

Reconstruction of the axis position and primary particle energy of extensive air showers in the SPHERE-2 experiment

Extended abstract

Vaiman Igor, SINP MSU

Introduction

Cosmic rays (CR) are highly energetic charged particles moving through space. They are an important factor in the dynamics of space systems and have long been studied using many experimental methods. The energy spectrum of cosmic rays spans almost 12 orders of magnitude from 10^9 to 10^{21} eV and has several features that carry information about their origin and propagation mechanisms in the Solar System, the Galaxy, and the Metagalaxy. The arrival directions of showers are distributed almost isotropically for most of the spectrum, which also provides important information about the conditions of their propagation. In the ultrahigh energy region, the search for anisotropy is ongoing, which should reflect the distribution of cosmic ray sources.

In the energy range above 10^{15} eV the only way to study cosmic rays is indirectly, by detecting cascades of secondary particles generated by CR in the atmosphere — extensive air showers (EAS). This method puts the Earth's atmosphere at the service of experimental technology, essentially turning it into a giant calorimeter. Over the past 50 years, many methods have been developed to detect EAS observing their various components and the effects they produce in the atmosphere. The present work is devoted to the processing of data from

the SPHERE-2 experiment, which is aimed at detecting EAS by the method of reflected Cherenkov light, which is relatively new and little studied.

This work develops and extends the established data processing method, enriching it with a deeper understanding of the SPHERE-2 detector achieved in recent years. In particular, the emphasis is on calculating instrumental uncertainties introduced during the measurement, which were described in the previous work only approximately. To achieve this goal, the detector was modeled as a stochastic system, and shower parameter estimation methods were updated to reflect that.

From a methodological point of view, this work employs a more modular or pipeline approach compared to previous publications, based on the sequential application of a number of relatively independent reconstruction procedures, instead of a single «black box» model. The mathematical apparatus for this work relies on the concepts of Bayesian statistics and the corresponding numerical algorithms.

1 SPHERE-2 experiment

1.1 Method of reflected Cherenkov light to detect extensive air showers

Cherenkov light is an important tool for studying EAS, primarily because of the relatively weak dependence of its total flux on the model of nuclear interaction at high energies. The traditional method of direct detection of Cherenkov light by ground-based detectors is similar to ground-based detection of charged particles: it also uses an array of detectors distributed over a large area, which provide point measurements of the flux density.

However, unlike charged particles, Cherenkov light in the optical range can be very effectively scattered by the Earth's surface and observed already reflected. The method for registering this reflected light was first proposed by A. E. Chudakov [Chudakov1972]. The development of this technique was carried out in the SPHERE-1 and SPHERE-2 [1, 2] experiments.

One of the main advantages of the method is an access (albeit indirectly) to Cherenkov light from the paraxial region of the shower, achieved due to the extended fields of view of individual sensitive elements of the device.

1.2 SPHERE-2 detector

1.2.1 Geometry

The SPHERE-2 detector was lifted by a balloon to a height of 400 – 900 m; an optical system consisting of a diaphragm, a spherical mirror, and a PMT mosaic was used to collect EAS Cherenkov light reflected from the snow surface below. Each PMT collected reflected light from an area with a diameter of 10 – 50 m, depending on the detector altitude. Fig. 1.1 depicts the optical scheme of the SPHERE-2 detector.

The PMT mosaic is located near the focal surface of the spherical mirror and consists of 109 PMTs assembled into an approximately hexagonal grid. The center is Hamamatsu R3886, characterized by a larger gain and photocathode area, the rest are Soviet-made PMT 84-3. Hamamatsu was used as a reference PMT during detector calibration [3].

1.2.2 Intermediate PMT mode

When light hits the PMT photocathode, a photoelectron is emitted with a certain probability. Accelerated by a dynode system, it produces an avalanche of secondary photoelectrons that reach the anode, creating an observable charge. The process of knocking out photoelectrons from the cathode is characterized by

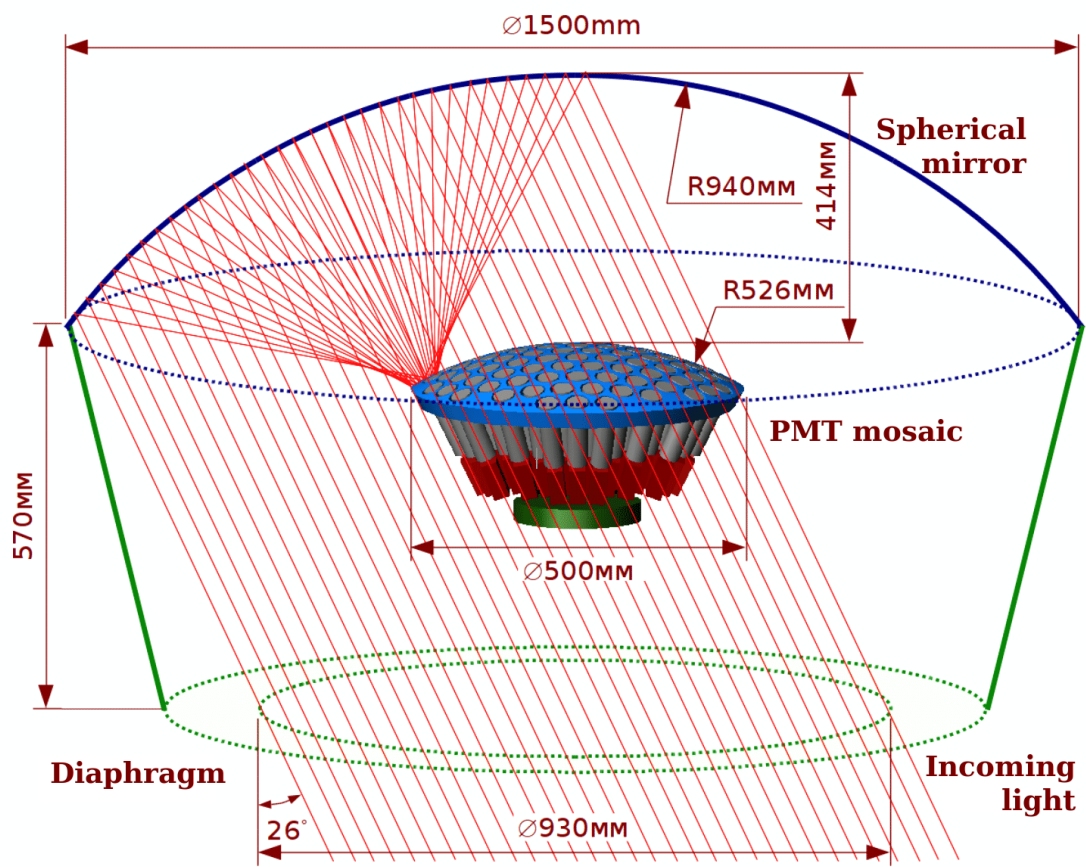


Figure 1.1: SPHERE-2 detector optical scheme

the quantum efficiency function, which characterizes the probability with which a photon of a given wavelength will generate a photoelectron in the system.

