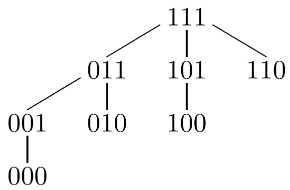
Devoir sur table

UPMC — Master d'Informatique — STL - M1
UE Algorithmique avancée

10 novembre 2004

1 Arbres binômiaux [5 points]

On étiquette l'arbre binômial B_k (formé de 2^k nœuds) en ordre postfixé, chaque étiquette (de 0 à $2^k - 1$) étant un mot binaire sur k bits. Par exemple, pour B_3, on obtient :



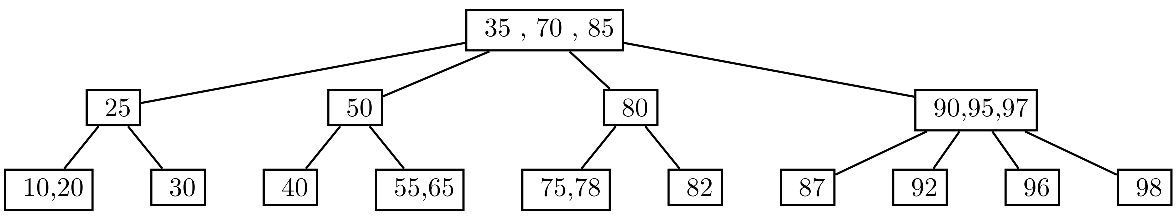
1. Dessiner l'arbre binômial B_4 dont les nœuds sont étiquetés en binaire en ordre postfixé.
2. Dans B_k, soit x un nœud à profondeur i, dont l'étiquette est e. Montrer que le nombre de 1 dans e est égal à $k - i$.
3. Combien d'étiquettes de B_k contiennent exactement $k - i$ bits égaux à 1 ?
4. Montrer que le degré d'un nœud est égal au nombre de 1 à droite du 0 le plus à droite de son étiquette (et si l'étiquette ne contient pas de 0, le degré du nœud est égal au nombre de 1).

2 Coût amorti [5 points]

Dans cet exercice, on considère l'insertion aux feuilles dans un arbre 2-3-4, avec éclatement des 4-nœuds à la descente (algorithme vu en cours) et on s'intéresse à sa complexité, comptée en nombre d'éclatements. Calculer le coût amorti d'une insertion dans un arbre 2-3-4, en utilisant la méthode du potentiel. Pour un arbre 2-3-4 A ayant n_4 4-nœuds et n_3 3-nœuds, on prendra comme potentiel $\Phi(A) = 2n_4 + n_3$.

3 Concaténation d'arbres 2-3-4 [10 points]

La figure suivante montre un arbre 2-3-4, T_0, de hauteur 2, ayant un nœud à profondeur 0 (la racine), quatre nœuds à profondeur 1 et dix nœuds à profondeur 2 (ces nœuds sont les *feuilles* de T_0).

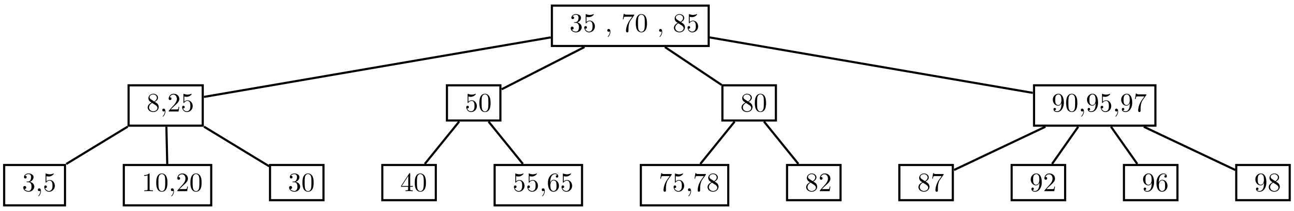


Le but de l'exercice est de définir les fonctions calculant la hauteur et le nombre de nœuds à profondeur i dans un arbre 2-3-4, puis de définir la concaténation de deux arbres 2-3-4. **Toutes ces définitions seront implantées en utilisant les primitives sur les arbres 2-3-4 données en cours.**

