \models A$,　$A \wedge B \models B$

(6) $A \models A \vee B$,　$B \models A \vee B$

(7) 如果 $\Gamma, A \models C$ 且 $\Gamma, B \vdash C$, 则 $\Gamma, A \vee B \models C$.

(8) 如果 $\Gamma, A \models B$ 且 $\Gamma, A \models \neg B$, 则 $\Gamma \models \neg A$.

(9) $\neg\neg A \models A$.

§2.2.4　紧致性定理 *

定义 2.2.6　设 Γ 为一集公式. 如果 Γ 的每个有穷子集都是可满足的，则我们称 Γ 是有穷可满足的。

定理 2.2.1　(紧致性定理) 设 Γ 为一集公式. 则 Γ 是可满足的当且仅当 Γ 是有穷可满足的。

证明　如果 Γ 可满足, 则存在赋值 v, 它满足 Γ 中的每个公式. 设 Σ 为 Γ 的任意一子集, 则 v 也满足 Σ 中的每个公式, 故 Σ 可满足。特别地, Γ 的每一有穷子集都可满足。

下证充分性。假设 Γ 的每一子集均可满足。注意，只有可数无穷多个公式，设

$$A_0, A_1, \cdots A_n, \cdots$$

为所有公式的一个枚举。下面我们递归构造集合序列 Δ_n 如下：

$$\Delta_0 = \Gamma, \quad \Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{A_n\} & \text{如果 } \Delta_n \cup \{A_n\} \text{ 有穷可满足.} \\ \Delta_n \cup \{\neg A_n\} & \text{否则.} \end{cases}$$

下面归纳证明每个 Δ_n 是有穷可满足的。因为 $\Delta_0 = \Gamma$, 故是有穷可满足的. 假设 Δ_n 是有穷可满足的。如果 $\Delta \cup \{A_n\}$ 是有穷可满足的，则根据定义，$\Delta_{n+1} = \Delta \cup \{A_n\}$ 是有穷可满足的. 假设 $\Delta \cup \{A_n\}$ 不是有穷可满足的。因为 Δ_n 是有穷可满足的，故必有 Δ_n 的有穷子集 Σ 使得 $\Sigma \cup \{A_n\}$ 不可满足. 设 Σ' 为 Δ_n 的任意有穷子集。从而 $\Sigma \cup \Sigma'$ 也是 Δ_n 的有穷子集，故可满足。设 v 为满足 $\Sigma \cup \Sigma'$ 的一个赋值。因为 $\Sigma \cup \{A_n\}$ 不可满足，故 v 必然满足 $\neg A_n$. 从而 $\Sigma' \cup \{\neg A_n\}$ 可满足。于是，$\Delta_n \cup \{\neg A_n\}$, 即 Δ_{n+1}，是有穷可满足的。

从而每个 Δ_n 都是有穷可满足的。

令 $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. 对 Δ 的任意有穷子集 Σ, 必存在一自然数 n 使得 $\Sigma \subseteq \Delta_n$, 于是, Σ 可满足. 所以，Δ 也是有穷可满足的。因此，对任意原子命题符 p，如果 $p \in \Delta$ 当且仅当 $\neg p \notin \Delta$, 即，p 和 $\neg p$ 有且只有一个属于 Δ. 于是我们可以定义赋值 v 如下：

$$v(p) := \begin{cases} 1, & \text{如果 } p \in \Delta, \\ 0 & \text{如果 } \neg p \in \Delta, \end{cases}$$

下面我们证明 v 满足 Δ. 设 A 为 Δ 中的任意公式。令

$$\Sigma = \{A\} \cup \{p \mid p \in \Delta \text{ 且 } p \in \mathrm{suppt}(A)\} \cup \{\neg p \mid \neg p \in \Delta \text{ 且 } p \in \mathrm{suppt}(A)\}.$$

显然，$\Sigma \subseteq \Delta$, 故 Σ 可满足。设赋值 v' 满足 Σ. 根据 v 的定义，容易看出，对于任意 $p \in \mathrm{suppt}(A)$ 有 $v(p) = v'(p)$. 由引理 2.2.1 知，$\hat{v}(A) = \hat{v}'(A) = 1$. 于是，$\Delta$ 可满足。因为 $\Gamma \subseteq \Delta$, 故 Γ 也可满足. 定理得证. □

推论 2.2.1　设 Γ 为一集公式，A 为一个公式。$\Gamma \models A$ 当且仅当存在 Γ 的有穷子集 Σ 使得 $\Sigma \models A$.

证明　由读者证明。

§2.2.5　等价, 替换

现在我们引进等价联结词 “$\leftrightarrow$”. 我们把 $(A \to B) \wedge (B \to A)$ 缩写为 $(A \leftrightarrow B$. “$A \leftrightarrow B$” 可读作: “A 等价于 B”. 规定 “$\leftrightarrow$” 的联结强度和 “$\to$” 一样.

命题 2.2.2　下列公式都是重言式。

(1) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_2)$.

(2) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$

(3) $(p_1 \wedge p_2 \to p_3) \leftrightarrow (p_1 \to (p_2 \to p_3))$.

(4) $\neg(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2)$.

(5) $\neg(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2)$.

(6) $\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1$.

(7) $(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_2) \vee (p_1 \wedge p_3))$.

(8) $(p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)) \leftrightarrow ((p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee p_3))$.

(9) $(p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)) \leftrightarrow ((p_1 \wedge p_2) \wedge p_3)$.

(10) $(p_1 \vee (p_2 \vee p_3)) \leftrightarrow ((p_1 \vee p_2) \vee p_3)$.

(11) $(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1)$.

(12) $(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (p_2 \vee p_1)$.

证明　由读者验证。

设公式 A 是公式 C 的子公式。那么，A 在 C 中作为一个（连续的）部分而出现，而且可能出现多次。有时我们需要明指 (即特别指定) A 在 C 中的某次出现。比如，我们特别指定 A 在 C 中（从左至右）的第 i 次出现。通常，我们把明指了 C 中 A 的某次出现以后的 C 记作 C_A. 今设 B 为一公式，把 C_A 中明指的 A 换为 B 后的公式记作 C_B.

例子 2.2.6　假设 A 为 $p_1 \to p_2$, 而 C 为 $(p_1 \to p_2) \wedge \neg((p_1 \to p_2) \vee \neg p_1)$。则 A 是 C 的子公式，且在 C 中出现了两次. 今特别指定 A 在 C 中的第二次出现，则 C_A 为 $(p_1 \to p_2) \wedge \neg((\overline{p_1 \to p_2}) \vee \neg p_1)$. 设 B 为公式 $\neg p_1 \vee p_2$, 则 C_B 为 $(p_1 \to p_2) \wedge \neg((\neg p_1 \vee p_2) \vee \neg p_1)$.

定理 2.2.2　（替换定理）

(1)　$A \leftrightarrow B \models C_A \leftrightarrow C_B$.

(2)　如果 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则 $C_A \leftrightarrow C_B$ 也是重言式.

证明　容易看出，(2) 是 (1) 的推论。故我们只证 (1). 假设 v 是满足 $A \leftrightarrow B$ 的任意赋值. 我们归纳于 C 的结构证明 v 满足 $C_A \leftrightarrow C_B$. 如果 C 就是 A, 则 A 在 C 中仅出现一次，故必是被明指的. 从而 $C_A = A$ 且 $C_B = B$. 于是结论成立。

假设 C 是 $\neg C'$ (且 C 不是 A). 则 A 的（被明指的）出现一定在 C' 中，即 $C_A = \neg C'_A$. 从而，$C_B = \neg C'_B$. 根据归纳假设 v 满足 $C'_A \leftrightarrow C'_B$. 根据否定词及蕴涵词的解释，$v$ 必满足 $C_A \leftrightarrow C_B$.

假设 C 是 $C' \wedge C''$ (且 C 不是 A). 则 A 的 (被明指的) 出现不是在 C' 中就是在 C'' 中。不妨设 A 的明指出现是在 C' 中，即 $C_A = C'_A \wedge C''$. 从而，$C_B = C'_B \wedge C''$. 根据归纳假设 v 满足 $C'_A \leftrightarrow C'_B$. 又 $C'' \leftrightarrow C''$ 是重言式。因而容易看出，v 必满足 $C_A \leftrightarrow C_B$.

当 C 是 $C' \vee C''$ 或 $C' \to C''$ 时证明类似，略之。

习题 2.2.4　如果 $\models A \leftrightarrow B$ 且 $\models B \leftrightarrow C$，则 $\models A \leftrightarrow C$.

§2.2.6　联结词的个数

当我们在对象语言中讨论时，我们希望对象语言有丰富的符号或词汇，这样会使我们讨论起来方便。然而，当我们要用元语言来讨论对象语言时，我们则需要对象语言越简单越好，这是因为，对象语言越复杂，我们关于它的讨论也就越麻烦。从元数学的角度看，我们希望对象语言尽可能地简单。比如，我们没有把 “异或” 作为初始联结词，这是因为它可用其他联结词表示，例如：$(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2)$. 再如，等价词可以用蕴涵词、合取词表示. 那么，我们就必须需要 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 和 $\to$ 这四个联结词吗？下面定理对这个问题作了回答。

定理 2.2.3
(1) 对任意公式 C, 都存在一个公式 D 使得 $\models C \leftrightarrow D$ 且 D 中的联结词属于 $\{\neg, \wedge\}$.
(2) 对任意公式 C, 都存在一个公式 D 使得 $\models C \leftrightarrow D$ 且 D 中的联结词属于 $\{\neg, \vee\}$.
(3) 对任意公式 C, 都存在一个公式 D 使得 $\models C \leftrightarrow D$ 且 D 中的联结词属于 $\{\neg, \to\}$.

证明　我们仅证 (1)，其他证明类似。设公式 C 中含有 $\vee$, 则它必有形如 $A \vee B$ 的子公式。明指 $A \vee B$ 的某次出现。由命题 2.2.2 知，$(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow \neg(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$ 为重言式。由代入引理，$(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$ 也是重言式。把 C 中 $A \vee B$ 的明指出现换为 $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ 后得到的公式记为 C_1. 由替换定理，$\models C \leftrightarrow C_1$. 注意，$C_1$ 中析取词出现的次数比 C 中析取词出现的次数少 1. 因此，继续上面的替换过程直至没有析取词出现为止。记最后得到的公式为 C'. 根据替换定理, $\models C \leftrightarrow C'$.

假设 C' 中有蕴涵词出现，则 C' 必有形如 $A \to B$ 的子公式。明指 $A \to B$ 的某次出现。由命题 2.2.2 和代入引理知，$\models (A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$. 把 C' 中 $A \to B$ 的明指出现换为 $\neg(A \wedge \neg B)$ 后得到的公式记为 C'_1. 由替换定理，$\models C' \leftrightarrow C'_1$. 注意，$C'_1$ 中蕴涵词出现的次数比 C' 中蕴涵词出现的次数少 1，且 C'_1 中仍没有析取词的出现。因此，继续上面的替换过程直至没有蕴涵词出现为止。最后得到的公式记作 D. 由替换定理，$\models C' \leftrightarrow D$. 从而，$\models C \leftrightarrow D$, 且 D 中既没有蕴涵词的出现也没有析取词的出现。

§2.3 符号化

§2.4 命题演算的公理及推理规则

在第 2.1 节中我们建立了命题演算的形式语言。根据第 1.2 节所介绍的建立形式系统的步骤，我们才完成了建立命题演算的前两步。在本节中我们将给出命题演算的公理和推理规则，而在下节中给出形式证明的形成规则，从而完成命题演算的建立。

设 A, B, C 代表任意公式. 命题演算的公理和推理规则为：

(Ax 1) $A \to (B \to A)$.

(Ax 2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.

(Ax 3) $A \to (B \to (A \wedge B))$.

(Ax 4) $A \wedge B \to A$.

(Ax 5) $A \wedge B \to B$.

(Ax 6) $A \to A \vee B$.

(Ax 7) $B \to A \vee B$.

(Ax 8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$.

(Ax 9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

(Ax 10) $\neg\neg A \to A$.

分离规则 MP： $\dfrac{A, A \to B}{B}$.

注记 2.4.1 上面的每一条都是元数学表达式。一旦指明 A, B, C 分别所代表的合适公式，上边每一条就确定了一条公理。由于 A, B, C 代表任意的公式，实际上，上面的每一条都表示无穷多条公理。例如，就 $(A \to (B \to A))$ 而言，如果 A 为公式 $(p_1 \wedge p_2)$，而 B 为 $\neg p_1$ 时，则 $(A \to (B \to A))$ 为公式 $((p_1 \wedge p_2) \to (\neg p_1 \to (p_1 \wedge p_2))$. 如果 A 为公式 $(\neg p_2 \to p_3)$，而 B 为 $(\neg p_1 \vee \neg p_2)$ 时，则 $(A \to (B \to A))$ 为公式 $((\neg p_2 \to p_3) \to ((\neg p_1 \vee \neg p_2) \to (\neg p_2 \to p_3))$. 因此，我们称上述每一元数学表达式为公理模式。

定义 2.4.1 设 A, B 为公式，我们称 B 是 A 和 $(A \to B)$ 的关于分离规则的直接后承。或称，B 是 A 和 $(A \to B)$ 的推论。亦称，A 和 $(A \to B)$ 为 B 的前提。推论是前提的直接后承。

值得强调的是，我们称一些公式为公理，并不是假定这些公式成立或为真，因为这些公式不具任何意义。所谓公理是指，不需要任何前提 就能得出的推论。

§2.5 形式证明及形式定理

定义 2.5.1 (形式证明) 称公式的有穷序列

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_n$$

是一个形式证明 (简称证明), 如果对任意 i, $1 \leq i \leq n$, 都有下列之一成立:

(1) A_i 是公理，或

(2) 存在 $j_1, j_2 < i$ 使得 A_i 是 A_{j_1} 和 A_{j_2} 关于分离规则的直接后承.

一个形式证明的长度是该证明所含公式的个数.

定义 2.5.2 (形式定理) 称公式 A 是一个形式定理 (简称定理), 如果存在一个形式证明 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 使得 $A = A_n$. 此时亦称 A 是 (形式) 可证的.

例子 2.5.1 $A \to A$ 是形式定理. 下面是它的一个形式证明. 注意, 由于空间的局限, 我们经常把形式证明按从上到下的顺序排列.

(1) $A \to (A \to A)$	/*Ax 1*/
(2) $(A \to (A \to A)) \to ((A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A))$	/*Ax 2*/
(3) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to (A \to A)$	/*(1), (2), MP */
(4) $(A \to ((A \to A) \to A))$	/*Ax 1*/
(5) $A \to A$	/* (3), (4), MP */

注记 2.5.1

- 上例中，A 为元语言符号，它可代表任意合适公式，因此 $A \to A$ 实际上是一个定理模式。而序列 (1)-(5) 实际上是一个证明模式。
- 上例所列的形式证明中，每行后边的 “/*” 与 “*/” 之间的内容只起注释作用，它并不是形式证明中的内容。例如，上例中公式 (1) 后边的 “/* Ax 1 */” 说明公式 (1) 是符合公理模式 Ax 1 的一条公理。再如，公式 (3) 后边的 “/*(1), (2), MP */” 表明公式 (3) 是公式 (1) 和 (2) 关于 MP 规则得直接后承.

习题 2.5.1 $\neg A \to (A \to B)$ 是定理.

§2.6 形式推演

要证明一个公式是形式定理，需要证明存在该公式的形式证明，为此我们可以构造它的一个形式证明。然而，即使是一些很初等的定理, 其形式证明也是很长的. 这就是说，虽然我们把逻辑推理分解成简单的步骤, 但我们需要付出更多步骤的代价.

然而在实践中，我们总是先证明一些结论，然后在利用已经证明的结论来证明我们要证的结论。例如，中学平面几何教材总是先证明一些定理，然后让学生利用这些已证的定理去证明习题中的结论。

假设一些元数学定理证明了某些公式是形式定理, 那么直观上看，我们从这些定理推出来的公式也应该是定理。这就是说，在证明其他公式的形式可证性时, 我们可以直接使用这些元数学定理, 而无须每次都把相应的形式证明显式地写出来。这样就可以大大简化推导步骤，使形式证明的叙述明显缩短.

定义 2.6.1 (形式推演) 设 Γ 是由一些公式组成的集合. 称公式序列

$$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$$

是一个由 Γ 中公式出发的形式推演, 如果对任意 i, $1 \le i \le n$, 都有下列之一成立:

(1) $A_i \in \Gamma$, 或

(2) A_i 是一公理，或

(3) 存在 $j_1, j_2 < i$ 使得 A_i 是 A_{j_1} 和 A_{j_2} 关于分离规则 MP 的直接后承.

如果存在由 Γ 出发的推演使得 A 是该推演的最后一个公式, 则称 A 可由 Γ 推出 (或说, Γ 推出 A), 记作 $\Gamma \vdash A$. [6] 我们常把 Γ 中的公式称作假定公式。

注记 2.6.1

- 如果序列 A_1, A_2, $\cdots\cdots$, A_n 是一个由 Γ 中公式出发的形式推演, 则对任意 $i \le n$, A_1, A_2, $\cdots\cdots$, A_i 也是一个由 Γ 中公式出发的形式推演，于是，$\Gamma \vdash A_i$.
- 一个形式推演的长度，是指该推演中公式的个数.
- 如果 Γ 是空集，即 $\Gamma = \varnothing$，则我们把 $\varnothing \models A$ 简记作 $\vdash A$. 显然，$\vdash A$ 当且仅当 A 是形式定理。
- 假设 $\Gamma = \{B_1, \cdots, B_k\}$，我们常把 $\Gamma \vdash A$ 写为 $B_1, \cdots, B_k \vdash A$.

[6]注意，我们在某一段时间内总是讨论一个形式系统，“$\vdash$” 总是指我们当前所讨论的形式系统的推演关系. 如果同时讨论两个形式系统，那么我们就必须用不同的符号来表示这两个系统的推演关系. 文献中一般用 “$\vdash_{\mathcal{L}}$” 来表示系统 $\mathcal{L}$ 中的推演关系.

- 我们把 $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ 简记作 $\Gamma, B \vdash A$.

例子 2.6.1　设 A, B, C 为公式。

1. $A \to (B \to C), B, A \vdash C$.

(1) A	/* 假定公式 */
(2) B	/* 假定公式 */
(3) $A \to (B \to C)$	/* 假定公式 */
(4) $B \to C$	/*(1), (3), MP*/
(5) C	/* (2), (4), MP */

2. $B \vdash A \to B$.

(1) B	/* 假定公式 */
(2) $B \to (A \to B)$	/* Ax 2 */
(3) $A \to B$	/* (1), (2), MP */

3. $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$

(1) B	/* 假定公式 */
(2) $B \to (A \to B)$	/* Ax 1 */
(3) $A \to B$	/* (1), (2), MP */
(4) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$	/* Ax 2 */
(5) $(A \to (B \to C)) \to (A \to C)$	/* (3), (4), MP */
(6) $A \to (B \to C)$	/* 假定公式 */
(7) $A \to C$	/* (5), (6), MP */

注记 2.6.2　在上述例子中，A, B, C 为元数学符号，他们代表任意的公式。因此上述推演实际是推演模式. 譬如，由上例中的第 2 个例子, 我们知，

$$A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to (B \to C)).$$

要证明 $\Gamma \vdash A$, 就是要证明存在从 Γ 到 A 的推演。当然对于简单的情况，我们可以直接构造这样的推演。比如，如果 $A \in \Gamma$, A 本身就构成了从 Γ 到 A 的推演。特别地，$A \vdash A$. 再如，上面例子中的几个推演都是直接构造出来的。但是，如果我们能通过别的某种方法保证从 Γ 到 A 推演的存在性，也能证明 $\Gamma \vdash A$. 比如，如果我们证明了 $\Delta \subseteq \Gamma$ 且 $\Delta \vdash A$, 那么必有 $\Gamma \vdash A$. 这是因为，Δ 到 A 的任何推演也都是 Γ 到 A 的推演。再如，假设我们已经证明了 $A \vdash B$, $B \vdash C$, 则必有 $A \vdash C$, 这是因为，把 B 到 C 的推演中的 B 换成 A 到 B 的推演后，我们就得到一个 A 到 C 的推演。更一般地，如果 $\Delta \vdash B$ 且 $\Gamma, B \vdash A$ 则 $\Delta, \Gamma \vdash A$. 因此我们有如下命题.

命题 2.6.1　设 Γ, Δ 为公式的集合，A, B 为公式。则

(1) $A \vdash A$.

(2) 如果 $\Delta \vdash A$ 且 $\Delta \subseteq \Gamma$, 则 $\Gamma \vdash A$.

(3) 如果 $\Delta \vdash B$ 且 $\Gamma, B \vdash A$ 则 $\Delta, \Gamma \vdash A$.

引理 2.6.1

1. $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$
2. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$
3. $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$

证明

1. $A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$

(1) $(A \wedge B \to A) \to$
　　$((A \wedge B \to (A \to (B \to C))) \to (A \wedge B \to (B \to C)))$　　/* Ax 2 */

(2) $A \wedge B \to A$　　/* Ax 4*/

(3) $(A \wedge B \to (A \to (B \to C))) \to (A \wedge B \to (B \to C))$　　/* (2), (1), MP */

(4) $A \to (B \to C)$　　/* 假定公式　*/

(5) $A \wedge B \to (A \to (B \to C))$　　/* (4), 例子 2.5.1–2 */

(6) $A \wedge B \to (B \to C)$　　/* (3), (5), MP */

(7) $(A \wedge B \to B) \to ((A \wedge B \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C))$　　/* Ax 2 */

(8) $A \wedge B \to B$　　/* Ax 5 */

(9) $(A \wedge B \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$　　/* (7), (8), MP */

(10) $A \wedge B \to C$　　/* (8),(9), MP */

注意，按照推演的定义，上面的公式序列并不是一个推演。这是因为，从第（4）步到第（5）步并不符合推演的定义。但是，根据例子 2.5.1-2，我们知道，存在公式（4）到公式 (5) 的推演，因此只要补上这些推演步骤，就可得到我们所要的推演。实际上，这里我们把 $B \vdash A \to B$ 最为一个推演规则来使用的。一般地，只要我们证明了 $\Gamma \vdash A$, 我们就可以把它当作一个推演规则来用, 而无需每次都写出从 Γ 到 A 的推演。这样可以大大减少证明的步骤.

2. $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$

(1) $A \to (B \to C)$ /* 假定公式 */

(2) $(A \to B) \to (A \to (B \to C))$ /* (1), 例子 2.5.1–2 */

(3) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ /* Ax2 */

(4) $((A \to B) \to (A \to (B \to C))) \to \left(\begin{array}{l} ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))) \to \\ ((A \to B) \to (A \to C)) \end{array} \right)$ /* Ax 2 */

(5) $((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))) \to$
$((A \to B) \to (A \to C))$ /* (2), (4) MP */

(6) $(A \to B) \to (A \to C)$ /* (3),(5), MP */

(7) $B \to ((A \to B) \to (A \to C))$ /* (6), 例子 2.5.1–2 */

(8) $B \to (A \to B)$ /* Ax 1 */

(9) $(B \to (A \to B)) \to$
$((B \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to (B \to (A \to C)))$ /* Ax 2 */

(10) $(B \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to (B \to (A \to C))$ /* (8), (9), MP */

(11) $B \to (A \to C)$ /* (7), (10), MP */

3. $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$

(1) $(B \to A \wedge B) \to ((B \to (A \wedge B \to C)) \to (B \to C))$ /* Ax2 */

(2) $(B \to (A \wedge B \to C)) \to ((B \to A \wedge B) \to (B \to C))$ /* (1), 2 */

(3) $A \wedge B \to C$ /* 假定公式 */

(4) $B \to (A \wedge B \to C)$ /* 例子 2.5.1–2 */

(5) $(B \to A \wedge B) \to (B \to C)$ /* (4), (2), MP */

(6) $A \to ((B \to A \wedge B) \to (B \to C))$ /* (5) 例子 2.5.1–2 */

(7) $A \to (B \to A \wedge B)$ /* Ax 3 */

(8) $(A \to (B \to A \wedge B)) \to$
$((A \to ((B \to A \wedge B) \to (B \to C))) \to (A \to (B \to C)))$ /* Ax 2 */

(9) $(A \to ((B \to A \wedge B) \to (B \to C))) \to (A \to (B \to C))$ /* (7), (8), MP */

(10) $(A \to (B \to C)$ /* (6), (9), MP */

习题 2.6.1　设 Γ 为一集公式，A 为一个公式。假设 $\Gamma \vdash A$，则必存在 Γ 的有穷子集 Γ' 使得 $\Gamma' \vdash A$.

§2.7 推演定理

在元数学定理中, 我们把形如 $\Gamma \vdash A$ 的元数学定理叫做导出规则, 因为它们是可以由公理和规则而导出的原则. 然而, 形式证明往往有复杂的结构, 因此为了简化证明, 常需要一些辅助推演规则。所谓辅助推演规则, 即是以一些推演为前提来构造出另外的推演。

本节证明命题演算的推演定理 (亦称演绎定理), 它是一个非常重要的辅助推演规则.

定理 2.7.1 (推演定理, 亦称演绎定理) 如果 $\Gamma, A \vdash B$ 则 $\Gamma \vdash (A \to B)$

证明 假设 $\Gamma, A \vdash B$, 我们要证 $\Gamma \vdash (A \to B)$. 为此, 需要构造从 Γ 到 $A \to B$ 的形式推演. 注意, 我们已经假定 $\Gamma, A \vdash B$, 也就是说, 假定有从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的形式推演. 我们将根据该推演获得我们需要的推演. 施归纳于从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度. 我们的归纳命题是 $P_{\Gamma,A}(k)$: 对任意的公式 B, 如果有从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的长度为 k 的推演, 则有从 Γ 到 $A \to B$ 的形式推演.

基始 $(k = 1)$: 设存在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的长度为 1 的推演. 也就是说, 这样的推演只有一个公式, 它必然是 B. 根据形式推演的定义, 有三种情况.

情形 1. $B \in \Gamma$. 则下面序列就是从 Γ 到 $A \to B$ 的推演.

(1) B /* B 是 Γ 中的假定公式 */
(2) $B \to (A \to B)$ /* Ax 1 */
(3) $A \to B$ / *(1), (2), MP */

情形 2. B 就是 A。因为 $\vdash A \to A$ (见例子 2.4.1) 故根据命题 2.5.1–2 有, $\Gamma \vdash A \to A$.

情形 3. B 是一条公理. 和情形 1 一样, 只不过第一步变成以 "B 是公理" 来作为根据的.

归纳步骤: 假设对任意 $l \le k$ 都有 $P_{\Gamma,A}(l)$ 成立, 也就是说, 对每一 $l \le k$ 以及每一公式 B, 如果存在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的长度为 l 的推演, 则必有从 Γ 到 $A \to B$ 的推演. 我们的任务就是要证明 $P_{\Gamma,A}(k+1)$. 假设

$$A_1, A_2, \ldots\cdots, A_{k+1}$$

是一个从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演. 则 A_{k+1} 是 B. 根据推演的定义, 共有四种情形。

情形 1. $B \in \Gamma$. 和基始中情形 1 的证明相同.

