עילי כץ 212321871 ניצן בר אל 322450552

1)

א. הטענה נכונה, הסבר:

כאשר קיים מספר מסלולים קלים ביותר אין משמעות לסדר הבחירה של אלגוריתם בלמן – פורד (הוא יבחר לפי הסדר שיקבל מהגרף). דייקסטרא לעומת זאת ירוץ באופן גרידי ויבחר בקודקוד שמשקל המסלול אליו מהמקור מינימלי באותו הרגע. ניתן דוגמה לכך שמצב זה אכן קיים:

G = ({1,2,3}, {(1,3, 2), (1,2,1), (2,3,1)}

משקל המסלול הקצר ביותר מ 1 ל 3 הוא 2.

אלגוריתם בלמן – פורד שרץ על פי הסדר יחזיר את המסלול (1,3) [1,3].

אלגוריתם דייקסטרא שרץ גרידי יחזיר (1,2),(2,3) [1,2,3] .

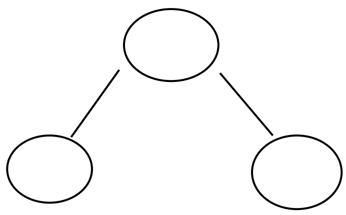
ב. הטענה לא נכונה, הסבר:

אלגוריתם דייקסטרא מוציא מהתור כל קודקוד שסיים לעבור על הצלעות היוצאות ממנו. ולכן כאשר נגיע אל קודקוד שכבר נעשו הקלות ממנו בעבר (מעגל) אנחנו לא נמשיך את מעגל זה כיוון והקודקוד איננו בתור ולכן לא ייתכן מעגל אינסופי (ובכללי מעגל לא פשוט).

ג.

הטענה לא נכונה, הסבר:

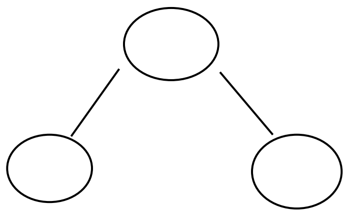
Bfs תלוי בקודקוד מקור, בחירת קודקוד מקור שאינו אחד מקצוות קוטר כלשהו יצור לנו עץ שעומקו נמוך ממש מאורך הקוטר בגרף. דוגמה:



עומק: 1 קוטר: 2

ד.

Bfs תלוי בקודקוד מקור, בחירת קודקוד מקור שאינו אחד מקצוות קוטר כלשהו יצור לנו עץ שעומקו נמוך ממש מאורך הקוטר בגרף. דוגמה:



עומק: 1 קוטר: 2

עילי כץ 212321871 ניצן בר אל 322450552

2)

א. הגדרה:

המסלול הקל ביותר אשר עובר על גרף G(V,E) גרף לא מכוון וממושקל לפי הקודקודים כלומר יש לו פונקציה w(v_i) פונקציית משקלים לכל קודקוד v_i∍V יש משקל חיובי.

המסלול הקל ביותר אשר עובר בין הקודקוד t לקודקוד s הינו המסלול (t, $v_i, v_j, \ldots, s$) כאשר חיבור פונקציית המשקלים של כל קודקוד במסלול ((w(t)+w(v_i)+w(v_j)…..+w(s הינו המינימאלי מבין כל המסלולים הפשוטים האפשריים בין קודקוד t לקודקוד s .

ב.

נשתמש ברדוקציה. ניצור G' = (V, E') כך ש G' גרף מכוון וממושקל על ידי הצלעות. כל צלע בגרף תהיה אמנם דו כיוונית אך נפרק את זה כך שכל E∍(v,u) תיוצג
E'∍(v,u,w(u)),(u,v,w(v)) כלומר משקל כל קשת מכוונת תהיה משקל הקודקוד בגרף המקורי אליה הקשת נכנסת ב G' .

נריץ דייקסטרא מ s על G' נשחזר את המסלול מ s ל t זה יהיה המסלול הקל ביותר משקלו יהיה *d[t] + w[s]* .

ג.

