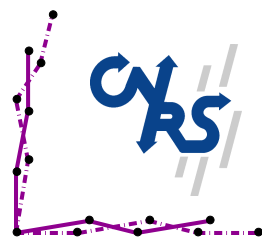


Conception et Pratique de l'Algorithmique

<http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/cpa2015>

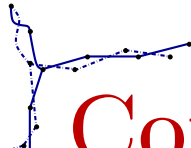
Binh-Minh Bui-Xuan



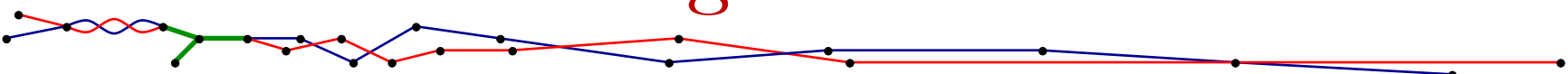
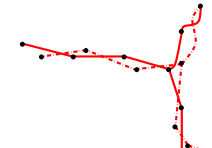
UPMC
PARIS UNIVERSITAS

PARIS, Février 2015



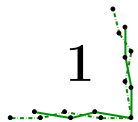
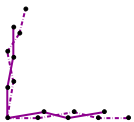


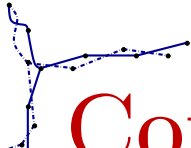
Cours 3 : rectangle minimum



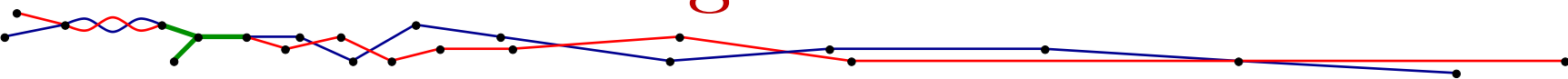
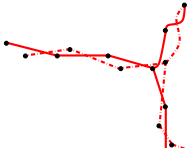
RAPPEL COURS + TME 2 :

- collision : cas de polygones convexes (esthétique !)
- problème ENVCONVEXE : nuage de points \rightarrow polygone convexe
- algorithme naïf : complexité $O(n^3)$
- techniques : précalcul (pixel, Akl-Toussaint), décomposition
- algorithmes : Jarvis, Graham (+variants), Chan, QuickHull





Cours 3 : rectangle minimum

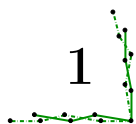
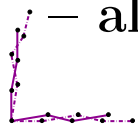


RAPPEL COURS + TME 2 :

- collision : cas de polygones convexes (esthétique !)
- problème ENVCONVEXE : nuage de points \rightarrow polygone convexe
- algorithme naïf : complexité $O(n^3)$
- techniques : précalcul (pixel, Akl-Toussaint), décomposition
- algorithmes : Jarvis, Graham (+variants), Chan, QuickHull

AUJOURD'HUI :

- collision : cas de rectangles (compromis esthétique/simplicité)
- problème RECTANGLEMIN : nuage de points \rightarrow rectangle
- algorithme “naïf” : complexité $O(n^2)$
- techniques : précalcul, pied à coulisse, paires antipodales
- algorithmes : Shamos, Toussaint





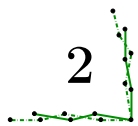
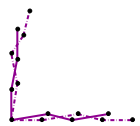
Sources wiki (à lire avec recul)

MOZILLA DEVELOPER NETWORK :

- https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Games/Techniques/2D_collision_detection

WIKIPEDIA :

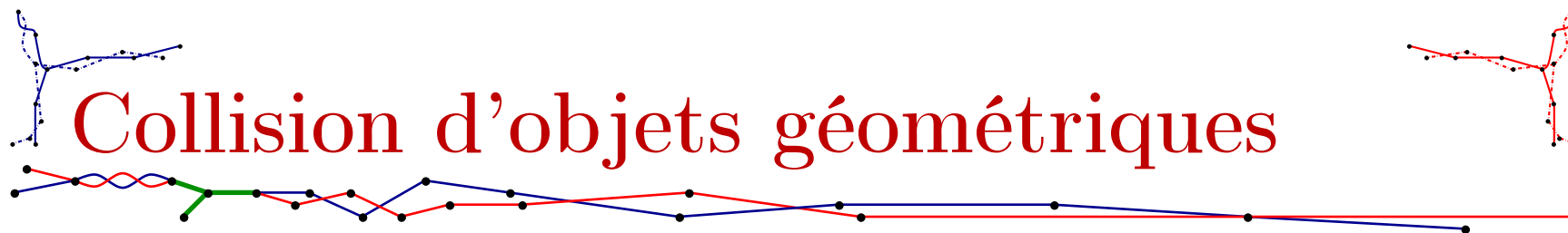
- http://en.wikipedia.org/wiki/Rotating_calipers



Collision d'objets géométriques

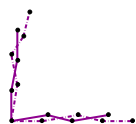
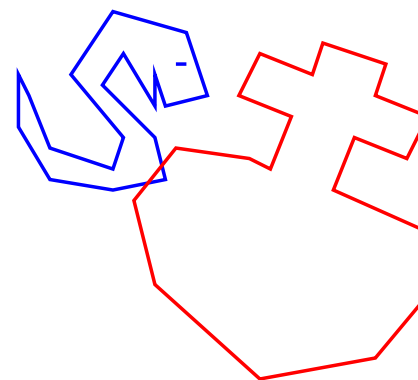
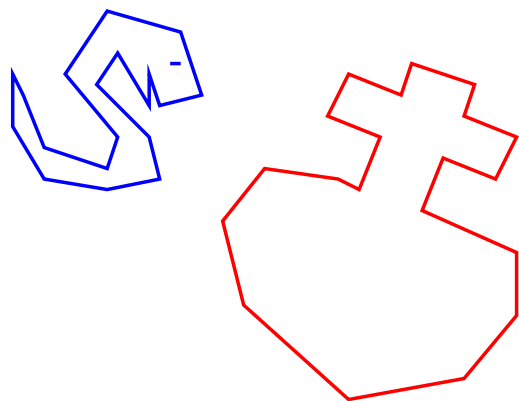
QUESTION : touché ?

