

# Теория чисел

## Основной поток

Создал: Низамов Айнур, БПМИ225

Скачать актуальную версию можно нажав по [ссылке](#)

При обнаружении ошибок просьба писать [сюда](#) (не анонимно, но быстро) или [сюда](#) (анонимно, но не очень быстро). Для любителей Git можно создать issue на [GitHub](#)

Если Вам не нравится ТЧ, жалобы принимаются [тут](#)

Версия от 12.02.2023

# Содержание:

## Лекция 1 (12.01.23)

### 1.0. Введение

### 1.1. Алгоритм Евклида

## Лекция 2 (19.01.23)

### 2.0. Введение

### 2.1. Основная теорема арифметики

### 2.2. Цепные дроби

## Лекция 3 (26.01.23)

### 3.0. Введение

### 3.1. $K$ -я подходящая дробь

## Лекция 4 (02.02.23)

### 4.0. Введение

### 4.1. Сравнения и вычеты

## Лекция 5 (03.02.23)

### 5.0. Введение

### 5.1. Арифметические операции

### 5.2. Много теорем

# Лекция 1

## 1.0. Введение

$\mathbb{N}$  – натуральные числа

$\mathbb{Z}$  – целые числа

$\mathbb{Q}$  – рациональные числа

$\mathbb{R}$  – вещественные числа

$\mathbb{C}$  – комплексные числа

$\mathbb{A}$  – алгебраические числа (не будут затронуты)

**Обозначение.**  $a \mid b$  (реже  $b \dot{:} a$ )  $\iff \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$  ( $a$  делит  $b$ )

**Свойства:**

- рефлексивность:  $a \mid a$  ( $a \neq 0$ )
- транзитивность:  $a \mid b, b \mid c \implies a \mid c$
- $a \mid b \implies \forall c \in \mathbb{Z} \ a \mid bc$
- $a \mid b, a \mid c \implies a \mid b \pm c$

**Теорема 1** (деление с остатком). Пусть  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\exists! q, r \in \mathbb{Z} : a = qb + r, 0 \leq r < b$

**Доказательство.** Возьмем  $n \in \mathbb{Z}, nb \leq a < (n+1)b$ . Положим  $q = n, r = a - nb$ , тогда  $0 \leq r < b$ . Теперь докажем единственность:  $a = q_1b + r_1, a = q_2b + r_2$ . Тогда  $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)b$ . Но  $|r_1 - r_2| < b \implies r_1 - r_2 = 0 \implies q_2 - q_1 = 0$

■

**Деление с остатком:**

1. Однозначное разложение на простые множители (*основная теорема арифметики*)
2. Цепные дроби
3. Вычеты (арифметика остатков)

## 1.1. Алгоритм Евклида

Пусть  $a, b \in \mathbb{Z}, |a| + |b| \neq 0$

Тогда  $(a, b) = \text{НОД}(a, b)$  – наибольший общий делитель.

**Определение.**  $a$  и  $b$  взаимно просты, если  $(a, b) = 1$

**Предложение.** Пусть  $a = qb + r$ . Тогда  $(a, b) = (b, r)$

**Доказательство.**

$$\begin{cases} d \mid a, b \implies d \mid r \\ d \mid b, r \implies d \mid a \end{cases}$$

множество всех общих делителей  $a$  и  $b$  совпадает с  $b$  и  $r$ , значит  $(a, b) = (b, r)$

■

**Алгоритм Евклида.**  $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

$$a = a_0b + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b)$$

$$b = a_1r_0 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$$

$$r_0 = a_2r_1 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$$

...

$$r_{n-3} = a_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1} \quad (0 \leq r_{n-2} < r_{n-1})$$

$$r_{n-2} = a_nr_{n-1} + r_n \quad (r_n = 0), \text{ то есть } r_{n-1} \mid r_{n-2}$$

$$(a, b) \rightarrow (b, r_0) \rightarrow (r_0, r_1) \rightarrow \dots \rightarrow (r_{n-3}, r_{n-2}) \rightarrow (r_{n-2}, r_{n-1}) = r_{n-1}$$

