

hw-8 (2023/11/14)

姓名:

学号:

p.56: 9-(d) In each case below, let $\mathcal{A}(x_1)$ be the given wf., and let t be the term $f_1^2(x_1, x_3)$. Write out the wf. $\mathcal{A}(t)$ and hence decide in each case whether t is **free for x_1** in the given wf.

$$(d) \quad (\forall x_2)A_1^3(x_1, f_1^1(x_1), x_2) \rightarrow (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(x_1, x_3)).$$

Recall that

- $\mathcal{A}(t)$: if x_i does occur free in $\mathcal{A}(x_1)$, then $\mathcal{A}(t)$ denotes the result of substituting term t for **every free occurrence** of x_i . (cf. p.54)

- t is **free** for x in a wf. ϕ :

定义 3.11*. (Revised definition) 当一个项 t 可以替换 \mathcal{A} 中变元 x_i 的**所有自由出现**, 且不会使得 t 中任何变元与 \mathcal{A} 的其他部分相互作用, 我们就称 **t 对 \mathcal{A} 中 x_i 是自由的**。

(注意此题有两问: 你需要 1) 写出 $\mathcal{A}(t)$, 且 2) 回答 t 在 $\mathcal{A}(x_1)$ 中是否对 x_1 自由)

Your answer:

(10 points)

Note that in

$$(d) \quad (\forall x_2)A_1^3(\mathbf{x_1}, f_1^1(\mathbf{x_1}), x_2) \rightarrow (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(\mathbf{x_1}, x_3)).$$

x_1 has **three** occurrences are free, hence

[6 points]

$$\mathcal{A}(t) = (\forall x_2)A_1^3(f_1^2(\mathbf{x_1}, x_3), f_1^1(f_1^2(\mathbf{x_1}, x_3)), x_2) \rightarrow (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(f_1^2(\mathbf{x_1}, x_3), x_3))$$

And t is *not* free for x_1 in (d) of course.

[4 points]

.....作业反馈

- 关于代入后的结果。对 x_1 的自由出现代入 t 后, 一定得在所得的公式中把 t 展开了, 仅仅写成

$$(\forall x_2)A_1^3(\mathbf{t}, f_1^1(\mathbf{t}), x_2) \rightarrow (\forall x_3)A_1^1(f_1^2(\mathbf{t}, x_3))$$

这个样子是不可行滴, 且就定义而言, 上面这个符号串也不是一个合式公式 (因为一阶语言的字母表中并没有 t 这样的符号, t 只是元语言中的符号)。

- 关于符号的写法。对于全称量词或存在量词, 可以采取书上的写法, 即 $\forall x_i$ 和 $\exists x_i$ 外面有对括号:

$$(\forall x_i)\varphi \quad (\exists x_i)\varphi$$

比较现代的记法一般省略会这对括号, 直接写作: $\forall x_i\varphi, \exists x_i\varphi$ 。但有些同学会在把变元用括号括起来, 从而有形如

$$\forall(x_i)\varphi \quad \exists(x_i)\varphi$$

这样的写法。不过这种写法既不太美观也不通用, 有时还会让人看得比较困惑, 所以还是建议不要采用这种记法为好。

- 关于代入自由。一个项 t 对于某个公式 φ 中的变元 x 是自由的, 一定是相对于整个公式 φ 来说的, 当 φ 是一个蕴含式 (或者其他复合公式) 时, 没有「 t 对 φ 的前件代入自由」或者「 t 对 φ 的后件不是代入自由」这类说法。