The electron cascade within a PMT is a fundamentally stochastic process. This is confirmed by direct laboratory measurements of anode charge fluctuations [3, Fig. 9]. If a dynode system has $N \approx 10$ dynodes, and the total electron multiplication factor is $K \approx 10^6$, then the multiplication per dynode will be on average $\sqrt[N]{K} \approx 4$. From this, taking into account some special features of the PMT (the first dynode distinguished by multiplicity, the chance not to hit the dynode at all), one can perform a relatively simple Monte-Carlo to obtain the gain distribution for the PMT84-3, for which laboratory measurements are not available.

The stochastic nature of the PMT amplification is not apparent when measuring high fluxes because of averaging. It is also not important at low fluxes, when the PMT operates in the photon counting mode and individual well-resolved pulses can be observed on the oscillogram. However, in the SPHERE-2 detector PMTs operate in an intermediate mode: the flux is too large for individual photons to be resolved, but not sufficient to achieve effective averaging. This leads to the need for deconvolution problem to be posed in statistical terms.

2 Bayesian deconvolution

Early stages of the SPHERE-2 analysis included an attempt to construct the process of estimating the parameters of an EAS photons in each PMT (the photon count and the arrival time distribution) directly from the recorded signal, but it was not successful for a number of reasons. Instead, the idea arose to carry out a full deconvolution, that is, to extract information about the photon flux at PMTs input at each moment of time. This deconvolution should take into account the stochastic properties of the PMT. Similar problems are also considered in

other areas, for example, in the processing of [5] spectral measurements and [6] images. In such problems, Bayesian statistics is fruitfully used, based on the interpretation of probability as a measure of information about the random variable or confidence in its value [7].

2.1 Problem setup

The input signal is modeled as a set of δ -functions offsetted in time. Time bins (12.5 nsec in the SPHERE-2 detector) provide natural time scale, and we assume that within each time bin, δ -functions are distributed uniformly. We limit ourselves with N time bins. The deconvolution will yield estimation for n_i , photon counts per $[i - 1, i]$ time bin, where $i = 1 \dots N$.

We assume that the PMT is a linear system with stochastic impulse response function $\tilde{h}(t)$ in the sense that each of the δ -functions that make up the input signal is convolved with an independent sample $h(t) \sim \tilde{h}(t)$. This corresponds to the idea of fluctuations in the PMT amplification happening independently for each electron cascade. We will assume that any sample from $\tilde{h}(t)$ is causal, i.e. $\forall t < 0 \quad \forall h \sim \tilde{h} \quad h(t) = 0$, and finite in time, i.e. $\exists \tilde{L}$ such that $\forall t > \tilde{L} \quad \tilde{h}(t) = 0$. We will call this random function, which gives a new sample for each input δ -function, the system's randomized impulse response (RIR).

We pose the problem of statistical deconvolution using Bayesian terminology

Given the randomized impulse response of the system $\tilde{h}(t)$ and the output signal s_j , $j = 1, \dots, N + L$, find the posterior probability density functions for the values n_i , $i = 1, \dots, N$.

Note that, unlike regular deconvolution, we are not trying to estimate the full original signal (sum of δ -functions), but only its integrated in each time bin.

Mathematically, we write

$$P(\vec{n}|\vec{s}) = \frac{P(\vec{s}|\vec{n}) P(\vec{n})}{P(\vec{s})} \quad (2.1)$$

Using uninformative prior $P(\vec{n}) = Const$ (it can't be normalized, but we will use only proportionality, not an absolute value), denoting likelihood function $\mathcal{L}(\vec{s}, \vec{n}) = P(\vec{s}|\vec{n})$, we get

$$P(\vec{n}|\vec{s}) \propto \mathcal{L}(\vec{s}, \vec{n}) \quad (2.2)$$

2.2 Likelihood function

PMT output signal \vec{s} is a sample from some multivariate random variable. Denoting this variable \vec{S} , we can write

$$S_j = \sum_{l=0}^L C(n_{j-l}, l) \quad (2.3)$$

Here $C(n, l)$ is a random variable describing the contribution of n δ -functions with the delay of l bins. It is easy to see from the chosen bin indexing scheme and the conditions of causality and boundedness in time of the RIH that $l \in [0, L]$, since the contribution from δ -functions from earlier bins is equal to zero.

The distribution of $C(n, l)$ can be studied with Monte-Carlo. Sampling it goes as follows. If we sample RIR $h_k(t) \sim \tilde{h}(t)$ and in-bin time $t_{inbin} \sim U(0, 1)$, and get a sample from $C(1, l) = h_k(l + 1 - t_{inbin})$. Sampling from $C(n, l)$ is trivial, since the system is linear and we can just add n independent samples from $C(1, l)$.

To calculate likelihood function, one needs to find a probability to find a particular \vec{s} sampling from \vec{S} . Naive Monte-Carlo likelihood estimation requires sampling a large number of \vec{n} and computing histogram in \vec{s} space. This method is computationally unfeasible, because of the curse of dimensionality: in practice we are interested in signals at least 50 time bins long.

2.2.1 Multivariate normal distribution approximation

We approximate likelihood function with the multivariate normal distribution. There is no formal proof for the applicability for such approximation, but we

estimate that it is fairly close for input intensities as low as 4-5 δ -functions per bin, which is the characteristic background intensity in SPHERE-2 detector. For partial univariate s_j distribution, the probability density function is within 1-2% of its normal approximation.