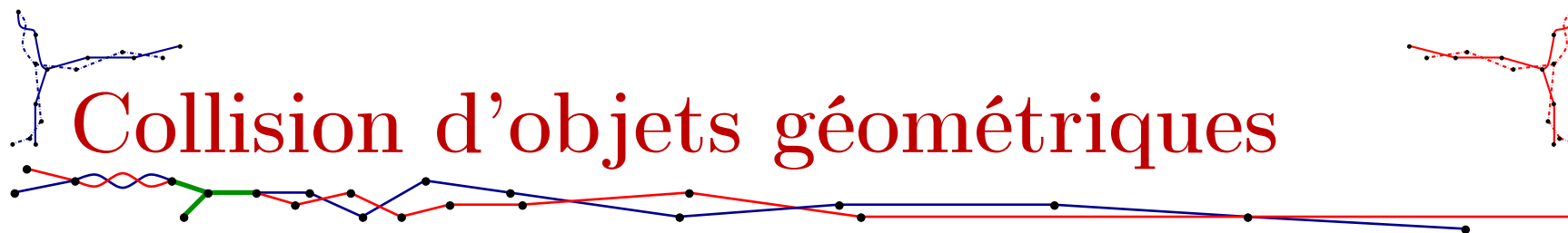




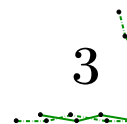
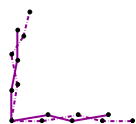
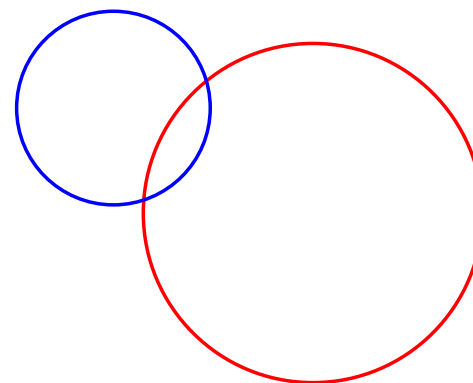
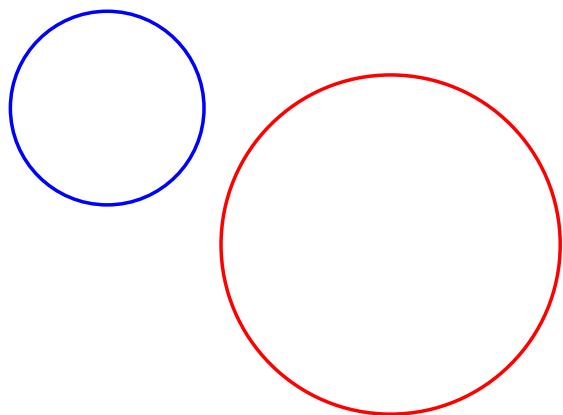
Collision d'objets géométriques

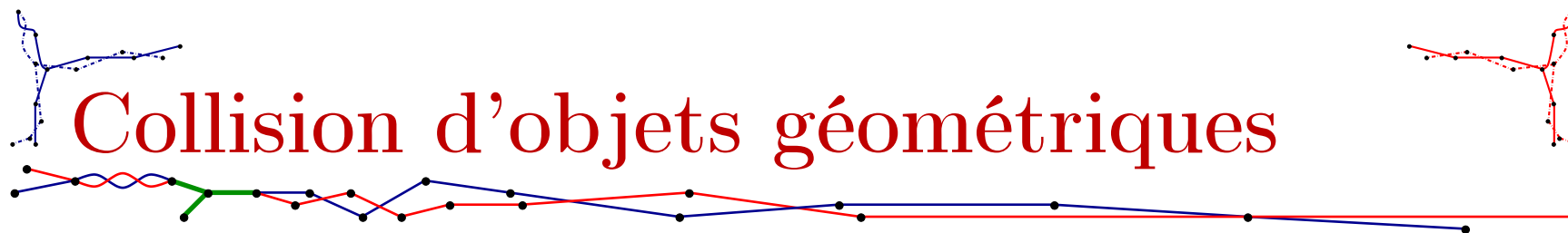
QUESTION : touché ?