情形 2. B 就是 A. 和基始中情形 2 的证明相同.

情形 3. B 是一条公理. 和基始中情形 3 的证明相同.

情形 4. B 是 A_{j_1} 和 A_{j_2} 关于分离规则 MP 的直接后承, 其中, $j_1, j_2 < k+1$. 不妨设 A_{j_2} 为 $A_{j_1} \to B$. 注意，对任意 $j < k+1$, 序列 $A_1, \cdots A_j$ 也是从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 A_j 的推演，且长度不超过 k。特别地，A_{j_1} 和 $A_{j_1} \to B$ (即 A_{j_2}) 都有从 $\Gamma \cup \{A\}$ 出发的长度不超过 k 的推演. 根据归纳假设, 存在从 Γ 到 $A \to A_{j_1}$ 和 $A \to (A_{j_1} \to B)$ 的推演. 下面我们构造从 Γ 到 $A \to B$ 的推演。

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
(n) & A \to A_{j_1} & /* \text{ 由归纳假设而得 } */ \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
(n+m) & A \to (A_{j_1} \to B) & /* \text{ 由归纳假设而得 } */ \\
(n+m+1) & (A \to A_{j_1}) \to & \\
 & ((A \to (A_{j_1} \to B)) \to (A \to B)) & /* \text{ Ax 2 } */ \\
(n+m+2) & (A \to (A_{j_1} \to B)) \to (A \to B) & /* \ (n), (n+m+1), \text{MP } */ \\
(n+m+3) & (A \to B) & /* \ (n+m), (n+m+2), \text{MP } */
\end{array}
$$

根据数学归纳法, 我们证明了, 对任意的 k, $P_{\Gamma,A}(k)$ 成立. 从而定理得证. □

根据推演定理，要证明 $\Gamma \vdash A \to B$，我们可以先暂且假定 A, 如果我们能够证明 $\Gamma, A \vdash B$, 那么必有 $\Gamma \vdash A \to B$. 必须注意的是，从 Γ 到 $A \to B$ 的推演是不需要假定 A 的。

例子 2.7.1 $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$.

(1) $A \to (B \to C), B, A \vdash C$. /* 例子 2.5.1–1 */

(2) $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$ /* （1），推演定理 */

(3) $A \to (B \to C) \vdash B \to (A \to C)$ /* (2), 推演定理 */

通过比较不难看出，这个证明要比引理 2.5.1–2 的证明简短得多.

§2.8 导出规则及辅助推演规则

在本节中，我们将给出更多的推演规则.

定理 2.8.1 (导出规则及辅助推演规则) 设 A, B, C 为公式，Γ 为任意一集公式.

1. $(\to +)$ (蕴涵引入规则)：如果 $\Gamma, A \vdash B$ 则 $\Gamma \vdash A \to B$.

   $(\to -)$ (蕴涵消去规则)：$A, A \to B \vdash B$.

2. $(\wedge +)$ (合取引入规则)：$A, B \vdash A \wedge B$.

   $(\wedge -)$ (合取消去规则)：$A \wedge B \vdash A, \quad A \wedge B \vdash B$.

3. $(\vee +)$ (析取引入规则)：$A \vdash A \vee B, \quad B \vdash A \vee B$.

   $(\vee -)$ (析取消去规则，亦称穷举法)：如果 $\Gamma, A \vdash C$ 且 $\Gamma, B \vdash C$ 则 $\Gamma, A \vee B \vdash C$.

4. $(\neg +)$ (否定引入规则，亦称反证法)：如果 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \neg B$, 则 $\Gamma \vdash \neg A$.

   $(\neg -)$ (否定消去)：$\neg\neg A \vdash A$.

证明　$(\to +)$ 即是推演定理. $(\to -)$ 、$(\wedge +)$、$(\wedge -)$ 以及 $(\vee +)$ 的证明容易，由读者自证。下证 $(\vee -)$.

(1) $\Gamma, A \vdash C$	/* 假设 */
(2) $\Gamma \vdash A \to C$	/* (1), $(\to +)$ */
(3) $\Gamma, B \vdash C$	/* 假设 */
(4) $\Gamma \vdash B \to C$	/* (1), $(\to +)$ */
(5) $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$	/* Ax 8 */
(6) $A \to C \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C)$	/* (5), $(\to -)$ */
(7) $\Gamma \vdash (B \to C) \to (A \vee B \to C)$	/* (2), (6), 命题 2.5.1 */
(8) $\Gamma, B \to C \vdash A \vee B \to C$	/* (7), $(\to -)$ */
(9) $\Gamma \vdash A \vee B \to C$	/* (4), (8), 命题 2.5.1 */

下证否定引入规则.

(1) $\Gamma, A \vdash B$	/* 假设 */
(2) $\Gamma \vdash A \to B$	/* (1), $(\to +)$ */
(3) $\Gamma, A \vdash \neg B$	/* 假设 */
(4) $\Gamma \vdash A \to \neg B$	/* (3), $(\to +)$ */
(5) $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	/* Ax 9 */
(6) $A \to B \vdash (A \to \neg B) \to \neg A$	/* (5), $(\to -)$ */
(7) $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$	/* (6), $(\to -)$ */
(7) $\Gamma \vdash \neg A$	/* (2),(4),(6), 命题 2.5.1 */

否定消去规则的证明容易, 由读者自证. □

注记 2.8.1

- 所有关于推演关系的元数学定理都可作为推演规则而直接使用.
- 我们把形如 $\Gamma \vdash A$ 的元数学定理称作导出规则。例如 $(\wedge+)$、$\vee+$ 等为导出规则。
- 而辅助推演规则是这样的元定理，它总是以一个或多个推演（称作辅助推演）为前提，然后根据这些辅助推演可以得到一个推演 (称作结果推演)。辅助推演中的某些假定公式在结果推演中被消除了。例如，$\rightarrow +, \vee -, \neg +$ 等都是辅助推演规则。

例子 2.8.1　$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$.

(1) $\neg A, A, \neg B \vdash A$　　/* 命题 2.5.1 */
(2) $\neg A, A, \neg B \vdash \neg A$　　/* 命题 2.5.1 */
(3) $\neg A, A \vdash \neg\neg B$　　/* (1),(2), $(\neg+)$ */
(4) $\neg\neg B \vdash B$　　/* $(\neg-)$ */
(5) $\neg A, A \vdash B$　　/* (3), 命题 2.5.1 */
(6) $\neg A \vdash A \rightarrow B$　　/* (5), $\rightarrow +$ */
(7) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$　　/* (6), $\rightarrow +$ */

记号：我们用 $A \vdash\dashv B$ 表示 $A \vdash B$ 且 $B \vdash A$. 容易看出，$A \vdash\dashv B$ 当且仅当 $\vdash A \leftrightarrow B$. 因此，我们把 $A \vdash\dashv B$ 也读作 A 与 B 等价。

习题 2.8.1　证明下列推演关系。

1. $A \vdash \neg A \rightarrow B$
2. $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
3. $\neg\neg A \vdash\dashv A$
4. $\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A$
5. $\neg A \rightarrow A \vdash A$
6. $A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B \vdash \neg A$
7. $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$
8. $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$
9. $A \rightarrow B \vdash\dashv \neg A \vee B$
10. （德 · 摩根律）$\neg(A \vee B) \vdash\dashv \neg A \wedge \neg B$

    $\neg(A \wedge B) \vdash\dashv \neg A \vee \neg B$

11. (结合律) $A \wedge (B \wedge C) \vdash\dashv (A \wedge B) \wedge C$

 $A \vee (B \vee C) \vdash\dashv (A \vee B) \vee C$

13. (分配律) $A \to (B \vee C) \vdash\dashv (A \to B) \vee (A \to C)$

 $A \to (B \wedge C) \vdash\dashv (A \to B) \wedge (A \to C)$

 $A \wedge B \to C \vdash\dashv (A \to C) \vee (B \to C)$

 $A \vee B \to C \vdash\dashv (A \to C) \wedge (B \to C)$

 $A \wedge (B \vee C) \vdash\dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

 $A \vee (B \wedge C) \vdash\dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

 $(A \vee B) \wedge C \vdash\dashv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

 $(A \wedge B) \vee C \vdash\dashv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

14. $A \leftrightarrow B \vdash\dashv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

15. $A \leftrightarrow B \vdash\dashv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

注记 2.8.2 由于结合律，我们今后不再区分 $A \wedge (B \wedge C)$ 和 $(A \wedge B) \wedge C$，均写作 $(A \wedge B \wedge C)$. 更一般地，我们用 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ 表示 $A_1, \cdots, A_n$ 的合取。

对于析取的情况，也采取类似的记法。

习题 2.8.2 证明下列推演关系.

1. $A \leftrightarrow B \vdash \neg A \leftrightarrow \neg B$
2. $A \leftrightarrow B \vdash (A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C)$
3. $A \leftrightarrow B \vdash (A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C)$
4. $A \leftrightarrow B \vdash (A \to C) \leftrightarrow (B \to C)$
5. $A \leftrightarrow B \vdash (C \wedge A) \leftrightarrow (C \wedge B)$
6. $A \leftrightarrow B \vdash (C \vee A) \leftrightarrow (C \vee B)$
7. $A \leftrightarrow B \vdash (C \to A) \leftrightarrow (C \to B)$

习题 2.8.3 假设 $A \vdash\dashv A_1$，$B \vdash\dashv B_1$. 试证明：

1. $\neg A \vdash\dashv \neg A_1$.
2. $A \wedge B \vdash\dashv A_1 \wedge B_1$.
3. $A \vee B \vdash\dashv A_1 \vee B_1$.
4. $A \to B \vdash\dashv A_1 \to B_1$.

§2.9　一致性定理

到目前为止，我们已经用语义的和语法的方法研究了命题逻辑。例如，我们分别地引进了永真公式、语义后承等语义概念和可证公式（形式定理）、可推演性等语法概念。本节及其下一节将讨论语义方法和语法方法之间的联系。

引理 2.9.1　命题演算中每一公理都是永真的.

证明　注意, 命题演算中有十个公式模式, 每一个模式都代表无穷多个公理. 因此, 我们不可能用真值表的方法来逐一验证. 但我们可以采用如下办法. 首先我们把每一公理模式中的元数学符号 A, B, C 看成是具体的原子命题符 p_1, p_2, p_3. 这样我们得到十条公理. 不难验证这十个公理都是永真的 (见命题 2.2.1). 今考察任意一条公理. 它必然符合某一公理模式, 也就是说, 它可从上面十条公理中的一条通过把原子命题代入其他公式而得到. 根据代入引理 (见引理 2.2.2), 这一公理也是永真的. □

引理 2.9.2　设 A, B 为公式，v 为一赋值.

1. 对任意赋值 v，如果 $\hat{v}(A) = 1$ 且 $\hat{v}(A \to B) = 1$ 则 $\hat{v}(B) = 1$.
2. 如果 A，$A \to B$ 都是永真的，则 B 也是永真的。

证明　1. 假设 $\hat{v}(A) = 1$ 且 $\hat{v}(A \to B) = 1$. 如果 $\hat{v}(B) = 0$，则根据蕴涵词的真值表（见定义 2.2.1)，知 $\hat{v}(A \to B) = 0$, 矛盾。故必有 $\hat{v}(B) = 1$.

2. 直接由 1 和永真公式的定义得到. □

定理 2.9.1　（一致性定理）命题演算中的形式定理都是永真的.

证明　设 A 是一形式定理, 则 A 有形式证明 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 施归纳于证明的长度 n 证明 A 是永真的. 我们的归纳命题 $P(n)$ 是：对任意公式 A，如果它有长度为 n 的证明，则它是永真的.

基始: 当 $n = 1$ 时, 必有 A (即 A_n) 是公理, 根据引理 2.8.1, A 是永真的.

归纳步骤: 假设对于任意的 $k < n$, $P(k)$ 成立, 需证 $P(n)$ 成立. 设 A 有形式证明 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，我们要证 A (即 A_n) 是永真的.

情形 1. A_n 是公理, 则由引理 2.8.1, A_n 是永真的.

情形 2. A_n 是 A_i 和 A_j 关于分离规则 MP 的直接后承, 其中, $i, j < n$. 根据归纳假设, A_i, A_j 都是永真的. 由引理 2.8.2 得, A_n, 即 A, 是永真的. □

习题 2.9.1　设 Σ 为若干公式组成的集合, A 为一公式. 试证明：如果 $\Sigma \vdash A$ 则 $\Sigma \models A$.

在元数学中还有些问题是关于整个系统的。这些问题之一就是形式系统的协调性，即无矛盾性。

定义 2.9.1　设 Σ 为若干公式组成的集合. 如果存在公式 A 使得 $\Sigma \vdash A$ 且 $\Sigma \vdash \neg A$, 则称 Σ 是不协调的; 否则, 称 Σ 是协调的.

命题 2.9.1　空集是协调的, 即命题演算是协调的。

证明　假设不然, 则存在公式 A 使得 $\vdash A$ 且 $\vdash \neg A$. 根据一致性定理，A 和 $\neg A$ 都是永真的。然而根据否定词的真值表, 若 A 永真则 $\neg A$ 永假，矛盾. 所以命题成立. □

命题 2.9.2　设 Γ 为若干公式组成的集合. 则 Γ 协调当且仅当存在公式 A 使得 $\Gamma \nvdash A$.

证明　由读者自行证明。

根据命题 2.8.2，下面例子也说明命题演算是协调的.

例子 2.9.1　今考察命题演算中的公式 $A = \neg((p_1 \vee p_2) \to (p_2 \wedge p_3) \vee \neg p)$. 当 p_1, p_2, p_3 都取值 0 时，A 的值为 0. 根据一致性定理, A 是不可证的.

命题 2.9.3　设 Σ 为若干公式组成的集合, A 为一个公式. 如果 $\Sigma \nvdash A$, 则 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 是协调的.

证明　设 $\Sigma \nvdash A$, 由命题 2.8.2 知，Σ 是协调的。假设 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 不协调. 同样根据命题 2.8.2, $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash A$. 由推演定理，$\Sigma \vdash \neg A \to A$. 再由习题 2.7.1–5 得，$\Sigma \vdash A$. 矛盾，所以，$\Sigma \cup \{\neg A\}$ 是协调的. □

值得注意的是，协调性是一个语法概念，而可满足形式一个语义概念.

引理 2.9.3　设 Σ 为若干公式组成的集合. 如果 Σ 是可满足的，则 Σ 协调。

证明　设 Γ 可满足，即存在赋值 v 满足 Γ 中的每个公式. 如果 Γ 是空集，则由命题 2.8.1 知 Γ 是协调的。故设 Γ 非空. 取 $A \in \Gamma$. 因 $\hat{v}(A) = 1$，故 $\hat{v}(\neg A) = 0$. 由习题 2.8.1, $\Gamma \nvdash \neg A$. 再根据命题 2.8.2, Γ 协调. □

那么，引理 2.8.3 的逆是否成立呢？即，如果 Σ 协调，是不是 Σ 一定可满足呢？我们将在下节中讨论这个问题.

§2.10　范式, 完全性定理

元数学考虑的另外一个问题是形式系统的 “完备性”. 就命题演算而言, 所谓完备性是指, 每一永真公式都是可证的. 为了证明完备性, 我们首先引进范式的概念.

定义 2.10.1

1. 原子命题符及其否定统称为*文字*. 通常, 原子命题符亦称为*正文字*, 而原子命题符的否定称为*负文字*. 设 p 为一原子命题符, 则称 p 和 $\neg p$ 为一对互补文字.

2. 有穷多个文字的析取称为*析取子句*.

3. 有穷多个文字的合取称为*合取子句*.

例子 2.10.1

$(p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3)$, $(\neg p_1 \vee \neg p_2)$, $\neg p$, p 都是析取子句.
$(p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3)$, $(\neg p_1 \wedge \neg p_2)$, $\neg p$, p 都是合取子句.

容易看出，文字作为子句既是析取子句也是合取子句.

定义 2.10.2

有穷多个析取子句的合取称为一个*合取范式*.
有穷多个合取子句的析取称为一个*析取范式*.

注记 2.10.1　合取范式具有如下形状:

$$(L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{m,1} \vee \cdots \vee L_{m,n_m}).$$

析取范式具有如下形状:

$$(L_{1,1} \wedge \cdots \wedge L_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (L_{m,1} \wedge \cdots \wedge L_{m,n_m}).$$

其中，$L_{i,j}$ 为文字.

子句 (不管是析取子句还是合取子句) 既是析取范式又是合取范式.

注记 2.10.2　我们已知 $\neg\neg p \vdash\dashv p$, 因此，对任意原子命题符 p, 我们通常把 $\neg\neg p$ 等同于 p. 今设 A 为如下合取范式

$$(L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{m,1} \vee \cdots \vee L_{m,n_m}),$$

(其中，$L_{i,j}$ 为文字)。根据德 · 摩根律

$$\neg(A_1 \vee \cdots \vee A_n) \vdash\dashv \neg A_1 \wedge \cdots \wedge \neg A_n,$$
$$\neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \vdash\dashv \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n,$$

$\neg A$ 等价于如下析取范式

$$(\neg L_{1,1} \wedge \cdots \wedge \neg L_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (\neg L_{m,1} \wedge \cdots \wedge \neg L_{m,n_m}).$$

同理, 一个析取范式的否定也等价于一个合取范式, 且这个合取范式可通过把正文换为负文字, 而把负文字换为正文字, 且把合取词换成析取词, 析取词换成合取词而得到.

注记 2.10.3 设 C 和 C' 分别为析取子句 $(L_1 \vee \cdots \vee L_m)$ 和 $(K_1 \vee \cdots \vee K_n)$. 则 $C \vee C'$ 等价于析取子句 $(L_1 \vee \cdots \vee L_m \vee K_1 \vee \cdots \vee K_n)$. 因此我们把 $C \vee C'$ 也看成是析取子句.

今设 A 为合取范式 $C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, 而 B 为合取范式 $D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ (C_i, D_j 均为析取子句). 容易看出, $A \wedge B$ 等价于合取范式 $C_1 \wedge \cdots C_m \wedge D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$.

连续使用分配律可知, $A \vee B$ 等价于如下合取范式

$$\begin{array}{l}(C_1 \vee D_1) \wedge (C_1 \vee D_2) \wedge \cdots \wedge (C_1 \vee D_n) \wedge \\ (C_2 \vee D_1) \wedge (C_2 \vee D_2) \wedge \cdots \wedge (C_2 \vee D_n) \wedge \\ \quad \cdots\cdots \\ (C_m \vee D_1) \wedge (C_m \vee D_2) \wedge \cdots \wedge (C_m \vee D_n)\end{array}$$

也就是说, 任意两个合取范式的析取等价于一个合取范式, 且这个合取范式可以机械地得到.

同理，任意两个析取范式地析取可看作是一个析去范式. 连续使用分配律可以把任意两个析取范式的合取等价地化为一个析取范式.

定理 2.10.1 (范式定理) 设 A 为命题演算中的任意一公式.
(1) 存在合取范式 B 使得 $A \vdash\dashv B$.
(2) 存在析取范式 F 使得 $A \vdash\dashv F$.

证明 下面施归纳于公式 A 的结构复杂性同时证明 (1) 和 (2).
基始: A 是原子命题符. 则 A 本身既是合取范式又是析取范式. 且 $A \vdash\dashv A$.
归纳步骤:
情形 1. A 是 $\neg A_1$. 根据归纳假设, 我们可以找到合取范式 B_1 和析取范式 F_1 使得

(a) $A_1 \vdash\dashv B_1$. (b) $A_1 \vdash\dashv F_1$.

根据上述注记 2.9.2, $\neg F_1$ 等价于一个合取范式, 设为 B; $\neg B_1$ 等价于一个析取范式, 设为 F. 因此根据习题 2.7.3 我们有 $A \vdash\dashv B$, $A \vdash\dashv F$.

情形 2. A 是 $A_1 \wedge A_2$. 根据归纳假设可以找到合取范式 B_1 和 B_2 以及析取范式 F_1 和 F_2 使得 $A_1 \vdash\dashv B_1$, $A_2 \vdash\dashv B_2$; $A_1 \vdash\dashv F_1$, $A_2 \vdash\dashv F_2$. 根据注记 2.9.3, $B_1 \wedge B_2$ 本身就是一个合取范式, 记为 B, 而 $F_1 \wedge F_2$ 等价于一个析取范式, 记为 F. 根据习题 2.7.3 容易看出, $A \vdash\dashv B$ 且 $A \vdash\dashv F$.

情形 3. A 是 $A_1 \vee A_2$. 根据归纳假设可以找到合取范式 B_1 和 B_2 以及析取范式 F_1 和 F_2 使得 $A_1 \vdash\dashv B_1$, $A_2 \vdash\dashv B_2$; $A_1 \vdash\dashv F_1$, $A_2 \vdash\dashv F_2$.

注意，根据注记 2.9.3, $F_1 \vee F_2$ 本身就是一个析取范式, 记为 F. 而 $B_1 \vee B_2$ 等价于一个合取范式, 记为 B. 根据习题 2.7.3 容易看出, $A \vdash\dashv B$ 且 $A \vdash\dashv F$.

情形 4. A 是 $A_1 \to A_2$. 根据归纳假设可以找到合取范式 B_1 和 B_2 以及析取范式 F_1 和 F_2 使得 $A_1 \vdash\dashv B_1$, $A_2 \vdash\dashv B_2$; $A_1 \vdash\dashv F_1$, $A_2 \vdash\dashv F_2$. 根据注记 2.9.2, $\neg B_1$ 等价于一个析取范式, 记为 F_1'. 而 $\neg F_1$ 等价于一个合取范式, 记为 B_1'. 从而有

- $A \vdash\dashv \neg A_1 \vee A_2 \vdash\dashv B_1' \vee B_2$;
- $A \vdash\dashv \neg A_1 \vee A_2 \vdash\dashv F_1' \vee F_2$.

注意，$F_1' \vee F_2$ 本身就是一个析取范式, 记为 F. 根据注记 2.9.3, $B_1' \vee B_2$ 等价于一个合取范式, 记为 B. 容易看出, $A \vdash\dashv B$ 且 $A \vdash\dashv F$. □

注记 2.10.4 要把一个公式等价地化成合取范式（或析取范式），我们需要使用如下的推演关系。

- $A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$
- $A \leftrightarrow B \vdash\dashv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
- $A \leftrightarrow B \vdash\dashv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
- $\neg\neg A \vdash\dashv A$
- $\neg(A \wedge B) \vdash\dashv \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \vdash\dashv \neg A \wedge \neg B$
- $A \vee (B \wedge C) \vdash\dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $(A \wedge B) \vee C \vdash\dashv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
- $A \wedge (B \vee C) \vdash\dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $(A \vee B) \wedge C \vdash\dashv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

例子 2.10.2 1.

$$
\begin{aligned}
& \neg((p_1 \vee p_2) \to (p_2 \wedge p_3) \vee \neg p_1) \\
\vdash\dashv\ & \neg(\neg(p_1 \vee p_2) \vee ((p_2 \wedge p_3) \vee \neg p_1)) \\
\vdash\dashv\ & (p_1 \vee p_2) \wedge \neg((p_2 \wedge p_3) \vee \neg p_1)) \\
\vdash\dashv\ & (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg(p_2 \wedge p_3) \wedge p_1) \\
\vdash\dashv\ & (p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge p_1
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
& (p_1 \to (p_2 \to p_1)) \wedge (p_3 \wedge p_4 \to p_3) \\
\vdash\dashv\ & (\neg p_1 \vee (p_2 \to p_1)) \wedge (\neg(p_3 \wedge p_4) \vee p_3) \\
\vdash\dashv\ & (\neg p_1 \vee (\neg p_2 \vee p_1)) \wedge ((\neg p_3 \vee \neg p_4) \vee p_3) \\
\vdash\dashv\ & (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_1) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_3)
\end{aligned}
$$

引理 2.10.1

(1) 一合取范式是永真的当且仅当它的每个析取子句中含有一对互补文字.

(2) 一析取范式是永假的当且仅当它的每个合取子句中含有一对互补文字.

证明 我们仅证 (1). (2) 的证明类似。

设 $A = C_1 \wedge \cdots C_n$ 为一合取范式，其中，$C_i = (L_{i,1} \vee \cdots \vee L_{i,k_i})$ 为析取子句，$i = 1, \cdots, n$.

先证充分性。如果 C_i 含有互补文字，则 C_i 是永真的. 因而，如果每个 C_i 都含有互补文字，则 A 是永真的.

下证必要性。假设 A 是永真的. 考察析取子句 C_i $(i = 1, \cdots, n)$. 设 C_i 不含互补文字. 则我们可以定义一个赋值 v 使得对任意原子命题符 p, 如果 p 出现在 C_i 中则 $v(p) = 0$, 如果 $\neg p$ 出现 C_i 中，则 $v(p) = 1$. 容易看出，v 不满足 C_i, 从而不满足 A, 这与 A 永真矛盾. 故 C_i 必含有互补文字. □

定理 2.10.2 (完全性定理) 命题演算中, 永真公式都是形式定理, 即是可证的.

证明 设 A 是永真公式. 要证明 $\vdash A$. 根据范式定理, 存在一个合取范式 B 使得 $A \vdash\dashv B$. 根据演绎定理, $\vdash A \leftrightarrow B$. 由一致性定理 (定理 2.8.1), $A \leftrightarrow B$ 是永真的. 再根据引理 2.8.2, 可知 B 也是永真的. 由引理 2.9.1, B 的每个析取子句都含有一对互补文字. 由于 $\vdash \neg p \vee p$ 以及 $C \vdash C \vee D$, 可知 B 的每个析取子句都是可证的. 从而 B 可证. 进而, A 可证. □

定理 2.10.3 设 Γ 为一集公式，A 为一个公式。如果 $\Gamma \models A$，则 $\Gamma \vdash A$.

证明　假设 $\Gamma \models A$. 则 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是不可满足。根据，紧致性定理，存在 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 的不可满足的有穷子集，设为 $\{B_1, \cdots B_n, \neg A\}$, 其中 $B_i \in \Gamma$ $(i = 1, \cdots, n)$. 则必有，$B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \to A$ 为永真公式。由完全性定理，$\vdash B_1 \wedge \cdots \wedge B_n \to A$。于是，$B_1, \cdots, B_n \vdash A$. 从而 $\Gamma \vdash A$. □

定理 2.10.4　设 Γ 为一集公式. Γ 协调当且仅当 Γ 可满足。

证明　充分性已由引理 2.8.3 证明. 下证必要性. 设 Γ 协调，但假设 Γ 不可满足. 根据紧致性定理，必存在 Γ 的一个有穷子集 $\Gamma' \subseteq \Gamma$ 使得 Γ' 也是不可满足的。设 $\Gamma' = \{A_1, \cdots, A_n\}$, 从而，$\neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n$ 为永真公式. 于是由完全性定理得，$\vdash \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n$, 进而，$\vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. 故有 $\Gamma \vdash \neg(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$. 另一方面，因为 $A_1, \cdots, A_n \in \Gamma$, 所以 $\Gamma \vdash A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. 于是，$\Gamma$ 是不协调的. 但是我们已经假设 Γ 是协调的，故矛盾. 因而，Γ 是可满足的. □

实际上，定理 2.9.2、定理 2.9.3、定理 2.9.4 在文献中都被称作完全性定理.

