משימה מס' 1 212321871 322450552

.1

א i. $n-1$

ii. n

iii. $(n-1)*(n-2)$

iv. $(n-1)^2$

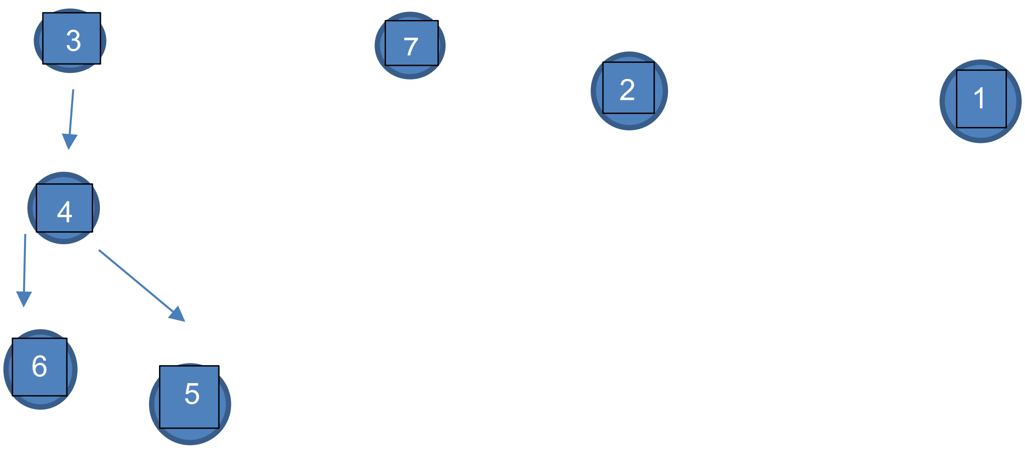
v. i. $n/2$

ii. $(n+1)/2$

ב.

i. 28

ii. מקודקוד 3



iii . 1

iv. 0

2 א.

הוכחה

נתון יהי גרף G = (E,V) מכוון וחסר מעגלים, $deg_{in}(V_r) = 0$ אם (V_r) הקודקוד היחיד בגרף שדרגת הכניסה שלו היא 0. נראה שלכל קודקוד בגרף יש מסלול מ V_r אליו.

$$u_i \epsilon V$$

אם

$$u_i = V_r$$

אז u_i ייתפס בסריקה (הרי הוא V_r וממנו תתחיל הסריקה).

אם

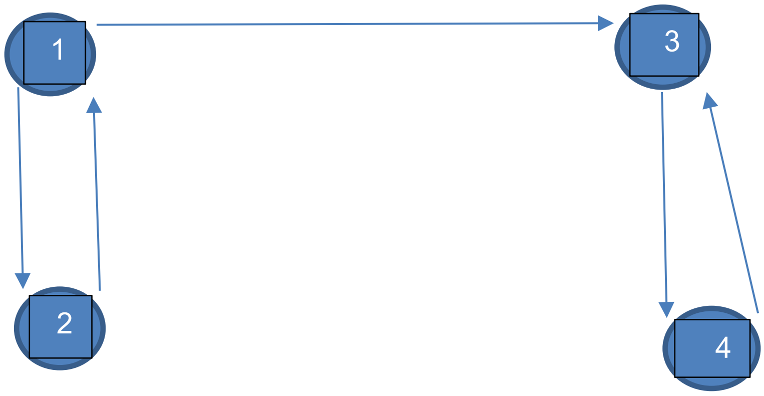
$u_i \epsilon V - V_r$ אז $deg_{in}(u_i) \neq 0$ ולכן קיים $(u_j, u_i)\ni E$ כך ש $u_j \epsilon V$
נעשה שוב את אותן בדיקות ל u_j כמו שעשינו ל u_i . וכך בעצם נראה שלא נעצור עד שנגיע ל V_r. כלומר V_r אב קדמון של כל קודקוד אחר בגרף ויש ממנו מסלול מכוון לכל קודקוד בגרף. ומכאן נובע שבסריקת *DFS* שתחל ב V_r יווצר עץ אחד בלבד ששורשו הוא V_r.