The general form of multivariate normal distribution is

$$p(\vec{s}) = ((2\pi)^{N+L} \det \Sigma)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} (\vec{s} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{s} - \vec{\mu}) \right) \quad (2.4)$$

Here, mean vector $\vec{\mu}$ and covariance matrix Σ depend on input \vec{n} and RIR $\tilde{h}(t)$. Specifically, $\vec{\mu} \equiv \mathbb{E}\vec{S}$ can be obtained from 2.3 by computing mean of left and right terms and using the fact that $\mathbb{E}C(n, l) = n \mathbb{E}C(1, l)$. The matrix Σ can be expressed in terms of $C(n, l)$ autocovariance, which can be further expressed in terms of $C(1, l)$ autocovariance. The latter depend only on RIR and not on \vec{n} , and can be pre-calculated for computational effectiveness.

$$\Sigma_{ij} = \text{cov}(S_i, S_j) = \sum_{l=0}^{L-(i-j)} \text{cov}(C(n_{i-l}, l), C(n_{i-l}, l + (i - j))) \quad (2.5)$$

2.3 Output signal error

Multivariate normal approximation does not account for the error of measuring the output signal. The largest contribution to this error is ADC discretization. We assume that ADC floors its input, i.e. for each recorded s_j , the real input value was somewhere between s_j and $s_j + \delta$ and the distribution is uniform. Such error can be accounted for by integrating the $\mathcal{L}_{\text{exact}}(\vec{s}, \vec{n})$ defined by 2.4 over the N -dimensional cube with side δ and «lower» corner at \vec{s} :

$$\mathcal{L}(\vec{s}, \vec{n}) = \int_{s_1}^{s_1+\delta} \int_{s_2}^{s_2+\delta} \dots \int_{s_N}^{s_N+\delta} \mathcal{L}_{\text{exact}}(\vec{s}, \vec{n}) d\vec{s} \quad (2.6)$$

To perform this integration numerically, we use the ready-made adaptive integration algorithm described in [16], implemented in the `scipy.stats` [17] Python package.

2.4 Posterior distribution sampling

Having obtained the likelihood function \mathcal{L} , we can estimate \vec{n} given the recorded output signal \vec{s} and RIR $\tilde{h}(t)$. We want not only to find the optimal value of \vec{n} , but also characterize our confidence in it.

Instead of maximum likelihood method, where we would maximize the value of $\mathcal{L}(\vec{n}, \vec{s})$ with respect to \vec{n} , we use Marko Chain Monte Carlo sampling to draw a large enough sample from $P(\vec{n}|\vec{s}) \propto \mathcal{L}(\vec{n}, \vec{s})$. Using this sample of possible \vec{n} values, we will then get the best-fitting value for system's input, and its error.

The idea of the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) family of methods [11] is to launch a Markov process (random walk) in the parameter space \vec{n} with transition probability chosen in such a way that the «trace» of the walk will yield a sample from the target probability density functions. A common characteristic of this family is that they require only knowing only a ratio of probability density functions at different points in the parameter space, which is why in the expression (2.2) and in all subsequent calculations we were able to drop the marginal probability and the normalization of the prior distribution.

The particular method used in this work is affine-invariant MCMC [12], implemented in Python package emcee [10].

2.5 Deconvolution results

A detailed description of the PMT connection and power supply circuits, the amplification circuit, as well as the characteristics of the used ADC converters can be found in [4]. For purposes of this work, we define detector's randomized impulse response as

$$\tilde{h}(t) = C \tilde{C}_{PMT} h_I(t) \quad (2.7)$$

Where

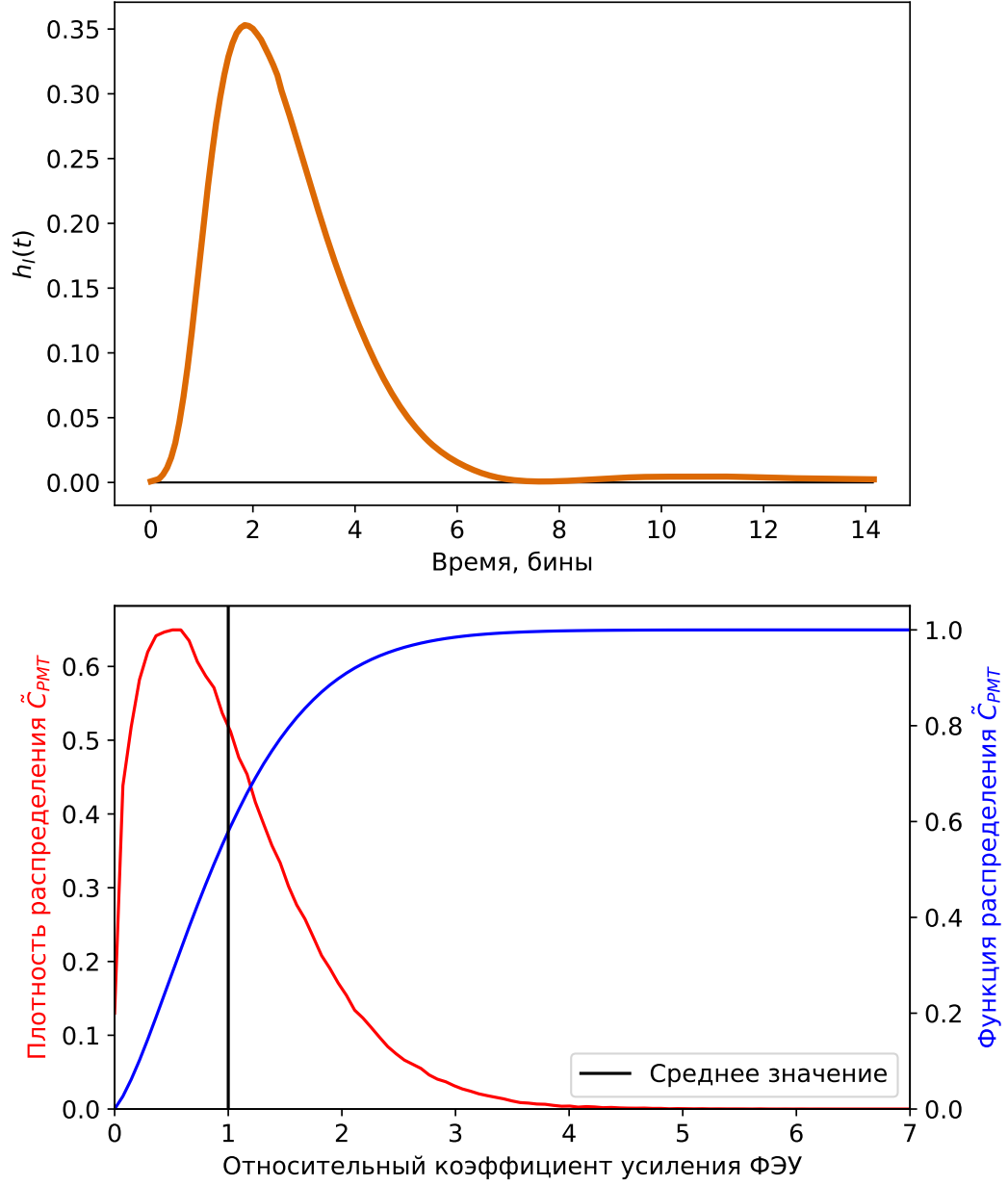


Figure 2.1: SPHERE-2 PMT's randomized impulse response. $h_I(t)$ (top panel) is the signal's shape in time domain, \tilde{C}_{PMT} (bottom panel: PDF and CDF) — dimensionless random PMT amplification coefficient.