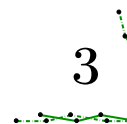
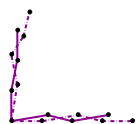
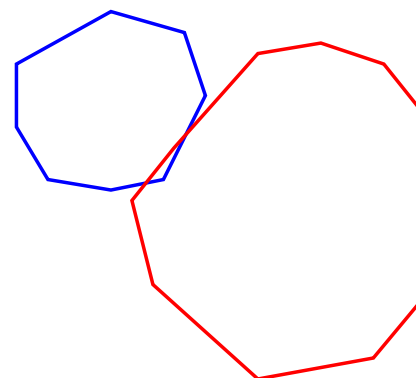
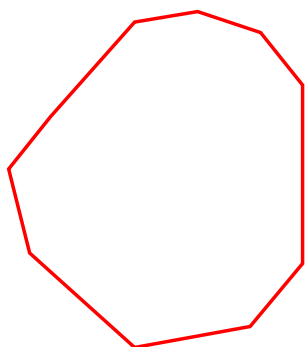
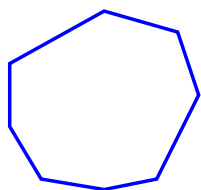
QUESTION : touché ?

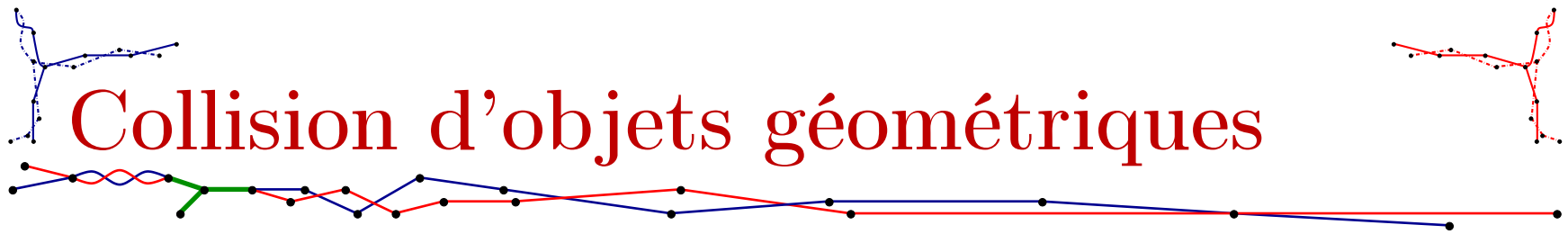




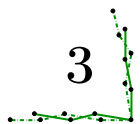
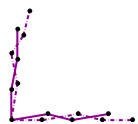
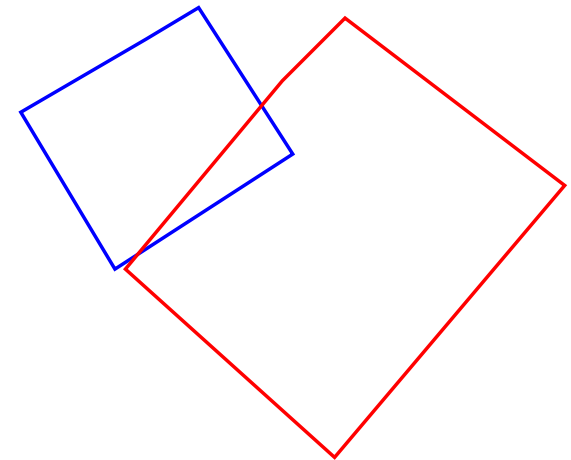
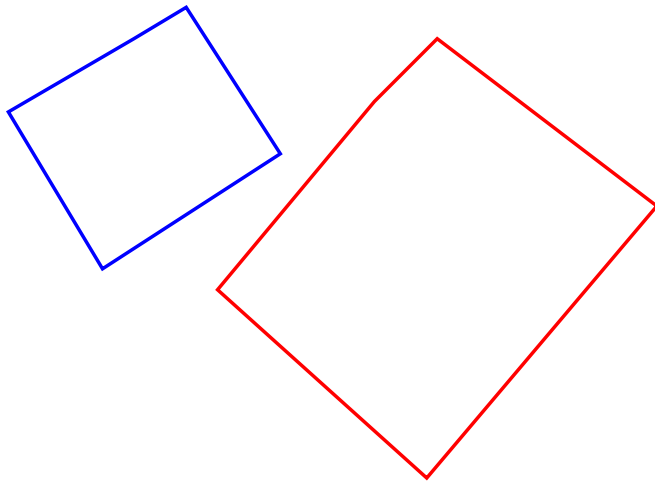
Collision d'objets géométriques

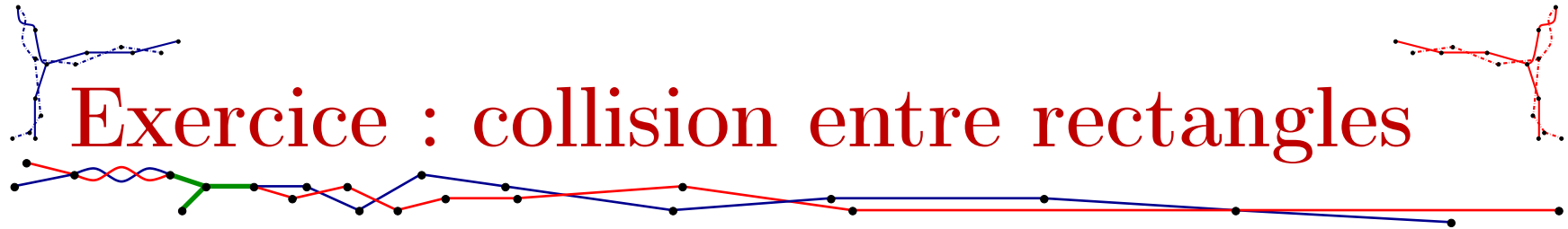
QUESTION : touché ?