ב.

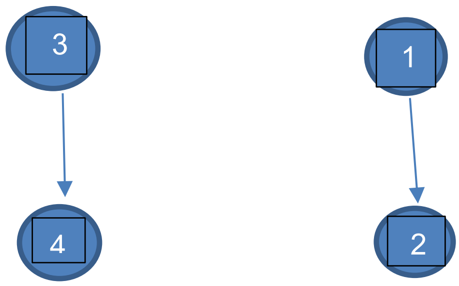
נתון יהי גרף G = (E,V) מכוון ו קיים G^{scc} בגרף צ.ל שאם קיים $C_r \epsilon\ G^{scc}$ כאשר C_r רכיב מקור יחיד אז קיים ריצת *DFS* על הגרף *G* המחזירה עץ יחיד. הוכחה

אם נתחיל את סריקת ה*DFS* מקודקוד $v_i \epsilon\ C_r$ סריקת ה*DFS* תעבור על כל הקודקודים אשר ישנם ברכיב C_r (כוון שC_r רכיב קשיר היטב נוכל להגיע לכל קודקוד ברכיב בסריקת ה*DFS*). לאחר מעבר על כל קודקודי הרכיב C_r , אנו יודעים מעצם הגדרת רכיב מקור יחיד שקיים מסלול מקודקוד כלשהו $v_i \epsilon C_r$ לקודקוד כלשהו $u_i \epsilon C_i$ לכל C_i ואז נוכל להגיע לכל קודקוד$u_j \epsilon C_i$ נובע מכך שC_i רכיב קשירות. כך ריצת ה*DFS* תעבור על כל רכיבי הקשירות בגרף ובהם על כל קודקודי הרכיב. כלומר, בסריקת *DFS* אשר מתחילה ב$v_i \epsilon\ C_r$ נחזיר עץ יחיד ששורשו הוא v_i.

ג.



כאשר ריצת הDFS שתחל מקודקוד 3 תלך בצורה הבאה:



ד.

יהא גרף G(V,E) מכוון ו קיים G^{scc}, G בעל *n-1* קודקודים שאינם מקור ועוד קודקוד מקור יחיד. טענה: אם קיימים k רכיבי מטרה אזי חסרים k צלעות כדי להפוכו לגרף קשיר היטב.

הטענה נכונה, נוכיח:

יהא $v,u \in V$ קודקודים בגרף G . נוסיף את k הצלעות כך שמכל רכיב מטרה נוסיף צלע אל קודקוד המקור. כלומר $(v_i \in C_i, s)$ כך ש *1<=i<=k* ו s קודקוד מטרה. נרצה להראות שלכל $v,u \in V$ יש מסלול מכוון ביניהם. u יכול להיות באחד משלושת סוגי הרכיבים: 1. רכיב שמכיל את קודקוד המטרה (יש 1 כזה) ואז במקרה זה יוכל להגיע לקודקוד המטרה כיוון והם