**Теорема 2** (расширенный алгоритм Евклида).

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad (|a| + |b| \neq 0) \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z} : (a, b) = \lambda a + \mu b$$

**Доказательство.**  $\forall k \quad r_k = r_{k-2} - a_k r_{k-1}$

$$r_{n-1} = r_{n-3} - a_{n-1}r_{n-2} = \dots = \lambda_k r_k + \mu_k r_{k+1} = \dots = \lambda a + \mu b$$

■

# Лекция 2

## 2.0. Введение

**Лемма (важная).** Пусть  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Тогда:

$$\begin{cases} a \mid bc \\ (a, b) = 1 \end{cases} \implies a \mid c$$

**Доказательство.**  $\exists \lambda, \mu :$

$$\lambda a + \mu b = 1$$

$$\underbrace{\lambda ac}_{a \mid ac} + \underbrace{\mu bc}_{a \mid bc} = \underbrace{c}_{a \mid c}$$

Левое слагаемое делится на  $a$ , потому что есть множитель  $a$ . Правое слагаемое делится на  $a$  по условию. Тогда и сумма делится на  $a$ . ■

## 2.1. Основная теорема арифметики

**Теорема.** Пусть  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ . Тогда  $n$  раскладывается в произведение простых единственным образом с точностью до перестановки множителей.

**Доказательство.** Если  $n$  не имеет *нетривиального разложения*<sup>1</sup>, то оно простое. Если  $n = tk$ ,  $t, k < n$ . Далее показывается по индукции, что число можно разложить на такие числа, которые не имеют нетривиального разложения (простые). Теперь докажем единственность. Пусть  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_b$ . Сократим все одинаковые множители из первого и второго разложения:  $\forall i, j \ p_i \neq q_j$ . Тогда  $(p_1, q_j) = 1$ . По [важной лемме](#):

$$p_1 \mid q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_b$$

$$p_1 \mid q_3 \cdot \dots \cdot q_b$$

...

$$p_1 \mid q_b$$

$(p_1, q_b) = 1$ , но  $p_1 \neq 1$  – противоречие. ■

Пусть  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ . Тогда по [основной теореме арифметики](#):  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ ,  $p_i \neq p_j \ \forall i \neq j$ , где  $p_i$  – простое. Это называется *каноническим разложением  $n$  на простые*.

**Обозначение.**  $\nu_p(n) = \max\{d \in \mathbb{N} \cup \{0\} : p^d \mid n\}$  – степень вхождения  $p$  в  $n$ .

---

<sup>1</sup>Разложение  $n = tk$  называется нетривиальным, если  $t, k < n$ ,  $t, k \in \mathbb{N}$

С такими обозначениями разложение на простые множители можно записать так:  
 $n = \prod_{p|n} p^{\nu_p(n)} = \prod_p p^{\nu_p(n)}$  – с какого-то момента  $\nu_p(n)$  будет 0.

## 2.2. Цепные дроби

Вспомним алгоритм Евклида и разложим  $\mathbb{Q}$  в цепную дробь:

$$\left. \begin{array}{l} a = a_0 b + r_0 \\ b = a_1 r_0 + r_1 \\ \dots \\ r_{n-2} = a_n r_{n-1} \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_0}{b} = \\ = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} = \\ \dots \\ = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \end{array}$$

Также есть другая, более короткая запись цепной дроби:  $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ , где  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 1$  (последнее видно по алгоритму на предпоследнем шаге: так как  $r_{n-1} < r_{n-2}$ , то  $a_n = \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} \neq 1$ ).

**Обозначение.**  $[\alpha]$  – целая часть  $\alpha$ ,  $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$  – дробная доля (часть)  $\alpha$

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Положим  $\alpha_0 = \alpha$ . Рекуррента:  $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\{\alpha_k\}}$ ,  $a_k = [\alpha_k]$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ верно } \alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}}}}$$

Если у цепной дроби есть период, то над каждой  $a_i$  (которая в периоде) рисуется черта. Например:  $\sqrt{15} = [3; 1, 6, 1, 6, \dots] = [3; \overline{1, 6}]$

**Определение.** Пусть  $\alpha \sim [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$ . Тогда для  $k = 0, 1, 2, \dots$  дроби  $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$  называются *подходящими дробями* числа  $\alpha$ .

