Introduction au traitement de signal numérique

Digital Signal Processing

Pierre Boulet – équipe WEST

Pierre.Boulet@lifl.fr

Plan

- Signaux
- Convolution
- Transformée de Fourier
- Filtres (FIR, IIR)
- Pour aller plus loin

Signaux

Qu'est-ce qu'un signal ?

- définition :
  Quantité électrique qui traverse un canal sous la forme d'une tension ou d'un courant, et qui est utilisée pour transmettre des informations.
- note :
  Le signal électrique (impulsions), le signal sonore (sons) et le signal lumineux (voyants) sont des types de signaux.
  `[Office de la langue française, 2000]`

Traitement numérique des signaux

- signaux viennent du monde réel
  - interactivité
  - contraintes de temps réel
  - besoin de mesure des signaux
- traitement numérique
  - discrétisation
  - perte d'information entre les échantillons

Domaines d'applications

- multimédia
  - son, image, vidéo
- télécommunications
  - traitement d'antennes
  - compression de données
- sonar, radar
- contrôle de processus

Numérisation

- *discrétisation*
  - du temps (échantillonnage)
  - de l'amplitude (quantification)
- conséquences
  - quantification = ajout d'un *bruit blanc*
    - sauf dans le cas de signaux quasi-constants
  - échantillonnage correct si
    - reconstruction du signal analogique possible
    - *signal ne comprend pas de composantes de fréquence > 1/2 fréquence d'échantillonnage* (théorème de Shannon ou Nyquist)
      - cas de l'information dans le *domaine fréquentiel*
    - ou estimation en fonction des objectifs
      - cas de l'information dans le *domaine spatial*

Analyse multi-vitesse

- idée : remplacer des filtres analogiques peu performants dans les convertisseurs A/N par des filtres numériques
- méthode en entrée
  - échantillonner beaucoup plus vite
  - appliquer un filtre passe-bas numérique
  - *décimer* le signal
- méthode en sortie
  - *interpoler* le signal
  - appliquer un filtre passe-bas numérique
  - reconstruire le signal analogique

Systèmes linéaires

- propriétés nécessaires
  - homogénéité

$$f(x[n]) = y[n] \Rightarrow f(kx[n]) = ky[n]$$

  - additivité

$$f(x_1[n]) = y_1[n], f(x_2[n]) = y_2[n] \Rightarrow f(x_1[n]+x_2[n]) = y_1[n]+y_2[n]$$

  - $+$ invariance par translation

$$f(x[n]) = y[n] \Rightarrow f(x[n+s]) = y[n+s]$$

- *si l'entrée d'un système linéaire est une sinusoïde, sa sortie est une sinusoïde de même fréquence*

Superposition

fondation du TS

- décomposition en une *somme pondérée de signaux élémentaires*
- il suffit de connaître l'effet du système sur les signaux élémentaires pour le connaître sur tous les signaux
  - si le système est *linéaire*
- décompositions majeures
  - en *impulsions*
  - de *Fourier* (somme de sinusoïdes)
- décompositions mineures
  - en marches
  - pair/impair
  - entrelacée

Convolution

Fonction δ et réponse en impulsion

- fonction δ
  - impulsion élémentaire
  - $\delta[0] = 1, x \neq 0 \Rightarrow \delta[x] = 0$
- réponse en impulsion
  - effet du système sur le signal $\delta[n]$
  - notée $h[n]$
- pour une impulsion quelconque
  - $i[n] = a\delta[n - s]$
  - réponse : $ah[n - s]$

Convolution

- décomposition du signal en impulsions
- *en connaissant la réponse en impulsion, on connaît tout*
- notation

$$x[n] * h[n] = y[n]$$

- calcul

$$y[i] = \sum_j h[j] \times x[i-j]$$

Deux vues

- *réponse en impulsion*
  - chaque point du signal d'entrée fournit une contribution au signal de sortie
  - chaque point du signal de sortie reçoit une contribution de plusieurs points du signal d'entrée multipliés par la réponse en impulsion *inversée*
- *somme pondérée des entrées*
  - chaque point du signal de sortie est une somme pondérée de points du signal d'entrée

Propriétés

- propriétés mathématiques de la convolution
  - commutativité
  - associativité
  - distributivité par rapport à la somme
- exemples
  - voir ch. 7 du Scientist and Engineer's Guide to DSP

Corrélation

- mesure la *ressemblance entre deux signaux*
  - utilisée dans les systèmes de détection (radar, sonar, ...)
- formulation mathématique
  - signal c est la corrélation entre signaux a et b

$$c[n] = a[n] * b[-n]$$

  - calcul

$$c[i] = \sum_j a[j] \times b[i+j]$$

Implémentation

- calcul coûteux
  - convolution d'un signal de N échantillons avec une réponse impulsionnelle de M échantillons
  - $N \times M$ *multiplications-accumulations*
- trois approches
  - travailler sur des *signaux courts* et utiliser les *entiers* plutôt que les flottants
  - utiliser des processeurs optimisés pour les mul-acc
  - utiliser l'algo de *FFT-convolution*

Transformée de Fourier

Pourquoi les nombres complexes ?

