Практическое задание 2 по курсу "Байесовский выбор модели"

Грабовой Андрей, группа 574

Задача

Пусть имеем следующую общую модель:

$$P_i = \mathbf{w}_{k_i}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i + b_{k_i} + \varepsilon_i, \tag{1}$$

где $k_i \in [1, \cdots, K]$. То есть имеем K моделей и каждый объект описывается какой-то одной из них. Каждая модель M_k задается своим вектором параметром $\mathbf{w}_k$ и сдвигом b_k

Пусть имеется выборка $(\mathbf{X}, \mathbf{p}) = \{(\mathbf{x}_i, P_i)\}_{i=1}^{m}$. Пусть K — оценка сверху на обшее количество поставщиков. В качестве априорного распределения на $\boldsymbol{\pi}$ введем:

$$p(\boldsymbol{\pi}|\mu) = \mathrm{Dir}(\boldsymbol{\pi}|\mu\mathbf{e}). \tag{2}$$

Пусть введены априорное распределения на каждую модель:

$$p(\mathbf{w}_k) = N(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k), \tag{3}$$

где $\mathbf{A}_k$ — диагональная ковվариационная матрица для k-й модели. Также введено априорное распределение на шум $\varepsilon_i \sim N(0, \beta^{-1})$.

Обозначим $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \cdots, \mathbf{w}_K]$, $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_K]$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_K]$.

1. Совместное правдоподобие выглядит следующим образом:

$$p(\mathbf{p}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta, \mu) = \mathrm{Dir}(\boldsymbol{\pi}|\mu\mathbf{e})\prod_{k=1}^{K}N(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k)\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{K}\pi_k N(P_i|b_k + \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i, \beta^{-1})\right). \tag{4}$$

2. Апостериорное распределение пропорционально:

$$p(\mathbf{W}, \boldsymbol{\pi}|\mathbf{X}, \mathbf{p}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta, \mu) \propto \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{K}\pi_j \exp\left(-\frac{\beta}{2}\left[P_i - \mathbf{w}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i - b_j\right]^2\right)\right)\prod_{k=1}^{K}\pi_k^{\mu-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_k\mathbf{w}_k\right), \tag{5}$$

как видно с формулы (5) в силу того, что у нас под знаком произведения стоит сумма которая зависит и от $\mathbf{w}$ и от π, мы попросту не можем разделить эти две плотности, чтобы посчитать апостериорное распределение.

3. Введем скрытые переменные $\mathbf{Z} = ||z_{ik}||$, тогда совместное правдоподобие будет иметь вид:

$$p(\mathbf{p}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Z}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta, \mu) = \mathrm{Dir}(\boldsymbol{\pi}|\mu\mathbf{e}) \prod_{k=1}^{K} N(\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \mathbf{A}_k) \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{K} \left(\pi_j N(P_i|b_j + \mathbf{w}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i, \beta^{-1})\right)^{z_{ij}}, \quad (6)$$

4. Используем вариационное приближение:

$$q(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}) = q(\boldsymbol{\pi})q(\mathbf{W})q(\mathbf{Z}). \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\log q(\boldsymbol{\pi}) = \mathsf{E}_{q/\pi} \log p(\mathbf{p}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Z}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta, \mu) \propto \\ \propto \sum_{k=1}^{K} \log \pi_k \left(\mu - 1 + \sum_{i=1}^{m} \mathsf{E} z_{ik}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow q(\boldsymbol{\pi}) = \mathrm{Dir}(\boldsymbol{\pi}|\mu\mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}),\end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_k = \sum_{i=1}^{m} z_{ik}$.

$$\begin{aligned}\log q(\mathbf{W}) = \mathsf{E}_{q/W} \log p(\mathbf{p}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Z}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta, \mu) \propto \\ \propto \sum_{k=1}^{K} -\frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{w}_k + \beta \sum_{i=1}^{m} \mathsf{E} z_{ik} \left[P_i - b_k - \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right]^2\right) \propto \\ \propto -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{w}_k + \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\left[\beta\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E} z_{ik}\right]\mathbf{w}_k - 2\beta\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\left[\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i\left(P_i - b_k\right)\mathsf{E} z_{ik}\right]\right) \propto \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left(\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{w}_k - 2\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{m}_k\right),\end{aligned} \quad (9)$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{B}_k = \left(\mathbf{A}_k^{-1} + \beta\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E} z_{ik}\right)^{-1} \quad \mathbf{m}_k = \beta\mathbf{B}_k\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i\left(P_i - b_k\right)\mathsf{E} z_{ik}\right). \quad (10)$$