**Теорема.**  $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  верно следующее:  $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_k^2}$

Рекуррентные соотношения:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Все это будет доказано на следующей лекции.

# Лекция 3

## 3.0. Введение

Давайте разложим  $5 + \frac{1}{3}$  в цепную дробь следующим образом:  $5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}$ . Запретим такие  $\frac{1}{1}$ , потому что можно отщепить 1 из числителя и получить исходное число разложение:  $5 + \frac{1}{2 + 1} = 5 + \frac{1}{3}$ .

## 3.1. $K$ -я подходящая дробь

Вспомним прошлую лекцию и дополним определение. Дробь вида  $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ ,  $p_k, q_k \in \mathbb{Z}, q_k > 0, (p_k, q_k) = 1$  называется  $k$ -й *подходящей дробью*. Докажем некоторые факты, которые остались недоказанными в прошлый раз.

**Теорема** (о рекуррентных соотношениях для числителей и знаменателей подходящих дробей). Пусть заданы последовательности  $\alpha_k$  (хвосты),  $a_k$  (неполные частные). Тогда последовательности  $p$  и  $q$  заданы следующей рекуррентной формулой:

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Для удобства можно положить:

$$\begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь последовательности  $p$  и  $q$  определены  $\forall k \geq 0$

**Теорема** (о континуантах). Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_k$  — независимые переменные. Положим:

$$\begin{pmatrix} P_{-1} & P_{-2} \\ Q_{-1} & Q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

А также определим последовательности многочленов ( $\forall k \geq 0$ ):

$$P_k(x_0, \dots, x_k) = x_k P_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1}) + P_{k-2}(x_0, \dots, x_{k-2})$$

$$Q_k(x_0, \dots, x_k) = x_k Q_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1}) + Q_{k-2}(x_0, \dots, x_{k-2})$$

**Обозначение.** Сокращенная запись  $P_k$  предполагает  $P_k(x_0, \dots, x_k)$  (аналогично и для  $Q_k$ ).

**Утверждения:**

1.  $\frac{P_k}{Q_k} = [x_0, \dots, x_k]$
2.  $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$
3.  $P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = (-1)^k \cdot x_k$

**Доказательство.**

1. Докажем по индукции по  $k$ :

**База:**  $k = 0$  :

$$P_0(x_0) = x_0 P_{-1} + P_{-2} = x_0$$

$$Q_0(x_0) = x_0 Q_{-1} + Q_{-2} = 1$$

$$\text{откуда } \frac{P_0(x_0)}{Q_0(x_0)} = x_0 = [x_0] \text{ (цепная дробь)} - \text{верно}$$

**Переход:** пусть верно  $\forall k < n$ , докажем для  $k = n$ :

$$\begin{aligned} [x_0; \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] &= [x_0; \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + \frac{1}{x_n}]^2 = \frac{P_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + \frac{1}{x_n})}{Q_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + \frac{1}{x_n})} = \\ &= \frac{(x_{n-1} + \frac{1}{x_n})P_{n-2}(x_0, \dots, x_{n-2}) + P_{n-3}(x_0, \dots, x_{n-3})}{(x_{n-1} + \frac{1}{x_n})Q_{n-2}(x_0, \dots, x_{n-2}) + Q_{n-3}(x_0, \dots, x_{n-3})} = \frac{(x_{n-1} + \frac{1}{x_n})P_{n-2} + P_{n-3}}{(x_{n-1} + \frac{1}{x_n})Q_{n-2} + Q_{n-3}} = \\ &= \frac{x_n \cdot (x_{n-1} + \frac{1}{x_n})P_{n-2} + P_{n-3}}{x_n \cdot (x_{n-1} + \frac{1}{x_n})Q_{n-2} + Q_{n-3}} = \frac{x_n(x_{n-1}P_{n-2} + P_{n-3}) + P_{n-2}}{x_n(x_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n-3}) + Q_{n-2}} = \frac{x_n P_{n-1} + P_{n-2}}{x_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \\ &= \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n(x_0, x_1, \dots, x_n)}{Q_n(x_0, x_1, \dots, x_n)} = [x_0; x_1, \dots, x_n] - \text{верно} \end{aligned}$$