1. $h_I(t)$ — shape of the impulse response, defined by time characteristics of the PMT and signal amplification circuit. Measured in the laboratory and plotted on the top panel of Fig. 2.1. Normalized to have integral 1.
2. \tilde{C}_{PMT} — dimensionless random PMT amplification coefficient, normalized to have a mean value of 1. It's PDF and CDF are plotted on the bottom panel of Fig. 2.1.
3. C — scale coefficient. It is measured during detector calibration and applied to signals earlier in data processing pipeline.

We illustrate deconvolution procedure on toy input data: Poisson background with mean $\lambda = 20$ photons per time bin and a «signal» photon packet: 3 bins with additional Poisson signal with $\lambda_{\text{signal}} = 40$. Fig. 2.2 illustrates the system's input and output on the top panel and the deconvolution results on the bottom panel.

3 Оценка параметров ШАЛ

В результате проведения процедуры байесовской деконволюции получена безмодельная оценка потоков фотонов (в эквивалентных фотоэлектронах) на мозаике ФЭУ. Безмодельной она является в том смысле, что не зависит от детальных предположений о свойствах и источниках света, падающего на мозаику, кроме самых общих представлений. В этой главе на основе полученного результата, а также качественного представления о пространственно-временной структуре сигнала ШАЛ реконструируется функция пространственного распределения (ФПР) черенковского света. Наконец, на основе полученной ФПР делаются оценки параметров ШАЛ.

Стоит отметить, что методы, изложенные в этой главе, не являются новаторскими сами по себе, напротив, использованы уже хорошо изученные

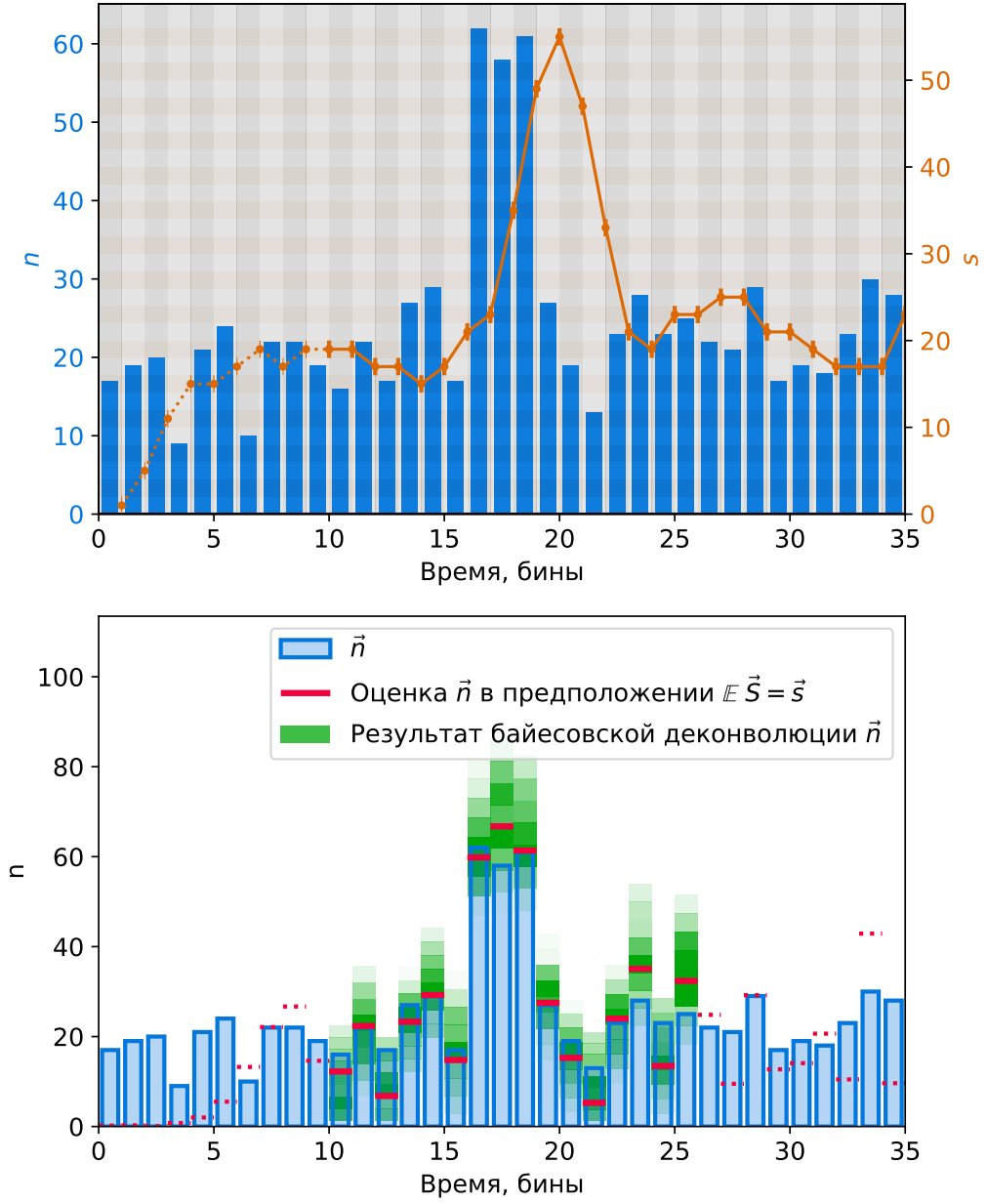


Figure 2.2: Bayesian deconvolution performed on synthetic toy input data. Top panel: toy input data \vec{n} (blue) and corresponding system's output (convolution with randomized impulse response from fig. 2.1) \vec{s} , orange (X axis: «Time, bins»). Bottom panel: same input data \vec{n} (blue); rough \vec{n} estimation from mean values, MCMC sampling starting point (red); deconvolution result, marginal posterior distributions in each time bin (green).

подходы. Основной целью является демонстрация того, как эти методы работают в контексте эксперимента СФЕРА-2 с учётом описанной процедуры деконволюции и неопределённостей, которые она порождает.