推论 2.10.1　设 A, B, C 为公式，A 为 C 的子公式，C_A 表示在 C 中明指了 A 的某次出现。则 $A \leftrightarrow B \vdash C_A \leftrightarrow C_B$.

证明　根据定理 2.2.2 有，$A \leftrightarrow B \models C_A \leftrightarrow C_B$. 再由完全性定理得 $A \leftrightarrow B \vdash C_A \leftrightarrow C_B$. □

推论 2.10.2
(1) 对任意公式 C, 都存在一个公式 D 使得 $\vdash C \leftrightarrow D$ 且 D 中的联结词属于 $\{\neg, \wedge\}$.
(2) 对任意公式 C, 都存在一个公式 D 使得 $\vdash C \leftrightarrow D$ 且 D 中的联结词属于 $\{\neg, \vee\}$.
(3) 对任意公式 C, 都存在一个公式 D 使得 $\vdash C \leftrightarrow D$ 且 D 中的联结词属于 $\{\neg, \to\}$.

证明　由定理 2.2.3 和完全性定理得到。

习题 2.10.1　把下列公式等价地化为合取范式。
1. $(\neg p_1 \vee p_2) \to p_3$.
2. $(p_1 \to p_2) \vee p_3$.
3. $((p_1 \to p_2) \to p_3) \to p_4$.

第三章　一阶谓词演算

命题演算中,所有命题都是由原子命题出发按一定的规则组成的. 而在推理过程中,把这些原子命题当作未分解的整体. 也就是说,命题逻辑只能描述仅含有 “非”、“并且”、“或者”、“如果 — 则 —” 这类联结词的命题. 但如果命题中含有 “对任意的”、“存在” 等量词时,命题逻辑就显得无能为力了. 我们看下面例子。

例子 3.0.3

(1) 所有的猫都有尾巴.

(2) 咪咪是一只猫.

由命题 (1) 和 (2) 我们可以推出

(3) 咪咪有尾巴.

如果我们把命题 (1)、(2)、(3) 看作原子命题,分别用 p, q, r 表示之,那么我们就看不出这三个命题之间的联系了. 如果不把他们看作原子命题,我们无法在命题逻辑中来描述它们,尤其无法描述命题 (1).

谓词演算就是对命题演算的扩充。它还要考虑原子命题的结构, 以及与其结构相关的推理关系. 谓词演算也称一阶谓词演算、一阶谓词逻辑、一阶演算、或一阶逻辑。

§3.1　一阶谓词逻辑的形式语言

§3.1.1　符号系统

一个一阶形式语言 $\mathcal{L}$ 包括如下形式符号.

个体变元符号: $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n, \cdots$

逻辑联结词: $\neg$ (否定), $\wedge$ (合取), $\vee$ (析取), $\rightarrow$ (蕴涵)

量词: $\forall$ (全称量词), $\exists$ (存在量词)

括号: (,)

等词: $\approx$

个体常项符号: $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \cdots$

谓词符号: $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots$

函数符号: $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \cdots$

注记 3.1.1

- 个体常项符、函数符以及谓词符号可以有任意多个, 可以没有，可以有有穷多个，也可以有无穷多个. [1] 这也就是说，任意两个一阶形式语言都包含相同的个体变元符号、逻辑联结词、量词、等词以及技术性符号. 它们的不同主要体现在它们所含的常项符、谓词符和函数符可能不一样。因此，今后当我们要给出一个具体的形式语言时，我们仅列出它所含的常项符、谓词符和函数符.
- 形式语言中的符号，都是用正体（或带下标）表示，但当我们要谈及这些符号时，我们就用相应的斜体字母作为元语言符号。例如，x, y, z (或带下标）总是代表变元符；a, b, c (或带下标）总是代表常项符；P, R (或带下标）代表谓词符；而 f, g, h 则代表函数符.
- 每个谓词符号（函数符号）都有一个目数（也称元数)，虽然我们现在没有指明，但今后每当谈及谓词符号或函数符号时，我们都会指明它的元数。比如我们会说诸如："P 是一个 n 元谓词符" 等。
- 形式语言中有一个特殊符号，即等词 $\approx$. 它之所以特殊，是因为在形式语言的语义解释中，等词总是被解释为相等关系 $=$. 并不是所有的形式语言都有等词，但本书只研究带等词的形式系统.

§3.1.2 形成规则

在给出合适公式的定义之前, 我们先给出项的形成规则.

定义 3.1.1 (项的形成规则) 形式语言 $\mathcal{L}$ 的项是如下递归定义的.

(1) 常项符是项.

(2) 变元符是项.

(3) 如果 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项, 而 f 是一 n 元函数符号, 则 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 也是项.

(4) 只有这些项.

- 不含任何变元符的项称作闭项。例如，每个常项符都是闭项. 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是闭项，f 为 n 元函数符，则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是闭项.

例子 3.1.1 设形式语言 $\mathcal{L}$ 含有一个常项符 c，一个一元函数符 S, 两个二元函数符 f 、g. 则 c、x_1、S(c)、$\mathrm{f}(\mathrm{c}, \mathrm{x}_1)$、$\mathrm{g}(\mathrm{c}, \mathrm{S}(\mathrm{c}))$ 均为 $\mathcal{L}$ 的项.

定义 3.1.2 (原子公式的形成规则) 形式语言 $\mathcal{L}$ 的原子公式是如下递归定义的.

(1) 如果 t_1, t_2 是项, 则 $t_1 \approx t_2$ 是一原子公式.

[1]如果按希尔伯特的有穷性方法的要求，一个形式语言中的符号最多可数无穷多个.

(2) 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是项, 而 P 是一 n 元关系符号, 则 $P(t_1, \cdots, t_n)$ 是一原子公式.

(3) 只有这些原子公式

例子 3.1.2 设形式语言 $\mathcal{L}$ 含有一个常项符 c，一个一元函数符 S, 两个二元函数符 f、g, 一个二元谓词符 P. 则 $\mathrm{f(c, S(c))} \approx \mathrm{S(c)}$、$\mathrm{P(c, x_1)}$ 都是 $\mathcal{L}$ 的原子公式.

定义 3.1.3 (合适公式的形成规则) 形式语言 $\mathcal{L}$ 的合适公式是如下递归定义的.

(1) 每个原子公式都是合适公式.

(2) 如果 A 是合适公式, 则 $(\neg A)$ 也是合适公式.

(3) 如果 A, B 是合适公式, 则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ 都是合适公式.

(4) 如果 A 是合适公式, x 为一变元符，则 $\forall x(A)$, $\exists x(A)$ 都是合适公式.

(5) 只有这些合适公式.

§3.1.3 自由变元与约束变元

定义 3.1.4 (量词的辖域) 在公式 A 中一量词 $\forall x$ (或 $\exists x$) 的辖域就是紧跟在该量词右边一对括号中的公式.

例子 3.1.3 在公式 $\forall y(\exists x(x \approx y))$ 中，$\forall y$ 的辖域为 $\exists x(x \approx y)$; 而 $\exists x$ 的辖域是 $x \approx y$.

和第二章一样, 书写公式时, 在不出现混淆的情况下, 常常省略过多的括号.

定义 3.1.5 (自由出现和约束出现) 在一公式中, 一变元符 x 的某个出现叫做约束出现如果它出现在 $\forall x$ 或 $\exists x$ 中或者出现在量词 $\forall x$ 或 $\exists x$ 的辖域中, 否则称其为自由出现.

例子 3.1.4 在公式 $(\exists x P(x, y)) \wedge P_1(x)$ 中, 从左至右, x 的第一次和第二次出现均为约束出现, 而第三次出现为自由出现.

定义 3.1.6 (自由变元与约束变元[2]) 一变元 x 在公式 A 中如果有自由出现, 则称 x 为 A 的自由变元; 如果有约束出现, 则称其为 A 的约束变元.

在公式 $(\exists x P(x, y)) \wedge P_1(x)$ 中 x, y 是自由变元, 而 x 也是约束变元.

定义 3.1.7 (代入) 在以后的讨论中, 我们要用到代入运算, 它的非形式定义是: 在一项或一公式中把 x 代以项 t 是指把变元 x 的每一次自由出现都换为 t. 为了更简洁地表示代入运算, 我们引进一个记号. 假设要对公式 A 中的 x 作代入, 我们常常把 A 写作 $A(x)$. 这样, 把 A 中 x 的每次自由出现都换成项 t 后得到的公式便可记作 $A(t)$. [3]

[2]为简便起见，我们经常把 “变元符” 说成 “变元”

[3]有的文献用 $A(x/t)$ 表示把 A 中 x 的每次自由出现都换成项 t 后得到的公式.

注记 3.1.2

- 注意. 我们并不要求 $A(x)$ 中的 x 真的在 A 中有自由出现, 甚至不要求它在 A 中出现. 当 x 不在 A 中自由出现时, $A(t)$ 就是 $A(x)$ 本身.
- 我们可以对若干不同变元作同时代入. 我们用 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 表示一公式, 则 $A(t_1, \cdots, t_n)$ 表示把 $A(x_1, \cdots, x_n)$ 中每一 x_i 的每一自由出现都换成 t_i 后得到的公式.
- 注意, 今后不管作不作代入, 我们都经常使用记号 $A(x)$ 或 $A(x_1, \cdots, x_n)$. 例如, $\forall x A(x)$、$\exists x A(x)$、$\exists x \forall y A(x, y)$, 等.
- 设 $A(x)$ 为公式, t 是一项. 代入后, t 中的自由变元在 $A(t)$ 中可能变成约束变元. 例如, 设 $A(x)$ 为 $\forall y P(x, y)$, t 为 $f(y)$. 则 $A(t)$ 为 $\exists y P(f(y), y)$. y 在 t 中自由出现，但在 $A(t)$ 中成了约束出现. 这种情况下, 代入将会带来问题, 我们以后再讨论.

定义 3.1.8　设 $A(x)$ 为一公式, t 为一项. 称 t 对 $A(x)$ 的 x 而言 (代入) 是自由的如果对 t 中的每一自由变元 y, x 在 A 中的每一自由出现都不在 $\forall y$ 或 $\exists y$ 辖域之内. 否则, 称作不自由的.

注记 3.1.3

- 如果 t 对 $A(x)$ 的 x 而言是自由的, 且 x 在 $A(x)$ 中自由出现，则 t 中的每一自由变元仍是 $A(t)$ 中的自由变元.
- 如果某个变元在 t 中的 (自由) 出现在 $A(t)$ 中变成了约束出现，则 t 对 $A(x)$ 的 x 而言是不自由的.
- 如果 t 中不含任何变元, 则 t 对 A 中的每个变元而言都是自由的.

例子 3.1.5

(1) $f(y, z)$ 对公式 $(\forall y P(y)) \to R(x)$ 中的 x 是自由的.

(2) $f(y, z)$ 对公式 $(\forall y P(y)) \to (\exists z R(x, z))$ 中的 x 是不自由的.

(3) $f(y, z)$ 对公式 $(\forall y P(y)) \to (\exists z \forall x R(x, z))$ 中的 x 是自由的.

§3.2　谓词逻辑的语义

在命题逻辑中，我们有了赋值的概念。然后，我们对命题联结词也进行了解释 (见第 17 页). 我们定义并研究了满足关系 (定义 2.2.3)、重言式 (即永真公式)、语义后承等等.

本节我们讲谓词逻辑的语义.

§3.2.1 一阶语言的模型

定义 3.2.1 一阶语言 $\mathcal{L}$ 的一个模型 是一个二元组 $\mathbf{M} = (M, I)$, 其中 M 是一个非空集合, 而 I 是一个满足如下条件的映射.

(1) I 把 $\mathcal{L}$ 中的每个个体常项符 c 解释为 M 中的一个特定元素 $I(c)$.

(2) I 把 $\mathcal{L}$ 中的每个 (n 元) 关系符 P 解释为 M 上的一个特定的 (n 元) 关系 $I(P)$.

(3) I 把 $\mathcal{L}$ 中的每个 (m 元) 函数符 f 解释为 M 上的一个特定的 (m 元) 函数 $I(f)$.

设 $\mathbf{M} = (M, I)$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个模型. 称 M 为论域, I 为语言 $\mathcal{L}$ 在 M 中的解释.

注记 3.2.1

- 非空集合 M 称作模型 $\mathbf{M}$ 的论域. 由于我们是要为一阶语言中的符号赋予意义，因此，我们不要求 M 中的对象具有特殊的含义。或者说，论域中的元素可以是你能够想象的任何对象，如：人、动物、汽车、飞机、轮船、桌子、椅子、数字、符号、公式等等.
- 在上定义中，我们没有明指 I 对等词的解释，这是因为我们规定任意解释总是把等词 $\approx$ 解释为相等关系 $=$.
- 当我们说 $\mathbf{M}$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个模型时, 则它的论域总是用 M 表示之. 我们经常并不明指解释 I，这时，总是把常项符 c 的解释 $I(c)$ 记作 c^M, 把谓词符 P 的解释 $I(P)$ 和函数符 f 的解释 $I(f)$ 分别记作 P^M 和 f^M.

例子 3.2.1 设 $\mathcal{L} = \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}$ 只含有三个一元谓词符号. 令 M 为所有整数组成的集合。且设 I 是如下定义的映射：

- $I(\mathrm{P})$ 为所有正整数组成的集合。即 I 把 P 解释为性质 "x 是正整数".
- $I(\mathrm{Q}) = \{0\}$. 即 I 把 Q 解释为性质 "$x = 0$".
- $I(\mathrm{R})$ 为所有非负整数组成的集合. 即 I 把 R 解释为性质 "$x \geq 0$."

则 (M, I) 是 $\mathcal{L}$ 的模型。

例子 3.2.2 设 $\mathcal{L} = \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}$ 只含有三个一元谓词符号。令 N 为所有动物组成的集合。且设 J 是如下定义的映射：

- $J(\mathrm{P})$ 为所有麒麟组成的集合. 即 J 把 P 解释为性质 "x 是麒麟".
- $J(\mathrm{Q})$ 为所有犀牛组成的集合. 即 J 把 Q 解释为性质 "x 是犀牛".
- $J(\mathrm{R})$ 为所有恰有一只角的动物组成的集合. 即 J 把 R 解释为性质 "x 恰有一只角."

则, (N, J) 也是 $\mathcal{L}$ 的一个模型。

§3.2.2 指派与项的取值

在定义 3.2.1 中，我们没有涉及变元符的解释。这是因为，在所有的模型中它们的解释都是一样的. 即，总是把变元符解释为在论域中取值的变元. 注意，我们有无穷多个变元 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, $\cdots$. 为方便起见，我们把 $\{\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n, \cdots\}$ 记作 Var.[4] 当每个变元 x_i 都在论域 M 中取定某个值 a_i 时，我们就可以定义一个映射 $\sigma : \mathrm{Var} \to M$ 如下：对任意 $\mathrm{x}_i \in \mathrm{Var}$，$\sigma(\mathrm{x}_i) = a_i$. 反之，任给一个映射 $\sigma : \mathrm{Var}\to M$，可以确定每个变元在 M 中的取值，即 x_i 取的值为 $\sigma(\mathrm{x}_i)$. 我们称从 Var 到论域 M 内的映射为 M 中的指派.

设 σ 为一个指派，b 为论域中的一个元素，$y \in \mathrm{Var}$. 则 $\sigma(y|b)$ 是仅把 y 对应的值改为 b 后得到的指派. 严格的定义为

$$\sigma(y|b)(x) := \begin{cases} \sigma(x), & \text{如果 } x \neq y, \\ b, & \text{如果 } x = y. \end{cases}$$

定义 3.2.2 （项的取值） 设 $\mathbf{M} = (M, I)$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个模型. 且设 t 为 $\mathcal{L}$ 中的项，σ 为 M 中的一个指派. 我们归纳定义项 t (在指派 σ 下) 在 $\mathbf{M}$ 中的值 (记作: $t^{M,\sigma}$)

- 若 t 是变元符 x, 则 $t^{M,\sigma}$ 定义为 $\sigma(x)$.
- 若 t 是常项符 c, 则 $t^{M,\sigma}$ 定义为 c^M, 它是 c 在 (M, I) 中的解释 $I(c)$.
- 若 t 是 $f(t_1, \cdots, t_m)$, 则 $t^{M,\sigma}$ 定义为 $f^M(t_1^{M,\sigma}, \cdots, t_m^{M,\sigma})$, 其中, f^M 是 f 在 (M, I) 中的解释, 即，$f^M = I(f)$.

例子 3.2.3 设 a, b, c 为 $\mathcal{L}$ 的常项符，f, g 分别为 $\mathcal{L}$ 的二元函数符和一元函数符. 设 $(\mathbb{N}, I)$ 为 $\mathcal{L}$ 的一个模型满足：$I(\mathrm{a}) = 1$, $I(\mathrm{b}) = 2$, $I(\mathrm{c}) = 3$，$I(\mathrm{f})$ 为加法运算，$I(\mathrm{g})$ 为平方运算. 设 σ 为 $\mathbb{N}$ 中的一指派满足 $\sigma(\mathrm{x}_1) = 4$, $\sigma(\mathrm{x}_2) = 5$. 今考察项 $t_1 = \mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{a}), \mathrm{f}(\mathrm{b},\mathrm{c}))$, $t_2 = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{g}(\mathrm{x}_2)), \mathrm{g}(\mathrm{c}))$. 则

$$\begin{aligned} t_1^{\mathbb{N},\sigma} &= 1^2 + (2 + 3) = 6. \\ t_2^{\mathbb{N},\sigma} &= (4 + 5^2) + 3^2 = 38. \end{aligned}$$

设 $\mathbb{N}$ 中的指派 σ' 满足 $\sigma'(\mathrm{x}_1) = 2$, $\sigma'(\mathrm{x}_2) = 4$. 则

$$\begin{aligned} t_1^{\mathbb{N},\sigma'} &= 1^2 + (2 + 3) = 6. \\ t_2^{\mathbb{N},\sigma'} &= (2 + 4^2) + 3^2 = 27. \end{aligned}$$

[4]严格来讲，变元符与它们的解释应该用不同的符号，而在本书中我们没有这样做.

假设项 t 中出现的变元为 $x_1,\cdots,x_n$. 直观上, t 的取值应该只依赖于变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的值，而不依赖于其他变元的取值。事实也正是如此，我们可以归纳于项的结构递归证明下面引理。

引理 3.2.1　设 $\mathbf{M}$ 为语言 $\mathcal{L}$ 的模型. t 为 $\mathcal{L}$ 的任意项. 对 M 中的任意两个指派 σ_1,σ_2, 如果对 t 中的每一变元 x 都有 $\sigma_1(x)=\sigma_2(x)$, 则 $t^{M,\sigma_1}=t^{M,\sigma_2}$.

证明　我们归纳于项 t 的结构进行证明。设 σ_1,σ_2 为 M 中的任意两个指派使得对 t 中的每一变元 x 都有 $\sigma_1(x)=\sigma_2(x)$. 我们要证明 $t^{M,\sigma_1}=t^{M,\sigma_2}$.

基始：

情形 1：t 为某个变元 x. 根据定义 3.2.2 有,

$$t^{M,\sigma_1}=\sigma_1(x)=\sigma_2(x)=t^{M,\sigma_2}.$$

情形 2：t 为某一常项符 c. 根据定义 3.2.2 有,

$$t^{M,\sigma_1}=c^M=t^{M,\sigma_2}.$$

归纳步骤：设 t 为项 $f(t_1,\cdots,t_m)$. 注意，t_j $(j=1,\cdots,m)$ 中出现的变元也必在 t 中出现. 从而对 t_j $(j=1,\cdots,m)$ 中的每一变元 x 都有 $\sigma_1(x)=\sigma_2(x)$. 假设对每个 t_j $(j=1,\cdots,m)$, 结论成立 (此即归纳假设), 则有 $t_j^{M,\sigma_1}=t_j^{M,\sigma_2}$. 则根据定义 3.2.2 得,

$$\begin{aligned} t^{M,\sigma_1} &= f^M(t_1^{M,\sigma_1},\cdots,t_m^{M,\sigma_1}) \\ &= f^M(t_1^{M,\sigma_2},\cdots,t_m^{M,\sigma_2}) \\ &= t^{M,\sigma_2} \end{aligned}$$

注记 3.2.2　假设 t 是闭项（t 中没有变元出现）. 则由引理 3.2.1 直接得出：t 在模型 $\mathbf{M}$ 中的值不依赖于任何指派. 即, 对 M 中的任意指派 σ_1,σ_2, 都有 $t^{M,\sigma_1}=t^{M,\sigma_2}$.

§3.2.3　满足关系

定义 3.2.3　(满足关系) 设 $\mathbf{M}=(M,I)$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个模型, A 为一公式, σ 为一指派. 我们归纳定义在指派 σ 下 $\mathbf{M}$ 满足公式 A (记作 $\mathbf{M}\models_\sigma A$, 亦读作：在指派 σ 下 A 在 $\mathbf{M}$ 中成立) 的概念如下.

- 若 A 是 $t_1\approx t_2$, 则
$$\mathbf{M}\models_\sigma A \text{ 当且仅当 } t_1^{M,\sigma}=t_2^{M,\sigma}.$$

- 若 A 是 $P(t_1, \cdots, t_m)$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 } P^M(t_1^{M,\sigma}, \cdots, t_m^{M,\sigma}) \text{ 成立,}$$

(注意, P^M 为 P 在 (M, I) 中的解释).

- 若 A 为公式 $\neg B$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 并非 } \mathbf{M} \models_\sigma B.$$

- 若 A 为 $B \wedge C$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_\sigma B \text{ 且 } \mathbf{M} \models_\sigma C.$$

- 若 A 为 $B \vee C$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_\sigma B \text{ 或 } \mathbf{M} \models_\sigma C.$$

- 若 A 为 $B \to C$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 如果 } \mathbf{M} \models_\sigma B \text{ 则 } \mathbf{M} \models_\sigma C.$$

- 若 A 为 $(\forall x\, B)$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 对任意 } a \in M \text{ 都有 } \mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} B.$$

- 若 A 为 $(\exists x\, B)$, 则

$$\mathbf{M} \models_\sigma A \text{ 当且仅当 存在 } a \in M \text{ 使得 } \mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} B.$$

我们用 $\mathbf{M} \not\models_\sigma A$ 表示在 σ 指派下, $\mathbf{M}$ 不满足 A.

注记 3.2.3 由定义 3.2.3 看出: 在任意模型中,

- 等词总是被解释为相等关系 $=$;
- 逻辑联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$ 的解释和它们在命题演算中的解释是一样的，即，分别把它们解释为 “非”、“并且”、“或者”、“蕴涵”;
- 量词 $\forall$ 和 $\exists$ 分别被解释为 “对任意 — 都有 —” 和 “存在 — 使得 —”.

从定义 3.2.3 不难看出，一般情况下，公式 A 在模型 $\mathbf{M}$ 中成立与否依赖于变元的取值（指派）（见下边的例子）.

例子 3.2.4 设形式语言 $\mathcal{L}$ 含有一个常项符 c，一个二元谓词符 P. 定义 $\mathcal{L}$ 的模型 $(\mathbb{N}, I)$ 如下：$I(\mathrm{c}) = 0$, $I(\mathrm{P})$ 为 $\mathbb{N}$ 上的大于等于关系 $\geq$. 今考察公式 $\mathrm{P}(\mathrm{c}, \mathrm{x}_1)$. 设 σ, σ' 为两个指派满足 $\sigma(\mathrm{x}_1) = 0$, $\sigma'(\mathrm{x}_1) = 1$. 容易看出，

$$(\mathbb{N}, I) \models_{\sigma} \mathrm{P}(\mathrm{c}, \mathrm{x}_1), \quad (\mathbb{N}, I) \not\models_{\sigma'} \mathrm{P}(\mathrm{c}, \mathrm{x}_1)$$

然而直观上，公式 A 在模型 $\mathbf{M}$ 中成立与否应该只依赖其中自由变元的取值，而不应依赖于其他变元的取值 (见下引理)。

引理 3.2.2 设 $\mathbf{M}$ 为语言 $\mathcal{L}$ 的模型，A 为 $\mathcal{L}$ 的公式. 则对 M 中的任意指派 σ_1, σ_2, 如果对 A 中任意自由变元 x 都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$, 则 $\mathbf{M} \models_{\sigma_1} A$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_{\sigma_2} A$.

证明 我们归纳于公式 A 的结构进行证明。设 σ_1, σ_2 为 M 中的任意两个指派使得对 A 中的每一自由变元 x 都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$. 我们要证明 $\mathbf{M} \models_{\sigma_1} A$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_{\sigma_2} A$.

基始：设 A 为原子公式.

情形 1：A 是 $t_1 \approx t_2$. 注意，t_1, t_2 中的变元都是 A 中的自由变元. 所以，对 t_i $(i = 1, 2)$ 中的每个变元 x, 都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$. 从而，由引理 3.2.1 知，

$$t_1^{M,\sigma_1} = t_1^{M,\sigma_2}, \quad t_2^{M,\sigma_1} = t_2^{M,\sigma_2}.$$

于是，

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models_{\sigma_1} t_1 \approx t_2 \quad & \text{当且仅当} \quad t_1^{M,\sigma_1} = t_2^{M,\sigma_1} \\ & \text{当且仅当} \quad t_1^{M,\sigma_2} = t_2^{M,\sigma_2} \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} t_1 \approx t_2 \end{aligned}$$

情形 2：A 是 $P(t_1, \cdots, t_m)$. 注意，$t_1, \cdots, t_m$ 中的变元都是 A 中的自由变元. 所以，对 t_i $(i = 1, \cdots, m)$ 中的每个变元 x, 都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$. 从而，由引理 3.2.1 知，

$$t_i^{M,\sigma_1} = t_i^{M,\sigma_2}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

于是，

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models_{\sigma_1} P(t_1, \cdots, t_m) \quad & \text{当且仅当} \quad P^M(t_1^{M,\sigma_1}, \cdots, t_m^{M,\sigma_1}) \\ & \text{当且仅当} \quad P^M(t_1^{M,\sigma_2}, \cdots, t_m^{M,\sigma_2}) \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} P(t_1, \cdots, t_m) \end{aligned}$$

归纳步骤：

情形 1：A 是 $\neg B$. 则 B 中的自由变元都是 A 中的自由变元. 所以，对 B 中的每个自由变元 x, 都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$. 根据归纳假设（即，结论对比 A 简单的公式成立），

$$\mathbf{M} \models_{\sigma_1} B \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2} B.$$

于是，由定义 3.2.3,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models_{\sigma_1} \neg B \quad & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \not\models_{\sigma_1} B \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \not\models_{\sigma_2} B \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} \neg B \end{aligned}$$

情形 2：A 是 $B \wedge C$. 则 B, C 中的自由变元都是 A 中的自由变元. 所以，对 B, C 中的每个自由变元 x, 都有 $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$. 根据归纳假设（即，结论对比 A 简单的公式成立），

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \models_{\sigma_1} B \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2} B. \\ &\mathbf{M} \models_{\sigma_1} C \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2} C. \end{aligned}$$

于是，由定义 3.2.3,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models_{\sigma_1} B \wedge C \quad & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_1} B \text{ 且 } \mathbf{M} \models_{\sigma_1} C \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} B \text{ 且 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2} C \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} B \wedge C. \end{aligned}$$

情形 3：A 是 $B \vee C$. 证明与情形 2 类似，略之.