באותו רכיב קשיר היטב. מקודקוד המטרה יוכל להגיע לרכיב של *v* (מהגדרת קודקוד מטרה), ומשם להמשיך לקודקוד *v* (מהגדרת רכיב קשיר היטב).
2. רכיב שהיה רכיב מטרה, כעת ברכיב זה יש צלע שחוזרת אל קודקוד המטרה ולכן נוכל להגיע אל הקודקוד שקיימת ממנו צלע אל קודקוד המטרה (על פי הגרדת רכיב קשיר היטב), משם אל קודקוד המטרה (קיימת צלע) ואז להמשיך כמו במקרה 1.
3. רכיב שאינו היה רכיב מטרה ולא מכיל את קודקוד המקור. מרכיב זה חייבת להיות לפחות צלע אחת אל רכיב אחר (אחרת היה רכיב מטרה) נלך אל רכיב אחר עד שנגיע למקרה 2. נדע בוודאות שבסוף נגיע למקרה 2 כיוון ומספר רכיבי הקשירות שהם לא היו רכיבי מטרה ולא מכילים את הקודקוד מקור הם (*n-k-1*) כלומר לפחות (*n-k-1*) צלעות בין רכיבי קשירות שונים ובהם לא יכול להיות מעגל. כיוון ואם היה מעגל בין הרכיבים, כל הרכיבים היו הופכים לרכיב קשיר היטב אחד ולכן זה לא יכול להיות. על אותו עיקרון אם היה צלע לרכיב שמכיל את קודקוד המקור (היה מעגל שנהפך לרכיב יחיד). כלומר מעיקרון שובך היונים אחד מהרכיבים חייב להגיע לרכיב שהיה רכיב מטרה, ובגלל שאין מעגלים בין שאר הרכיבים אז חייב להיות מסלול בין הרכיבים לרכיב שמוביל לרכיב שהיה רכיב מטרה. ואז משם נמשיך כמו מקרה 2.

הראנו שבין כל שני קודקודים בגרף לאחר הוספת *k* צלעות קיים מסלול מכוון. ולכן הגרף לאחר הוספת *k* הצלעות הוא אכן קשיר היטב.

ה.

גרף קשיר:

גרף לא מכוון: גרף לא מכוון נקרא קשיר כשאר בגרף G(V,E) קיים לפחות מסלול 1 בין כל שני קודקודים $v_i, v_j \epsilon V$ בגרף.

גרף מכוון: לגרף G(V,E) מכוון נקרא קשיר כאשר גרף G'(V,E) שהינו גרף בעל אותם קודקודים וצלעות זהות כמו של גרף G אך הצלעות אינן מכוונות כלומר הגרף G' לא מכוון. ולכן גרף G יקרא קשיר כאשר G' גרף לא מכוון קשיר.

שאלה 3. א.

האלגוריתם:

נבנה גרף G'=(V',E') מתוך G כך ש $V' = V \cup \{v_i | 1 <= i < k\}$

$E' = E \cup \{(v_i, v_{i+1}) | 1 \leq i < k-1\} \cup \{(x, v_1), (v_{k-1}, y)\} - \{(x, y)\}$

G' גרף לא ממושקל

נריץ על BFS G' מקודקוד S ונחזיר לכל $v \in V$ את d(v)

הוכחת נכונות:

כל מסלול שמשקלו k בגרף G אורכו k בגרף G'.

בגרף G בכדי לקבל מסלול מקודקוד s שמשקלו k+c : מקרה 1 עלינו לעבור ב c צלעות שמשקלן 1 ועל הצלע שמשקלה הוא k. מקרה 2 לעבור על k+c צלעות במשקל 1. בגרף G' על פי פונקציית ההמרה בכדי לקבל מסלול מקודקוד s שמשקלו k+c עלינו לעבור על k+c צלעות בגרף שמשקלן 1, במקרה 1 הגרף פוצל כך שהצלע שמשקלה k הפכה לk צלעות שמשקלן 1 ובכך הופכת למקרה 2 בגרף G ומקרה 2 נשאר זהה לגרף G. כעת בגרף G' כל המשקלים שווים 1 ולכן אפשר להתייחס אליו כאל גרף לא ממושקל שמשקל המסלול שווה לאורכו. ריצת BFS על גרף לא ממושקל מחזירה את המרחקים בגרף G' או במקרה שלנו את המשקלים ובכך נוכל לבחור את המסלול הקל ביותר בגרף G.

ניתוח זמן ריצה

יצירת G' $O(k) = O(1)$

ריצת BFS $O(V' + E') = O(V + E)$

לכן זמן הריצה הסופי הוא $O(V + E) + O(1) = O(V + E)$

ב.

האלגוריתם:

נבנה גרף G'=(V,E') מתוך G כך *E' = E-{(x,y)}*

נריץ *BFS* על גרף *G'* מקודקוד *s* נבדוק אם $d(y) = \infty$ וגם $d(x) \neq \infty$.