3.1 Выделение сигнала ШАЛ и оценка значимости

В процессе деконволюции не делается предположений о наличии или отсутствии сигнала ШАЛ в исследуемой области экспериментального кадра. Из моделирования ливня и оптической системы эксперимента известен общий вывод: фотоны ШАЛ достигают мозаики в виде пакетов — групп фотонов с приближённо нормальным распределением времён прихода. Каждый пакет можно описать тремя параметрами: n_{EAS} — суммарное число фотонов в пакете, μ_t — среднее время прихода фотонов, σ_t — стандартное отклонение времён прихода. Ещё одним параметром является среднее число фоновых фотонов λ_n , однако, как показано в разделе ??, оно известно из абсолютной калибровки сигнала.

3.1.1 Выделение пакета фотонов ШАЛ

Как и задача деконволюции (??), задача выделения сигнала ШАЛ может быть решена с помощью формализма байесовского вывода алгоритмом МСМС-сэмплирования. В качестве параметров модели используем $\Theta \equiv (n_{EAS}, \mu_t, \sigma_t)$, в качестве наблюдаемых данных — полученную в результате деконволюции выборку значений \vec{n} .

Определим функцию правдоподобия для этой задачи: она должна давать вероятность того, что при фиксированном значении Θ будет получено наблюдаемое \vec{n} . То обстоятельство, что \vec{n} измерен не прямо, а задан апостериорным распределением, легко учесть, просто усреднив значения функции правдоподобия по всем элементам этой выборки.

Представим \vec{n} в виде суммы $\vec{n}_{EAS} + \vec{n}_{noise}$. Распределение случайного вектора \vec{n}_{EAS} проще всего разыграть численно, генерируя выборки времён прихода фотонов объёмом n_{EAS} из распределения $N(\mu_t, \sigma_t)$, и рассчитывая

из них гистограмму в границах экспериментальных бинов. Для нахождения искомой функции правдоподобия остаётся вычислить вероятность того, что «остаток» фотоэлектронов $n_{noise}^{(i)}$ в каждом бине имеет пуассоновское распределение с λ_n :

$$\mathcal{L}(\Theta) \equiv P(\vec{n}|n_{EAS}, \mu_t, \sigma_t) = \prod_i \frac{e^{-\lambda_n} \lambda_n^{n_{noise}^{(i)}}}{(n_{noise}^{(i)})!} \quad (3.1)$$

Формула выше описывает значения правдоподобия при фиксированных \vec{n}_{EAS} и \vec{n} , поэтому для получения окончательного результата требуется усреднить значение $\mathcal{L}(\Theta)$ по соответствующим распределениям (флуктуациям гистограммы \vec{n}_{EAS} и апостериорному распределению деконволюции).

В отличие от неинформативного априорного распределения, описанного для деконволюции в разделе ??, для Θ можно выбрать осмысленные априорные распределения из данных моделирования. Известно, что n_{EAS} для интересующего нас диапазона энергий в 1 - 100 ПэВ имеет априорное распределение, экспоненциально спадающее от нуля с показателем ~ 40 , а $\sigma_t \sim N(2.4, 1)$, обрезанное в нуле. Для μ_t было выбрано априорное распределение, равномерное на ширине окна деконволюции¹. Использование информативных априорных распределений помогает в процессе сэмплирования быстрее «навестись» на нужные области, например, сразу отбросить слишком широкие или многочисленные пакеты как маловероятные.

Техническая реализация МСМС-сэмплирования полностью аналогична описанной в разделе 2.4.

3.1.2 Оценка значимости выделенного сигнала

Одно из преимуществ полностью статистического подхода — возможность использовать понятие значимости в процессе разделения сигнала ШАЛ и сигнала от фоновых фотонов. Широко принятый в байесовской статистике

¹В будущем при развитии методики можно уже на этапе поиска пакета «угадывать» его предполагаемое положение из приближённой оценки ориентации плоскости ливня по нескольким самым ярким каналам, и вносить эту информацию в априорное распределение μ_t .

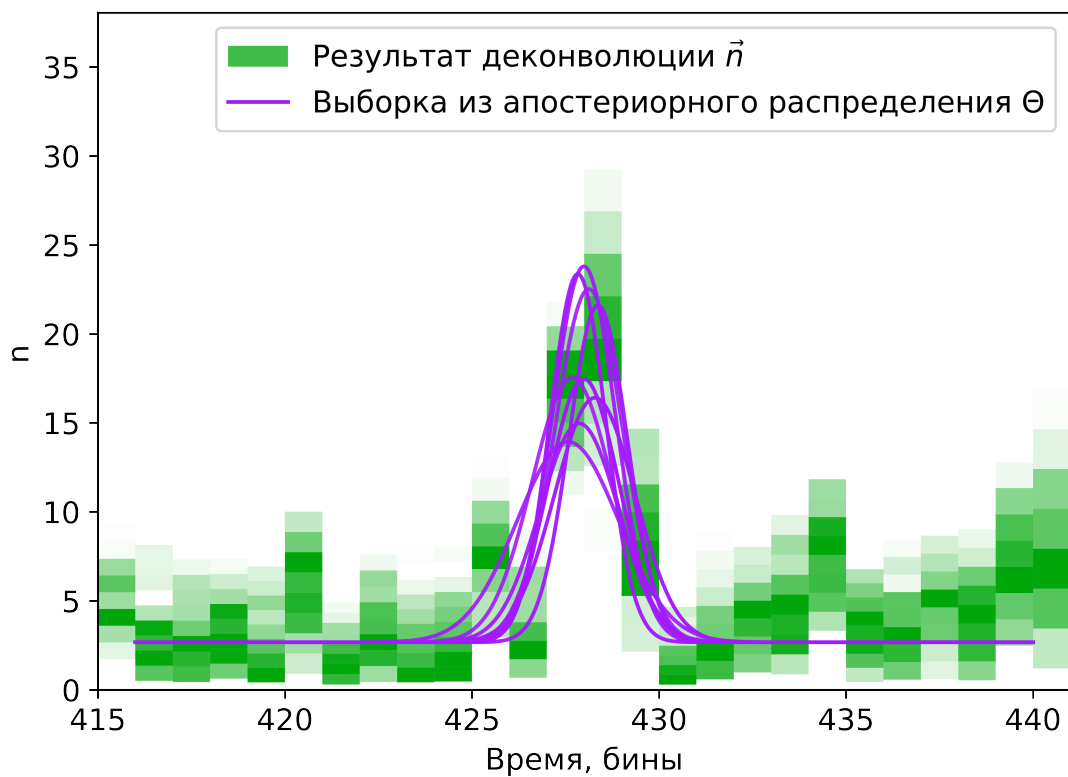


Figure 3.1: Выделение пакета фотонов ШАЛ из результатов байесовской деконволюции. Фиолетовыми кривыми представлены 10 пакетов фотонов, соответствующих случайным элементам из апостериорной выборки Θ (см. текст). Видно, что пакеты группируются вблизи ожидаемого пика, но их параметры варьируются, учитывая неопределённость данных деконволюции.