情形 4：A 是 $B \to C$. 证明与情形 2 类似，略之.

情形 5：A 是 $\exists y\, B(y)$. 注意，B 中的自由变元要么是 A 中的自由变元要么是 y. 从而对任意 $a \in M$, 及 B 的任意自由变元 x, 都有 $\sigma_1(y|a)(x) = \sigma_2(y|a)(x)$. 于是根据归纳假设，

$$\mathbf{M} \models_{\sigma_1(y|a)} B(y) \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2(y|a)} B(y)$$

根据定义 3.2.3 得

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \models_{\sigma_1} \exists y\, B(y) \quad & \text{当且仅当} \quad \text{存在 } a \in M \text{ 使得 } \mathbf{M} \models_{\sigma_1(y|a)} B(y) \\ & \text{当且仅当} \quad \text{存在 } a \in M \text{ 使得 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2(y|a)} B(y) \\ & \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} \exists y\, B(y). \end{aligned}$$

情形 6：A 是 $\forall y\, B(y)$. 注意，B 中的自由变元要么是 A 中的自由变元要么是 y. 从而对任意 $a \in M$, 及 B 的任意自由变元 x, 都有 $\sigma_1(y|a)(x) = \sigma_2(y|a)(x)$. 于是根据归纳

假设,

$$\mathbf{M} \models_{\sigma_1(y|a)} B(y) \text{ 当且仅当 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2(y|a)} B(y)$$

根据定义 3.2.3 得

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \models_{\sigma_1} \forall y\, B(y) \quad & \text{当且仅当} \quad \text{对任意 } a \in M \text{ 都有 } \mathbf{M} \models_{\sigma_1(y|a)} B(y) \\
& \text{当且仅当} \quad \text{对任意 } a \in M \text{ 都有 } \mathbf{M} \models_{\sigma_2(y|a)} B(y) \\
& \text{当且仅当} \quad \mathbf{M} \models_{\sigma_2} \forall y\, B(y).
\end{aligned}$$

假设 A 是语句（即其中没有自由变元出现)。则由引理 3.2.2 直接得出：A 在模型 $\mathbf{M}$ 中成立与否不依赖于任何指派。也就是说, 对任意指派 σ 都有 $\mathbf{M} \models_{\sigma} A$ 当且仅当存在指派 σ 使得 $\mathbf{M} \models_{\sigma} A$.

习题 3.2.1　设 A 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 的公式, x 为一变元, 它不在 A 中自由出现. 则对 $\mathcal{L}$ 的任意模型 $\mathbf{M}$ 及 M 中的任意指派 σ 都有,

(1) $\mathbf{M} \models_{\sigma} A$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_{\sigma} \exists x A$,

(2) $\mathbf{M} \models_{\sigma} A$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_{\sigma} \forall x A$.

例子 3.2.5　设 $\mathcal{L} = \{\, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}\}$ 为例子 3.2.2 中的一阶语言, (N, J) 为例子 3.2.2 中的模型。考察语句

$$A = \forall \mathrm{x}_1(\mathrm{P}(\mathrm{x}_1) \vee \mathrm{Q}(\mathrm{x}_1) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}_1)).$$

显然, 对任何指派 σ, $(N, J) \models_{\sigma} A$. 直观地, (N, J) 把 A 解释为命题：对任意动物, 如果它是麒麟或犀牛, 则它恰有一只角。

定义 3.2.4　设 $\mathbf{M} = (M, I)$ 是 $\mathcal{L}$ 的一个模型, A 为 $\mathcal{L}$ 的一公式. 如果对任意指派 σ 都有 $\mathbf{M} \models_{\sigma} A$, 则称 $\mathbf{M}$ 满足 A, 或称, A 在 $\mathbf{M}$ 中成立, 亦称, $\mathbf{M}$ 是 A 的模型。

定义 3.2.5　（永真公式） 设 A 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的公式. 如果 A 在 $\mathcal{L}$ 的每个模型中都成立, 则称 A 为永真公式。

当一永真公式 A 为一语句时, 也称 A 为永真语句.

注记 3.2.4　根据定义 3.2.3 和定义 3.2.4, 公式 A 是永真的当且仅当对于 $\mathcal{L}$ 的任意模型 $\mathbf{M}$ 都有 $\mathbf{M} \models A$ 当且仅当对于 $\mathcal{L}$ 的任意模型 $\mathbf{M}$, 以及 M 中的任意指派 σ 都有 $\mathbf{M} \models_{\sigma} A$

§3.2.4 语义后承

定义 3.2.6 设 Σ 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的若干公式组成的集合. $\mathbf{M} = (M, I)$ 为 $\mathcal{L}$ 的模型. 如果对每个公式 $A \in \Sigma$ 都有 $\mathbf{M} \models A$, 则称 $\mathbf{M}$ 为 Σ 的模型.

定义 3.2.7 设 Σ 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的若干公式组成的集合, A 为一个公式。如果 Σ 的每一模型也都是 A 的模型，则称 A 是 Σ 的语义后承，记作 $\Sigma \models A$.

我们把 $\varnothing \models A$ 简记作 $\models A$. 显然, $\models A$ 当且仅当 A 是永真公式.

习题 3.2.2 试证明如下各式。

(1) $A(x) \models \forall x A(x)$.

(2) $\exists x A(x) \models \neg\forall x \neg A(x)$.

(3) $\forall x A(x) \models \neg\exists x \neg A(x)$.

(4) $\forall x A(x) \models \forall y A(y)$ (y 不在 $A(x)$ 中自由出现，且对 x 而言代入是自由的.)

(5) $\exists x A(x) \models \exists y A(y)$ (y 不在 $A(x)$ 中自由出现，且对 x 而言代入是自由的.)

注记 3.2.5 对于命题演算，我们知道，$\models A \to B$ 当且仅当 $A \models B$. 然而，在谓词演算中，这却是不正确的。我们已经知道 $A(x) \models \forall x A(x)$，但 $\models A(x) \to \forall x A(x)$ 未必正确.

最后，我们讨论为什么在习题 3.2.2-(4) 中我们要求 y 对 x 而言在 $A(x)$ 中代入是自由的。设 $A(x)$ 为公式 $\exists y(x \not\approx y)$. [5] 容易看出，$y$ 不在 $A(x)$ 中自由出现，但 y 对 x 而言在 $A(x)$ 中代入是不自由的。这时 $A(y)$ 就是 $\exists y(y \not\approx y)$, 它显然是不可满足的。注意，$y$ 不在 $A(y)$ 中自由出现，根据习题 3.2.1, $\forall y A(y)$ 也不可满足。另一方面，$\forall x A(x)$ 为公式 $\forall x \exists y(x \not\approx y)$, 它显然是可满足的。于是，$\forall x A(x) \not\models \forall y A(y)$. 也就是说，如果我们不要 y 对 x 而言在 $A(x)$ 中代入是自由的，则习题 3.2.2 中的 (4) 未必成立。请读者讨论习题 3.2.2–(5).

§3.3 谓词演算的公理系统及推理规则

谓词演算的公理系统包括三组公理（模式）:

一、命题演算中的公理：设 A, B, C 代表一阶形式语言 $\mathcal{L}$ 的任意公式，如下形式的公式都是公理：

(Ax 1) $A \to (B \to A)$.

[5] $x \not\approx y$ 是 $\neg(x \approx y)$ 的缩写。

(Ax 2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.

(Ax 3) $A \to (B \to (A \wedge B))$.

(Ax 4) $A \wedge B \to A$.

(Ax 5) $A \wedge B \to B$.

(Ax 6) $A \to A \vee B$.

(Ax 7) $B \to A \vee B$.

(Ax 8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$.

(Ax 9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

(Ax 10) $\neg\neg A \to A$.

二、量词公理：设 $A(x)$ 为 $\mathcal{L}$ 的公式, t 为项, 它对于 $A(x)$ 中的 x 而言代入是自由的. 则如下形式的公式是公理：

(Ax 11) $\forall x A(x) \to A(t)$.

(Ax 12) $A(t) \to \exists x A(x)$.

三、等词公理：设 x 为变元, $t, t_1, \cdots, t_n$ 为项, P 为 n 元谓词符, f 为 n 关系符, 则如下形式的公式是公理：

(Ax 13) $x \approx x$,

(Ax 14) $t_1 \approx t \to (t_1 \approx t_2 \to t \approx t_2)$,

(Ax 15) $t_i \approx t \to (P(t_1, \cdots, t_n) \to P(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n))$

(Ax 16) $t_i \approx t \to (f(t_1, \cdots, t_n) \approx f(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n))$

谓词演算的推理规则：设 A, B, C 为公式, C 中不含 x 的自由出现.

分离规则 MP： $\dfrac{A, A \to B}{B}$.

全称量词规则 CGen: $\dfrac{C \to A(x)}{C \to \forall x A(x)}$.

存在量词规则 PEx: $\dfrac{A(x) \to C}{\exists x A(x) \to C}$.

注记 3.3.1 我们称 B 是 A 和 $A \to B$ 关于分离规则 MP 的直接后承; 称 $C \to \forall x A(x)$ 为 $C \to A(x)$ 的关于规则 CGen 的直接后承; 称 $\exists x A(x) \to C$ 为 $A(x) \to C$ 的关于规则 PEx 的直接后承.

§3.3.1 谓词演算的形式证明与形式推演

在第二章, 我们已给出命题演算的形式证明和形式定理的元数学定义. 下面我们给出谓词演算的形式证明和形式定理的定义. 在本节中, 我们总是固定一一阶语言 $\mathcal{L}$. 所说的公式都是指 $\mathcal{L}$ 的公式。

定义 3.3.1 (形式证明) 称公式的有穷序列

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_n$$

是一个形式证明 (简称证明), 如果对任意 i, $1 \leq i \leq n$, 都有下列之一成立:

(1) A_i 是公理, 或

(2) 存在 $j_1, j_2 < i$ 使得 A_i 是 A_{j_1} 和 A_{j_2} 关于分离规则 MP 的直接后承，或

(3) 存在 $j < i$ 使得 A_i 是 A_j 关于规则 CGen 的直接后承，或

(4) 存在 $j < i$ 使得 A_i 是 A_j 关于规则 PEx 的直接后承.

注记 3.3.2 如果 $A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_n$ 是证明，则对任意 $i \leq n$, $A_1, \cdots, A_i$ 也是证明.

定义 3.3.2 (形式定理) 称公式 A 是一个形式定理 (简称定理), 如果存在一个形式证明 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 使得 A 就是 A_n. 此时亦称 A 是 (形式) 可证的.

习题 3.3.1 试证明下列公式是谓词演算的形式定理.

(1) $y \approx x \to x \approx y$.

(2) $x \approx y \to (y \approx z \to x \approx z)$.

§3.3.2 形式推演

我们把命题演算中的形式推演的定义拓展到谓词演算上.

定义 3.3.3 设 Γ 是由一些公式组成的集合. 称公式的有穷序列

$$A_1,\ A_2,\ \cdots\cdots,\ A_n$$

是一个由 Γ 中公式出发的形式推演, 如果它满足如下条件: 对任意 i, $1 \leq i \leq n$, 都有下列之一成立.

(1) A_i 是公理，或

(2) A_i 属于 Γ，或

(3) 存在 $j_1, j_2 < i$ 使得 A_i 是 A_{j_1} 和 A_{j_2} 关于分离规则 MP 的直接后承，或

(4) 存在 $j < i$ 使得 A_i 是 A_j 关于规则 CGen 的直接后承，或

(5) 存在 $j < i$ 使得 A_i 是 A_j 关于规则 PEx 的直接后承.

我们用 $\Gamma \vdash A$ 表示存在一个从 Γ 出发的形式推演, 该推演的最后公式是 A.

注记 3.3.3

- 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个由 Γ 中公式出发的形式推演, 则对任意 $i \leq n$, $A_1, A_2, \cdots, A_i$ 也是一个由 Γ 中公式出发的形式推演.
- 一个形式推演的长度，是指该推演中公式的个数.
- 如果 Γ 是空集，即 $\Gamma = \varnothing$，则我们把 $\varnothing \vdash A$ 简记作 $\vdash A$. 显然，$\vdash A$ 当且仅当 A 是形式定理.
- 假设 $\Gamma = \{B_1, \cdots, B_k\}$，则我们常把 $\Gamma \vdash A$ 写为 $B_1, \cdots, B_k \vdash A$.
- 我们把 $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ 简记作 $\Gamma, B \vdash A$.

例子 3.3.1　$A(x) \vdash \forall x A(x)$.

证明　设 C 为一个不含 x 的自由出现的公理.

(1) $A(x)$　/* 假定公式 */
(2) $C \to A(x)$　/* 例子 2.5.1–2 */
(3) $C \to \forall x A(x)$　/* (2), CGen */
(4) C　/* C 是公理 */
(5) $\forall x A(x)$　/* (3), (4), MP */

□

§3.4　谓词演算的一致性定理

引理 3.4.1　谓词演算的每一条公理都是永真的.

证明　谓词演算有无穷多条公理, 但只有有穷多条公理模式. 对于具有模式 Ax 1—Ax 10 的公理我们已经证过 (在命题演算中). 在这里留作习题.

现在考虑公理模式 Ax 11: $\forall x A(x) \to A(t)$ (t 关于 x 在 $A(x)$ 中代入是自由的). 设 $\mathbf{M}$ 为 $\mathcal{L}$ 的任意模型，且设 σ 为 $\mathbf{M}$ 中的任意指派。设 $\mathbf{M} \models_\sigma \forall x A(x)$，要证 $\mathbf{M} \models_\sigma A(t)$. 令 a 为 t 在指派 σ 下在 $\mathbf{M}$ 中的取值, 即 $a = t^{M,\sigma}$. 再令 $\sigma' = \sigma(x|a)$. 由于 $A(t)$ 是把 $A(x)$ 中 x 的每一次自由出现换成 t 后得到的公式，且 $\sigma'(x) = t^{M,\sigma}$, 容易看出，$\mathbf{M} \models_{\sigma'} A(x)$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_\sigma A(t)$. 注意，我们已经假设 $\mathbf{M} \models_\sigma \forall x A(x)$，根据全称量词的语义（见定

义 3.2.3) 有 $\mathbf{M} \models_{\sigma'} A(x)$. 从而，$\mathbf{M} \models_\sigma A(t)$. 从而，$\mathbf{M} \models_\sigma \forall x A(x) \to A(t)$. 由 σ 的任意性知，$\mathbf{M} \models \forall x A(x) \to A(t)$. 再由 $\mathbf{M}$ 的任意性，$\forall x A(x) \to A(t)$ 是永真的.

下面证明公理模式 Ax 12: $A(t) \to \exists x A(x)$ (t 关于 x 在 $A(x)$ 中代入是自由的) 是永真的. 设 $\mathbf{M}$ 为 $\mathcal{L}$ 的任意模型，且设 σ 为 $\mathbf{M}$ 中的任意指派。设 $\mathbf{M} \models_\sigma A(t)$，要证 $\mathbf{M} \models_\sigma \exists x A(x)$. 令 a 为 t 在指派 σ 下在 $\mathbf{M}$ 中的取值, 即 $a = t^{M,\sigma}$. 再令 $\sigma' = \sigma(x|a)$. 由于 $A(t)$ 是把 $A(x)$ 中 x 的每一次自由出现换成 t 后得到的公式，且 $\sigma'(x) = t^{M,\sigma}$，容易看出，$\mathbf{M} \models_{\sigma'} A(x)$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_\sigma A(t)$. 注意，我们已经假设 $\mathbf{M} \models_\sigma A(t)$，从而，$\mathbf{M} \models_{\sigma'} A(x)$. 根据存在量词的语义，$\mathbf{M} \models_\sigma \exists x A(x)$. 于是，$\mathbf{M} \models_\sigma A(t) \to \exists x A(x)$. 由 $\mathbf{M}$ 和 σ 的任意性，$A(t) \to \exists x A(x)$ 是永真的.

容易验证，公理 Ax 13：$\forall x(x \approx x)$ 和 Ax 14: $t_1 \approx t \to (t_1 \approx t_2 \to t \approx t_2)$ 都是永真的。

下面证明公理模式 Ax 15: $t_i \approx t \to (P(t_1, \cdots, t_n) \to P(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n))$ 是永真的. 设 $\mathbf{M}$ 为 $\mathcal{L}$ 的任意模型，且设 σ 为 $\mathbf{M}$ 中的任意指派. 设 $\mathbf{M} \models_\sigma t \approx t_i$，即，$t^{M,\sigma} = t_i^{M,\sigma}$. 要证 $\mathbf{M} \models_\sigma (P(t_1, \cdots, t_n) \to P(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n))$. 设 $\mathbf{M} \models_\sigma P(t_1, \cdots, t_n)$. 则 $P^M(t_1^{M,\sigma}, \cdots, t_n^{M,\sigma})$ 成立. 因 $t^{M,\sigma} = t_i^{M,\sigma}$，故

$$P^M(t_1^{M,\sigma}, \cdots, t_{i-1}^{M,\sigma}, t^{M,\sigma}, t_{i+1}^{M,\sigma}, \cdots, t_n^{M,\sigma}) \text{ 成立,}$$

即 $\mathbf{M} \models_\sigma P(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n)$. 从而，

$$\mathbf{M} \models_\sigma (P(t_1, \cdots, t_n) \to P(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n)).$$

于是，$\mathbf{M} \models_\sigma t_i \approx t \to (P(t_1, \cdots, t_n) \to P(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n))$. 由 $\mathbf{M}$ 和 σ 的任意性知，公理模式 Ax 15 是永真的.

下面证明公理模式 Ax 16: $t_i \approx t \to (f(t_1, \cdots, t_n) \approx f(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n))$ 是永真的. 设 $\mathbf{M}$ 为 $\mathcal{L}$ 的任意模型，且设 σ 为 $\mathbf{M}$ 中的任意指派. 设 $\mathbf{M} \models_\sigma t \approx t_i$，即，$t^{M,\sigma} = t_i^{M,\sigma}$. 从而

$$f^M(t_1^{M,\sigma}, \cdots, t_n^{M,\sigma}) = f^M(t_1^{M,\sigma}, \cdots, t_{i-1}^{M,\sigma}, t^{M,\sigma}, t_{i+1}^{M,\sigma}, \cdots, t_n^{M,\sigma}).$$

即，$\mathbf{M} \models_\sigma f(t_1, \cdots, t_n) \approx f(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n)$. 从而

$$\mathbf{M} \models_\sigma t_i \approx t \to (f(t_1, \cdots, t_n) \approx f(t_1, \cdots, t_{i-1}, t, t_{i+1}, \cdots, t_n)).$$

由 $\mathbf{M}$ 和 σ 的任意性知，公理模式 Ax 16 是永真的. $\square$

引理 3.4.2　谓词演算中每一推理规则都是保真的。设 $A, B, C, D(x)$ 为公式, 其中 C 中没有 x 的自由出现。且设 $\mathbf{M}$ 为任意模型。

(1) 如果 $\mathbf{M} \models A$ 且 $\mathbf{M} \models A \to B$ 则 $\mathbf{M} \models B$.

(2) 如果 $\mathbf{M} \models C \to D(x)$ 则 $\mathbf{M} \models C \to \forall x D(x)$.

(3) 如果 $\mathbf{M} \models D(x) \to C$ 则 $\mathbf{M} \models \exists x D(x) \to C$.

证明　(1) 分离规则的保真性直接由蕴涵词的语义得到 (见定义 3.2.3).

(2) 规则 CGen 的保真性. 假设 $\mathbf{M} \models C \to D(x)$. 我们要证, $\mathbf{M} \models C \to \forall x D(x)$. 令 σ 为任意指派, 需证 $\mathbf{M} \models_\sigma C \to \forall x D(x)$. 假设 $\mathbf{M} \models_\sigma C$。

注意，对任意 $a \in M$, σ 和 $\sigma(x|a)$ 仅仅对 x 指派的值可能不同，而 x 又不在 C 中自由出现，根据引理 3.2.2，$\mathbf{M} \models_\sigma C$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} C$. 注意，我们已经假设了 $\mathbf{M} \models_\sigma C$, 从而，$\mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} C$. 又 $\mathbf{M} \models C \to D(x)$，故 $\mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} D(x)$. 根据全称量词的语义，$\mathbf{M} \models_\sigma \forall x D(x)$. 从而，$\mathbf{M} \models_\sigma C \to \forall x D(x)$. 由 σ 的任意性，$\mathbf{M} \models C \to \forall x D(x)$.

(3) 规则 PEx 的保真性. 假设 $\mathbf{M} \models D(x) \to C$. 我们要证 $\mathbf{M} \models \exists x D(x) \to C$. 令 σ 为任意指派, 需证 $\mathbf{M} \models_\sigma \exists x D(x) \to C$. 假设 $\mathbf{M} \models_\sigma \exists x D(x)$。根据存在量词的语义，存在 $a \in M$ 使得 $\mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} D(x)$. 又 $\mathbf{M} \models D(x) \to C$，故 $\mathbf{M} \models_{\sigma(x|a)} C$. 注意，$x$ 不在 C 中自由出现，由引理 3.2.2 知，$\mathbf{M} \models_\sigma C$. 从而，$\mathbf{M} \models_\sigma \exists x D(x) \to C$. 由 σ 的任意性，$\mathbf{M} \models \exists x D(x) \to C$. □

定理 3.4.1　(一致性定理) 谓词演算的所有定理都是永真的.

证明　我们要证明, 任意定理 A 都是永真的. 因为每个定理必有一个形式证明, 我们归纳于形式证明的长度来证明. 设

$$A_1, A_2, \cdots, A_n = A$$

为 A 的一个形式证明. 当 $n = 1$ 时, 则 A 必为公理. 由引理 3.4.1 知, A 是永真的. 设当 $n \leq k$ 时结论成立. 我们要证明结论对 $n = k + 1$. 根据归纳假设, $A_1, \cdots, A_k$ 都是永真的. 根据形式证明的定义, A (即, A_{k+1}) 必然是前面两 (或一) 个公式的关于规则 MP 或 CGen 或 PEx 的直接后承. 由引理 3.4.2, 这三个规则都是保真的. 所以 A 必为永真的. □

习题 3.4.1　设 Σ 为一集公式, A 为一个公式. 如果 $\Sigma \vdash A$ 则 $\Sigma \models A$.

§3.5 推演定理

我们讲过，推演规则分为两种：导出规则和辅助推演规则。导出规则是形如 $\Gamma \vdash A$ 的元数学定理。而辅助推演规则则是以一些推演为前提来构造出另外的推演。

当形式系统由于增加新的公理和推理规则时，原形式系统中的推演也是新系统中的推演，因而原系统中的导出规则仍然有效，然而，辅助推演规则未必继续有效。这是因为，系统的扩张可使辅助推演中出现新情况，而对应于这些新情况，结果推演的构造可能会出现问题.

例子 3.5.1　设 c 是 $\mathcal{L}$ 中的一个常项符。根据例子 3.3.1, $x \approx c \vdash \forall x(x \approx c)$. 假设命题演算中的推演定理可直接推广到谓词演算中，则有 $\vdash (x \approx c \to \forall x(x \approx c))$. 根据一致性定理（见第 3.4 节中的定理 3.4.1）, $(x \approx c \to \forall x(x \approx c))$ 是永真的. 今考虑 $\mathcal{L}$ 的至少含有两个元素的模型 $\mathbf{M}$, 且考虑满足 $\sigma(x) = c^M$ 的指派 σ. 于是我们有 $\mathbf{M} \models_\sigma x \approx c$. 于是必有，$\mathbf{M} \models_\sigma \forall x(x \approx c)$. 因为 $\forall x(x \approx c)$ 是一语句，我们有 $\mathbf{M} \models \forall x(x \approx c)$. 根据定义 3.2.3, 对任意指派 δ 都有 $\mathbf{M} \models_\delta x \approx c$. 因为 $\mathbf{M}$ 中至少有两个元素，因此必存在指派 δ 使得 $\delta(x) \neq c^M$, 也就是说，$\mathbf{M} \models_\delta \neg(x \approx c)$. 矛盾. 因此，命题演算中的推演定理不能直接推广到谓词演算中。

要把推演定理推广到谓词演算上我们需要加适当的限制条件.

§3.5.1 依赖性与变化性

定义 3.5.1　(依赖性)　设 Γ 是由若干公式组成的集合, 公式序列

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$$

是一个由 Γ 中公式出发的形式推演, D 是 Γ 中的一个公式. 我们说在上推演中 A_i 依赖于 D 如果下列条件之一成立:

(1) A_i 就是 D, 或

(2) 存在 $j_1, j_2 < i$，使得 A_i 是 A_{j_1}, A_{j_2} 关于分离规则 MP 的直接后承, 且 A_{j_1} 和 A_{j_2} 中至少有一个依赖于 D, 或

(3) 存在 $j < i$ 使得 A_i 是 A_j 关于规则 CGen 的直接后承, 且 A_j 依赖于 D, 或

(4) 存在 $j < i$ 使得 A_i 是 A_j 关于规则 PEx 的直接后承, 且 A_j 依赖于 D.

例子 3.5.2　$A \to (B \to C), A \wedge B \vdash C$.

(1) $A \wedge B$ /* 假定公式 */
(2) $A \wedge B \to A$ /* Ax 4 */
(3) A /* (1), (2) , MP */
(4) $A \to (B \to C)$ /* 假定公式 */
(5) $B \to C$ /* (3), (4), MP */
(6) $A \wedge B \to B$ /* Ax 5 */
(7) B /* (1), (6), MP */
(8) C /* (5), (7), MP */

在上推演中 (4)(5)(8) 中的公式都依赖于假定公式 $A \to (B \to C)$.

定义 3.5.2 （变化性） 我们说, 就一假定公式 D 而言, 变元 x 在所给的推演中是变化的, 如果下列两个条件同时成立：

(1) x 在 D 中自由出现, 并且

(2) 在推演过程中对依赖于 D 的公式就 x 应用了规则 CGen 或 PEx.

如果在给定的推演中，x 对 D 而言是不变化的，则我们说 x 对 D 而言在推演中是保持固定的.