QUESTION : touché ?



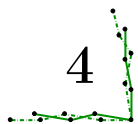
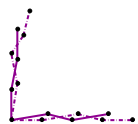


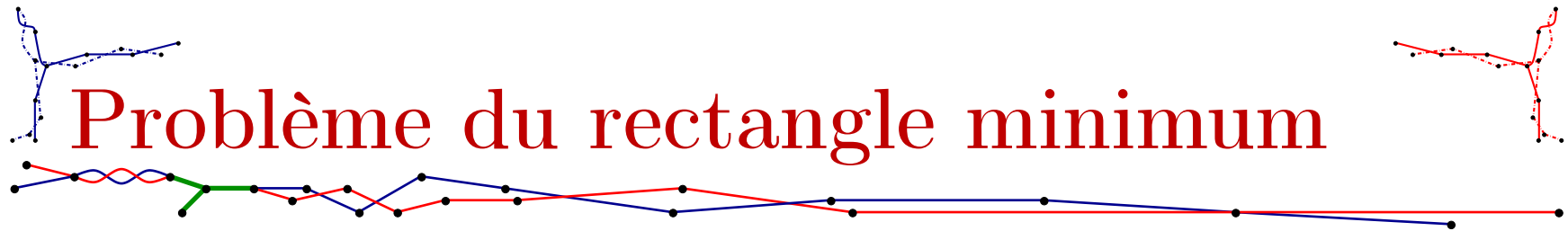
Exercice : collision entre rectangles

EXERCICE : comment déterminer si deux rectangles intersectent ?

QUESTION : implantation ?

Notes pour révision : voir cas polygone, cours 2.

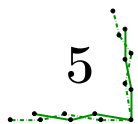
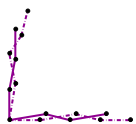


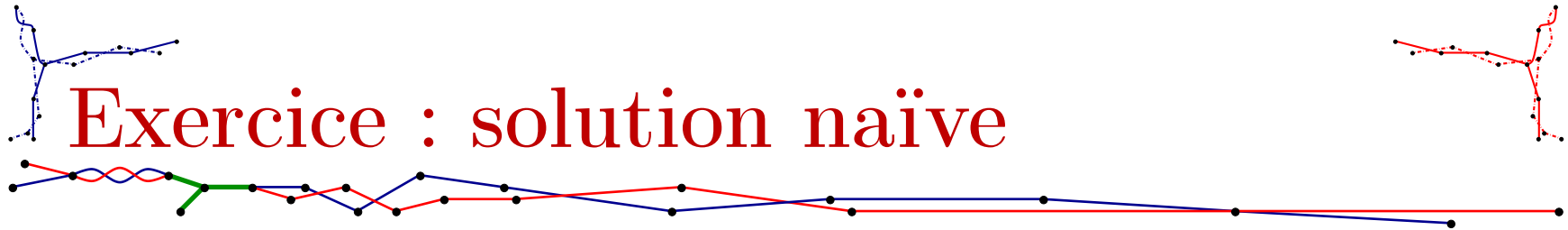


Problème du RECTANGLEMIN d'un ensemble de points :

IN : Points, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : Rectangle, liste de 4 points (ou 1 point + 3 doubles) du plan représentant le plus petit rectangle contenant tout point de Points



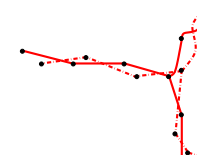



PROPRIÉTÉ : *le rectangle minimum contenant un ensemble de points a un côté parallèle avec l'un des côtés de l'enveloppe convexe de ces points*


EXERCICE : solution naïve au problème du rectangle minimum ?

QUESTIONS : complexité ? implantation ? précalcul ? estimation du temps de calcul avec un ordinateur de l'ordre du Giga-Hertz avec $n = 10000, 100000, \text{etc}$?

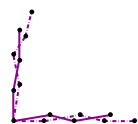


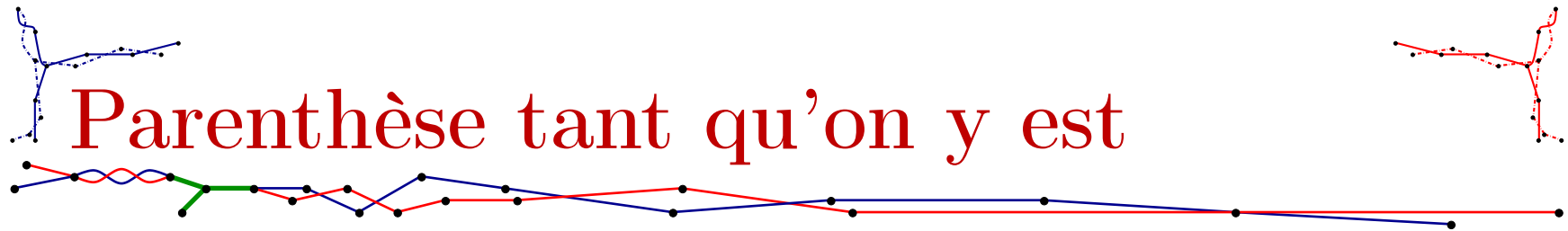


Notes pour révision : algorithme



1. $\text{enveloppe} \leftarrow \text{enveloppe convexe de points}$
2. pour tout côté pq de enveloppe
3. $s \leftarrow \text{coin de l'enveloppe le plus loin de } (pq)$
4. $\Delta \leftarrow \text{droite passant par } s, \text{ orthogonale à } (pq)$
5. $t, u \leftarrow \text{coins de l'enveloppe le plus loin de } \Delta \text{ dans les deux}$
demi-plans définis par Δ
6. $\Gamma \leftarrow \text{droite passant par } t, \text{ orthogonale à } (pq)$
7. $\Lambda \leftarrow \text{droite passant par } u, \text{ orthogonale à } (pq)$
8. $\Phi \leftarrow \text{droite passant par } s, \text{ parallèle à } (pq)$
9. $a, b, c, d \leftarrow \text{intersections de } \Gamma, \Lambda, \Phi \text{ et } (pq)$
10. retourner a, b, c, d