נגדיר את המסלול הקל ביותר על הגרף G(V,E) כ $p = (s, v_1, \ldots, v_n, t)$ ואת משקלה $W(p) = \sum_{v_i \epsilon P} W(v_i)$

מההגדרה $W(p) \leq W(k)$, k הוא מסלול כלשהו מ s ל t . הדייקסטרא על G' יחזיר מסלול כלשהו מ s ל t נגדיר מסלול זה כ L . משקל מסלול זה הוא בעצם סך משקלי הצלעות שעובר בהם ב E' . וזה על פי האלגוריתם סך משקל הקודקודים אליה מגיעה כל צלע ב E אז בעצם L $d[t] = W(L) – W(s)$ כיוון ומשקל s לא נכנס בחישוב המשקל הקל ביותר בדייקסרא כי ממנו מתחילים ואז ממשיכים כל פעם ומוסיפים את המשקל אליה הצלע נכנסת. כיוון והדייקסטרא מחזיר משקל מינימלי ו $W(s)$ קבוע אזי $W(L)$ הוא משקל המסלול הקל ביותר מ s ל t . ומכך $W(L) = W(p)$, כלומר L הוא גם המסלול הקל ביותר מ s ל t בגרף G .

ד.

מכוון שגרף G הינו גרף קשיר נוכל על ידי מעבר על כל הצלעות בגרף להגיע לכל הקודקודים ובאלגוריתם שלנו כל צלע אנו הופכים לשני צלעות מכוונות בכיוונים מנוגדים לכן זמן הריצה שלה שווה ל $O(2 * |E|) = 2 * (|E|) = O(|E|)$

זמן הריצה של הרצת האלגוריתם דייקסטרא שווה $O(|E| + |V| * \log|V|)$

זמן הריצה של שחזור המסלול הקל ביותר שווה $O(|V|)$

זמן הריצה של הוספת משקל הקודקוד הראשון שווה $O(1)$

לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(|E| + |V| * \log|V|)$

עילי כץ 212321871 ניצן בר אל 322450552

3)

א.

מסלול $p = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n}, v_{2n+1})$ ייקרא מסלול שחור – לבן לסירוגין אם לכל $v_i \epsilon P$

ש i זוגי אזי $(v_i, v_{i+1}) \epsilon E_w$ וגם $(v_{i-1}, v_i) \epsilon E_b$.

ב.

ניצור $G' = (V', E')$ כך ש G' גרף דו חלקי V' יהיה העתקה של כל קודקוד $v \epsilon V$ פעמיים פעם אחת ל V_1 כ v_1 ופעם אחת ל V_2 כ v_2 כך ש $|V_1| = |V_2| = |V|$ ו $V_1 \cup V_2 = V'$.

כעת נעבור על כל הצלעות בגרף ולכל $v,u,k,t \epsilon V$ וכל צלע שחורה $(v,u) \epsilon E_b$ נעתיק אותה ל G' כך (v_1, u_2) כך ש $v_1 \epsilon V_1, u_2 \epsilon V_2$ וכל צלע לבנה מסוג $(k,t) \epsilon E_w$ נעתיק אותה ל G' כך (k_2, t_1) כך ש $t_1 \epsilon V_1, l_2 \epsilon V_2$.

כעת נריץ על G' דייקסטרא מ $s_1 \epsilon V_1$ ונשחזר את המסלול מ $t_2 \epsilon V_2$ עד חזרה ל s_1 .

ג.

המסלול ב G' מ $s_1 \epsilon V_1$ ל $t_2 \epsilon V_2$ יהיה בהכרח מסלול שחור לבן לסירוגין כיוון וצלע היוצאת מקבוצת V_1 הינה שחורה לכן נתחיל משחור ונגיע לשכן של s_1 שהוא בהכרח מקבוצת V_2 מכיוון ועל פי הגדרת G' אין שכנים הנמצאים באותה קבוצת קודקודים. הצלע הבאה שימצא האלגוריתם הוא מקודקוד השייך ל V_2 אל קודקוד השייך לקבוצת הקודקודים V_1 וזוהי בהכרח צלע לבנה (על פי בניית G'). כך עד שנגיע לצלע מקודקוד השייך ל V_1 ויגיע אל t_2 בצלע לבנה (על פי בניית G'). לכן כל מסלול מ $s_1 \epsilon V_1$ ל $t_2 \epsilon V_2$ יהיה בהכרח מסלול שחור לבן לסירוגין חוקי. דייקסטרא יימצא את הקל מביניהם (אם קיים).