例子 3.5.3 设 x 在公式 $A(x)$ 中自由出现。则在例子 3.3.1 给出的推演 $A(x) \vdash \forall x A(x)$ 中，x 对 $A(x)$ 而言是变化的。

例子 3.5.4 设 x 为变元符, $A(x)$ 为公式, 而 y 是与 x 不同的另一变元符满足: (1) y 对 $A(x)$ 中的 x 而言 (代入）是自由的, (2) y 不在 $A(x)$ 中自由出现. 且设 C 为不含 x 自由出现的公式. 今考察 $C \to A(x) \vdash C \to \forall y A(y)$ 的如下推演：

(1) $C \to A(x)$ /* 假定公式 */
(2) $C \to \forall x A(x)$ /* (1), CGen */
(3) $\forall x A(x) \to A(y)$ /* Ax 11 */
(4) $\forall x A(x) \to \forall y A(y)$ /* (3), CGen */
(5) $C \to (\forall x A(x) \to \forall y A(y))$ /* (4)，例子 2.5.1–2*/
(6) $(C \to \forall x A(x)) \to$
$((C \to (\forall x A(x) \to \forall y A(y))) \to (C \to \forall y A(y)))$ /* Ax 2 */
(7) $(C \to (\forall x A(x) \to \forall y A(y))) \to (C \to \forall y A(y))$ /* (2), (6), MP */
(8) $C \to \forall y A(y)$ /* (5), (7), MP */

假设 x 在 $A(x)$ 中自由出现。则在上述推演中, x 对假定公式 $C \to A(x)$ 而言是变化的。这是因为在第二步时，我们对假定公式就 x 使用了规则 CGen. 虽然我们在第四步时对

(3) 中的公式就 y 使用了规则 CGen, 但又由于 (3) 中的公式不依赖于假定公式, 故 y 对 $C \to A(x)$ 而言是固定的。

例子 3.5.5　设 $A(x,y), B(x,y)$ 为公式, 其中均含 x、y 的自由出现。设 C 为不含 x 和 y 的自由出现的一条公理. 考虑如下推演。

(1) $A(x,y)$	/* 假定公式 */
(2) $A(x,y) \to \exists x A(x,y)$	/* Ax 12 */
(3) $\exists x A(x,y)$	/* (1), (2), MP */
(4) $C \to \exists x A(x,y)$	/* 例子 2.5.1–2 */
(5) $C \to \forall y \exists x A(x,y)$	/* (4), CGen */
(6) C	/* 公理 */
(7) $\forall y \exists x A(x,y)$	/* (5), (6), MP */
(8) $B(x,y)$	/* 假定公式 */
(9) $C \to B(x,y)$	/* 例子 2.5.1–2 */
(10) $C \to \forall x B(x,y)$	/* (9), CGen */
(11) $\forall x B(x,y)$	/* (6), (10), MP */
(12) $\forall x B(x,y) \to \exists y \forall x B(x,y)$	/* Ax 12 */
(13) $\exists y \forall x B(x,y)$	/* (11), (12), MP */
(14) $\forall y \exists x A(x,y) \land \exists y \forall x B(x,y)$	/* (7), (14), $\land$+*/

在上述推演中, x 对 $A(x,y)$ 是固定的, 但对 $B(x,y)$ 是变化的。y 对 $A(x,y)$ 是变化的, 但对 $B(x,y)$ 是固定的。

§3.5.2　推演定理

下面我们讨论谓词演算的推演定理.

定理 3.5.1　对谓词演算而言, 如果 $\Gamma, A \vdash B$, 且在该推演中所有自由变元对假定公式 A 而言是固定的, 那么 $\Gamma \vdash A \to B$

证明　假设 $\Gamma, A \vdash B$, 我们要证 $\Gamma \vdash (A \to B)$. 为此, 需要构造从 Γ 到 $A \to B$ 的形式推演. 注意, 我们已经假定 $\Gamma, A \vdash B$, 也就是说, 假定有从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的形式推演. 我们将根据该推演获得我们需要的推演. 施归纳于从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演长度. 我们的归纳命题是 $P_{\Gamma,A}(k)$: 对任意的公式 B, 如果有从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的长度为 k 的推演, 且在该推演中所有自由变元对假定公式 A 而言是固定的, 则有从 Γ 到 $A \to B$ 的形式推演.

基始 ($k = 1$): 设存在从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的长度为 1 的推演. 也就是说, 这样的推演只有一个公式, 它必然是 B. 根据形式推演的定义, 有三种情况.

情形 1. $B \in \Gamma$. 则下面序列就是从 Γ 到 $A \to B$ 的推演.

(1) B	/* B 是 Γ 中的假定公式 */
(2) $B \to (A \to B)$	/* Ax 1 */
(3) $A \to B$	/* (1), (2), MP */

情形 2. B 就是 A。因为 $\vdash A \to A$ (见例子 2.4.1) 故根据命题 2.5.1–2 有, $\Gamma \vdash A \to A$.

情形 3. B 是一条公理. 和情形 1 一样, 只不过第一步变成以 B 是公理来作为根据的.

归纳步骤: 假设对任意 $l \leq k$ 都有 $P_{\Gamma,A}(l)$ 成立. 我们的任务就是要证明 $P_{\Gamma,A}(k+1)$. 假设

$$A_1, A_2, \ldots\cdots, A_{k+1}$$

是一个从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 B 的推演 (则 A_{k+1} 是 B), 且在该推演中所有自由变元对假定公式 A 而言是固定的. 根据推演的定义, 共有六种情形。

情形 1. $B \in \Gamma$. 和基始中情形 1 的证明相同.

情形 2. B 就是 A. 和基始中情形 2 的证明相同.

情形 3. B 是一条公理. 和基始中情形 3 的证明相同.

情形 4. B 是 A_{j_1} 和 A_{j_2} 关于分离规则 MP 的直接后承, 其中, $j_1, j_2 < k+1$. 不妨设 A_{j_2} 为 $A_{j_1} \to B$. 注意, 对任意 $j < k+1$, 序列 $A_1, \cdots A_j$ 也是从 $\Gamma \cup \{A\}$ 到 A_j 的推演, 长度不超过 k, 且在该推演中所有自由变元对假定公式 A 而言是固定的。特别地, A_{j_1} 和 $A_{j_1} \to B$ (即 A_{j_2}) 都有从 $\Gamma \cup \{A\}$ 出发的长度不超过 k 的推演. 根据归纳假设, 存在从 Γ 到 $A \to A_{j_1}$ 和 $A \to (A_{j_1} \to B)$ 的推演. 下面我们构造从 Γ 到 $A \to B$ 的推演。

	$\vdots$	
	$\vdots$	
(n)	$A \to A_{j_1}$	/* 归纳假设 */
	$\vdots$	
	$\vdots$	
$(n+m)$	$A \to (A_{j_1} \to B)$	/* 归纳假设 */
$(n+m+1)$	$(A \to A_{j_1}) \to$	
	$((A \to (A_{j_1} \to B)) \to (A \to B))$	/* Ax 2 */
$(n+m+2)$	$(A \to (A_{j_1} \to B)) \to (A \to B)$	/* $(n), (n+m+1)$, MP */
$(n+m+3)$	$(A \to B)$	/* $(n+m)$, $(n+m+2)$, MP */

情形 5. B 是由前面的公式 A_j 应用规则 CGen 而得的直接后承. 依规则 CGen, A_j

应是形如 $C \to E(x)$ 的公式, 其中 x 是一变元符, C、$E(x)$ 为公式且 x 不在 C 中自由出现. 于是, B 就是公式 $C \to \forall x E(x)$. 我们根据在所给推演中 A_j 是否依赖于假定公式 A 而分成两种子情形来进行证明.

子情形 5.1. A_j, 即 $C \to E(x)$, 依赖于 A. 这时 A 必不含 x 的自由出现, 否则, x 对 A 而言是变化的, 与假设矛盾. 因为 A 和 C 均不含 x 的自由出现, 故 $A \wedge C$ 也不含 x 的自由出现. 今把归纳假设应用于到 $C \to E(x)$ 为止的推演上, 我们得到由 Γ 到 $A \to (C \to E(x))$ 的推演.

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
(n) & A \to (C \to E(x)) & /*\ \text{归纳假设}\ */ \\
 & \vdots & \\
(n+m) & A \wedge C \to E(x) & /*\ \text{引理 } 2.5.1\text{–}1\ */ \\
(n+m+1) & A \wedge C \to \forall x E(x) & /*\ (n+m),\ \text{CGen}\ */ \\
 & \vdots & \\
(n+m+r+1) & A \to (C \to \forall x E(x)) & /*\ \text{引理 } 2.5.1\text{–}3\ */
\end{array}
$$

子情形 5.2. A_j, 亦即 $C \to E(x)$, 不依赖于 A. 从而, B, 亦即 $C \to \forall x E(x)$, 也不依赖于 A. 那么, 从已给的推演中去掉 A 和依赖于 A 的公式后, 我们得到一个从 Γ 到 B 的推演 (可用数学归纳法证明). 即有 $\Gamma \vdash C \to \forall x E(x)$. 如下便是我们需要的结果推演.

$$
\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
(n) & C \to \forall x E(x) & /*\ \Gamma \text{ 到 } C \to \forall x E(x) \text{ 的推演}\ */ \\
(n+1) & (C \to \forall x E(x)) \to (A \to (C \to \forall x E(x))) & /*\ \text{Ax } 1\ */ \\
(n+2) & A \to (C \to \forall x E(x)) & /*\ (n),\ (n+1),\ \text{MP}\ */
\end{array}
$$

情形 6. B 是某 A_j 关于规则 PEx 的直接后承. 从而 A_j 必为形如 $E(x) \to C$ 的公式, 而 B 是公式 $\exists x E(x) \to C$. 其中 x 是一变元符, C、$E(x)$ 为公式且 x 不在 C 中自由出现. 我们根据在所给推演中 A_j 是否依赖于假定公式 A 而分成两种子情形来进行证明.

子情形 6.1. A_j, 即 $E(x) \to C$, 依赖于 A. 这时 A 必不含 x 的自由出现, 否则, x 对 A 而言是变化的, 与假设矛盾. 因为 A 和 C 均不含 x 的自由出现, 故 $A \to C$ 也不含 x 的自由出现. 今把归纳假设应用于到 $E(x) \to C$ 为止的推演上, 我们得到由 Γ 到 $A \to (E(x) \to C)$ 的推演.

$$\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
(n) & A \to (E(x) \to C) & \text{/* 归纳假设 */} \\
 & \vdots & \\
(n+m) & E(x) \to (A \to C) & \text{/* 引理 2.5.1–2 */} \\
(n+m+1) & \exists x E(x) \to (A \to C) & \text{/* } (n+m)\text{, PEx */} \\
 & \vdots & \\
(n+m+r+1) & A \to (\exists x E(x) \to C) & \text{/* 引理 2.5.1–2 */}
\end{array}$$

子情形 6.2. A_j, 亦即 $E(x) \to C$, 不依赖于 A. 从而, B, 亦即 $\exists x E(x) \to C$ 不依赖于 A. 那么, 从已给的推演中去掉 A 和依赖于 A 的公式后, 我们得到一个从 Γ 到 B 的推演. 即有 $\Gamma \vdash \exists x E(x) \to C$. 如下便是我们需要的结果推演.

$$\begin{array}{lll}
 & \vdots & \\
(n) & \exists x E(x) \to C & \text{/* } \Gamma \text{ 到 } \exists x E(x) \to C \text{ 的推演 */} \\
(n+1) & (\exists x E(x) \to C) \to (A \to (\exists x E(x) \to C)) & \text{/* Ax 1 */} \\
(n+2) & A \to (\exists x E(x) \to C) & \text{/* } (n), (n+1)\text{, MP */}
\end{array}$$

从而, 根据数学归纳法, 我们证明了, 对任意的 k, $P_{\Gamma,A}(k)$ 成立. 定理得证. □

注记 3.5.1　设在辅助推演 $\Gamma, A \vdash B$ 中，B 依赖于 Γ 中的一假定公式 D. 则在结果推演 $\Gamma \vdash A \to B$ 中，一自由变元 x 对于假定公式 D 的变化性和 x 在辅助推演中对于假定公式 D 的变化性是一样的。具体地，如果一自由变元 x 在辅助推演 $\Gamma, A \vdash B$ 中对于假定公式 D 是变化的，那么在结果推演 $\Gamma \vdash A \to B$ 中，x 对于公式 D 仍是变化的。同样地，如果一自由变元 x 在辅助推演 $\Gamma, A \vdash B$ 对于假定公式 D 是固定的，那么在结果推演 $\Gamma \vdash A \to B$ 中，x 对于公式 D 仍是固定的。

例子 3.5.6　设 x 在公式 $A(x)$、$B(x)$ 均自由出现, 但在公式 C 中没有自由出现. 则在推演中 $C \to B(x), A(x) \vdash C \to \forall x B(x)$ 中，x 对于 $C \to B(x)$ 是变化的，但对于 $A(x)$ 是固定的。于是，由推演定理知必有推演 $C \to B(x) \vdash A(x) \to (C \to \forall x B(x))$，其中 x 对 $C \to B(x)$ 仍是变化的.

§3.6　谓词演算的推演规则

由于谓词演算是命题逻辑的扩充，所以命题逻辑中的推演规则在谓词演算中也是成立的 (必要时要规定辅助推演中变元的固定性). 特别地，对于谓词演算，命题 2.5.1 也是成立的.

定理 3.6.1　设 A, B, C 为公式，Γ 为任意一集公式。

1. $(\to+)$ (蕴涵引入规则): 如果 $\Gamma, A \vdash B$, 且在该推演中所有自由变元对假定公式 A 而言是固定的, 则 $\Gamma \vdash A \to B$.

   $(\to-)$ (蕴涵消去规则): $A, A \to B \vdash B$.

2. $(\wedge+)$ (合取引入规则): $A, B \vdash A \wedge B$.

   $(\wedge-)$ (合取消去规则): $A \wedge B \vdash A$,　$A \wedge B \vdash B$.

3. $(\vee+)$ (析取引入规则): $A \vdash A \vee B$,　$B \vdash A \vee B$.

   $(\vee-)$ (析取消去规则，亦称穷举法): 如果 $\Gamma, A \vdash C$,　$\Gamma, B \vdash C$，且在这两个推演中所有自由变元分别对假定公式 A, B 都是固定的，则 $\Gamma, A \vee B \vdash C$. [6]

4. $(\neg+)$ (否定引入规则，亦称反证法): 如果 $\Gamma, A \vdash B$　$\Gamma, A \vdash \neg B$, 且在这两个推演中所有自由变元对假定公式 A 都是固定的，则 $\Gamma \vdash \neg A$. [7]

   $(\neg-)$ (否定消去): $\neg\neg A \vdash A$.

定理 3.6.2　(量词的引入与消除)　设 $A(x)$ 为公式; t 是项, 它对 $A(x)$ 中的 x 而言是自由的; C 也是一公式, 其中不含 x 的自由出现; $\Gamma(x)$ 是任意一集公式.

1. $(\forall+)$ (全称引入规则)　$A(x) \vdash \forall x A(x)$. [8]

2. $(\forall-)$ (全称消去规则)　$\forall x A(x) \vdash A(t)$.

3. $(\exists+)$ (存在引入规则)　$A(t) \vdash \exists x A(x)$.

4. $(\exists-)$ (存在消去规则)　如果 $\Gamma, A(x) \vdash C$ 且所有自由变元对 $A(x)$ 都是固定的，则 $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$.

证明　先证全称引入规则。设 D 为一个不含 x 的自由出现的公理.

---

[6] 在结果推演中，所有自由变元对 $A \vee B$ 也是固定的。

[7] 设在两个辅助推演中，B 或 $\neg B$ 依赖于 Γ 中的一假定公式 D. 则在结果推演中，一自由变元 x 对于假定公式 D 是固定的当且仅当 x 在两个辅助推演中对公式 D 都是固定的。

[8] 如果 x 在 $A(x)$ 中自由出现，则 x 在推演 $A(x) \vdash \forall x A(x)$ 中对 $A(x)$ 是变化的。

(1) $A(x) \vdash D \to A(x)$　　/* 例子 2.5.1–2 */

(2) $A(x) \vdash D \to \forall x(A(x)$　　/* (1), CGen */

(3) $\vdash D$　　/* D 是公理 */

(4) $A(x) \vdash \forall x A(x)$　　/* (2), (3), MP */

注意, 从第（1）步到第（2）步我们使用了全称量词规则。而 $D \to A(x)$ 依赖于 $A(x)$. 因此，如果 x 在 $A(x)$ 中自由出现，则 x 在推演 $A(x) \vdash \forall x A(x)$ 中对 $A(x)$ 是变化的。

全称消去规则和存在引入规则的证明容易，由读者补证。下面证明存在消去规则.

(1) $\Gamma, A(x) \vdash C$　　/* 假设 */

(2) $\Gamma \vdash A(x) \to C$　　/* (1), $\to +$ */

(3) $\Gamma \vdash \exists x A(x) \to C$　　/* (2), PEx */

(4) $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$　　/* (3), MP */

注意，从第（2）步到第（3）步我们就 x 使用了存在量词规则 PEx. 如果在推演 $\Gamma \vdash A(x) \to C$ 中，$A(x) \to C$ 依赖于 Γ 中的某公式 B 且 x 在 B 中自由出现，则在结果推演 $\Gamma(x), \exists x A(x) \vdash C$ 中, x 对 B 是变化的. □

例子 3.6.1

1. $\forall x A(x) \vdash\dashv \forall y A(y)$
2. $\exists x A(x) \vdash\dashv \exists y A(y)$

其中, y 对于 $A(x)$ 中的 x 而言是自由的, 且 y 不在 $A(x)$ 中自由出现.

证明　1. 先证 $\forall x A(x) \vdash\dashv \forall y A(y)$.

(1) $\forall x A(x) \vdash A(y)$　　/* $\forall-$ */

(2) $A(y) \vdash \forall y A(y)$　　/* $\forall+$ */

(3) $\forall x A(x) \vdash \forall y A(y)$　　/* 命题 2.5.1 */

$\forall y A(y) \vdash \forall x A(x)$ 的证明类似, 略去.

2. 先证 $\exists x A(x) \vdash \exists y A(y)$

(1) $A(x) \vdash \exists y A(y)$　　/* $\exists+$ */

(2) $\exists x A(x) \vdash \exists y A(y)$　　/* $\exists-$ */

另一方向的证明类似, 略去. □

注记 3.6.1　注意, 在谓词演算中, 由于推演定理需要限制条件, 因此一般情况下, $A \vdash\dashv B$ 与 $\models A \leftrightarrow B$ 并不是等价的。不过，在例子 3.6.1 中的推演中，每个自由变元（对假定公式）都是固定的，因此我们有：$\vdash \forall x A(x) \leftrightarrow \forall y A(y)$, $\vdash \exists x A(x) \leftrightarrow \exists y A(y)$.

例子 3.6.2　$\forall x(A(x) \to B) \vdash\dashv \exists x A(x) \to B$, 其中, B 中不含 x 的自由出现.

证明　先证 $\forall x(A(x) \to B) \vdash \exists x A(x) \to B$.

(1) $\forall x(A(x) \to B) \vdash A(x) \to B$　　/* $\forall-$ */
(2) $A(x) \to B, A(x) \vdash B$　　/* $\to -$ */
(3) $A(x) \to B, \exists x A(x) \vdash B$　　/* $\exists-$ */
(4) $A(x) \to B \vdash \exists x A(x) \to B$　　/* $\to +$ */
(5) $\forall x(A(x) \to B) \vdash \exists x A(x) \to B$　　/* (1), (4), 命题 2.5.1 */

下证 $\exists x A(x) \to B \vdash \forall x(A(x) \to B)$.

(1) $A(x) \vdash \exists x A(x)$　　/* $\exists+$ */
(2) $\exists x A(x) \to B, \exists x A(x) \vdash B$　　/* $\to -$ */
(3) $\exists x A(x) \to B, A(x) \vdash B$　　/* (1), (2), 命题 2.5.1 */
(4) $\exists x A(x) \to B \vdash A(x) \to B$　　/* (3), $\to +$ */
(5) $\exists x A(x) \to B \vdash \forall x(A(x) \to B)$　　/* (4), $\forall+$ */

□

例子 3.6.3　$\exists x A(x) \vdash\dashv \neg\forall x \neg A(x)$.

证明　先证 $\exists x A(x) \vdash \neg\forall x \neg A(x)$.

(1) $A(x), \neg A(x) \vdash A(x)$
(2) $A(x), \neg A(x) \vdash \neg A(x)$
(3) $\forall x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$　　/* $\forall-$ */
(4) $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash A(x)$　　/* (1), (3), 命题 2.5.1 */
(5) $A(x), \forall x \neg A(x) \vdash \neg A(x)$　　/* (2), (3), 命题 2.5.1 */
(6) $A(x) \vdash \neg\forall x \neg A(x)$　　/* (4), (5), $(\neg+)$ */
(7) $\exists x A(x) \vdash \neg\forall x \neg A(x)$　　/* (6), $(\exists-)$ */

下证 $\neg\forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x)$.

(1) $A(x) \vdash \exists x A(x)$ /* ($\exists +$) */

(2) $\neg\exists x A(x), A(x) \vdash \exists x A(x)$

(3) $\neg\exists x A(x), A(x) \vdash \neg\exists x A(x)$

(4) $\neg\exists x A(x) \vdash \neg A(x)$ /* (2), (3), ($\neg +$) */

(5) $\neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$ /* (4), ($\forall +$) */

(6) $\neg\forall x \neg A(x), \neg\exists x A(x) \vdash \forall x \neg A(x)$

(7) $\neg\forall x \neg A(x), \neg\exists x A(x) \vdash \neg\forall x \neg A(x)$

(8) $\neg\forall x \neg A(x) \vdash \neg\neg\exists x A(x)$ /* (6), (7), ($\neg +$) */

(9) $\neg\neg\exists x A(x) \vdash \exists x A(x)$ /* ($\neg -$) */

(10) $\neg\forall x \neg A(x) \vdash \exists x A(x)$

习题 3.6.1

1. $\forall x A(x) \vdash\dashv \neg\exists x \neg A(x)$.

2. $\forall x \forall y A(x, y) \vdash\dashv \forall y \forall x A(x, y)$.

3. $\exists x \exists y A(x, y) \vdash\dashv \exists y \exists x A(x, y)$.

4. $\forall x(A \to B(x)) \vdash\dashv A \to \forall x B(x)$,

   $\exists x(A \to B(x)) \vdash\dashv A \to \exists x B(x)$ (x 不在 A 中自由出现).

5. $\forall x(A \vee B(x)) \vdash\dashv A \vee \forall x B(x)$,

   $\exists x(A \vee B(x)) \vdash\dashv A \vee \exists x B(x)$ (x 不在 A 中自由出现).

6. $\forall x(A \wedge B(x)) \vdash\dashv A \wedge \forall x B(x)$,

   $\exists x(A \wedge B(x)) \vdash\dashv A \wedge \exists x B(x)$ (x 不在 A 中自由出现).

7. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash\dashv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$,

   $\exists x(A(x) \vee B(x)) \vdash\dashv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

8. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \vdash \forall x(A(x) \vee B(x))$,

   $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$.

§3.7 前束范式

定义 3.7.1 设 A 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的公式。称公式 A 是 $\mathcal{L}$ 中的前束范式, 如果它具有如下形式:

$$Q_1x_1\cdots Q_nx_n\, B(x_1,\cdots,x_n),$$

其中, $n\geq 0$, $Q_i\in\{\forall,\exists\}$ $(i=1,\cdots,n)$, B 中无量词. 而称 B 为 A 的母公式.

根据定义，不含量词的公式一定是前束范式.

设 $B(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ 为一阶语言 $\mathcal{L}$ 中的公式，其中不含量词, 且所有自由变元都在 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m$ 当中. 则语句

$$A=\exists y_1\cdots\exists y_m\forall x_1\cdots,\forall x_n\, B(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$$

也是 $\mathcal{L}$ 中的前束范式。取不在 $\mathcal{L}$ 中出现的常项符 $\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n$. 今考查 $\mathcal{L}\cup\{\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n\}$ 的语句

$$A'=\forall x_1\cdots\forall x_n\, B(x_1,\cdots,x_n,\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n).$$

不难验证，A 是 $\mathcal{L}$ 的可满足公式当且仅当 A' 是 $\mathcal{L}\cup\{\mathrm{e}_1,\cdots,\mathrm{e}_n\}$ 的可满足公式。

下面我们再考虑语句

$$C=\forall x_1\cdots\forall x_n\exists y_1\cdots,\exists y_m\, B(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m).$$

取不在 $\mathcal{L}$ 中出现的 n 元函数符 $\mathrm{g}_1,\cdots,\mathrm{g}_m$.[9] 则通过代入我们得到一阶语言 $\mathcal{L}\cup\{\mathrm{g}_1,\cdots,\mathrm{g}_m\}$ 的语句

$$C'=\forall x_1\cdots\forall x_n\, B(x_1,\cdots,x_n,\mathrm{g}_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\mathrm{g}_m(x_1,\cdots,x_n)).$$

同样可以证明，C 可满足当且仅当 C' 可满足.

实际上，对任何一个前束范式 A，连续应用上述步骤，通过引入新的常项符和函数符，我们可以构造一个仅有全称量词的前束范式 A' 使得 A 可满足当且仅当 A' 可满足.

那么，如果 A 不是前束范式，我能否构造一个仅有全称量词的前束范式 A' 使得二者有同样的可满足性呢? 下面定理说, 每个公式都等价于一个前束范式, 因而对这一问题的回答是肯定的.

定理 3.7.1 对任意公式 A, 都可找到一前束范式 E 使得 $\vdash A\leftrightarrow E$.

证明 为叙述方便, 定义 $\overline{\forall}=\exists$, $\overline{\exists}=\forall$. 要证明此定理，我们需要如下等价式

[9] 文献中称 $\mathrm{g}_1,\cdots,\mathrm{g}_m$ 为 Skolem 函数

(1) $A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$.

(2) $\neg\neg A \vdash\dashv A$.

(3) $\neg(A \vee B) \vdash\dashv \neg A \wedge \neg B$.

(4) $\neg(A \wedge B) \vdash\dashv \neg A \vee \neg B$.

(5) $\neg QxA(x) \vdash\dashv \overline{Q}x\neg A(x)$, $(Q \in \{\exists, \forall\})$.

(6) $QxA(x) \vdash\dashv QyA(y)$
(y 不在 A 中自由出现，且 y 对 x 而言在 A 中代入是自由的).

(7) $A \wedge QxB(x) \vdash\dashv Qx(A \wedge B(x))$ ($Q \in \{\exists, \forall\}$, x 不在 A 中自由出现).

(8) $A \vee QxB(x) \vdash\dashv Qx(A \vee B(x))$ ($Q \in \{\exists, \forall\}$, x 不在 A 中自由出现).

(9) $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \vdash\dashv \forall x(A(x) \wedge B(x))$.

(10) $\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \vdash\dashv \exists x(A(x) \vee B(x))$.

(11) $Q_1xA(x) \wedge Q_2yB(y) \vdash\dashv Q_1xQ_2y(A(x) \wedge B(y))$
($Q_1, Q_2 \in \{\exists, \forall\}$, x 不在 $B(y)$ 中自由出现且 y 不在 $A(x)$ 中自由出现).

(12) $Q_1xA(x) \vee Q_2yB(y) \vdash\dashv Q_1xQ_2y(A(x) \vee B(y))$
($Q_1, Q_2 \in \{\exists, \forall\}$, x 不在 $B(y)$ 中自由出现且 y 不在 $A(x)$ 中自由出现).

根据 (1)-(12) 可按如下步骤找出欲求的前束范式 E.

首先, 连续应用 (1), 可把 A 转换为 E_1, 使得 E_1 中无蕴涵联结词出现且 $A \vdash\dashv E_1$.

其次, 连续使用 (2)-(5), 可把 E_1 转换为 E_2, 使得 E_2 中的每个否定词的辖域中没有量词出现, 且 $E_1 \vdash\dashv E_2$.