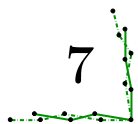
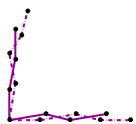
Parenthèse tant qu'on y est

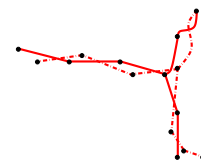
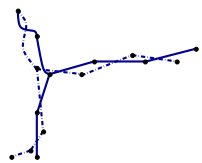
Problème du DIAMÈTRE d'un ensemble de points :

IN : Points, une liste de coordonnées de points en 2D

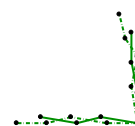
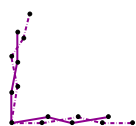
OUT : Diamètre, liste de 2 points de Points de distance maximum

QUESTION : solution naïve ? précalcul ?



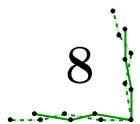
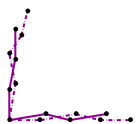


Algorithmes



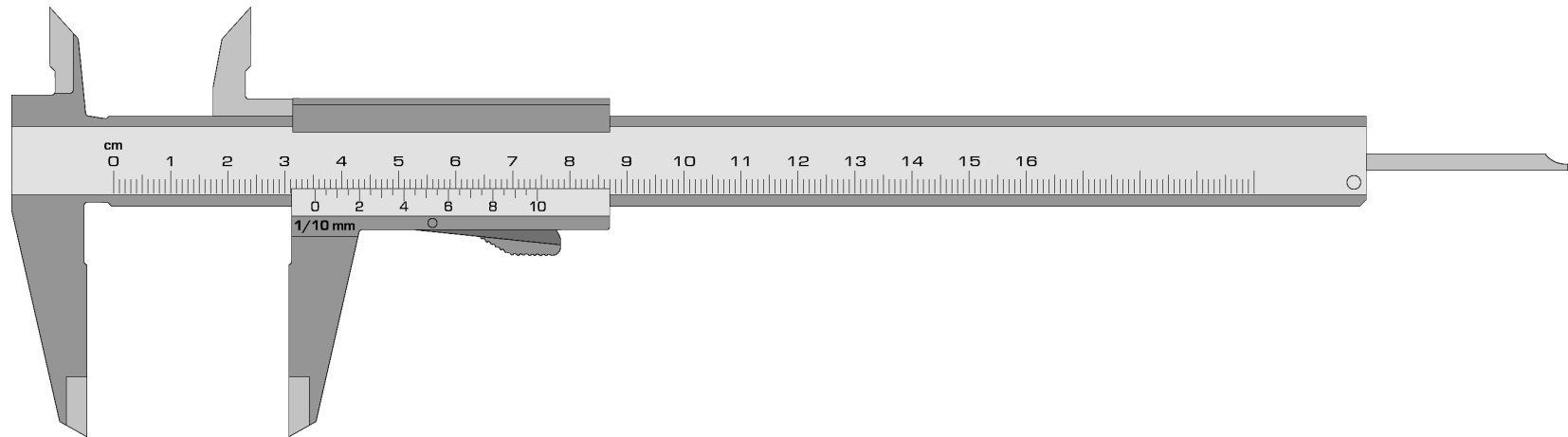


IDÉE (Shamos) : pied à coulisse



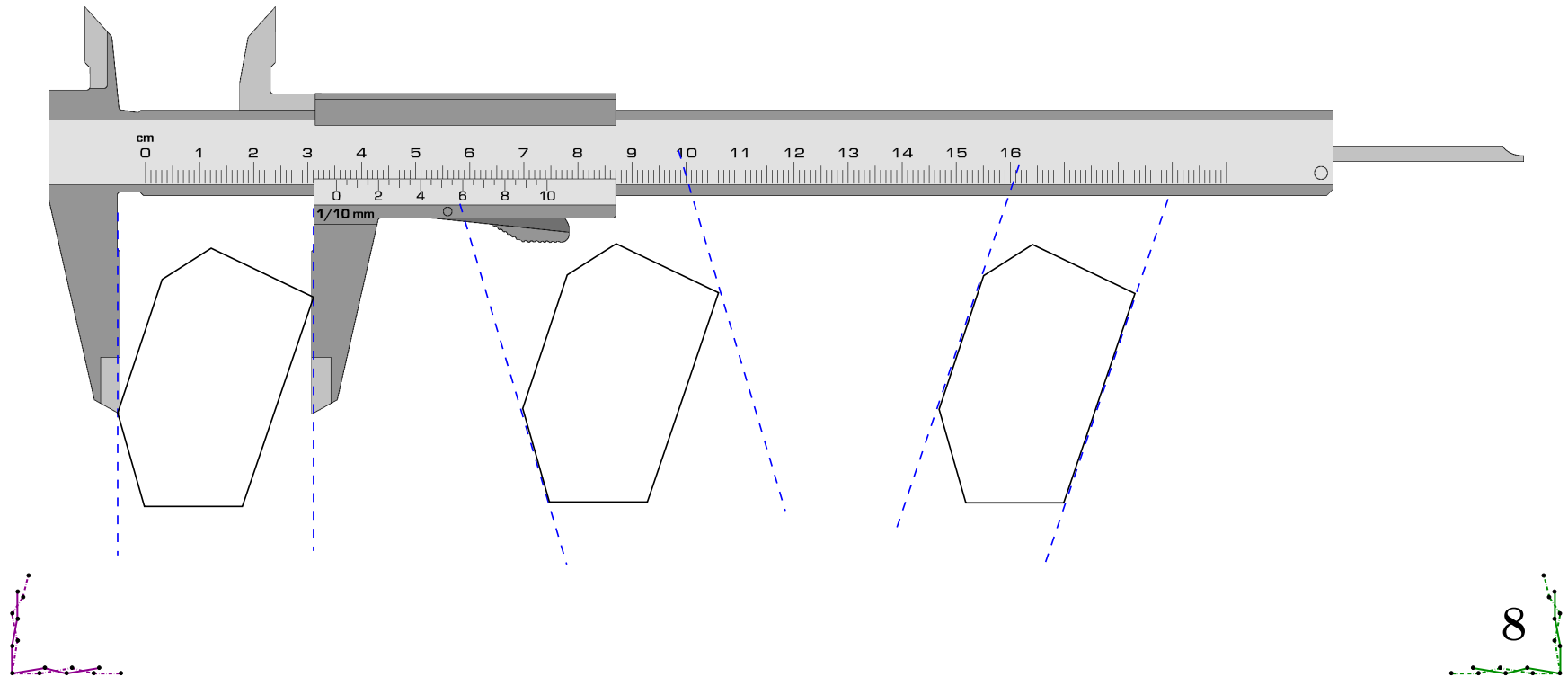


IDÉE (Shamos) : pied à coulisse



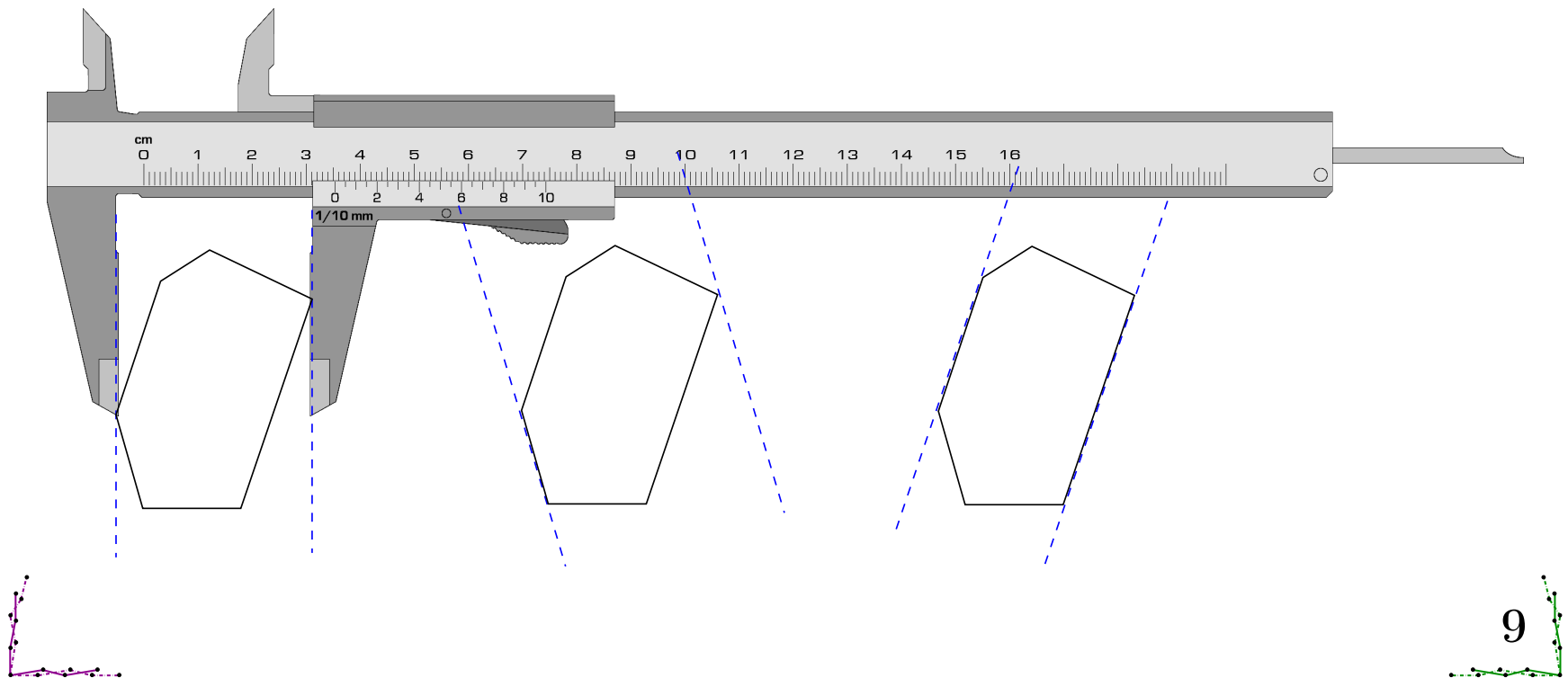


IDÉE (Shamos) : pied à coulisse



Algorithme Toussaint pour RECTMIN

EXERCICE : utiliser un pied à coulisse et résoudre RECTANGLEMIN en temps $O(n + \tau)$, où τ est la complexité de ENVCONVEXE