אם לא, נחזיר לכל $v \in V$ את d(v) כמסלול הקל ביותר.

אם כן, עלינו להריץ *BFS* על גרף *G'* מקודקוד *y* נגדיר את המרחקים של ה *BFS* החדש כ *p[]* .
כעת נעבור על כל הקודקודים $v \in V$ אם *d(v) ≠ ∞* אז נחזיר אותו כמסלול הקל ביותר מ *s* ל *v*
אחרת, (*d(v) = ∞*), אז המסלול הקל ביותר מ *v* ל *s* יהיה *d(x) + k + p[v]* .

הוכחת נכונות:

המסלול הקל ביותר בגרף G בהכרח לא יעבור בצלע (x,y) כיוון ומשקלה k והוא גדול מאוד אלא אם זהו המסלול היחידי שלו. לכן אם נחסיר את צלע (x,y) לא נשפיע על קודקודים שקיים להם מסלול מ s אליהם שלא עובר דרך (x,y) . הרצת ה bfs מוצאת מרחקים וכיוון והגרף לא ממושקל הם זהים למשקלים. וכיוון ואורך המסלול שווה לסכום אורכי תתי המסלול שמרכיבים אותו אזי על הקודקודים שמסלול הקל ביותר אליהם עובר דרך צלע (x,y) משקל המסלול הקל ביותר אליהם יהיה:

w(s,x) + w(x,y) + w(y,v) = w(s,v) = d(s,x) + k + d(y,v)

מעקרון שמשקל המסלול שווה לסכום משקלי תתי המסלולים.

ניתוח זמן ריצה

יצירת 'G $O(1)$

ריצת BFS $2 * O(V + E') = O(V + E)$

לכן זמן הריצה הסופי הוא $O(V + E) + O(1) = O(V + E)$

.4

האלגוריתם:

נריץ דייקסטרא על גרף G מקודקוד v_0 לאחר מכן נרוץ על כל הקודקודים $v \in V$ ונמצא את כל הקודקודים אשר להם מתקיים $A = \{v|(v, v_0) \in E\}$ ונחזיר את המינימום בין d(v)+w(v, v_0) לכל $v \in A$

הוכחת נכונות:

נניח שהמעגל הקל ביותר הוא $v_0, v_1, \dots, v_n, v_0$, הדייקסטרא יימצא את סכום המשקלים המינימלי מ v_0 ל v_n (כך הוא עובד) וזה בעצם המשקל של כל הצלעות במסלול $v_0, v_1, \dots, v_n$ כיוון והוא המינימלי. ו w(v, v_0) הוא מה שנותר. לכן הסכום שלהם הוא אכן משקל המעגל והוא בהכרח קטן שווה מבין כל d(v)+w(v, v_0) (משקלי המעגלים) לכל $v \in A$ כך ש $A = \{v|(v, v_0) \in E\}$ והוא יוחזר בפלט האלגוריתם.

ניתוח זמן ריצה:

ריצת האלגוריתם דייקסטרא $O(|V|\log|V| + |E|)$

מציאת על הקודקודים אשר להם מתקיים $A = \{v|(v, v_0) \in E\}$ $O(E)$

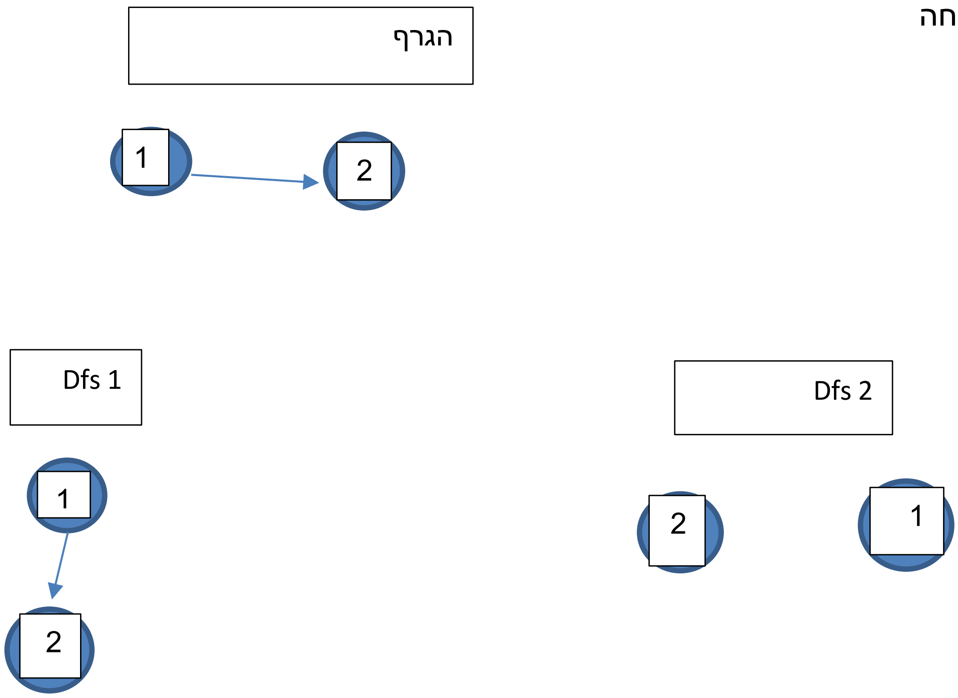
סה"כ $O(|V|\log|V| + |E|) + O(E)$

5א. הפרכה

נניח בשלילה שקיים גרף G ובו מעגל באורך מקסימאלי C. מסלול המעגל הינו $v_0, v_1, \dots, v_{c-1}, v_0$.

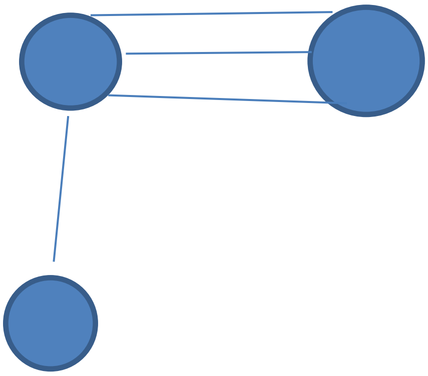
אנו יכולים ללכת על מעגל זה שוב וליצור מעגל $v_0, v_1, \dots, v_{c-1}, v_0, v_1, \dots, v_{c-1}, v_0$. אורך מעגל זה הוא 2*C והינו מוכל ב G . סתירה! מעגל C אינו מקסימלי וזה לא מתיישב עם הנחת היסוד שלנו. לכן נובע שלא קיים מעגל באורך מקסימלי בגרף G .

5ב. הוכחה



ג.

i. הפרכה



קודקוד 1 – צלע אחת

קודקוד 2 – 3 צלעות

קודקוד 3 – 4 צלעות

ii.

הוכחה

יהא גרף G בעל n קודקודים.

נניח בשלילה שבגרף לא קיים זוג קודקודים בעלי מספר שכנים זהה. מכך נובע שסדרת הדרגות היא

0, 1, 2, ... , n-1 כיוון ומספר השכנים המינימלי הוא 0 (לא יכול להיות מספר שלילי של שכנים), ומספר השכנים המקסימלי הוא n-1 (כל הקודקודים חוץ מאותו קודקוד). אם נסתכל על הקודקוד שלו n-1 שכנים, אפשר לאמר שהוא גם שכן לכל שאר הקודקודים (בגלל שהגרף לא מכוון), כלומר לא קיים קודקוד שלו אין שכנים. זה לא מתיישב עם כך שקיים קודקוד עם דרגה 0. סתירה!!! הנחת היסוד שלנו שגויה ובכך הוכחנו שבגרף לא מכוון ולא ממושקל בהכרח קיימים זוג קודקודים בעלי כמות שכנים זהה.