第三, 必要时可应用 (6) 把 E_2 中的某些约束变元更名, 得到公式 E_3 使得 $E_2 \vdash\dashv E_3$.

最后, 连续使用 (7)-(12), 可把 E_3 转换为一个前束范式 E, 使得 $E_3 \vdash\dashv E$.

根据我们的构造, 可知, $A \vdash\dashv E$, 即 E 就是欲求得前束范式.

值得注意的是，在上述所列的推演关系 (1)-(12) 中，每个自由变元都是固定的，因此根据推演定理我们有 $\vdash A \leftrightarrow E$. □

注记 3.7.1 以上的论述并不是严格的数学证明, 只是给出了证明思路.

例子 3.7.1 试求公式 $(\forall xA(x) \vee \exists xB(x)) \to \forall xC(x)$ 的前束范式.

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &\dashv\vdash \neg(\forall x A(x) \vee \exists x B(x)) \vee \forall x C(x) \\
&\dashv\vdash (\neg\forall x A(x) \wedge \neg\exists x B(x)) \vee \forall x C(x) \\
&\dashv\vdash (\exists x \neg A(x) \wedge \forall x \neg B(x)) \vee \forall x C(x) \\
&\dashv\vdash (\exists x \neg A(x) \wedge \forall y \neg B(y)) \vee \forall z C(z) \\
&\dashv\vdash \exists x \forall y (\neg A(x) \wedge \neg y B(y)) \vee \forall z C(z) \\
&\dashv\vdash \exists x \forall y \forall z ((\neg A(x) \wedge \neg B(y)) \vee C(z))
\end{aligned}
$$

习题 3.7.1　求下列公式的前束范式.

(1) $\exists x \forall y A(x, y) \wedge (\exists y B(y) \to \forall x C(x))$.

(2) $\exists y \forall z A(y, z) \to \forall x \exists y \neg B(x, y)$.

(3) $\forall x \exists y A(x, y) \leftrightarrow \exists x \forall z B(x, z)$.

§3.8　谓词演算的完全性定理与紧致性定理

在第 1.4 节, 我们证明了谓词演算的一致性定理, 即可证公式都是永真的. 更一般地, 如果 $\Sigma \vdash A$ 则 $\Sigma \models A$. 在本节中我们将介绍谓词演算的完全性定理，即，如果 $\Sigma \models A$ 则 $\Sigma \vdash A$. 完全性定理最初是由哥德尔于 1930 年证明的。后来恒钦 (L. Henkin) 用常量方法重新给出了证明。不过我们并不打算给出完全性定理的证明，有兴趣的读者可以参考文献 [3, 4, 14]。

定义 3.8.1　设 Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合. 如果存在公式 A 使得 $\Sigma \vdash A$ 且 $\Sigma \vdash \neg A$, 则称 Σ 是不协调的. 否则, 称 Σ 是协调的.

空集总是协调的, 即谓词演算是协调的. 假设不然, 则存在公式 A 使得 $\vdash A$ 且 $\vdash \neg A$. 根据一致性定理，对 $\mathcal{L}$ 的任意模型 $\mathbf{M}$ 都有 $\mathbf{M} \models A$ 且 $\mathbf{M} \models \neg A$. 根据满足关系的定义，这是不可能的.

定理 3.8.1　(哥德尔完全性定理)　设 Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合. 如果 Σ 协调则 Σ 有模型。

推论 3.8.1　设 Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合, A 是 $\mathcal{L}$ 中的一公式. 如果 $\Sigma \models A$ 则 $\Sigma \vdash A$.

证明　设 $\Sigma \models A$, 要证 $\Sigma \vdash A$. 假设 $\Sigma \nvdash A$. 则由习题 3.8.2 知，$\Sigma \cup \{\neg A\}$ 协调. 根据完全性定理，存在 $\mathcal{L}$ 的模型 $\mathbf{M}$ 使得 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 中的每个语句都在 $\mathbf{M}$ 中成立, 特别地，$\mathbf{M} \models \neg A$. 另一方面，由于我们已经假设了 $\Sigma \models A$，故有 $\mathbf{M} \models A$. 矛盾，从而必有 $\Sigma \vdash A$. □

推论 3.8.2　设 A 是 $\mathcal{L}$ 中的一公式. 如果 A 是永真的, 则 A 是谓词演算的定理.

定理 3.8.2　(紧致性定理) 设 Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合. 则 Σ 有模型当且仅当 Σ 的每个有穷子集都有模型。

证明　必要性显然, 下证充分性. 设 Σ 的每个有穷子集都有模型。要证 Σ 也有模型. 假设 Σ 没有模型. 则由完全性定理，Σ 是不协调的。于是存在语句 A 使得 $\Sigma \vdash A$ 且 $\Sigma \vdash \neg A$. 根据形式推演的定义，每个形式推演中只有有穷个公式。从而必有 Σ 的两个有穷子集 $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Sigma$ 使得 $\Sigma_1 \vdash A$ 且 $\Sigma_2 \vdash \neg A$. 从而，$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 不协调，故没有模型。另一方面，$\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 也是 Σ 的有穷子集，根据我们的假设，它应该有模型. 矛盾，所以，Σ 必有模型. □

紧致性是一种有穷性原理，含有归纳的思想。人类观察到的现象与过程等往往是有限的、局部的。紧致性定理保证了能将局部的属性推广到整体上. 当然，应用的前提是，观察到的属性可以在一阶逻辑中进行描述.

紧致性定理是模型论中最重要的定理之一。下面我们介绍它的一个应用。

定理 3.8.3　设 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，T 为 $\mathcal{L}$ 的若干语句组成的集合。设对任意 $n \geq 1$, 都存在 T 的至少含有 n 个元素的模型. 则必存在 T 的无穷模型 (即含有无穷多个元素的模型).

证明　我们首先考察下面语句

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = \exists x_1\ (x_1 \approx x_1),\\
&\varphi_2 = \exists x_1 \exists x_2\ (x_1 \not\approx x_2),\\
&\varphi_3 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ (x_1 \not\approx x_2 \wedge x_1 \not\approx x_3 \wedge x_2 \not\approx x_3),\\
&\cdots\cdots\\
&\varphi_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n\ (x_1 \not\approx x_2 \wedge x_1 \not\approx x_3 \wedge \cdots \wedge x_1 \not\approx x_n \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_2 \not\approx x_3 \wedge \cdots \wedge x_2 \not\approx x_n \wedge\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_{n-1} \not\approx x_n),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$
[10]

[10]为了简便，也可把 φ_n 写作

$$\varphi_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} x_i \not\approx x_j \right)$$

而 $x_i \not\approx x_j$ 是 $\neg x_i \approx x_j$ 的缩写。

直观地讲，φ_1 的意思是: 至少存在一个对象. 对于 $n>1$, φ_n 的意思是: 至少存在 n 个对象. 更确切地，如果 $\mathcal{L}$ 的一模型 $\mathbf{M}$ 满足 φ_n (即 $\mathbf{M}\models\varphi_n$), 那么 $\mathbf{M}$ 的论域中少含有 n 个互不相同的元素。

令 $\Gamma=\{\varphi_n \mid n\in\mathbb{N}, n>0\}$. 现在我们考虑语句集合 $T\cup\Gamma$. 设 Σ 为 $T\cup\Gamma$ 的任意一有穷子集, 显然 $\Sigma=(T\cup\Gamma)\cap\Sigma=(T\cap\Sigma)\cup(\Gamma\cap\Sigma)$. 注意，$\Gamma\cap\Sigma$ 中只有有穷多个语句。设 n 为使得 $\varphi_n\in\Gamma\cap\Sigma$ 的最大的自然数. 由定理中的条件，存在 T 模型 $\mathbf{M}$, 它至少含有 n 个元素. 从而，$\mathbf{M}\models T\cap\Sigma$ 且 $\mathbf{M}\models\Gamma\cap\Sigma$. 于是 $\mathbf{M}\models\Sigma$. 故 $T\cup\Gamma$ 的每个有穷子集都有模型. 注意，$T\cup\Gamma$ 模型一定是 T 的模型，而 $T\cup\Gamma$ 的每个模型都是无穷模型，所以 T 有无穷模型。

推论 3.8.3　对任意一阶语言 $\mathcal{L}$, 都不存在 $\mathcal{L}$ 的语句集合 T 使得对 $\mathcal{L}$ 的任意模型 $\mathbf{M}$ 都有, $\mathbf{M}\models T$ 当且仅当 $\mathbf{M}$ 有穷.

习题 3.8.1

(1) 设 Γ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合. 则 Γ 协调当且仅当存在 $\mathcal{L}$ 的语句 A 使得 $\Gamma\not\models A$.

(2) 设 Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合. 如果 Σ 可满足，则 Σ 协调.

习题 3.8.2　设 Σ 为 $\mathcal{L}$ 中的若干语句组成的集合, A 为 $\mathcal{L}$ 的一个语句. 如果 $\Sigma\not\models A$ 则 $\Sigma\cup\{\neg A\}$ 是协调的.

第四章　哥德尔不完全定理

在第二章中，我们研究了一般的一阶谓词语言和一阶谓词系统。本章将给出一个具体的一阶谓词系统，即皮亚诺算术系统 PA。PA 实际上是数论的形式化，因而它除了包含所有逻辑公理之外，还包括数论公理。因为 PA 增加了新的公理，因而它的协调性、完备性自然成了关注的焦点。希尔伯特等人计划首先用有穷性方法证明 "PA 的协调性在 PA 中是可证的"，进而在 PA 的协调性的基础上证明数学分析的协调性，最终证明整个数学是不矛盾的。人们通常把这个宏伟计划称之为 "希尔伯特计划"。然而，哥德尔于 1931 年发表了论文《论数学原理和有关系统 I 的不可判定性》，其中哥德尔证明了，如果 PA 是协调的，则存在关于自然数的真命题，它在 PA 中是不可证的。这就是哥德尔不完全性定理。紧接着，哥德尔又证明了，如果 PA 是协调的，则 PA 的协调性在 PA 中是不可证的。这就是哥德尔第二不完全性定理，它宣告了 "希尔伯特计划" 的破产。本章主要介绍哥德尔不完全性定理的证明过程。

§4.1　皮亚诺算术系统 PA

19 世纪末，意大利数学家皮亚诺（G.Peano）提出了算术（数论）的五条公理，它们是

(1) 0 是自然数，

(2) 每个自然数都有一个后继, 它也是自然数，

(3) 0 不是任何自然数的后继，

(4) 任意两个不相等的自然数的后继也不相等，

(5) 对任意性质 R, 如果 0 具有性质 R 且对任意自然数 n, 只要 n 具有性质 R, n 的后继就具有性质 R, 那么每个自然数都具有性质 R.

在 19 世纪末和 20 世纪初，人们普遍认为数论中的真命题都可由上述 5 条公理证明。但是，当时这五条公理是用英语来叙述的，更没有人把它们引入到形式系统中，因而人们无从着手去验证上述猜测。后来，人们就把皮亚诺公理形式化了。本书采用门德尔松 (E. Mendelson) 的系统。为了方便起见，该系统把加法和乘法运算作为初始运算。[1]

[1]值得注意的是，借助于集合论原则，利用皮亚诺的公理，我们可以定义加法和乘法运算。为了避免涉及过多的内容，我们把加法和乘法运算作为初始运算，并增加相应的公理。

§4.1.1 皮亚诺算术系统

皮亚诺算术系统是一个具体的一阶形式系统. 它仅含有三个函数符号：$\dotplus$(加)，$\circ$(乘)，S (后继); 一个常项符号 $\mathbf{0}$ (零). 除了等词 $\approx$ 之外它不含任何谓词符号。

皮亚诺算术系统是建立在谓词演算的基础上的。它除了包含谓词演算的所有公理 (模式) 和推理规则之外还包括如下数论公理.

(P1) 对任意的公式 $A(x)$ 都有 $(A(\mathbf{0}) \wedge \forall x(A(x) \to A(\mathrm{S}(x)))) \to \forall x A(x)$.

(P2) $\forall x \neg(\mathrm{S}(x) \approx \mathbf{0})$.

(P3) $\forall x \forall y(\mathrm{S}(x) \approx \mathrm{S}(y) \to x \approx y)$.

(P4) $\forall x \forall y(x \approx y \to \mathrm{S}(x) \approx \mathrm{S}(y))$.

(P5) $\forall x(x \dotplus \mathbf{0} \approx x)$.

(P6) $\forall x \forall y(x \dotplus \mathrm{S}(y) \approx \mathrm{S}(x \dotplus y))$.

(P7) $\forall x(x \circ \mathbf{0} \approx \mathbf{0})$.

(P8) $\forall x(x \circ \mathrm{S}(y) \approx (x \circ y) \dotplus x)$.

注记 4.1.1

- 上述 (P1) 是公理模式，而 (P2)–(P8) 仅是七条公理。

- 表面上看，上述公理模式 (P1) 对应于皮亚诺的第五公理。注意，皮亚诺第五条公理是关于自然数集上的性质 (即 $\mathbb{N}$ 的子集) 的公理，而 $\mathbb{N}$ 总共有不可数多个子集。然而，公理模式 (P1) 只包含了可数多条公理。所以，模式 (P1) 实际上要比皮亚诺第五公理弱。

我们把皮亚诺算术系统记作 PA. 因为本章仅讨论 PA, 故我们仍把 PA 中的推演关系记作 $\vdash$. 根据归纳公理模式以及推演定理, 我们有如下推演规则

归纳规则: 设 $A(x)$ 为一公式, Γ 为一列不含 x 的自由出现的公式. 如果 $\Gamma \vdash A(\mathbf{0})$, 且 $\Gamma, A(x) \vdash A(\mathrm{S}(x))$, 其中自由变元对 $A(x)$ 而言是保持固定的, 那么, $\Gamma \vdash \forall x A(x)$.

例子 4.1.1 $\vdash \forall x \forall y \forall z(x \approx y \to x \dotplus z \approx y \dotplus z)$.

证明

(1) $x \approx y \vdash x \approx y$

(2) $\vdash x \approx x \dotplus \mathbf{0}$ /* P5 */

(3) $\vdash y \approx y \dotplus \mathbf{0}$ /* P5 */

(4) $x \approx y \vdash x \dotplus \mathbf{0} \approx y \dotplus \mathbf{0}$

(5) $x \dotplus z \approx y \dotplus z \vdash \mathrm{S}(x \dotplus z) \approx \mathrm{S}(y \dotplus z)$ /* P4 */

(6) $\vdash \mathrm{S}(x \dotplus z) \approx x \dotplus \mathrm{S}(z)$ /* P6 */

(7) $\vdash \mathrm{S}(y \dotplus z) \approx y \dotplus \mathrm{S}(z)$ /* P6 */

(8) $x \dotplus z \approx y \dotplus z \vdash x \dotplus \mathrm{S}(z) \approx y \dotplus \mathrm{S}(z)$ /* (5), (6), (7) */

(9) $x \approx y,\ x \dotplus z \approx y \dotplus z \vdash x \dotplus \mathrm{S}(z) \approx y \dotplus \mathrm{S}(z)$

(10) $x \approx y \vdash \forall z(x \dotplus z \approx y \dotplus z)$ / (4), (9), 归纳规则 */

(11) $\vdash x \approx y \to \forall z(x \dotplus z \approx y \dotplus z)$

(12) $\vdash \forall z(x \approx y \to x \dotplus z \approx y \dotplus z)$

(13) $\vdash \forall x \forall y \forall z(x \approx y \to x \dotplus z \approx y \dotplus z)$

□

习题 4.1.1

1. $\vdash \forall x \forall y \forall z(x \approx y \to z \dotplus x \approx z \dotplus y)$.
2. $\vdash \forall x \forall y(x \dotplus y \approx y \dotplus x)$.
3. $\vdash \forall x \forall y \forall z((x \dotplus y) \dotplus z \approx x \dotplus (y \dotplus z))$.

§4.1.2 PA 的语义

由于 PA 是数论的形式化，我们自然希望自然数集 $\mathbb{N}$ 以及算术运算能构成 PA 的一个模型。具体的，我们把 $\mathbf{0}$ 解释为 0，把 $\dotplus$ 解释为加法运算 $+$，把 $\circ$ 解释为乘法运算 $\bullet$，而把 S 解释为后继运算 S (对任意自然数 n, $S(n) = n + 1$). 我们把这种解释称作标准解释。可以证明，在这种标准解释下自然数集 $\mathbb{N}$ 是 PA 的模型，我们称之为 PA 的标准模型。不过值得注意的是，这种证明无法形式化到 PA 中进行。而证明 $\mathbb{N}$ 是 PA 的模型的过程中所使用理论的协调性还不清楚。因此，我们还不能保证 PA 的协调性。

定义 4.1.1 对任意自然数 n, 归纳定义 PA 中项 $\mathbf{0}^{(n)}$ 如下：

$\mathbf{0}^{(0)} = \mathbf{0}$,

$\mathbf{0}^{(n+1)} = \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(n)})$.

从而，$\mathbf{0}^{(1)} = \mathrm{S}(\mathbf{0})$, $\mathbf{0}^{(2)} = \mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathbf{0}))$, $\mathbf{0}^{(3)} = \mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathbf{0})))$, $\mathbf{0}^{(4)} = \mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathrm{S}(\mathbf{0}))))$, $\cdots$

可以证明，对任意 n, 项 $\mathbf{0}^{(n)}$ 在标准模型 $\mathbb{N}$ 中的取值必为 n.

假设 $\mathbf{M}$ 也是 PA 的模型，且 $\mathbf{M}$ 的论域也恰好是由所有项 $\mathbf{0}^{(n)}$ 在 $\mathbf{M}$ 中的值组成，则可以证明 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbb{N}$ 同构，[2] 也就是说，可以把他们看作是一样的。这也是为什么我们把 $\mathbb{N}$ 称作 PA 的标准模型的缘故。

希尔伯特曾提出如下问题：是不是每个在标准模型中成立的语句都是 PA 中的定理，这就是 PA 的完全性问题。这是个非常重要的问题，因为如果 PA 不完备，说明 PA 还不是数论的形式化。

希尔伯特和他的学生们起初一直试图证明 PA 的完全性，直到哥德尔宣布了他证明了 PA 的不完全性。

注记 4.1.2　设 $A(x)$ 为一公式。如果对每个自然数 n 都有 $\mathbb{N} \models A(\mathbf{0}^{(n)})$，则 $\mathbb{N} \models \forall x A(x)$. 另一方面，假设对每个自然数 n 都有 $\vdash A(\mathbf{0}^{(n)})$。由于 $\mathbb{N}$ 是 PA 的模型，故有 $\mathbb{N} \models \forall x A(x)$. 那是不是有 $\vdash \forall x A(x)$ 呢？显然，对这个问题的回答依赖于 PA 的完全性。由于 PA 是不完全的，因此 $\forall x A(x)$ 有可能是不可证的。

§4.1.3　序关系

除了相等关系，自然数集上还有其他关系。最常见的莫过于大小关系了。我们以小于等于关系为例来讨论。我们知道 $m \leq n$ 当且仅当存在 k 使得 $m + k = n$. 因此，$m \leq n$ 直观上就是公式 $\exists z(\mathbf{0}^{(m)} + z \approx \mathbf{0}^{(n)})$ 的解释。为简便计，我们用 $\mathrm{LEQ}(x, y)$ 表示公式 $\exists z(x+z \approx y)$，而用 $\mathrm{LE}(x, y)$ 代表公式 $\mathrm{LEQ}(x, y) \wedge (\neg x \approx y)$. 显然，$\vdash \mathrm{LE}(x, y) \to \mathrm{LEQ}(x, y)$.

引理 4.1.1

1. $\vdash \forall x(\neg \mathrm{LE}(x, \mathbf{0}))$.
2. $\vdash \forall x \forall y(\mathrm{LE}(x, \mathrm{S}(y)) \leftrightarrow \mathrm{LEQ}(x, y))$.
3. $\vdash \forall x \forall y(\mathrm{LEQ}(x, y) \vee \mathrm{LEQ}(y, x))$.

证明　略去，请读者完成证明。

习题 4.1.2

1. $\vdash \neg \mathrm{LE}(x, x)$.
2. $\vdash \forall x \forall y \forall z(\mathrm{LEQ}(x, y) \wedge \mathrm{LEQ}(y, z) \to \mathrm{LEQ}(x, z))$.
3. $\vdash \forall x \forall y \forall z(\mathrm{LE}(x, y) \wedge \mathrm{LEQ}(y, z) \to \mathrm{LE}(x, z))$.
4. $\vdash \forall x \forall y \forall z(\mathrm{LEQ}(x, y) \wedge \mathrm{LE}(y, z) \to \mathrm{LE}(x, z))$.
5. $\vdash \forall x \forall y(\mathrm{LE}(x, y) \to \neg \mathrm{LEQ}(y, x))$
6. 对任意自然数 n, $\vdash \forall x(\mathrm{LEQ}(x, \mathbf{0}^{(n)}) \vee \mathrm{LEQ}(\mathbf{0}^{(n)}, x))$.

[2] 同样这种证明也无法形式化到 PA 中进行, 因此我们还不能说 PA 就真的只有一个模型.

§4.2 可表示性

我们考虑 PA 的标准模型 $\mathbb{N}$. 我们知道，形式系统 PA 中的符号 $\mathbf{0}$ 是用来表示 0 的。但是，对于非零的自然数 n，虽然在 PA 中就没有相应的符号来解释它，但是却有一个项 $\mathbf{0}^{(n)}$ 来解释 n。相等关系、后继运算、加法运算、乘法运算在 PA 中也都有相应的符号来解释。但是，自然数集上还有其他很多关系、函数等，它们是不是在 PA 中有相应的表示呢？例如在上节末，我们引进了公式 $\mathrm{LEQ}(x, y)$ 和 $\mathrm{LE}(x, y)$. 从直观上看它们分别表示小于等于关系和小于关系。那么，什么是 "一个公式表示了一个关系?" 我们先看下面的命题。

命题 4.2.1　设 $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) 如果 $m = n$，则 $\vdash \mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(n)}$.

(2) 如果 $m \neq n$，则 $\vdash \neg(\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(n)})$.

证明　(1) 假设 $m = n$. 则 $\mathbf{0}^{(m)}$ 和 $\mathbf{0}^{(n)}$ 实际上是同一个项。于是，$\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(n)}$ 可由等词公理直接推出。故 $\vdash \mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(n)}$。

(2) 当 $m \neq n$ 时，不是 $m < n$ 就是 $n < m$. 我们不妨假设 $m < n$. 这时必存在自然数 $k > 0$ 使得 $n = m + k$. 当 $m > 0$ 时，根据公理 P3 我们有

$$\begin{aligned}
&\vdash (\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(m+k)} \to \mathbf{0}^{(m-1)} \approx \mathbf{0}^{(m+k-1)}),\\
&\cdots\cdots\\
&\vdash (\mathbf{0}^{(1)} \approx \mathbf{0}^{(1+k)} \to \mathbf{0}^{(0)} \approx \mathbf{0}^{(k)}).
\end{aligned}$$

再连续使用相应的规则 (习题 2.7.1–2)，得到

$$\vdash (\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(m+k)} \to \mathbf{0}^{(0)} \approx \mathbf{0}^{(k)}).$$

注意，当 $m = 0$ 时上式显然也成立。

因为 $k > 0$, $k - 1$ 仍是自然数。根据定义 4.1.1 知, $\mathbf{0}^{(k)}$ 就是项 $\mathrm{S}(\mathbf{0}^{(k-1)})$. 因而我们有 $\vdash \mathbf{0}^{(k)} \approx \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(k-1)})$。于是，

$$\vdash (\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(m+k)} \to \mathbf{0}^{(0)} \approx \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(k-1)})).$$

从而

$$\vdash (\neg(\mathbf{0}^{(0)} \approx \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(k-1)})) \to \neg(\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(m+k)})).$$

由公理 P2, $\vdash \neg(\mathbf{0}^{(0)} \approx \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(k-1)}))$. 从而 $\vdash \neg(\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(m+k)})$, 即 $\vdash \neg(\mathbf{0}^{(m)} \approx \mathbf{0}^{(n)})$.　□

命题 4.2.2　设 $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) 假设 $m \leq n$, 则 $\vdash \mathrm{LEQ}(\mathbf{0}^{(m)}, \mathbf{0}^{(n)})$。

(2) 假设 $m \not\leq n$, 则 $\vdash \neg\mathrm{LEQ}(\mathbf{0}^{(m)}, \mathbf{0}^{(n)})$。

证明　(1) 因为 $m \leq n$，故存在自然数 $k \geq 0$ 使得 $m + k = n$. 注意，根据公理 P5, $\vdash \mathbf{0}^{(m)} \dot{+} \mathbf{0} \approx \mathbf{0}^{(m)}$，从而 $\vdash \exists x(\mathbf{0}^{(m)} \dot{+} x \approx \mathbf{0}^{(m)})$. 于是，当 $m = n$ (即 $k = 0$) 时，结论成立。因此设 $k > 0$. 利用 P5、P6 等公理可得

$$
\begin{aligned}
&\vdash \mathbf{0}^{(m+1)} \approx \mathbf{0}^{(m)} \dot{+} \mathbf{0}^{(1)}, \\
&\vdash \mathbf{0}^{(m+2)} \approx \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(m+1)}), \ \ \vdash \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(m+1)}) \approx \mathbf{0}^{(m)} \dot{+} \mathbf{0}^{(2)}, \\
&\cdots\cdots \\
&\vdash \mathbf{0}^{(m+k)} \approx \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(m+k-1)}), \ \ \vdash \mathrm{S}(\mathbf{0}^{(m+k-1)}) \approx \mathbf{0}^{(m)} \dot{+} \mathbf{0}^{(k)}
\end{aligned}
$$

从而 $\vdash \mathbf{0}^{(m+k)} \approx \mathbf{0}^{(m)} \dot{+} \mathbf{0}^{(k)}$. 注意 $\mathbf{0}^{(m+k)}$ 就是 $\mathbf{0}^{(n)}$. 于是

$$\vdash \exists x(\mathbf{0}^{(m)} \dot{+} x \approx \mathbf{0}^{(n)}).$$

(2) 假设 $m \not\leq n$. 则必有 $n < m$. 根据 (1), $\vdash \mathrm{LEQ}(\mathbf{0}^{(n)}, \mathbf{0}^{(m)})$. 又 $n \neq m$, 由命题 4.2.1 可知, $\vdash \neg(\mathbf{0}^{(n)} \approx \mathbf{0}^{(m)})$. 从而, $\vdash \mathrm{LE}(\mathbf{0}^{(n)}, \mathbf{0}^{(m)})$. 由引理 4.1.1 得 $\vdash \neg\mathrm{LEQ}(\mathbf{0}^{(m)}, \mathbf{0}^{(n)})$.　□

定义 4.2.1　设 R 是自然数集上的一个 k 元关系 ($k \geq 1$), 即 $R \subseteq \mathbb{N}^k$. 且设 $A(x_1, \cdots, x_k)$ 为 PA 中的公式。我们称公式 $A(x_1, \cdots, x_n)$**表示**关系 R, 如果 对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k$ 都有

(1) 如果 $R(n_1, \cdots, n_k)$ 成立, 则 $\vdash A(\mathbf{0}^{(n_1)}, \cdots, \mathbf{0}^{(n_k)})$.