2. Докажем по индукции по  $k$ :

$$\textbf{База: } k = -1 : P_{-1}Q_{-2} - P_{-2}Q_{-1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^{-1-1} = (-1)^{-2} - \text{верно}$$

**Переход:** пусть верно для  $\forall k < n$ , докажем для  $k = n$ :

$$\begin{aligned} P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n &= (x_n P_{n-1} + P_{n-2})Q_{n-1} - P_{n-1}(x_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) = x_n P_{n-1} Q_{n-1} + \\ &+ P_{n-2} Q_{n-1} - x_n P_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2} = P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2} = -(P_{n-1} Q_{n-2} - \\ &- P_{n-2} Q_{n-1}) = -(-1)^{n-2} = (-1)^{n-1} - \text{верно} \end{aligned}$$

3. Возьмем определитель:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} P_k & P_{k-2} \\ Q_k & Q_{k-2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} P_k - P_{k-2} & P_{k-2} \\ Q_k - Q_{k-2} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k P_{k-1} & P_{k-2} \\ x_k Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = x_k \begin{vmatrix} P_{k-1} & P_{k-2} \\ Q_{k-1} & Q_{k-2} \end{vmatrix} = \\ &= x_k (P_{k-1} Q_{k-2} - P_{k-2} Q_{k-1}) = (-1)^{k-2} \cdot x_k = (-1)^k \cdot x_k \end{aligned}$$

■

**Доказательство** теоремы (о рекуррентных соотношениях для числителей и знаменателей подходящих дробей). Положим  $x_0 = a_0, \dots, x_k = a_k$ :

---

<sup>2</sup>Ключевой ход:  $x_{n-1} + \frac{1}{x_n} = [x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1} + \frac{1}{x_n}]$  – по алгоритму построения цепной дроби



$$\frac{P_k(a_0, \dots, a_k)}{Q_k(a_0, \dots, a_k)} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

Заметим, что:

- $P_k(a_0, \dots, a_k), Q_k(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}$
- $Q_k(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{N}$
- $(P_k(a_0, \dots, a_k), Q_k(a_0, \dots, a_k)) = 1$  – следствие пункта 2 из теоремы о континуантах.

Стало быть  $p_k = P_k(a_0, \dots, a_k)$ ,  $q_k = Q_k(a_0, \dots, a_k)$

То есть  $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ,  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ , так как  $P_k$  и  $Q_k$  удовлетворяли этому. ■

# Лекция 4

## 4.0. Введение

Вспомним 3 утверждения с прошлой лекции:

- $\frac{P_k}{Q_k} = [x_0, \dots, x_k]$
- $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$
- $P_k Q_{k-2} - P_{k-2} Q_k = (-1)^k \cdot x_k$

**Следствие** из [теоремы о континуантах](#).

1. Справедливы  $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ,  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$
2.  $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$
3.  $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k \cdot a_k$

**Доказательство.** 1 доказывали на прошлой лекции, 2 и 3 мгновенно получаются из утверждений, которые тоже были доказаны на прошлой лекции

■

**Предложение.**

1.  $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \dots \leq \alpha \leq \dots < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$
2.  $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$
3.  $\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}} = \frac{(-1)^k \cdot a_k}{q_k q_{k-2}}$
4.  $q_k \geq 2q_{k-2} \quad (\forall k \geq 1)$
5.  $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{q_k^2}$
6.  $\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{a_{k+2}}{q_k q_{k+2}}$

**Доказательство.**

1.  $\forall i = 2n, j = 2m + 1 \quad \frac{p_i}{q_i} < \frac{p_j}{q_j}$  следует из пункта 3 предложения. Для четных

$$k : \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{\overbrace{a_k}^{\mathbb{N}}}{q_k q_{k-2}} \implies \text{разница положительна, значит возрастает при}$$

возрастании  $k$ . Аналогично показывается для нечетных (убывают, так как  $(-1)^k$  при нечетном  $k$  будет отрицательным, стало быть и разница отрицательна).