ד.

זמן הריצה של העתקת הקודקודים שווה ל $O(2 * |V|) = 2 * (|V|) = O(|V|)$

זמן הריצה של חיבור הצלעות ב G' עקב מעבר על צלעות G שווה $O(|E|)$

זמן הריצה של הרצת האלגוריתם דייקסטרא שווה $O(|E| + |V| * \log|V|)$

זמן הריצה של שחזור המסלול הקל ביותר שווה $O(|V|)$

לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(|E| + |V| * \log|V|)$

עילי כץ 212321871 ניצן בר אל 322450552

4)

א.1

נניח בשלילה כי קיים מסלול $Ps,v = (s, v_2, v_3, \dots, v)$ קל ביותר אשר מורכב מלפחות צלע לא שמושית אחת, נגדיר את הצלע הלא שימושית הראשונה כ-(v_i, v_{i+1}) $v_i, v_{i+1} \epsilon V$.

כלומר קיים מסלול קל יותר מs לv_{i+1} מאשר $Ps, v_{i+1} \subseteq Ps, v$ וזה נובע מהגדרת צלע לא שימושית. נגדיר את המסלול הקל יותר מs לv_{i+1}א כ-Q. נגדיר את

$Q \cup (Ps, v \setminus Ps, v_{i+1}) = P's, v$ אזי $W(P's,v)<W(Ps,v)$ כלומר Ps,v אינו המסלול הקל ביותר (מצאנו מסלול קל יותר) סתירה להנחה. לכן, כל צלע לא שימושית נוכל להקל על משקל המסלול. ולכן, מסלול המורכז אך ורק מצלעות שימושיות הינו מסלול הקל ביותר

א2.

אם קיים צלע לא שימושית בPs,v נוכל להקל על המסלול (ראה הוכחה 4,א1) ולכן נמצא מסלול קל יותר מs ל v אזי Ps,v איננו המסלול הקל ביותר מs ל v.

א3.

המסלול הכמעט קל ביותר אינו יכול להיות מורכב מצלעות שימושיות בלבד (ראה הוכחה 4,א1) אחרת היה המסלול הקל ביותר לכן חייב להיות בו לפחות צלע לא שימושית אחת.

אם קיים יותר מצלע לא שימושית אחת במסלול מs ל v אזי נוכל להקל על המסלול (ראה הוכחה 4,א1) אך כיוון שעדיין נותרו לנו צלעות לא שימושיות במסלול אז הוא אינו המסלול הקל ביותר. כך עד שישאר לנו צלע לא שימושית אחת בלבד (שהקלה עליה תהפוך את המסלול להיות המסלול הקל ביותר). ולכן המסלול הכמעט קל ביותר חייב להכיל בתוכו בדיוק צלע לא שימושית אחת.

א4.

מכוון שהמסלול Ps,v הכמעט קל ביותר מs ל v מורכב מצלעות שימושיות וצלע אחת בודדת לא שימושית. אם הצלע הלא שימושית היא $e=(u1,u2)$ אזי $Ps,u1$ המוכל בPs,v מסלול מורכב אך ורק על ידי צלעות שימושית ולכן מסלול זה הינו המסלול הקל ביותר מs ל $u1$ (ראה הוכחה 4,א1). בנוסף $Pu2,v$ המוכל בPs,v מסלול מורכב אך ורק על ידי צלעות שימושית ולכן מסלול זה הינו המסלול הקל ביותר מ$u2$ ל v (ראה הוכחה 4,א1). מש"ל

עילי כץ 212321871 ניצן בר אל 322450552

ב.