инструмент для этого — байесовский информационный критерий (Bayesian information criterion, BIC), введённый Шварцем [18] и представляющий собой в некотором смысле информационный критерий Акаике [19], адаптированный для байесовского анализа. Суть его состоит в следующем: при наличии нескольких моделей, описывающих данные, их можно сравнить по количеству информации, которое теряется при замене данные на модель. Чем меньше потеря информации, тем меньше будет значение критерия, и тем лучше показывает себя модель. Вычисление проводится по формуле

$$\text{BIC} = k \ln n - 2 \ln \mathcal{L}_{\max} \quad (3.2)$$

Здесь k — число параметров модели, n — число элементов выборки данных, \mathcal{L}_{\max} — максимальное значение функции правдоподобия для данной модели. Структура выражения указывает на важное качество критерия: чем больше число параметров модели k , тем больше требуемый прирост \mathcal{L}_{\max} , это позволяет предотвратить переобучение модели с большим числом параметров.

Для определения значимости найденного сигнала ШАЛ нам нужно сравнить две модели: модель «только шума» ($n_{EAS} = 0$) вовсе без параметров ($k = 0$), и модель «шум + сигнал», описанную в предыдущем разделе, которая имеет $k = 3$ параметра. По разнице $\Delta\text{BIC} = \text{BIC}_{\text{noise}} - \text{BIC}_{\text{noise}+EAS}$ можно судить о значимости восстановленного сигнала.

Если $\Delta\text{BIC} \leq 0$, то модель только шума оказывается более состоятельной, и такой канал можно удалить из анализа. Если $0 < \Delta\text{BIC} < 4$, то сигнал можно считать слабо значимым [20], на практике оказывается, что в эту область чаще всего попадают артефакты деконволюции или сильные флуктуации фона. Каналы, в которых $\Delta\text{BIC} > 4$, принимались как достоверные (хотя и в этом случае иногда находятся артефакты, которые позже отсеиваются на этапе восстановления геометрии ливня).

На рис. 3.2 представлен пример сначала деконволюции, а затем восстановления параметров пакетов фотонов для экспериментального события.

Оценка значимости сигналов использована, чтобы часть точек отсеить совсем, а часть — пометить как «сомнительные», однако видно, что в последних каналах присутствуют, по-видимому, артефакты деконволюции, которые дают сигналы высокой значимости, не лежащие в картину ливня. Их, впрочем, легко отделить по времени прихода, этот процесс будет описан в следующей главе. Тем не менее, наличие подобных ложных срабатываний затрудняет поиск истинных слабых сигналов ШАЛ, способы борьбы с ними разрабатываются — в первую за счёт повышения вычислительной устойчивости процедуры деконволюции — и будут применены в будущем.

3.2 Направление прихода ливня

Стандартный метод оценки направления прихода (или, иначе, ориентации оси) ливня основан на представлении о том, что фронт черенковского света (а в случае с другими установками — и заряженных частиц) с хорошей точностью является плоским. Поэтому, аппроксимируя плоскостью экспериментально измеренную зависимость времени прихода фронта $\bar{t}_{gnd}(x, y)$, мы сразу получаем оценку углов ориентации вектора нормали.

Для обработки данных эксперимента СФЕРА-2 требуется сделать дополнительный шаг: учесть время распространения света от снега до детектора. Это легко сделать, учитывая, что для каждого ФЭУ известен центр его поля зрения на поверхности (x_i, y_i) (см. раздел 1.2.1 и в частности рис. ??), и отсюда, зная высоту подъёма установки H , получаем $\bar{t}_i = \mu_t^{(i)} - \frac{\sqrt{H^2 + x_i^2 + y_i^2}}{c}$.

Задача аппроксимации трёхмерных точек плоскостью решается линейным методом наименьших квадратов, однако сам по себе этот метод неустойчив к выбросам, а, как видно на рис. 3.2, выбросы в данных μ_t присутствуют. Для решения этой проблемы была разработана методика итеративного фитирования: аппроксимируется набор точек, находится самая удалённая от плоскости точка, выбрасывается, новый набор аппроксимируется заново, и так далее. Процедура повторяется до тех пор, пока угол между векторами нормали в двух последовательных аппроксимациях не станет меньше задан-