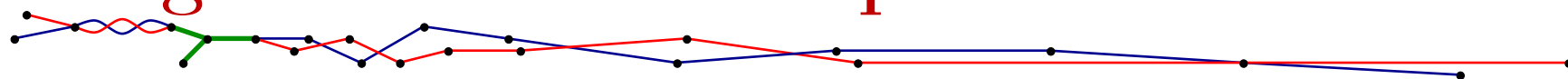
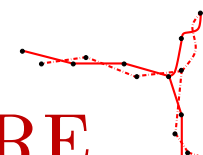
Algorithme Toussaint pour RECTMIN



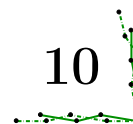
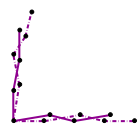
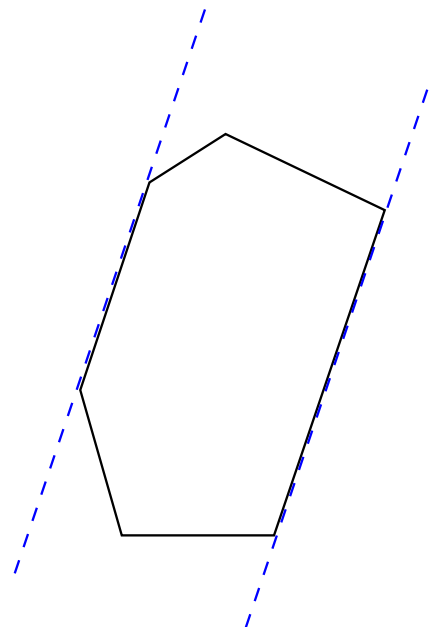
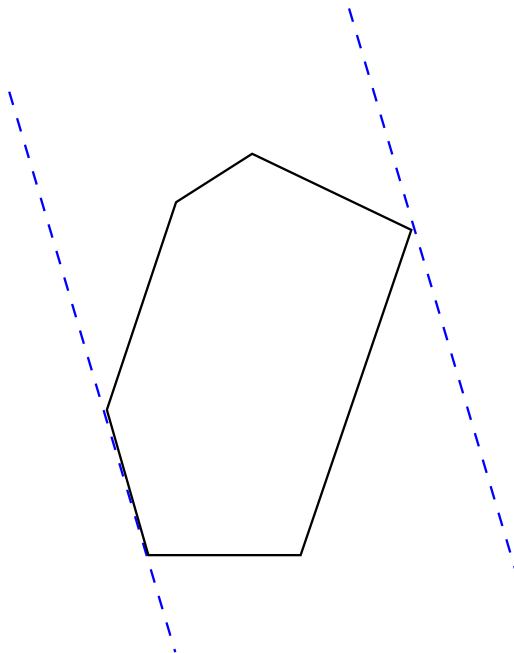
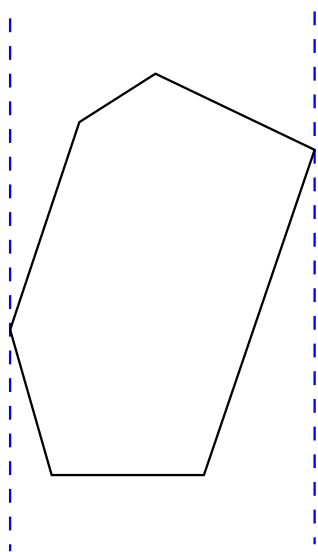
1. $\text{enveloppe} \leftarrow$ enveloppe convexe de points
2. $W \leftarrow$ point le plus à l'Ouest de enveloppe
3. $E \leftarrow$ point le plus à l'Est de enveloppe
4. $\text{left} \leftarrow$ droite verticale passant par W
5. $\text{right} \leftarrow$ droite parallèle à left passant par E
6. maintenir ce parallélisme pendant tout le reste de l'algorithme
7. répéter jusqu'à ce que la condition suivante se réalise deux fois :
8. condition : left passe par E ou right passe par W
9. $\text{next} \leftarrow$ côté d'enveloppe formant angle min avec left
10. $\text{box} \leftarrow$ rectangle min contenant enveloppe passant par next
11. pivoter left et right pour que l'un des deux contient next
12. retourner le min des valeurs de box




Algorithme Shamos pour DIAMÈTRE





IDÉE : paires antipodales





Algorithme Shamos pour DIAMÈTRE

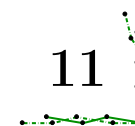
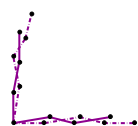



DÉFINITION : une paire $\{A, B\}$ de points de Points est antipodale s'il existe 2 droites parallèles passant par A et B telles que la bande du plan entre ces deux droites contient tous les points de Points

PROPRIÉTÉ : *le diamètre de Points est la distance maximum entre deux points d'une paire antipodale de Points*

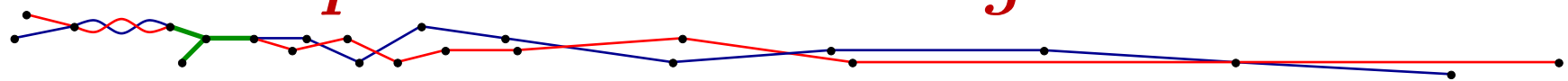
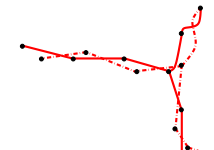
PROPRIÉTÉ : *il y a au plus $2 \cdot n$ (plus quelques) de paires antipodales d'un ensemble Points de n points*

QUESTION : résoudre DIAMÈTRE utilisant paires antipodales ?