Далее  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, \alpha_{k+1}]$ . Рассмотрим последние 3 неполных частных:  
 $a_{k-1} + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}$ . Если обрубим  $\alpha_{k+1}$  (получим  $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ ), то знаменатель

$a_k + \frac{1}{\underbrace{\alpha_{k+1}}_{>0}}$  уменьшится, значит дробь  $\frac{1}{a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}}$  увеличится. Следующий знаменатель увеличится, а дробь уменьшится и так далее. Из этого следует:

- $\alpha \geq \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$
- $\alpha \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$

Выходит, что все четные не больше  $\alpha$ , а нечетные – не меньше.

2. Даром из [следствия 2 из теоремы о континуантах](#).

3. Даром из [следствия 3 из теоремы о континуантах](#).

$$4. q_k = \underbrace{a_k}_{\geq 1} q_{k-1} + q_{k-2} \geq q_{k-1} + q_{k-2} \geq 2q_{k-2}$$

$$5. \frac{p_k}{q_k} \leq \alpha \leq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}, \quad \begin{array}{l} \text{если } k - \text{четное} \\ \text{если } k - \text{нечетное} \end{array} . \text{ Вычитаем } \frac{p_k}{q_k} \text{ и получаем что надо.}$$

$$6. \alpha \begin{array}{l} \geq \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} > \frac{p_k}{q_k} \\ \leq \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} < \frac{p_k}{q_k} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \text{если } k - \text{четное} \\ \text{если } k - \text{нечетное} \end{array} . \text{ Вычитаем } \frac{p_k}{q_k} \text{ и получаем что надо.}$$

■

Еще одно **следствие** из [теоремы о континуантах](#). Пусть  $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k]$ .

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{P_k(a_0, \dots, a_{k-1}, \alpha_k)}{Q_k(a_0, \dots, a_{k-1}, \alpha_k)} = \frac{\alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

**Пример.**  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$\varphi = [1; \bar{1}]$  – самая простая цепная дробь для числа из  $\mathbb{R}$

Пусть  $F_k$  –  $k$ -е число Фибоначчи. Положим  $p_k = F_k$ ,  $q_k = F_{k-1}$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \varphi$

**Приложения к линейным диофантовым уравнениям.**

$a, b \in \mathbb{N}$ ,  $(a, b) = 1$ . Как решить уравнение  $ax + by = c$ ?

Пусть  $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k]$ . Тогда  $\frac{p_k}{q_k} = \frac{a}{b}$ ,  $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}]$

Следовательно  $aq_{k-1} + b(-p_{k-1}) = (-1)^{k-1}$

Значит  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (-1)^{k-1} \cdot c \cdot \begin{pmatrix} q_{k-1} \\ -p_{k-1} \end{pmatrix}$  – частичное решение уравнения  $ax + by = c$

## 4.1. Сравнения и вычеты

**Определение.** Пусть  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  – модуль. Есть  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $a$  и  $b$  сравнимы по модулю  $m$  если  $m \mid a - b$

**Обозначение.**  $a \equiv b \pmod{m}$ . Реже пишут как  $a \equiv_m b$

**Свойства:**

1. Отношение сравнения является отношением эквивалентности.

2. Пусть выполняются  $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{cases}$ . Тогда верно и  $\begin{cases} a + c \equiv b + d \pmod{m} \\ a - c \equiv b - d \pmod{m} \\ ac \equiv bd \pmod{m} \end{cases}$

3.  $a \equiv b \pmod{m}, \forall c \in \mathbb{N} \implies ac \equiv bc \pmod{mc}$

4.  $a \equiv b \pmod{m}, \forall c \in \mathbb{Z} \ (c, m) = 1 \implies ac \equiv bc \pmod{m}$

5. Пусть  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ <sup>3</sup>,  $a \equiv b \pmod{m}$ . Тогда  $f(a) \equiv f(b) \pmod{m}$

**Доказательство.**

1. Чтобы отношение сравнения было отношением эквивалентности, должны выполняться 3 условия. Проверим каждый:

- *Рефлексивность:*  $a \equiv a \pmod{m}$
- *Симметричность:*  $a \equiv b \pmod{m} \implies b \equiv a \pmod{m}$
- *Транзитивность:*  $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \implies a \equiv c \pmod{m}$

2.  $\begin{cases} m \mid a - b \\ m \mid c - d \end{cases} \implies m \mid (a - b) + (c - d) \implies m \mid (a + c) - (b + d) \implies a + c \equiv b + d \pmod{m}$ . Аналогично для вычитания.