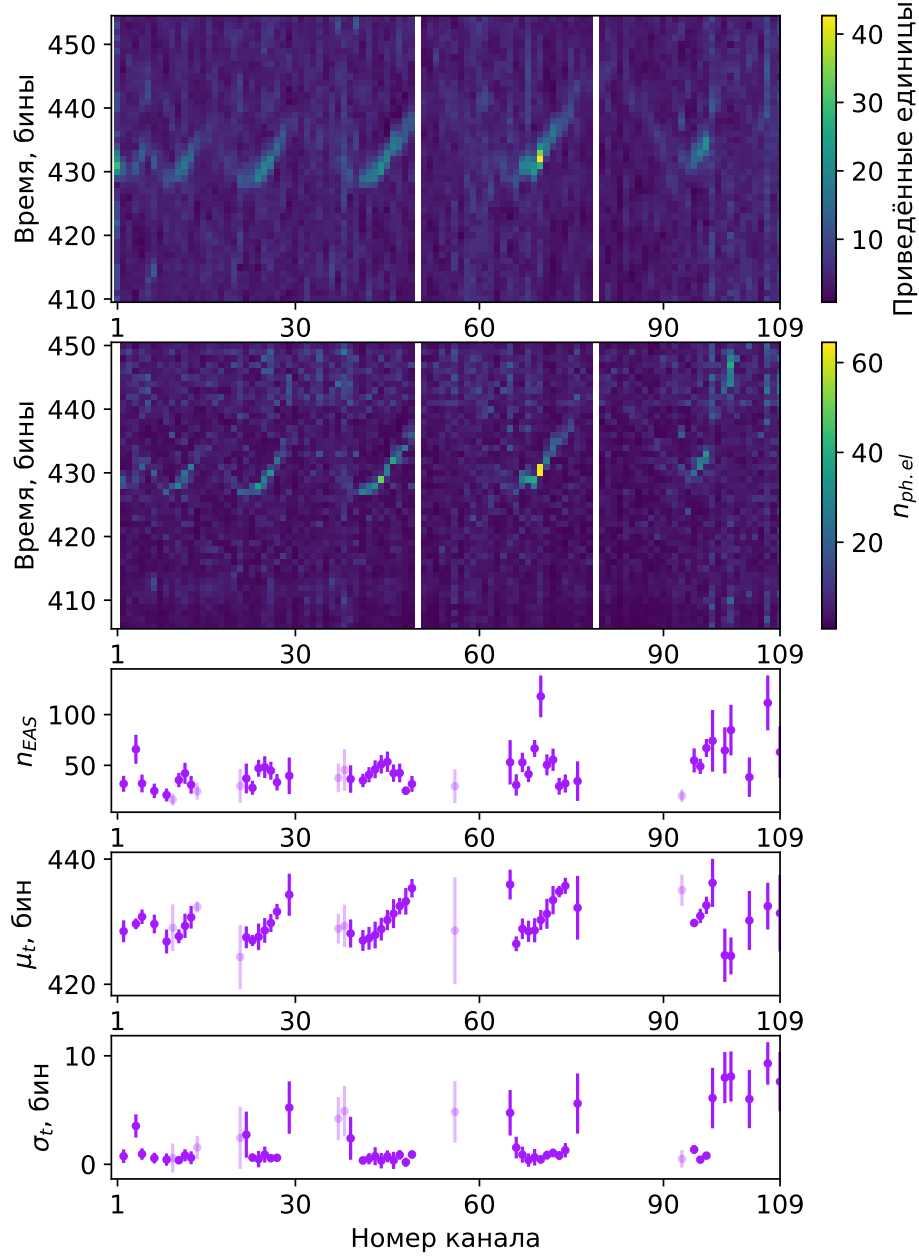


Figure 3.2: Деконволюция и восстановление параметров пакетов для экспериментального события #10675. Для параметров n_{EAS} , μ_t , σ_t ярким цветом показаны точки со значениями $\Delta BIC > 4$, тусклым — $\Delta BIC \in (0, 4]$, значения с отрицательным ΔBIC исключены, видно, что они соответствуют «пустым» областям кадра.

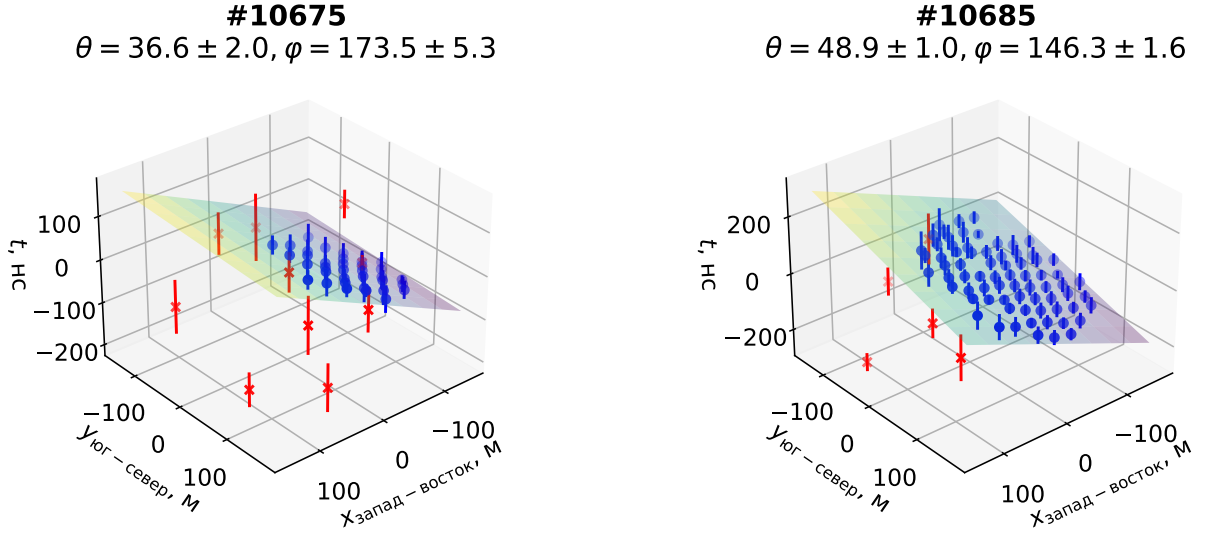


Figure 3.3: Восстановление ориентации ШАЛ для двух экспериментальных событий. Красными показаны точки, автоматически исключённые в процессе итеративного фитирования (см. текст).

ного наперёд значения. Значение допустимого «дрожания» было положено равным 0.1° . Следует заметить, что это не ограничение на погрешность определения ориентации оси, но только на устойчивость оптимального значения этой ориентации относительно удаления «наихудшей» точки. Погрешность определения углов θ и ϕ получается естественным образом в процессе фитирования, зависит от числа точек и составляет в общем случае порядка нескольких градусов. На рис. 3.3 показаны два примера этой процедуры для разных событий.

3.2.1 Перспективы уточнения оценки

Описанный метод является стандартным и устоявшимся, однако может быть уточнён с учётом индивидуальных особенностей эксперимента СФЕРА-2. В бакалаврской дипломной работе [21] был разработан метод уточнения оценки ориентации оси, рассматривающий ширину пакета фотонов как вторичный показатель. Идея метода основана на том, что для протяжённых полей зрения ФЭУ ожидается наличие зависимости $\sigma_t(x, y)$ — для ФЭУ, через которые фронт ливня проходит первым, пакет фотонов будет уже, чем для распо-

ложенных на противоположной стороне мозаики. Этот «геометрический эффект» является следствием взаимной угла между падающим и рассеянным черенковским светом, и соответствующим сжатием или растяжением пакета во времени.

В настоящую работу такой анализ не вошёл, поскольку процедура требует отдельной модификации для работы с новыми данными, однако будет внесён в общий алгоритм обработки данных в дальнейшем.

3.3 Положение оси ливня

Для оценки положения оси ливня, то есть координат её пересечения с поверхностью наблюдения, можно использовать ряд методов; в этом разделе описан один из простейших, основанный только на предположении о том, что функция пространственного распределения черенковских фотонов монотонно убывает с расстоянием от оси ливня.

Из восстановленных параметров пакетов фотонов в каждом канале мы имеем зависимость оценки n_{EAS} , найденной для каждого канала в разделе 3.1.1, от координат на поверхности наблюдения. К этому моменту мы исключили из рассмотрения сигналы с низкой значимостью, а также сигналы, не вошедшие по времени прихода в восстановленную плоскость ливня (см. предыдущий раздел).