האלגוריתם:

אנו מניחים שמספר המסלולים הקלים ביותר מ s ל t הינו מספר קבוע בגודל $O(1)$.

לאחר הרצת דייקסטרא מ s (שתסווג לנו גם מה היא צלע שימושית ומה לא לפי צלע מאב, $(\pi.v, v)$ לכל v היא צלע שימושית. יש $V-1$ צלעות שימושיות). נבחר כל צלע לא שימושית (u, v) כך ש v מוכלת במסלול קל ביותר מ s ל t (נצטרך לשמור את כל המסלולים הקלים ביותר). ונשמור מבין כל הצלעות הלא שימושיות שבדקנו את הצלע שהערך המינימלי של $d[u] + w(u, v) + (d[t] - d[v])$. זהו המשקל של המסלול הכמעט ביותר. על מנת למצוא אותו נשחזר את המסלול הקל ביותר שמכיל את v מ t ועד ל v ואז נלך על הצלע (u, v) ואז נשחזר את המסלול הקל ביותר שמצא הדייקסטרא מ s ל u . והרי לנו מסלול כמעט קל ביותר.

הסבר נכונות:

אנו בודקים את כל המסלולים שמכילים בדיוק צלע לא שימושית אחת מ s ל t . כיוון ומ s ל u הלכנו על המסלול הקל ביותר אז לפי (2,א,4) אם היה צלע לא שימושית במסלול זה הוא לא היה הקל ביותר. מ v ל t הלכנו על תת מסלול של המסלול הקל ביותר מ s ל t ולפי המשפט תת מסלול של מסלול קל ביותר הוא מסלול קל ביותר אז זהו המסלול הקל ביותר מ- v ל t ולכן לפי (2,א,4) אז גם שם השתמשנו רק בצלעות שימושיות ולכן הצלע הלא שימושית היחידה היא (u, v) והמסלול הקל ביותר שעובר בדיוק בצלע לא שימושית אחת הינו המסלול הכמעט קל ביותר.

הסבר חישוב המשקל הוא כזה, המשקל של המסלול עד ל v הוא טריוויאלי וכיוון וכבר אמרנו שמ v ל t אנחנו הולכים על תת מסלול של המסלול שמצא הדייקסטרא אזי ההפרש בין המשקלים יהיה בדיוק המשקל של המסלול הקל ביותר מ v ל t .

עוד הערה שראוי לציין: איך נדע שלא פספסנו מסלול קל יותר שהוא לא הקל ביותר על ידי שימוש בצלע לא שימושית שלא מגיעה לקודקוד שמוכל במסלול הקל ביותר מ s ל t ?
נגדיר שוב את הצלע הלא השימושית הזאת כ (u, v) רק ש v לא שייך למסלול הקל ביותר מ s ל t אזי נניח ונלך בצלעות שימושיות בלבד עד ל t . באיזשהו שלב נצטרך להתלכד עם המסלול הקל ביותר (גם אם זה רק בקודקוד המטרה t) אך זה אומר שהגענו לקודקוד מסוים בהכרח לא בדרך הקלה ביותר ולכן הצלע האחרונה לפני ההתלכדות הינה גם לא שימושית והרי לנו שבמסלול זה לפחות 2 צלעות לא שימושיות (צלע הבדיקה והצלע של לפני ההתלכדות) ולכן מ (3,א,4) זה בהכרח לא מסלול כמעט קל ביותר מ s ל t .

עילי כץ 212321871 ניצן בר אל 322450552

סיבוכיות זמן ריצה:

הרצת דייקסטרא ושמירת מסלולים – $O(|V|log(|V|) + |E|)$

בדיקת צלעות לא שימושיות והאם מחוברות למסלול הקל ביותר ושמירת המשקל המינימלי מביניהם - $O(|E|-|V|) *O(1) = O(|E|-|V|)$

שחזור המסלול הכמעט קל ביותר – $O(|E|)$

זמן הריצה המשמעותי הוא הדייקסטרא ולכן סה"כ זמן הריצה הכולל הוא $O(|V|log(|V|) + |E|)$.