(2) 如果 $R(n_1, \cdots, n_k)$ 不成立, 则 $\vdash \neg A((\mathbf{0}^{(n_1)}, \cdots, \mathbf{0}^{(n_k)})$.

我们称关系 $R \subseteq \mathbb{N}^k$ 在形式算术系统 PA 中是**可表示的**如果它被 PA 中的某一公式 $A(x_1, \cdots, x_k)$ 表示。

引理 4.2.1

1. 相等关系是可表达的.
2. 小于等于关系是可表示的。
3. 小于关系是可表达的.
4. 大于关系是可表达的.

证明　由命题 4.2.1–4.2.2 知，$x \approx y$ 表示相等关系，而 $\mathrm{LEQ}(x, y)$ 表示小于等于关系。根据 1-2 易证 $\mathrm{LE}(x, y)$ 和 $\neg\mathrm{LEQ}(x, y)$ 分别表示小于关系和大于关系。

注记 4.2.1　由于 LEQ(x, y) 表示了小于等于关系，为了符合我们的习惯，我们今后把公式 LEQ(x, y) 写作 $x \leq y$.

引理 4.2.2　设 $A(x)$ 为一公式，n 为一自然数。如果对任意 $m \leq n$ 都有 $\vdash A(\mathbf{0}^{(m)})$，则 $\vdash \forall x(x \leq \mathbf{0}^{(n)} \to A(x))$.

证明　略去，见参考文献 [14]。

命题 4.2.3　存在 $\mathbb{N}$ 上的不可表示的关系。

证明　我们知道算术系统中只有可数多个公式，从而最多只有可数多个可表示关系。然而 $\mathbb{N}$ 上有不可数多个关系，所以必有不可表示的关系。

注意, 对任意 k 元函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, 我们可以唯一地定义一个 $k+1$ 元关系 $R_f \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ 如下: 对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k, n_{k+1}$, $R_f(n_1, \cdots, n_k, n_{k+1})$ 成立当且仅当 $f(n_1, \cdots, n_k) = n_{k+1}$. 注意，由于 f 为函数，对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k$, 存在唯一的自然数 n_{k+1} 使得 $R_f(n_1, \cdots, n_k, n_{k+1})$ 成立.

设 $A(x)$ 为一公式, 考虑公式 $\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \to y \approx x))$。它的直观含义是：存在唯一的 x 使得 $A(x)$ 成立。为了叙述方便我们把 $\exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \to y \approx x))$ 缩写为 $\exists! x A(x)$.

称函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 是**可表示函数**, 如果存在公式 $A(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 满足：

(1) $A(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 表示了 R_f,

(2) 对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k$,

$$\vdash \exists! x_{k+1} A(\mathbf{0}^{(n_1)}, \cdots, \mathbf{0}^{(n_k)}, x_{k+1}).$$

注记 4.2.2　一个 k 元函数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 是可表示的当且仅当存在公式 $A(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 使得对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k, n_{k+1}$ 有

(1) 如果 $f(n_1, \cdots, n_k) = n_{k+1}$，则 $\vdash A(\mathbf{0}^{(n_1)}, \cdots, \mathbf{0}^{(n_k)}, \mathbf{0}^{(n_{k+1})})$.

(2) 如果 $f(n_1, \cdots, n_k) \neq n_{k+1}$, 则 $\vdash \neg A(\mathbf{0}^{(n_1)}, \cdots, \mathbf{0}^{(n_k)}, \mathbf{0}^{(n_{k+1})})$.

(3) $\vdash \exists! x_{k+1} A(\mathbf{0}^{(n_1)}, \cdots, \mathbf{0}^{(n_k)}, x_{k+1})$.

此时我们称 $A(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ 表示了 f.

定义 4.2.2

1. 定义函数 $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下：对任意自然数 n, $Z(n) = 0$. 称 $Z(n)$ 为零函数。

2. 定义函数 $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下：对任意自然数 n, $S(n) = n + 1$。称 $S(n)$ 为后继函数。

3. 设 k, i 为自然数，$i \leq k$. 定义函数 $U_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ 如下：对任意自然数 $n_1, \cdots, n_k$, $U_i^k(n_1, \cdots, n_k) = n_i$。称 U_i^k 是投影函数。

注意，对任意自然数 n 都有，$U_1^1(n)=n$, 因此 U_1^1 也是恒等函数。

引理 4.2.3　零函数、后继函数和投影函数都是可表示的。

证明　1. 先证 $Z(x)$ 是可表示的。令 $A(x_1,x_2)$ 为公式 $(x_1\approx x_1\wedge x_2\approx \mathbf{0})$. 我们要证：

(1) 如果 $Z(m)=n$ 则 $\vdash A(\mathbf{0}^{(m)},\mathbf{0}^{(n)})$.

(2) 如果 $Z(m)\neq n$ 则 $\vdash \neg A(\mathbf{0}^{(m)},\mathbf{0}^{(n)})$.

(3) 对任意 m, $\vdash \exists! x_2 A(\mathbf{0}^{(m)},x_2)$.

下证 (1). 假设 $Z(m)=n$. 则必有 $n=0$, 故 $\mathbf{0}^{(n)}$ 就是 $\mathbf{0}$. 由于，$\mathbf{0}^{(m)}\approx\mathbf{0}^{(m)}$ 和 $\mathbf{0}\approx\mathbf{0}$ 均为公理，所以有 $\vdash A(\mathbf{0}^{(m)},\mathbf{0}^{(n)})$.

其次证 (2). 假设 $Z(m)\neq n$. 则必有 $n\neq 0$, 由命题 4.2.1 得 $\vdash\neg(\mathbf{0}^{(n)}\approx\mathbf{0})$. 从而容易看出，$\vdash\neg A(\mathbf{0}^{(m)},\mathbf{0}^{(n)})$.

最后证 (3). 注意，对任意 m 都有 $\vdash\mathbf{0}^{(m)}=\mathbf{0}^{(m)}$. 因此要证 $\vdash\exists! x_2(\mathbf{0}^{(m)}=\mathbf{0}^{(m)}\wedge x_2\approx\mathbf{0})$ 只须证 $\vdash\exists! x_2(x_2\approx\mathbf{0})$. 显然

$$\vdash \mathbf{0}\approx\mathbf{0}\wedge\forall y(y\approx\mathbf{0}\to y\approx\mathbf{0}).$$

由存在引入规则得

$$\vdash \exists x_2(x_2\approx\mathbf{0}\wedge\forall y(y\approx\mathbf{0}\to y\approx x_2)).$$

2. 设 $A(x_1,x_2)$ 为公式 $(x_2\approx \mathrm{S}(x_1))$. 请读者自己证明 $A(x_1,x_2)$ 表示了后继函数。

3. 设 $A(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$ 为公式 $(x_1\approx x_1\wedge\cdots\wedge x_k\approx x_k\wedge x_{k+1}\approx x_i)$. 请读者自己证明 $A(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})$ 表示了投影函数 U_i^k. □

命题 4.2.4　存在 $\mathbb{N}$ 上的不可表达的关系。

证明　我们知道算术系统中只有可数多个公式，从而最多只有可数多个可表示关系。然而 $\mathbb{N}$ 上有不可数多个关系，所以必有不可表示的关系。

由于命题 4.2.4, 我们自然关心哪些关系和函数在 PA 中是可表示的。我们将在第 4.6 节中对这个问题作深入探讨。

§4.3　哥德尔编码

我们前面讨论的可表示关系都是自然数集上的关系。但是，在研究形式系统时我们引入的许多关系都不是自然数集上关系的，而是一些符号（串）的集合，例如，所有公式

的集合，所有公理的集合，所有形式证明的集合，等等。那么如何讨论这些关系的可表示性呢？为此我们先把每个符号都编码为一个数字，进而对合适公式、公式序列进行编码。

PA **中的符号的编码**:

$$
\begin{aligned}
&G(\neg) = 3, && G(\wedge) = 5, \\
&G(\vee) = 7, && G(\rightarrow) = 9, \\
&G(\forall) = 11, && G(\exists) = 13, \\
&G(\approx) = 15, && G(\dotplus) = 17, \\
&G(\circ) = 19, && G(\mathrm{S}) = 21, \\
&G(\mathbf{0}) = 23, && G(\mathrm{x}_k) = 23 + 2k, k = 1, 2, \cdots,
\end{aligned}
$$

项的编码:

$$
\begin{aligned}
&G(\mathrm{x}_k) = 23 + 2k, \\
&G(\mathbf{0}) = 23, \\
&G(t_1 \dotplus t_2) = 2^{G(t_1)} 3^{17} 5^{G(t_2)}, \\
&G(t_1 \circ t_2) = 2^{G(t_1)} 3^{19} 5^{G(t_2)}, \\
&G(\mathrm{S}(t)) = 2^{21} 3^{G(t)}.
\end{aligned}
$$

公式的编码:

$$
\begin{aligned}
&G(t_1 \approx t_2) = 2^{G(t_1)} 3^{15} 5^{G(t_2)}, \\
&G(\neg A) = 2^3 3^{G(A)}, \\
&G(A \wedge B) = 2^{G(A)} 3^5 5^{G(B)}, \\
&G(A \vee B) = 2^{G(A)} 3^7 5^{G(B)}, \\
&G(A \rightarrow B) = 2^{G(A)} 3^9 5^{G(B)}, \\
&G(\forall x A) = 2^{11} 3^{G(x)} 5^{G(A)}, \\
&G(\exists x A) = 2^{13} 3^{G(x)} 5^{G(A)}.
\end{aligned}
$$

公式序列的编码: 公式序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的编码为：

$$G(A_1, A_2, \cdots, A_n) = p_1^{G(A_1)} \bullet p_2^{G(A_2)} \bullet \cdots \bullet p_n^{G(A_n)}.$$

这里, p_i $(i \geq 1)$ 为第 i 个素数.[3] 于是，$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_5 = 7,\ p_6 = 11, \cdots.$

[3]如果一个大于 1 的自然数只能被 1 和其自身整除，则称该自然数为素数。

这样, 每个符号、公式以及公式序列，都唯一地对应一个自然数，分别称之为它们的**哥德尔数**. 注意, 不同的公式的哥德尔数也不同.

例子 4.3.1　$\mathrm{x}_1 \approx \mathrm{x}_2$ 的哥德尔数是 $2^{25}3^{15}5^{27}$. 而 $\exists \mathrm{x}_1(\neg(\mathrm{x}_1 \approx \mathbf{0}))$ 的哥德尔数是

$$2^{13}3^{25}5^{2^3 3^{2^{25}3^{15}5^{23}}}.$$

习题 4.3.1　求哥德尔数为 $2^{2^{25}3^{15}5^{27}}3^5 5^{2^{27}3^{15}5^{23}}$ 的形式表达式。

§4.4　元数学的算术化

哥德尔编码的目的就是要把关于形式系统 PA 的元数学关系和性质算术化为自然数集 $\mathbb{N}$ 上的关系，然后再把这些关系表示为形式系统内的公式。例如，“一符号串是一个合适公式”, “一公式序列是一个形式证明” 等为元数学性质。通过编码就成了算术性质：“一自然数 n 是一公式的哥德尔数”，“n 一个形式证明的哥德尔数”。那么，这些性质是不是可表示的呢？

1. 用 $\mathrm{V}(n)$ 表示性质：n 是一变元符号的哥德尔数。[4]
2. 用 $\mathrm{TM}(n)$ 表示性质：n 是一项的哥德尔数。
3. 用 $\mathrm{WF}(n)$ 表示性质：n 是一公式的哥德尔数。
4. 用 $\mathrm{AX}(n)$ 表示性质：n 是算术系统 PA 中的一条公理的哥德尔数。
5. 用 $\mathrm{MPC}(n_1, n_2, n_3)$ 表示性质：n_1、n_2 和 n_3 都是公式的哥德尔数，且 n_3 所代表的公式是 n_1 和 n_2 所代表的公式关于 MP 规则的直接后承。
6. 用 $\mathrm{BOUND}(n_1, n_2)$ 表示性质：n_1 是一公式的哥德尔数，n_2 是一变元符的哥德尔数，且 n_2 所代表的变元符不在 n_1 所代表的公式中自由出现。
7. 用 $\mathrm{CGENC}(n_1, n_2)$ 表示性质: n_1、n_2 都是公式的哥德尔数，且 n_2 所代表的公式是 n_1 所代表的公式关于 CGen 规则的直接后承。
8. 用 $\mathrm{PEXC}(n_1, n_2)$ 表示性质: n_1、n_2 都是公式的哥德尔数，且 n_2 所代表的公式是 n_1 所代表的公式关于 PEx 规则的直接后承。
9. 用 $\mathrm{PRF}(n)$ 表示性质：n 是 PA 中一形式证明的哥德尔数。

[4]一般地，$\mathbb{N}$ 的子集称为 $\mathbb{N}$ 上的一元关系，也称为 $\mathbb{N}$ 上的性质。这里，我们把 V 看成集合 $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ 是一变元符号的哥德尔数$\}$. $V(n)$ 就是指 $n \in V$.

10. 用 $\mathrm{PRF}(n_1, n_2)$ 表示性质：n_2 是一公式的哥德尔数，n_1 是 n_2 所代表的公式的一个证明 [5] 的哥德尔数。

11. 用 $\mathrm{SUBST}(n_1, n_2, n_3, n_4)$ 表示性质：n_2 为某公式 A 的哥德尔数，n_3 是某变元 x 的哥德尔数, n_4 是某项 t 的哥德尔数，而 n_1 是把 A 中的 x 的每个自由出现都换为 t 后得到的公式的哥德尔数。

12. 用 $\mathrm{NU}(n_1, n_2)$ 表示性质：n_1 是项 $\mathbf{0}^{(n_2)}$ 的哥德尔数。

13. 令 $\mathrm{B}(n, m)$ 为如下关系: n 是某公式 $A(x)$ 的哥德尔数, 其中 x 是 $A(x)$ 中唯一的自由变元; m 是 $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的某个证明的哥德尔数.

14. 令 $\mathrm{B}\#(n, m)$ 为如下关系: n 是某公式 $A(x)$ 的哥德尔数, 其中 x 是 $A(x)$ 中的唯一的自由变元; m 是 $\neg A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的某个证明的哥德尔数.

定理 4.4.1　上述定义的关系 1–14 都是递归关系。

证明　我们把本定理的证明放在第 4.6 节中 (见定理 4.6.2)。

引理 4.4.1　定义 $\mathrm{K}(n)$ 为如下关系: 存在 m 使得 $\mathrm{B}\#(n, m)$. 设形式算术系统 PA 是协调的, 则 $\mathrm{K}(n)$ 不是可表示的.

证明　假设 $\mathrm{K}(n)$ 是可表示的。则存在一公式 $A(x)$ 使得对任意自然数 i 都有

(1) 如果 $\mathrm{K}(i)$ 成立，则 $\vdash A(\mathbf{0}^{(i)})$.

(2) 如果 $\mathrm{K}(i)$ 不成立，则 $\vdash \neg A(\mathbf{0}^{(i)})$.

设 $A(x)$ 的哥德尔数为 n. 则 $\mathrm{K}(n)$ 要么成立要么不成立。

假设 $\mathrm{K}(n)$ 成立，则 $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 是可证的。另一方面，因 $\mathrm{K}(n)$ 成立，存在 m 使得 $\mathrm{B}\#(n, m)$ 成立，即 m 是 $\neg A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的证明的哥德尔数。这说明，$\neg A(\mathbf{0}^{(n)})$ 也是可证的。从而 PA 不协调，与题设矛盾。

假设 $\mathrm{K}(n)$ 不成立，则 $\neg A(\mathbf{0}^{(n)})$ 是可证的, 设 m 为其某证明的哥德尔数. 从而 $\mathrm{B}\#(n, m)$ 成立，即，存在 m 使得 $\mathrm{B}\#(n, m)$ 成立。故 $\mathrm{K}(n)$ 成立，这与假设矛盾。

综上，$\mathrm{K}(n)$ 不是可表示关系。

[5]在本章中，如不特别声明，所说的形式证明，都是指系统 PA 中的证明

§4.5 哥德尔不完全定理的证明

我们知道，协调性是指推不出矛盾。如果 PA 不协调，则每个公式都是定理（这是因为矛盾可以推出一切），从而，PA 是完全的。因此，不完全定理需要以 PA 的协调性作为前提。事实上哥德尔第一不完全性定理是以一种更强的协调性为前提的。

定义 4.5.1　我们称形式算术系统 PA 是 ω- 协调的，如果不存在公式 $A(x)$ 使得 $\neg\forall xA(x)$ 是定理，且对任 n, $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 也是定理.

注记 4.5.1　我们已经注意到（注记 4.1.2），即使对任意自然数 n, $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 都是定理，$\forall xA(x)$ 也未必可证。而 ω- 协调性是说，如果对任意自然数 n, $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 都是定理，则 $\neg\forall xA(x)$ 必然不是定理。

命题 4.5.1　如果 PA 是 ω- 协调的，则 PA 是协调的。

上一节引进了关系 $\mathrm{B}(n,m)$: n 是某公式 $A(x)$ 的哥德尔数，其中 x 是 $A(x)$ 中唯一的的自由变元; m 是 $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的某个证明的哥德尔数.

我们可以证明，$\mathrm{B}(n,m)$ 是可表示的（见定理 4.6.1 和定理 4.6.2），即有合适公式 WF-B(x_1,x_2) 使得对任意自然数 n,m 都有

(1) 如果 $\mathrm{B}(n,m)$ 成立，则 WF-B$(\mathbf{0}^{(n)},\mathbf{0}^{(m)})$ 是 PA 的定理.

(2) 如果 $\mathrm{B}(n,m)$ 不成立，则 $\neg$WF-B$(\mathbf{0}^{(n)},\mathbf{0}^{(m)})$ 是 PA 的定理.

我们把公式: $\forall x_2\neg$WF-B(x_1,x_2) 记作 UNP(x_1). 设 UNP(x_1) 的哥德尔数为 p. 则 UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 为公式 $\forall x_2\neg$WF-B$(\mathbf{0}^{(p)},x_2)$

注记 4.5.2　因为 WF-B(x_1,x_2) 是 $\mathrm{B}(n,m)$ 的表示，所以 UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 的直观意思就是，哥德尔数为 p 的公式是不可证的。注意 p 就是 UNP(x_1) 的哥德尔数，因此直观地，UNP$(0^{(p)})$ 说其自身是不可证的. 这与说谎者悖论有点相似。相传 “克里特人总是说谎者” 是由克里特的哲学家艾皮曼尼德 (Epimenides) 在公元前六世纪所说。由于皮曼尼德也是克里特人，因此可得：艾皮曼尼说他自己说的话都是谎话。因为一个判断句非真即假，因此艾皮曼尼德的话会导出矛盾。然而，由于一个公式 A 的可证性有三种可能：(1) A 可证、(2) $\neg A$ 可证 (亦称 A**可驳**)、(3) A 和 $\neg A$ 都不可证，故 UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 并不一定会导出矛盾。

因为，UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 是说其自身不可证，因此 UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 不可证。如果 UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 是可驳的，则 UNP$(\mathbf{0}^{(p)}$ 就应该是可证的，矛盾。所以，UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 也不是可驳的。因而，UNP$(\mathbf{0}^{(p)})$ 既不可证也不可驳。这就是哥德尔不完全性定理。

定理 4.5.1 (不完全性定理) 如果形式算术系统 PA 是 ω- 协调的, 则 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 既不可证也不可驳。

证明 假设 $\vdash$ UNP($\mathbf{0}^{(p)}$). 设 q 是 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$ 的一个证明的哥德尔数. 注意 p 是 UNP(x_1) 的哥德尔数. 这说明 $B(p,q)$ 成立. 从而有: $\vdash$ WF-B($\mathbf{0}^{(p)},\mathbf{0}^{(q)}$). 但另一方面, UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 就是公式: $\forall x_2\neg$WF-B($\mathbf{0}^{(p)},x_2$), 于是有 $\vdash \forall x_2\neg$WF-B($\mathbf{0}^{(p)},x_2$). 根据全称消去规则: $\vdash \neg$WF-B($\mathbf{0}^{(p)},\mathbf{0}^{(q)}$). 这与 PA 的协调性矛盾 (见命题 4.5.1). 所以 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$ 不是定理.

假设 $\vdash \neg$UNP($\mathbf{0}^{(p)}$), 即 $\vdash \neg\forall x_2\neg$WF-B($\mathbf{0}^{(p)},x_2$). 但另一方面, 由于 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 不是定理, UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 没有证明. 从而, 对任一自然数 q, 它都不是 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 的某个证明的哥德尔数. 也就是说, 对任自然数 q, $B(p,q)$ 都不成立. 从而, 对任 q , $\neg$WFB($\mathbf{0}^{(p)},\mathbf{0}^{(q)}$) 都是定理. 这与 PA 的 ω- 协调性矛盾. 所以, $\neg$UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 也不可证. $\square$

注记 4.5.3 根据定理 4.5.1 的证明看出：UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 的不可证性只需要假设 PA 是协调的即可。更清晰地，我们有：

如果形式算术系统 PA 是协调的，则 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 不可证。

如果形式算术系统 PA 是 ω- 协调的, 则 UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 不可驳，即 $\neg$UNP($\mathbf{0}^{(p)}$) 不可证.

后来, 罗歇尔 (J.B. Rosser) 把定理 4.5.1 加强为

定理 4.5.2 如果形式算术系统 PA 是协调的, 则存在一语句, 它既不可证也不可驳.

证明 设 PA 是协调的，我们要构造一个既不可证也不可驳的公式。回顾上节中引入的关系 B#(n,m): n 是某公式 $A(x)$ 的哥德尔数, 其中 x 是 $A(x)$ 中的唯一的自由变元; m 是 $\neg A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的某个证明的哥德尔数. 可以证明，它是可表示的，[6] 即存在合适公式 WF-B#(x_1,x_2) 使得

(1) 如果 B#(n,m) 成立, 则 $\vdash$ WF-B#($\mathbf{0}^{(n)},\mathbf{0}^{(m)}$).

(2) 如果 B#(n,m) 不成立, 则 $\vdash \neg$WF-B#($\mathbf{0}^{(n)},\mathbf{0}^{(m)}$)

定义合适公式

$$\mathrm{UNP2}(x_1) : \forall x_2(\text{WF-B}(x_1,x_2) \to \exists x_3(x_3 \le x_2 \wedge \text{WF-B\#}(x_1,x_3))).$$

设 UNP2(x_1) 的哥德尔数为 p. 考虑语句

$$\mathrm{UNP2}(\mathbf{0}^{(p)}) : \forall x_2(\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)},x_2) \to \exists x_3(x_3 \le x_2 \wedge \text{WF-B\#}(\mathbf{0}^{(p)},x_3))).$$

[6]见定理 4.6.1-4.6.2.

下证 UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 既不可证也不可驳.

假设 UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 可证. 即

$$\vdash \forall x_2(\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, x_3))).$$

设 q 为其某个证明的哥德尔数. 注意, p 是 UNP2(x_1) 的哥德尔数, 于是, $B(p,q)$ 成立. 从而, $\vdash$ WF-B($\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(q)}$). 于是

$$\vdash \exists x_3(x_3 \leq \mathbf{0}^{(q)} \wedge \text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, x_3)). \tag{4.1}$$

由于我们假设了 PA 的协调性以及 UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 的可证性, $\neg$UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 是不可证的. 即对任意的自然数 q', q' 都不是 $\neg$UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 的某个证明的哥德尔数. 亦即, 对任 q', $B\#(p,q')$ 都不成立. 从而, 对任 q', $\vdash \neg$WF-B#($\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(q')}$). 特别地,

$$\vdash \neg\text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}), \ \vdash \neg\text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(1)}), \ \cdots, \ \vdash \neg\text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(q)}).$$

由此可证 (见引理 4.2.2)

$$\vdash \forall x_3(x_3 \leq \mathbf{0}^{(q)} \to \neg\text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, x_3)). \tag{4.2}$$

(4.2) 式与 (4.1) 式矛盾. 所以, UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 不可证.

假设 UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 可驳, 即 $\vdash \neg$UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$). 设 e 是其某证明的哥德尔数. 注意, p 是 UNP2(x_1) 的哥德尔数. 从而 B#(p,e) 成立. 于是, $\vdash$ WF-B#($\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(e)}$).

另一方面, 由于我们假设了 PA 的协调性以及 $\neg$UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 的可证性, UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 是不可证的. 即所有自然数 t 都不是 UNP2($\mathbf{0}^{(p)}$) 的证明的哥德尔数. 亦即, 对任意 t, B(p,t) 都不成立. 从而, 对任意 t, $\vdash \neg$WF-B($\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(t)}$). 特别地

$$\vdash \neg\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}), \vdash \neg\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(1)}), \cdots, \vdash \neg\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(e)}).$$

从而可得 (见引理 4.2.2),

$$\vdash x_2 \leq \mathbf{0}^{(e)} \to \neg\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, x_2).$$

由 $\vdash$ WF-B#($\mathbf{0}^{(p)}, \mathbf{0}^{(e)}$) 可得

$$\vdash \mathbf{0}^{(e)} \leq x_2 \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, x_3)).$$

注意, $\vdash x_2 \leq \mathbf{0}^{(e)} \vee \mathbf{0}^{(e)} \leq x_2$ (见引理 4.1.1–6). 从而有

$$\vdash \neg\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, x_2) \vee \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \text{WF-B}\#(\mathbf{0}^{(p)}, x_3)).$$

即

$$\vdash \text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \text{WF-B\#}(\mathbf{0}^{(p)}, x_3)).$$

根据全称引入规则,

$$\vdash \forall x_2(\text{WF-B}(\mathbf{0}^{(p)}, x_2) \to \exists x_3(x_3 \leq x_2 \wedge \text{WF-B\#}(\mathbf{0}^{(p)}, x_3))).$$

也就说, $\text{UNP2}(\mathbf{0}^{(p)})$ 是可证的, 这与协调性矛盾. 所以 $\neg\text{UNP2}(\mathbf{0}^{(p)})$ 也是不可证的. □

注记 4.5.4 假设形式算术系统 PA 是协调的。语句 $\text{UNP2}(\mathbf{0}^{(p)})$ 既不可证也不可驳。然而，要么 $\text{UNP2}(\mathbf{0}^{(p)})$ 在标准模型 $\mathbb{N}$ 中成立，要么 $\neg\text{UNP2}(\mathbf{0}^{(p)})$ 在 $\mathbb{N}$ 不成立。从而存在一个语句，它在标准模型 $\mathbb{N}$ 中成立，但它却不是 PA 的定理。

我们知道，PA 的协调性是指：不存在公式 A 使得既存在 A 的证明也存在 $\neg A$ 的证明。通过哥德尔编码，协调性可以表述为一个算术命题：不存在满足如下条件的自然数 n：n 是某公式的哥德尔数，且存在自然数 p, q 使得 $\text{PRF}(n, p)$ 且 $\text{PRF}(2^3 3^n, q)$。

可以证明, $\text{PRF}(n, m)$ 和 $\text{PRF}(2^3 3^n, m)$ 均是可表示关系。设公式 $\text{WF-PRF}(x, y)$ 表示了 $\text{PRF}(n, m)$, 而设公式 $\text{WF-NEG-PRF}(x, y)$ 表示了 $\text{PRF}(2^3 3^n, m)$. 于是，PA 的协调性可以表述为公式：

CONSIS: $\neg\exists x(\text{WF}(x) \wedge \exists y \exists z(\text{WF-PRF}(x, y) \wedge \text{WF-NEG-PRF}(x, z)))$.