- analyse de circuits électriques (RLC)
  - en réels :

$$v = Ri, v = L\frac{di}{dt}, i = C\frac{dv}{dt}$$

  - en complexes (transformation phaseur) :

$$V = Z \times I$$

    - résistance : $Z = R$
    - inductance : $Z = j\omega L$
    - capacité : $Z = -j/\omega C$
  - remplacement d'équations *différentielles* par des équations *algébriques*

Représentation complexe d'une sinusoïde

- relation d'Euler

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

- d'où

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j(-\omega)t} + \frac{1}{2}e^{j\omega t}$$
$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2}je^{j(-\omega)t} - \frac{1}{2}je^{j\omega t}$$

- présence des *fréquences négatives* dans le *spectre*

Transformée de Fourier Discrète

définition

- décomposition d'un signal en somme de sinusoïdes
  - signal *discrétisé*
  - à support fini (N échantillons)
  - d'où *spectre périodique*
  - utilisation des exponentielles complexes
- formule (*équation de synthèse*)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

- $x[n]$ et $X[k]$ *complexes*
  - rien n'oblige $x[n]$ à contenir autre chose que des réels

Transformée de Fourier Discrète

calcul

- formule (*équation d'analyse*)

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

  - *corrélation* avec chaque exponentielle de base
  - marche parce que les exponentielles sont orthogonales
- équivalence entre $X[k]$ et $x[n]$
  - oui grâce au *théorème de Nyquist*
  - contiennent exactement la même information
- transformée de Fourier inverse
  - utiliser l'équation de synthèse

Autres transformées de Fourier

- domaine temporel peut être
  - *continu* ou *discret*
  - *périodique* ou *apériodique*
- 4 transformées de Fourier
  - signal discret dans un domaine $\Rightarrow$ périodique dans l'autre
  - signal continu dans un domaine $\Rightarrow$ apériodique dans l'autre
- réels vs. complexes
  - une version réelle et une version complexe de chaque transformée
  - complexes $=$ langue des spécialistes du TS

Implémentation

- par *corrélation*
  - une corrélation par fréquence (équation d'analyse)
  - complexité : $O(N^2)$
- par *FFT*
  - algorithme rapide en $O(N \log(N))$
  - diviser pour régner

Filtres (FIR, IIR)

Filtres classiques

- utilisations les plus courantes
  - *séparation de signaux combinés*
  - *restauration de signaux distordus*
- paramètres à surveiller
  - signaux dans le domaine temporel
    - vitesse de réaction
    - débordement
    - linéarité de phase (symétrie)
  - signaux à domaine fréquentiel
    - rapidité de transition
    - absence d'ondulations dans la bande passante
    - degré d'atténuation de la bande interdite

Généralités

- chaque filtre linéaire a
  - une *réponse en impulsion*
  - une *réponse à un seuil*
  - une *réponse en fréquence*
- les trois sont équivalentes et contiennent toute l'information du filtre
- techniques d'implémentation
  - convolution avec la réponse en impulsion (FIR)
  - récursion (IIR)
    - somme pondérée du signal d'entrée
    - *et de valeurs précédemment calculées*

FIR

Finite Impulse Response

- convolution avec la réponse en impulsion

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \ldots$$

- implémentation
  - une simple boucle
  - pas de *feedback* (délai)
  - bonnes propriétés arithmétiques $\Rightarrow$ on peut utiliser des entiers de précision limitée
  - *Array-OL avec motif glissant sur le signal d'entrée*
- propriétés
  - compatible avec l'analyse multi-vitesse
  - certaines réponses sont difficiles à obtenir

IIR

Infinite Impulse Response

- utilisation de valeurs calculées précédemment

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \ldots \\ + b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] + b_3 y[n-3] + \ldots$$

- implémentation
  - utilisation de *retards*
  - instabilité numérique (surtout avec profondeur de récursion > 10)
  - *non Array-OL mais récursif*
- intérêt
  - *court-circuiter des convolutions longues*
  - avec des filtres de réponse infinie (oscillations amorties)

Comparaison

- analogique vs. numérique
  - filtres numériques ont de *bien meilleures propriétés*
  - filtres analogiques *bien plus rapides*
  - filtres analogiques ont une meilleure
    - *gamme dynamique d'amplitude*
    - *gamme dynamique de fréquences*
- FIR vs. IIR
  - performances maximales bien meilleures pour le FIR
  - IIR plus rapide (un ordre de grandeur d'écart)
  - en particulier pour les filtres en domaine fréquentiel

Pour aller plus loin

Sujets avancés

- transformée en z
- conception de filtres
- filtres CIC
- ondelettes
- ...

application de radio numérique de THALES

Références

- *The Scientist and Engineer's Guide to DSP* : `http://www.dspguide.com/`
- *dspGuru* : `http://www.dspguru.com/`
- *Signal Processing Information Base* : `http://spib.rice.edu/spib.html`