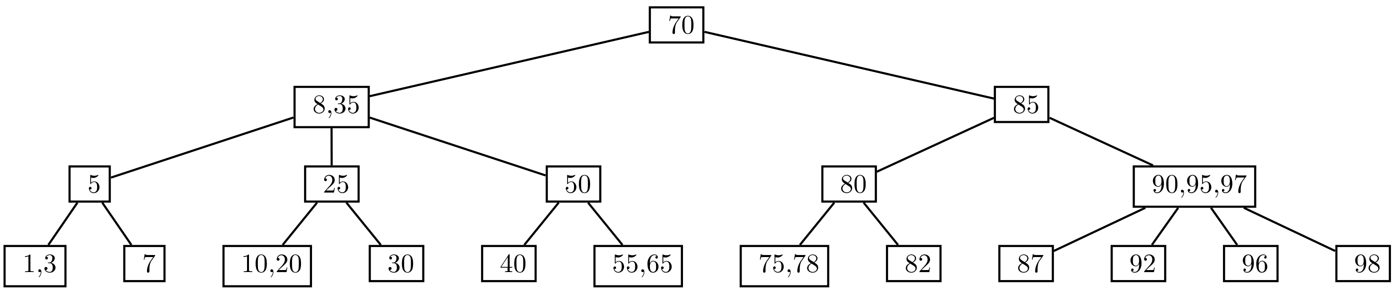
1. Écrire une définition de la fonction `hauteur`, qui renvoie la hauteur d'un arbre 2-3-4
2. Écrire une définition de la fonction `nb-noeuds-prof`, qui étant donnés un arbre 2-3-4 T et un entier i renvoie le nombre de nœuds à profondeur i dans T.
3. Calculer l'expression du nombre maximum et du nombre minimum de nœuds à profondeur i dans un arbre 2-3-4. En déduire un majorant de la hauteur d'un arbre 2-3-4 ayant n feuilles.

4. On considère deux arbres 2-3-4, T_1 et T_2, tels que toutes les étiquettes de T_1 sont strictement inférieures à toutes les étiquettes de T_2, et x une étiquette strictement comprise entre les étiquettes de T_1 et celles de T_2. Il s'agit de concaténer T_1, x et T_2 pour en faire un arbre 2-3-4.

- Si les hauteurs de T_1 et T_2 sont égales, il suffit de construire l'arbre ayant pour racine le nœud d'étiquette x, pour sous-arbre gauche T_1 et pour sous-arbre-droit T_2.
- Si h_1, la hauteur de T_1, est strictement inférieure à h_2, hauteur de T_2, soit U le sous-arbre dont la racine est à profondeur $h_2 - h_1$ sur la branche gauche de T_2. On concatène T_1, x et U en incluant x dans le nœud père de U, de telle sorte que toutes les feuilles de l'arbre résultant sont au même niveau.
  - Si le nœud père de U n'était pas un 4-nœud, on a terminé, comme le montre l'arbre ci-dessous, qui est la concaténation de l'arbre T_1 réduit à une feuille contenant les valeurs $(3, 5)$, de l'étiquette $x = 8$ et de l'arbre $T_2 = T_0$.



  - Si le nœud père de U était un 4-nœud il faut rétablir la situation par des éclatements. Par exemple la concaténation de l'arbre $T_1 =< 5, (1, 3), 7 >$, de l'étiquette $x = 8$ et de l'arbre $T_2 = T_0$ donne l'arbre ci-dessous.



- Si $h_1 > h_2$ on agit de manière analogue sur la branche droite de T_1.

Quel est le résultat de la concaténation de l'arbre $T_1 = T_0$, de l'étiquette $x = 100$ et de l'arbre T_2 réduit à une feuille contenant les valeurs $(105, 110, 120, 125)$.
Décrire l'algorithme de concaténation.
Déterminer le nombre maximum d'éclatements.
5. Il s'agit à présent de concaténer deux arbres 2-3-4, T_1 et T_2, tels que toutes les étiquettes de T_1 sont strictement inférieures à toutes les étiquettes de T_2, *sans l'intermédiaire* d'une étiquette x.
Expliquer quels sont les différents cas de figure possibles et comment étendre l'algorithme précédent.