然而，哥德尔证明了，如果形式算术系统 PA 是协调的, 则它的协调性是不可证的.

定理 4.5.3 (第二不完全性定理) 如果 PA 是协调的，则 $\nvdash$ CONSIS

证明 假设 PA 是协调的。根据注记 4.5.3 知，$\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$ 是不可证的. 下面我们直观地证明 CONSIS $\vdash \text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$.

注意, $\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$ 是说: $\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$ 是不可证的。因而, $\neg\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$ 的意思就是: $\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$ 是可证的。从而，

$$\text{CONSIS}, \neg\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)}) \vdash \text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$$

根据反证法和否定消去规则，CONSIS $\vdash \text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$.

如果 CONSIS 可证，从而 $\text{UNP}(\mathbf{0}^{(p)})$ 可证，矛盾. 故 CONSIS 是不可证的. □

注记 4.5.5 在注记 4.5.4 中，我们已指出，如果 PA 协调，则存在在标准模型中真但不可证的语句。注意，如果 PA 协调，则 CONSIS 必在 PA 的每个模型中都成立，也就是说它是永真的. 从而，如果 PA 协调，则存在不可证的永真公式。

可能有读者会问，PA 的不完全性是不是由于 PA 中的公理不够所致？换言之，我们可否再增加一些新公理而得到一个完全的形式算术系统 PA$'$ 呢？下面我们讨论一下这个问题。

从定理 4.5.1 和定理 4.5.2 的证明可以看出，公式 $\mathrm{UNP}(x_1)$ 和 $\mathrm{UNP2}(x_1)$ 的构造使用了关系 $\mathrm{B}(n,m)$ 、$\mathrm{B\#}(n,m)$ 的可表示性。而这两个关系的可表示性依赖于关系 $\mathrm{PRF}(n,m)$ 的可表示性。进而，$\mathrm{PRF}(n,m)$ 的可表示性依赖于 $\mathrm{AX}(n)$ 的可表示性。注意，以上的讨论是关于系统 PA 的。如果要讨论一个扩充的系统 PA$'$ (即在 PA 中增加了一些新公理)，我们关心的关系就成了：

$\mathrm{AX}'(n)$: n 是 PA$'$ 中的某公理的哥德尔数。

$\mathrm{PRF}'(n,m)$: n 是一公式的哥德尔数, m 是 n 所代表的公式在 PA$'$ 中的某证明的哥德尔数。

$\mathrm{B}'(n,m)$: n 是某公式 $A(x)$ 的哥德尔数, 其中 x 是 $A(x)$ 中唯一的自由变元; m 是 $A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的在 PA$'$ 中的某个证明的哥德尔数.

$\mathrm{B}'\#(n,m)$: n 是某公式 $A(x)$ 的哥德尔数, 其中 x 是 $A(x)$ 中的唯一的自由变元; m 是 $\neg A(\mathbf{0}^{(n)})$ 的在 PA$'$ 中的某个证明的哥德尔数.

如果 $\mathrm{AX}'(n)$ 在 PA$'$ 中可表示，那么 $\mathrm{PRF}'(n,m)$、$\mathrm{B}'(n,m)$ 和 $\mathrm{B}'\#(n,m)$ 也都在 PA$'$ 中可表示。那么，模仿定理 4.5.1 和定理 4.5.2，我们可以证明关于 PA$'$ 的不完全性定理。

然而，如果我们放弃可表示性的要求，那么 PA 是可以扩充为一个协调的完全理论的 (在 PA 是协调的假设下). 特别地，每个协调的理论（即语句集合）都可扩充为一个协调的完全理论 (此即 Lindenbaum 定理，见文献 [4])。

§4.6 递归函数和递归关系 *

在第 4.2 节中，我们引入了可表示性，并给出了几个可表示函数和关系。那么一个函数和关系，在满足什么条件下才是可表示的呢？本节将回答这一问题。

在第 4.2 节中，我们定义了零函数、后继函数、和投影函数 (亦见第 1.4.9 节)，我们称之为基本函数。如何通过已定义的函数来定义更加复杂的函数呢。我们先介绍两种方法。

§4.6.1 原始递归函数

定义 4.6.1 (复合算子) 设 $g:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$, $h_i:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ $(1\le i\le k)$ 为函数。定义函数 $f:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ 如下：对任意自然数 $n_1,\cdots,n_m$,

$$f(n_1,\cdots,n_m)=g(h_1(n_1,\cdots,n_m),\cdots,h_k(n_1,\cdots,n_m)).$$

称函数 f 为 g 和 $h_1,\cdots,h_k$ 的复合函数。

例子 4.6.1 函数 $S(Z(n))$ 即为后继函数与零函数的复合。显然，对任意 n, $S(Z(n))=1$.

早在第二章我们就接触过递归定义。例如，在定义 2.1.2 中我们定义了命题公式 A 的支集 $\mathrm{suppt}(A)$. 我们先定义最简单的公式（原子公式）的支集，而复杂公式的支集则通过其子公式的支集来确定的。类似地，我也可以递归定义自然数集上的函数：首先确定 0 所对应的值，而 n $(n>0)$ 所对应的值则由比 n 小的数所对应的值确定。

定义 4.6.2 (递归算子) 设 $h:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$, $g:\mathbb{N}^{k+2}\to\mathbb{N}$ 为函数。则如下定义的函数 $f:\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N}$ 称作是由 h 和 g 递归定义的。

$$\begin{aligned}&f(0,n_1,\cdots,n_k)=h(n_1,\cdots,n_k)\\&f(n+1,n_1,\cdots,n_k)=g(n,f(n,n_1,\cdots,n_k),n_2,\cdots,n_k)\end{aligned}$$

例子 4.6.2 加法就可以通过投影函数 U_1^1 (即恒等函数) 和后继函数来递归定义：

$$\begin{aligned}&0+m=U_1^1(m)\\&(n+1)+m=\mathrm{S}(\mathrm{U}_3^2(n,(n+m),m)).\end{aligned}$$

我们把基本函数和由基本函数通过复合算子和递归定义得到的函数称作原始递归函数。严格定义如下。

定义 4.6.3 (原始递归函数)

(1) 零函数、后继函数、投影函数都是原始递归函数,

(2) 如果 $g:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$, $h_i:\mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$ $(1\le i\le k)$ 为原始递归函数，则 g 与 $h_1,\cdots,h_k$ 的复合函数也是原始递归函数.

(3) 如果 $h:\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$, $g:\mathbb{N}^{k+2}\to\mathbb{N}$ 为原始递归函数，则由 h 和 g 递归定义的函数也是原始递归函数.

(4) 只有这些原始递归函数.

例子 4.6.3

1. 设 C_k 是如下定义的常函数：对任意 n, $\mathrm{C}_k(n)=k$. 容易看出，

$$\mathrm{C}_k(n)=\overbrace{S(S(\cdots(S}^{k\text{ 个 S}}(Z(n)))\cdots)).$$

所以，常函数是原始递归的。

2. 由例子 4.6.2 我们知道加法是原始递归的。而乘法可如下递归定义：

$$\begin{aligned}&0\bullet m=Z(m)\\&(n+1)\bullet m=n\bullet m+m\end{aligned}$$

所以，乘法是原始递归的。

3. 指数函数 m^n 可按如下递归定义：对于 $m>0$,

$$\begin{aligned}&m^0=1\\&m^{n+1}=(m^n)\bullet m\end{aligned}$$

所以，指数函数是原始递归的。

4. 阶乘函数 $n!$ 是原始递归的，它可递归定义为：

$$\begin{aligned}&0!=1\\&(n+1)!=S(n)\bullet n!\end{aligned}$$

所以，阶乘函数是原始递归的。

5. 定义函数 $n\dot{-}1$ 定义如下：

$$n\dot{-}1=\begin{cases}n-1 & \text{如果}n>0,\\0 & \text{如果}n=0\end{cases}$$

我们称此函数为前趋函数，它也是原始递归的，这是因为它还可以按如下递归定义

$$\begin{aligned}&0\dot{-}1=0\\&(n+1)\dot{-}1=n\end{aligned}$$

6. 定义函数

$$\mathrm{sg}(n)=\begin{cases}0 & \text{如果}n=0,\\1 & \text{如果}n>0.\end{cases}$$

称 sg 为符号函数，它是原始递归的，因为它可递归定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{sg}(0)=0\\&\mathrm{sg}(n+1)=1\end{aligned}$$

7. 如果 $m<n$ 我们定义 $m\dot{-}n=0$；如果 $m\geq n$ 则令 $m\dot{-}n=m-n$. 函数 $\dot{-}$ 是原始递归的, 因为它可递归定义为

$$\begin{aligned}&m\dot{-}0=m\\&m\dot{-}(n+1)=(m\dot{-}n)\dot{-}1\end{aligned}$$

8. 绝对值函数 $|m-n|$ 是原始递归的，因为 $|m-n|=(m\dot{-}n)+(n\dot{-}m)$.

9. 定义 $\mathrm{rm}(m,n)$ 为 n 除以 m 的余数。(注意，除数 m 为 0 时除法无意义, 为了使 $\mathrm{rm}(0,n)$ 有定义，我们约定 $\mathrm{rm}(0,n)=n$). rm 是原始递归函数，它的递归定义如下：

$$\begin{aligned}&\mathrm{rm}(m,0):=0\\&\mathrm{rm}(m,n+1):=(\mathrm{rm}(m,n)+1)\mathrm{sg}(|m-(\mathrm{rm}(m,n)+1)|)\end{aligned}$$

10. 定义 $\mathrm{div}(m,n)=1\dot{-}\mathrm{rm}(m,n)$, 则 $\mathrm{div}(m,n)$ 为原始递归函数。显然，如果 m 能整除 n，则 $\mathrm{div}(m,n)=1$, 否则 $\mathrm{div}(m,n)=0$.

11. 定义 $D(n)$ 为 n 的因子的个数 (约定 $D(0)=1$)，即能够整除 n 的数的个数。$D(n)$ 也是原始递归函数，证明略去。

12. 定义 $\mathrm{Pri}(n)=1\dot{-}\mathrm{sg}(|D(n)-2|)$. 则，Pri 是原始递归的。容易看出，如果 n 是素数, 则 $\mathrm{pri}(n)=1$，否则 $\mathrm{pri}(n)=0$.

13. 对于非零自然数 n, 定义 $p(n)$ 为第 n 个素数, 且规定 $p(0)=0$. 则 $p(n)$ 是原始递归函数。证明略去。

14. 对于任意非零自然数 n,k, 定义 $(n)_k$ 为最大的 i 使得 $(p(k))^i$ 能整除 n. 由数论知识, $(n)_k$ 即是 n 的素因子分解中第 k 个素数的次数。另外我们规定 $(0)_k=0$, $(n)_0=0$, $(0)_0=0$. 则 $(x)_k$ 是原始递归函数。证明略去。

§4.6.2 递归函数

除了复合和递归之外，还有另外一种重要的定义函数的方法，即极小算子。

定义 4.6.4 (极小算子) 设 $g(n,n_1,\cdots,n_k)$ 是 $(k+1)$ 元函数, 且设对任意自然数 $n_1,\cdots,n_k$ 都存在 n 使得 $g(n,n_1,\cdots,n_k)=0$.[7] 定义 $\mu n(g(n,n_1,\cdots,n_k)=0)$ 为最小的 n 使得 $g(n,n_1,\cdots,n_k)=0$.

[7]在定义部分递归函数（或可计算函数）时，并不要求对任意自然数 $n_1,\cdots,n_k$ 都存在 n 使得 $g(n,n_1,\cdots,n_k)=0$. 由于本书只关心（全）递归函数，因此增加了这一条件。

注意, $\mu n(g(n,n_1,\cdots,n_k)=0)$ 是 k 元函数。

定义 4.6.5 (递归函数)
(1) 原始递归函数是递归函数.
(2) 如果 $g(n,n_1,\cdots,n_k)$ 是递归函数，且对任意自然数 $n_1,\cdots,n_k$ 都存在 n 使得 $g(n,n_1,\cdots,n_k)=0$. 则如下定的函数 $\mu n(g(n,n_1,\cdots,n_k)=0)$ 也是递归函数.
(3) 只有这些递归函数.

注记 4.6.1 设 $i_1,\cdots,i_k$ 为**非零**自然数的有穷序列。我们可以把这个序列编码为一个数 $n=p(1)^{i_1}\bullet\cdots\bullet p(k)^{i_k}$. 问题是, 反过来我们能不能通过 n 计算出 $i_1,\cdots,i_k$. 回答是肯定的。序列长度为 $k=\mu z((n)_z=0)$，而对每个 $j=1,\cdots,k$，$i_j=(n)_i$.

§4.6.3 递归关系

定义 4.6.6 设 R 为自然数集上的 k 元关系 (如果 $k=1$ 则 R 是自然数集的子集). R 的特征函数 $C_R(n_1,\cdots,n_k)$ 定义为:

$$C_R(n_1,\cdots,n_k)=\begin{cases}1, & \text{如果}R(n_1,\cdots,n_k)\text{ 成立.}\\ 0, & \text{如果}R(n_1,\cdots,n_k)\text{ 不成立.}\end{cases}$$

称关系 R 是(**原始**) **递归关系**如果 C_R 是 (原始) 递归函数.

递归关系也称为可判定关系，或可判定集合。

例子 4.6.4
1. 相等关系是原始递归关系：$1\dot{-}|n-m|$ 是相等关系 $n=m$ 的特征函数。
2. 小于等于关系是原始递归关系: $1\dot{-}(n\dot{-}m)$ 是小于等于关系 $n\leq m$ 的特征函数.
3. 偶数集是原是递归的：$\mathrm{div}(2,n)$ 是偶数集的特征函数。

引理 4.6.1 如果 R_1, R_2 都是 k 元 (原始) 递归关系, 则 $\overline{R_1}$ (即 $\mathbb{N}^k-R_1$)、$R_1\cap R_2$、$R_1\cup R_2$ 也都是 (原始) 递归的.

证明 容易看出

$$\begin{aligned}&C_{\overline{R_1}}(n_1,\cdots,n_k)=1\dot{-}C_{R_1}(n_1,\cdots,n_k),\\&C_{R_1\cap R_2}=C_{R_1}(n_1,\cdots,n_k)\bullet C_{R_2}(n_1,\cdots,n_k),\\&C_{R_1\cup R_2}=\mathrm{sg}(C_{R_1}(n_1,\cdots,n_k)+C_{R_2}(n_1,\cdots,n_k)).\end{aligned}$$

假设 R_1,R_2 是 (原始) 递归的，则 C_{R_1},C_{R_2} 都是 (原始) 递归函数。又 $\dot{-}$、sg、加法和乘法都是原始递归的，故 $\overline{R_1}$ 、$R_1\cap R_2$、$R_1\cup R_2$ 的特征函数也都是 (原始) 递归的。

命题 4.6.1　设 $R(n_1, n_2, n_3)$ 为 3 元递归关系。$f(n)$ 为递归函数。定义关系 $P(n)$ 为: 对任意 $n_1 \leq f(n)$ 都存在 n_2、n_3 使得 $n_2 < n_1$, $n_3 < n_1$ 且 $R(n_1, n_2, n_3)$ 成立。则 $P(n)$ 是一元递归关系。

命题 4.6.2　设 $R(n), P(n)$ 是递归关系，$f(n)$ 为递归函数且满足：对任意 $n > 0$, $f(n) \leq n$. 今定义关系 $Q(n)$ 如下：$Q(n)$ 当且仅当 $R(n) \vee (P(n) \wedge Q((n)_1) \wedge Q((n)_3))$. [8]

由于我们的主要任务是证明不完全性定理，因此我们略去上述两个命题的证明。读者可参考文献 [9].

递归论，现在亦称可计算性理论，是数理逻辑的重要分支。本节只是介绍了它的基础知识。

定理 4.6.1　（可表示性定理）递归函数和递归关系都是可表示的。

我们已经证明了基本函数是可表示的。因此要证明定理 4.6.1，只需证明复合算子、递归算子，极小算子保可表示性即可。由于这些证明涉及内容较多，故省略之。

定理 4.6.2　第 4.5 节中定义的关系 1–14 都是递归的，从而也都是可表示的。

证明　限于篇幅，我们只简略地证明若干关系的递归性。有些留作习题，有些证明因为比较繁琐而略去。

1. 根据 $\mathrm{V}(n)$ 的定义以及变元符的编码，我们有：

   $$\mathrm{V}(n) \text{ 当且仅当 } n > 23 \text{ 且 } n \dot{-} 23 \text{ 能被 } 2 \text{ 整除}.$$

   容易看出，$\mathrm{V}(n)$ 是一递归关系

2. 根据 $\mathrm{TM}(n)$ 的定义以及项的编码，我们有：

   $$\begin{aligned} &\mathrm{TM}(n) \text{ 当且仅当} \\ &\quad (n = 23) \vee V(n) \\ &\quad \vee (\lg(n) = 4 \wedge (n)_2 = 17 \wedge \mathrm{TM}((n)_1) \wedge \mathrm{TM}((n)_3)) \\ &\quad \vee (\lg(n) = 4 \wedge (n)_2 = 19 \wedge \mathrm{TM}((n)_1) \wedge \mathrm{TM}((n)_3)) \\ &\quad \vee (\lg(n) = 3 \wedge (n)_1 = 21 \wedge \mathrm{TM}((n)_2)) \end{aligned}$$

   其中 $\lg(n) = \mu k((n)_k = 0)$. 类似于命题 4.6.2 可以证明，$\mathrm{TM}(n)$ 是递归关系。

[8] 为了方便，这里我们使用的 "$\vee$" 和 "$\wedge$" 分别为 "或者" 和 "并且"。也就是说，在这里它们并不是形式系统中的联结词。下同。

3. 根据公式的编码，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathrm{WF}(n) \text{ 当且仅当}\\ &\quad(\lg(n)=4\wedge(n)_2=15\wedge\mathrm{TM}((n)_1)\wedge\ \mathrm{TM}((n)_3))\\ &\vee(\lg(n)=3\wedge(n)_1=3\wedge\mathrm{WF}((n)_2))\\ &\vee(\lg(n)=4\wedge((n)_2=5\vee(n)_2=7\vee(n)_2=9)\wedge\ \mathrm{WF}((n)_1)\wedge\ \mathrm{WF}((n)_3))\\ &\vee(\lg(n)=4\wedge((n)_1=11\vee(n)_1=13)\wedge V((n)_2)\wedge\mathrm{WF}((n)_3)).\end{aligned}$$

类似于命题 4.6.2 可以证明，$\mathrm{WF}(n)$ 是递归关系。

4. 要证明 $\mathrm{AX}(n)$ 是递归关系并不难，但很烦琐。由于篇幅所限，我们只证明性质: "n 是一条具有模式 $A\to(B\to A)$ 的公理的哥德尔数" (记作 $\mathrm{AX1}(n)$) 是递归的。根据编码，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathrm{AX1}(n) \text{ 当且仅当}\\ &\quad\lg(n)=4\wedge(n)_2=9\wedge\lg((n)_3)=4\wedge((n)_3)_2=9\\ &\wedge\mathrm{WF}((n)_1)\wedge\mathrm{WF}(((n)_3)_1)\wedge(n)_1=((n)_3)_3.\end{aligned}$$

类似于命题 4.6.2 可以证明，$\mathrm{AX1}(n)$ 是递归关系。

5. 根据编码及分离规则 MP 的形式，我们有：

$$\begin{aligned}&\mathrm{MPC}(n_1,n_2,n_3) \text{ 当且仅当}\\ &\quad\mathrm{WF}(n_1)\wedge\mathrm{WF}(n_2)\wedge\mathrm{WF}(n_3)\wedge(n_1=2^{n_2}3^95^{n_3}\vee n_2=2^{n_1}3^95^{n_3}).\end{aligned}$$

容易看出，$\mathrm{MPC}(n_1,n_2,n_3)$ 为递归关系。

6. $\mathrm{BOUND}(n_1,n_2)$ 的递归性留作习题由读者自证。
7. $\mathrm{CGENC}(n)$ 的递归性留作习题由读者自证。
8. $\mathrm{PEXC}(n)$ 的递归性留作习题由读者自证。
9. 由形式证明的定义可以看出，

$$\begin{aligned}&\mathrm{PRF}(n) \text{ 当且仅当 对任意 } i<\lg(n),\ \mathrm{AX}((n)_i) \text{ 或存在 } j_1,j_2<i \text{ 使得}\\ &\quad(\mathrm{MPC}((n)_{j_1},(n)_{j_2},(n)_i) \text{ 或 } \mathrm{CGENC}((n)_{j_1},(n)_i) \text{ 或 } \mathrm{PEXC}((n)_{j_1},(n)_i))).\end{aligned}$$

类似于命题 4.6.1 可以证明，$\mathrm{PRF}(n)$ 是递归关系。

10. 注意 $\mathrm{PRF}(n_1,n_2)$ 表示性质：n_2 是一公式的哥德尔数，n_1 是 n_2 所代表的公式的一个证明的哥德尔数。容易看出，

$$\mathrm{PRF}(n_1,n_2) \text{ 当且仅当 } \mathrm{PRF}(n_1)\wedge\mathrm{WF}(n_2)\wedge n_2=(n_1)_{\lg(n)\dot{-}1}\ .$$

所以，$\mathrm{PRF}(n_1,n_2)$ 是递归的。

11. $\mathrm{SUBST}(n_1, n_2, n_3, n_4)$ 的递归性的证明比较复杂，故我们略去其证明。
12. 不难看出，$\mathrm{NU}(n_1, n_2)$ 当且仅当
$$(n_1 = 23 \wedge y = 0) \vee (\lg(n_1) = 3 \wedge (n_1)_1 = 21 \ \wedge \ \mathrm{NU}((n_1)_2, n_2 \dot{-} 1))$$
由命题 4.6.2 可知，$\mathrm{NU}(n_1, n_2)$ 是递归关系。
13. 根据以上列出的递归关系（如：BOUND, SUBST, V, PRF 等）可以证明, $\mathrm{B}(n, m)$ 是一个递归关系。
14. 同样, 根据以上列出的递归关系（如：BOUND, SUBST, V, PRF 等）可以证明, $\mathrm{B\#}(n, m)$ 是一个递归关系。

□

参考文献

[1] 莫绍奎，数理逻辑初步，上海人民出版社，上海，1980.

[2] 沈恩绍，集论与逻辑，科学出版社，北京，2003.

[3] 沈复兴，模型论导论，北京师范大学出版社，北京，1995.

[4] 王世强, 模型论基础, 科学出版社，北京，1987.

[5] 张锦文，集合论浅说，科学出版社，北京，1984.

[6] 朱水林，哥德尔不完全性定理，聊您教育出版社，沈阳，1987.

[7] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam and van Nostrand, New York, 1952. (莫绍奎译，元数学导论（上、下册），科学出版社，北京，1984.）

[8] J. Barwise (editor), *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[9] N. Cutland, *Computability: an introdcution to recursive function theory*, Cambridge University Press, 1980.

[10] H. B. Enderton, *A Mthematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York, 1972.

[11] P. R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer, 1974.

[12] A. G. Hamilton, *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press, 1978.

[13] W. Thomas, Logic for Computer Science: The Engineering Challenge, *The Bulletin of Symbolic Ligic*, **7** (2001), 213-236.

[14] G. Tourlakis, *Lectures in Logic and Set Theory (Volume 1: Mathematical Logic)*, Cambridge University Press, 2003.

汉英名词对照表

保持固定的	held constant in
变化的	be varied in
标准模型	standard model
并	union
不可满足	unsatisfiable
不可判定的	undecidable
不完全性定理	incompleteness theorem
差	difference
常函数	constant function
重言式	tautology
存在量词	existential quantifier
单射	injection
代入	substitution
导出规则	derived rule
等词	equality
等词公理	axiom of equality
等价	equivalence
递归定义	definition by recursion
递归函数	recursive function
递归证明	proof by recursion
递归算子	recursive operator
笛卡尔积	Cartesian product
对象	object
二元关系	binary relation
反证法	reductio ad absurdum
非欧几何	non-Euclidean geometry
分离规则	modus ponens
符号	symbol
复合算子	composition operator
赋值	truth assignment
辅助推演规则	subsidiary rule
哥德尔编码	Gödel numbering
哥德尔数	Gödel number
个体变元符	individual variable symbol
个体常项符	individual constant symbol
公理	axiom
公理模式	axiom schema
关系	relation
归纳定义	definition by induction
归纳规则	the induction rule
归纳证明	proof by induction
函数	function
函数符	function symbol
合取	conjunction
合取范式	conjunctive normal form
合式公式	well-formed formula
恒等映射	identity
后继	successor
后继函数	successive function
基本函数	basic function
集合论	set theory
交	intersection
解释	interpretation
紧致性定理	compactness theorem
康托定理	Cantor theorem
可表示的	expressible

可驳	refutable
可满足的	satisfiable
可判定的	decidable
可数集合	countable set
可证	provable
空集	emptyset
括号	parenthesis
联结词	connective
量词	quantifier
量词公理	axiom of quantifier
零函数	zero function
满射	surjection
满足关系	satisfaction relation
幂集	power set
命题演算	propositional calculus
明指	specify
模型	model
n- 元序组	n-tuple
n- 关系	n-ary relation
n- 函数	n-ary function
欧氏几何	Euclidean geometry
穷举法	proof by cases
全称量词	universal quantifier
前束范式	prenex normal form
数学基础	foundation of mathematics
数学危机	mathematical crisis
双射	bijection
算术化	arithmetization
算术系统	arithmetic system

替换	replacement
投影函数	projection function
推理规则	rules of inference
推演	deduction
推演（演绎）定理	deduction theorem
完全性定理	completeness theorem
谓词	predicate
谓词符	predicate symbol
谓词演算	predicate calculus
希尔伯特计划	Hilbert program
析取	disjunction
析取范式	disjunctive normal form
项	term
消去	elimination
协调性	consistency
形成规则	formation rule
形式定理	formal theorem
形式推演	formal deduction
形式系统	formal systems
形式语言	formal language
形式证明	formal proof
一阶逻辑	first-order logic
依赖	depend on
1-1 对应	1-1 correspondence
一致性定理	soundness theorem
引入	introduction
映射	mapping
永真公式	valid formula
语法	syntax
语句	sentence
语义	semantics
语义后承	entailment

元定理	metatheorem	蕴涵	implication
元理论	metatheory		
元数学	metamathematics	真值	truth value
元素	element	真值表	truth table
元语言	metalanguage	证明	proof
原始递归函数	primitive recursive function	直接后承	immediate consequence
原子公式	primitive formula	子公式	subformula
原子命题	primitive proposition	子集	subset
约束出现	bounded occurrence	自由变元	free variable
约束变元	bounded variable	自由出现	free occurrence