тогда с учетом (9) и (10), получаем:

$$q(\mathbf{w}_k) = N(\mathbf{w}_k|\mathbf{m}_k, \mathbf{B}_k). \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\log q(\mathbf{Z}) = \mathsf{E}_{q/Z} \log p(\mathbf{p}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{Z}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \beta, \mu) \propto \\ \propto \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} z_{ik}\left(\mathsf{E}_{\pi}\log\pi_k - \frac{\beta}{2}\left[P_i - b_k - \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\log\beta - \log 2\pi\right]\right) =\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} z_{ik}\left(\mathsf{E}\log\pi_k - \frac{\beta}{2}\left[(P_i-b_k)^2 - 2\left(P_i-b_k\right)\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{x}_i\right]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(z_{ik}=1) = C\exp\left(\mathsf{E}\log\pi_k - \frac{\beta}{2}\left[(P_i-b_k)^2 - 2\left(P_i-b_k\right)\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{x}_i\right]\right). \quad (12)$$

Теперь нужно найти константу C. Учтем, что $\sum_k p(z_{ik}=1)=1$, тогда получаем, что:

$$p(z_{ik}=1) = \frac{\exp\left(\mathsf{E}\log\pi_k - \frac{\beta}{2}\left[(P_i-b_k)^2 - 2\left(P_i-b_k\right)\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\left(\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\right)\mathbf{x}_i\right]\right)}{\sum_k p(z_{ik}=1)}. \quad (13)$$

.

Теперь сделаем M-шаг:

$$\mathsf{E}_{q(\boldsymbol{\pi},\mathbf{w},\mathbf{z})}\log p(\mathbf{p},\mathbf{W},\boldsymbol{\pi},\mathbf{Z}|\mathbf{X},\mathbf{A},\mathbf{b},\beta,\mu) = \mathcal{F}(\mathbf{A},\mathbf{b},\beta) \propto$$

$$\propto \sum_{k=1}^{K}\left[(\mu+2\gamma_k-1)\,\mathsf{E}\log\pi_k + \frac{1}{2}\log\det\mathbf{A}_k^{-1} - \frac{1}{2}\mathsf{E}\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{w}_k\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{i=1}^{m}\mathsf{E}z_{ik}\left(\mathsf{E}\log\pi_k + \log\beta - \log 2\pi - \frac{\beta}{2}\mathsf{E}\left(P_i - b_k - \mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right)^2\right)\right]. \quad (14)$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathbf{A}_k^{-1}} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_k - \frac{1}{2}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}_k^{new} = \operatorname{diag}(\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}), \quad (15)$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^{m}\mathsf{E}z_{ik}\left(P_i - b_k - \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\right) = 0 \Rightarrow b_k^{new} = \frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{m}P_i\mathsf{E}z_{ik} - \frac{1}{S_k}\sum_{i=1}^{m}\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathsf{E}z_{ik}, \quad (16)$$

где введено обозначение:

$$S_k = \sum_{i=1}^{m}\mathsf{E}z_{ik}. \quad (17)$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\beta} = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\beta}\mathsf{E}z_{ik} - \frac{1}{2}\mathsf{E}z_{ik}\left[(P_i-b_k)^2 - 2\left(P_i-b_k\right)\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right]\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta^{new}} = \frac{\sum\sum\left[(P_i-b_k)^2 - 2\left(P_i-b_k\right)\mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}}\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_i\right]\mathsf{E}z_{ik}}{\sum\sum\mathsf{E}z_{ik}}. \quad (18)$$

Выпишем чему равны, все нужные нам матожидания:

$$\mathsf{E}z_{ik} = p(z_{ik}=1). \quad (19)$$

$$\mathsf{E}\log\pi_k = \psi^0(\mu+\gamma_k) - \psi^0(K\mu+m). \quad (20)$$

$$\mathsf{E}\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}_k + \mathbf{m}_k\mathbf{m}_k^{\mathsf{T}}. \quad (21)$$