

hw-2 (2023/09/19)

姓名:

学号:

p10: (7) Show that the statement form $(((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q)))$ is not a tautology. Find statement forms \mathcal{A} and \mathcal{B} such that $(((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{B})))$ is a contradiction.

Proof:

The following truth table shows that $(((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q)))$ is not a tautology.

p	q	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$								
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	T	F	T	T	F

5 points

When \mathcal{A} and \mathcal{B} are both tautologies, then $(((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{B})))$ will be a contradiction. For instance, let $\mathcal{A} = \mathcal{B} = (p \rightarrow p)$ or $\mathcal{A} = \mathcal{B} = (p \vee \neg p)$.

5 points

除了用真值表这种比较直观的手段外，还有诸多方法。以下答案来自黄程同学，经其授权后分享给大家（感谢黄程同学👍）¹：

Suppose that $(((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q)))$ is a tautology. Then the situation that $(\sim p) \rightarrow q$ be T and $p \rightarrow (\sim q)$ be F will not occur under any valuation. But considering $q = T$ and $p = T$, thus $p \rightarrow (\sim q)$ will be T . Contradiction! Therefore $(((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q)))$ is not a tautology.

According above answer, when \mathcal{A} and \mathcal{B} be T permanently, then $(((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{B})))$ will be a contradiction. In other words, \mathcal{A} and \mathcal{B} are both tautologies, say, $\mathcal{A} = (p \vee (\sim p))$ and $\mathcal{B} = p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

..... 作业反馈

- 本次作业一共有两问，但存在同学只回答第一问的情况，请大家以后细心。
- 用 0 和 1 来替代 F 和 T 是可以的，有时这样会更为简洁。
- 第一问有同学用一种「简化真值表」来回答，如

$((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$									
F	T	T	T	F	T	F	F	T	
F	T	T	F	T	T	T	T	F	
T	F	T	T	T	F	T	F	T	
T	F	F	F	T	F	T	T	F	

¹不过此处文字和其原答案稍有出入。

这是可行且正确的。不过建议还是把 p 和 q 的真值单独列在表前，这样在画真值表找「析取范式」的时候不容易眼花，不过这不是强制性的。

- 第二问要求大家确实为 \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 找到某种「命题形式」，很多同学只是声明其为重言式而没有找出具体的「命题形式」，严格来说这是不够的，不过默认大家都掌握了。
- 提前祝大家中秋 + 国庆快乐 🥮