Для умножения:

---

<sup>3</sup> $\mathbb{Z}[x]$  – многочлен с целыми коэффициентами от  $x$

$$\begin{aligned} \begin{cases} m \mid a - b \\ m \mid c - d \end{cases} &\implies \begin{cases} m \mid c(a - b) \\ m \mid b(c - d) \end{cases} \implies m \mid c(a - b) + b(c - d) \implies m \mid ac - bc + \\ &+ bc - bd \implies m \mid ac - bd \implies ac \equiv bd \pmod{m} \end{aligned}$$

3.  $m \mid a - b \iff mc \mid (a - b)c$

4. С одной стороны:  $m \mid a - b \implies m \mid c(a - b)$

С другой стороны:  $m \mid c(a - b) \implies m \mid a - b$  (по [важной лемме](#), так как  $(m, c) = 1$ )

5. Не доказывалось на лекции.

■

# Лекция 5

## 5.0. Введение

Вспомним что такое сравнимость по модулю:  $a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$

**Определение.** Множество  $a + m\mathbb{Z} = \{a + mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$  называется *классом вычетов* числа  $a$  по модулю  $m$ . Еще обозначают как  $\bar{a} = a + m\mathbb{Z}$

**Обозначение.**  $\mathbb{Z}_m = \{a + m\mathbb{Z} \mid a \in \{0, 1, \dots, m-1\}\}$  – множество всех классов вычетов по модулю  $m$ . Также обозначают  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

## 5.1. Арифметические операции

Для  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$  полагаем:

- $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$
- $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$

**Предложение.** Операции корректно определены, то есть  $\forall a_1, a_2, b_1, b_2$  таких, что  $a_1 \equiv a_2 \pmod{m}$ ,  $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$  верно следующее:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{m} \\ a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{m} \end{cases}$$

Теперь (при наличии  $m$ )  $a \equiv b \pmod{m} \iff \bar{a} = \bar{b}$

**Определение.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Набор из  $m$  чисел  $a_1, a_2, \dots, a_m$  называется *полной системой вычетов*, если  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – представители всех различных  $m$  классов вычетов.

**Замечание.** Если  $a \equiv b \pmod{m}$ , то  $(a, m) = (b, m)$ . Поэтому можно говорить о свойстве  $\bar{a}$  быть взаимно простым с  $m$ .

**Определение.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Набор  $a_1, a_2, \dots, a_k$  называется *приведенной системой вычетов*, если  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – представители всех классов вычетов, взаимно простых с  $m$ .

**Определение.** *Функция Эйлера:*  $\varphi(m) = |\{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a < m, (a, m) = 1\}|$

**Обозначение.**  $\mathbb{Z}_m^* = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_m \mid (a, m) = 1\}$

## 5.2. Много теорем

**Теорема** (о полной и приведенной системах вычетов). Пусть:

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \\ a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1 \end{cases}$$

1. Если  $b_1, \dots, b_m$  – полная система вычетов по модулю  $m$ , а также  $c \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $ab_1 + c, \dots, ab_m + c$  – тоже полная система вычетов.
2. Если  $b_1, \dots, b_k$  – приведенная система вычетов по модулю  $m$ , а также  $k = \varphi(m)$ . Тогда  $ab_1, \dots, ab_k$  – тоже приведенная система вычетов.

**Доказательство.**  $\forall i \neq j \quad b_i \not\equiv b_j \pmod{m}$ . Следовательно,  $ab_i \not\equiv ab_j \pmod{m}$ ,  $(a, m) = 1$  (так как  $ab_i \equiv ab_j \pmod{m} \iff b_i \equiv b_j \pmod{m}$  по [4 свойству сравнений и вычетов](#)).