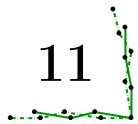
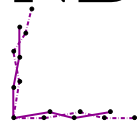


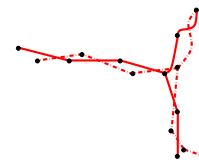
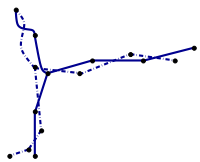
Notes pour révision : algorithme



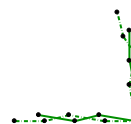
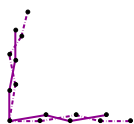
1. $\text{enveloppe} \leftarrow \text{enveloppe convexe de points}$
2. $\text{paires_antipodales} \leftarrow \emptyset$
3. pour tout point p de enveloppe
4. pour tout point q de enveloppe
5. si p, q est une paire antipodales alors
6. ajouter (p, q) dans $\text{paires_antipodales}$
7. $\text{max} \leftarrow 0$
8. pour tout paire (p, q) dans $\text{paires_antipodales}$
9. si $\text{distance}(p, q) > \text{max}$ alors $\text{max} \leftarrow \text{distance}(p, q)$
10. retourner max

NB : la complexité est horrible !



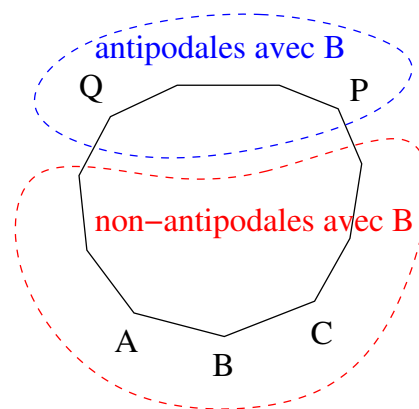
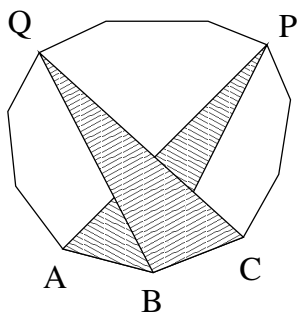


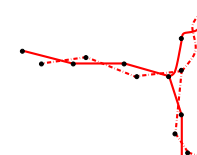

Peut on faire mieux ?



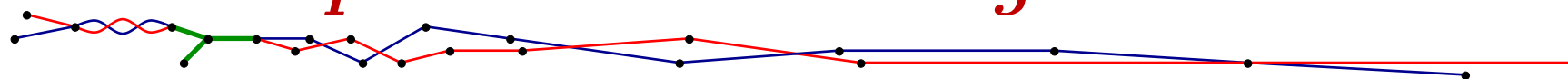
Le vrai algorithme Shamos

PROPRIÉTÉ : si A, B, C sont trois points successives de l'enveloppe convexe de Points et P, Q les deux points de distance maximum par rapport aux droites (AB) et (BC) , alors les paires antipodales contenant B contiennent aussi un point à mi-chemin entre P et Q suivant l'ordre des points de l'enveloppe convexe

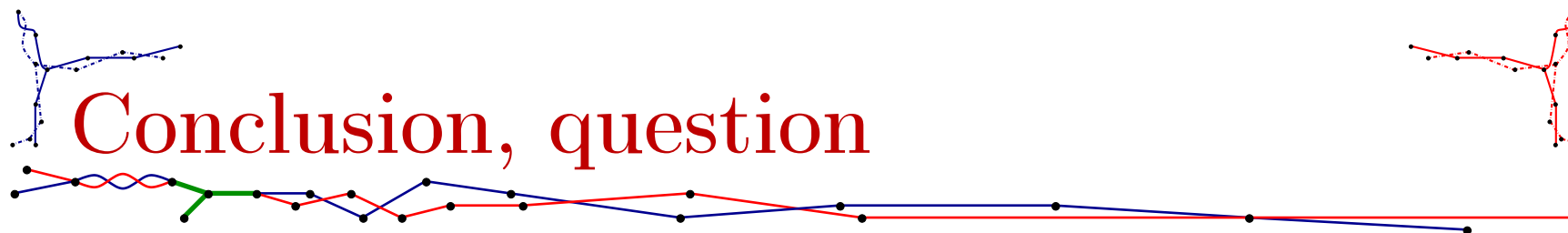




Notes pour révision : algorithme



Voir TME3



CONCLUSION :

- RECTANGLEMIN algorithme “naïf” en $O(n^2)$
- DIAMÈTRE algorithme naïf en $O(n^2)$
- technique de filtrage : enveloppe convexe
- technique exotique : pied à coulisse
- algorithmes : Toussaint, Shamos

QUESTION :

- implantation ? (voir TME)