Далее,  $\forall c \in \mathbb{Z}$  при  $ab_i \not\equiv ab_j \pmod{m}$  имеем также  $ab_i + c \not\equiv ab_j + c \pmod{m}$

1. Числа  $ab_1 + c, \dots, ab_m + c$  – представители  $m$  различных классов вычетов.
2. Числ  $ab_1, \dots, ab_k$  – представители  $k$  различных классов вычетов. При этом  $(ab_i, m) = (b_i, m) = 1$  (по [важной лемме](#)).

■

**Теорема** (Эйлера). Пусть:

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \\ a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1 \end{cases}$$

Тогда  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

**Доказательство.** Пусть  $b_1, \dots, b_k$  – приведенная система вычетов, тогда  $ab_1, \dots, ab_k$  – тоже приведенная система вычетов (по [теореме о приведенной системе вычетов](#)). Это значит, что  $\forall i \in \{1, \dots, k\} \exists! j \in \{1, \dots, k\} : b_i \equiv ab_j \pmod{m}$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k b_i &\equiv \prod_{j=1}^k ab_j \pmod{m} \\ \prod_{i=1}^k b_i &\equiv a^k \prod_{j=1}^k b_j \pmod{m} \end{aligned}$$

.

Но  $\forall l \in \{1, \dots, k\} (b_l, m) = 1$ , поэтому можно сократить. Остается  $1 \equiv a^k \pmod{m}$ , где  $k = \varphi(m)$

■

**Следствие** (Малая теорема Ферма). Пусть  $p$  – простое,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $p \nmid a$ . Тогда  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

**Доказательство.** При  $m = p$  – простом,  $\varphi(m) = p - 1$ . Далее просто применяем теорему Эйлера. ■

**Теорема (об обратимых вычетах по умножению).** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Тогда сравнение  $ax \equiv 1 \pmod{m}$  имеет решение  $\iff (a, m) = 1$

**Примечание.** Такое  $a$  называется *обратимым* по модулю  $m$ , а найденный  $x$  – *обратным* к  $a$ .

**Доказательство.** Сравнение  $ax \equiv 1 \pmod{m}$  имеет решение  $\iff \exists b \in \mathbb{Z} : ab \equiv 1 \pmod{m} \iff \exists c \in \mathbb{Z} : ab - 1 = mc \iff ab - mc = 1$ . Получили *линейное диофантово уравнение*, так как  $(a, m) = 1$  ■

**Следствие.** Пусть  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$  (кольцо). Тогда  $\bar{a}$  обратим по умножению (то есть  $\exists \bar{b} : \bar{a}\bar{b} = \bar{1}$ )  $\iff \bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$

**Замечание.** Если  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m^*$ , то обратный по умножению элемент определен однозначно, то есть  $\exists! \bar{b} : \bar{a}\bar{b} = \bar{1}$

**Доказательство.** Пусть  $ab_1 \equiv 1 \pmod{m}$  и  $ab_2 \equiv 1 \pmod{m}$ . Тогда  $a(b_1 - b_2) \equiv 0 \pmod{m}$ . Но  $(a, m) = 1$ , значит  $b_1 - b_2 \equiv 0 \pmod{m}$ , то есть  $b_1 \equiv b_2 \pmod{m}$  ■

**Теорема (Вильсона).** Пусть  $p$  – простое. Тогда  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$

**Доказательство.**  $\forall a \in \{1, 2, \dots, p - 1\} \exists! b \in \{1, 2, \dots, p - 1\} : ab \equiv 1 \pmod{p}$

Но в некоторых случаях может случиться  $b = a$ . Тогда:

$$a^2 \equiv 1 \pmod{p} \iff p \mid a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1) \iff \begin{cases} p \mid a - 1 \\ p \mid a + 1 \end{cases} \iff a \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

Получается, что  $2, 3, \dots, p - 2$  разбиваются на пары так, что каждая в произведении дает 1.

Следовательно,  $(p - 1)! = 1 \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{\text{пары}} \cdot (p - 1) = (p - 1) \iff (p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$  ■