Сформулируем функцию правдоподобия, задающую вероятность того, что ось пересекает поверхность наблюдения в точке (x_{ax}, y_{ax}) . Зная эти координаты, перенумеруем каналы по возрастанию расстояния от предполагаемого положения оси — тогда функция правдоподобия будет равна вероятности того, что $\forall i, j : i < j$ будет выполняться $n_{EAS}^{(i)} > n_{EAS}^{(j)}$. Для простоты положим здесь и далее, что апостериорное распределение $n_{EAS}^{(i)}$ в i -том бине приближённо нормально, то есть полностью описывается средним μ_i и стандартным отклонением σ_i .

$$\mathcal{L}(x_{ax}, y_{ax}) = \prod_i \prod_{j>i} (1 - F_N(0, \mu_i - \mu_j, \sqrt{\sigma_i + \sigma_j})) \quad (3.3)$$

Здесь $F_N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right]$ — функция распределения гауссовой случайной величины, её параметры $\mu_i - \mu_j$ и $\sqrt{\sigma_i + \sigma_j}$ соответствуют распределению разности двух нормальных случайных величин, $1 - F_N(0)$ даёт вероятность того, что разность случайных величин больше нуля.

Эту функцию правдоподобия можно максимизировать для поиска наиболее вероятного положения оси. Следует заметить, что, так как в основе \mathcal{L} лежит только представление о монотонности ФПР, но не о характере зависимости потока от радиуса, область максимального правдоподобия будет иметь конечные размеры, в её пределах упорядочивание каналов по возрастанию расстояния от оси не будет изменяться, и функция правдоподобия будет иметь строго одинаковые значения. На практике оказалось, что область такого «вырождения» весьма мала, и метод пригоден по крайней мере для начальной оценки.

Более сложные методы, вероятно, могут использовать описанный метод как первое приближение, но в дальнейшем восстанавливать положение оси вместе с формой ФПР в едином фитировании. Переход к таким методам не представляет концептуальной сложности.

3.4 Восстановление функции пространственного распределения черенковского света

После определения ориентации и положения оси ливня в пространстве можно приступить к оценке пространственного распределения черенковского света ШАЛ. Форма ФПР черенковского света представляет существенный интерес, так как даёт способ оценки параметров ливня, слабо зависящий от модели ядерного взаимодействия. В частности, нормировка ФПР даёт информацию об энергии ливня, а форма (часто измеряемая показателем наклона, определяемого как отношение потоков на двух радиусах), предо-

ставляет возможность для определения массы первичной частицы ШАЛ [22, 23, 24].

Полный обзор и сравнение разных аппроксимаций черенковской ФПР остаётся за рамками настоящей работы, для демонстрации используем двух-параметрическую функцию, разработанную для аппроксимации данных детекторов черенковского света в эксперименте Тунка-25 [25]:

$$Q(R) = Q_{kn} \cdot \begin{cases} \exp\left(\frac{(R_{kn} - R) \cdot (1 + 3/(R + 3))}{R_0}\right) & \text{при } R < R_{kn} \\ \left(\frac{R_{kn}}{R}\right)^b & \text{при } R \geq R_{kn} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R_0 = 10^{2.95 - 0.245P}, \text{ м}$$

$$R_{kn} = 155 - 13P, \text{ м}$$

$$b = 1.19 + 0/23P$$

Параметр Q_{kn} задаёт нормировку ФПР, а P называется параметром наклона, он равен отношению $Q(100)/Q(200)$ и определяет форму пространственного распределения.

Также стоит отметить, что возможен другой подход, основанный не на аналитической аппроксимации ФПР, а на прямом сравнении экспериментальных данных с ФПР, полученной из Монте-Карло симуляции ливня. Предполагается, что такой метод должен давать наибольшую точность, хотя и требовать больше вычислительных ресурсов. Вне зависимости от способа получения функции $Q(x, y)$ и количества её варьируемых параметров, способ сравнения с экспериментальными данными остаётся тем же.

3.4.1 Проекция полей зрения ФЭУ на плоскость ливня

В разделе 1.2.1 описан процесс получения «полей зрения» ФЭУ — распределений коэффициентов сбора $f^{(i)}(x_{gnd}, y_{gnd})$ по отражающей поверхности под установкой. Однако функция $Q(x_{shw}, y_{shw})$ задаётся в плоскости ливня, поэтому требуется спроецировать $f^{(i)}$ на неё же.

Для этого учтём, что плоскость ливня задаётся нормалью $(\theta_{shw}, \varphi_{shw})$ в системе земли и для определённости пересекает поверхность земли в начале координат. На плоскости ливня можно ввести систему координат с горизонтальной осью x_{shw} , направленной «слева-направо» с точки зрения движущегося ливня, и осью y_{shw} , лежащей в одной плоскости с вертикалью («снизу-вверх» с точки зрения ливня). Тогда для произвольной точки на поверхности земли, выраженной полярными координатами (r_{gnd}, φ_{gnd}) из простых геометрических соображений найдём $x_{shw} = -r_{gnd} \sin(\varphi_{shw} - \varphi_{gnd})$, $y_{shw} = -r_{gnd} \cos(\varphi_{shw} - \varphi_{gnd}) \cos \theta_{shw}$.

Таким образом спроецированные поля зрения дают суммарное распределение чувствительности установки $f(x_{shw}, y_{shw})$ в плоскости фронта ливня. Пример такой проекции для ливня с зенитным углом падения $\approx 30^\circ$ приведён на рис. 3.4. Заметим, что, так как функция f является безразмерным коэффициентом сбора, нет необходимости учитывать преобразование элемента площади при проекции.

3.4.2 Преобразование фотонов черенковского света ШАЛ в эквивалентные фотоэлектроны

До сих пор мы, как указано в разделе 1.2.2, работали с количеством эквивалентных фотоэлектронов, рождённых сигналом ШАЛ на фотокатоде ФЭУ. Для построения ФПР черенковского излучения требуется описать, как происходит пересчёт одной величины в другую.

Заметим, что искомая величина плотности черенковского света измеряется на единицу энергии: $Q(x, y)$ [фотоны $\cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{эВ}^{-1}$] [25], так как в соответствии с формулой Франка-Тамма [26] $dN_\gamma/dE \approx \text{Const}$ в видимой части спектра. Тогда зная квантовую эффективность ФЭУ $\kappa(E)$, а точнее её среднее значение $\bar{\kappa}$ в диапазоне энергий $[E_{min}, E_{min} + \Delta E]$, можно перейти от Q к флюенсу эквивалентных фотоэлектронов $n_{ph.el.}(x, y)$ [фотоэлектроны $\cdot \text{м}^{-2}$]:

$$\Delta E \bar{\kappa} Q(x, y) = n_{ph.el.} \quad (3.5)$$

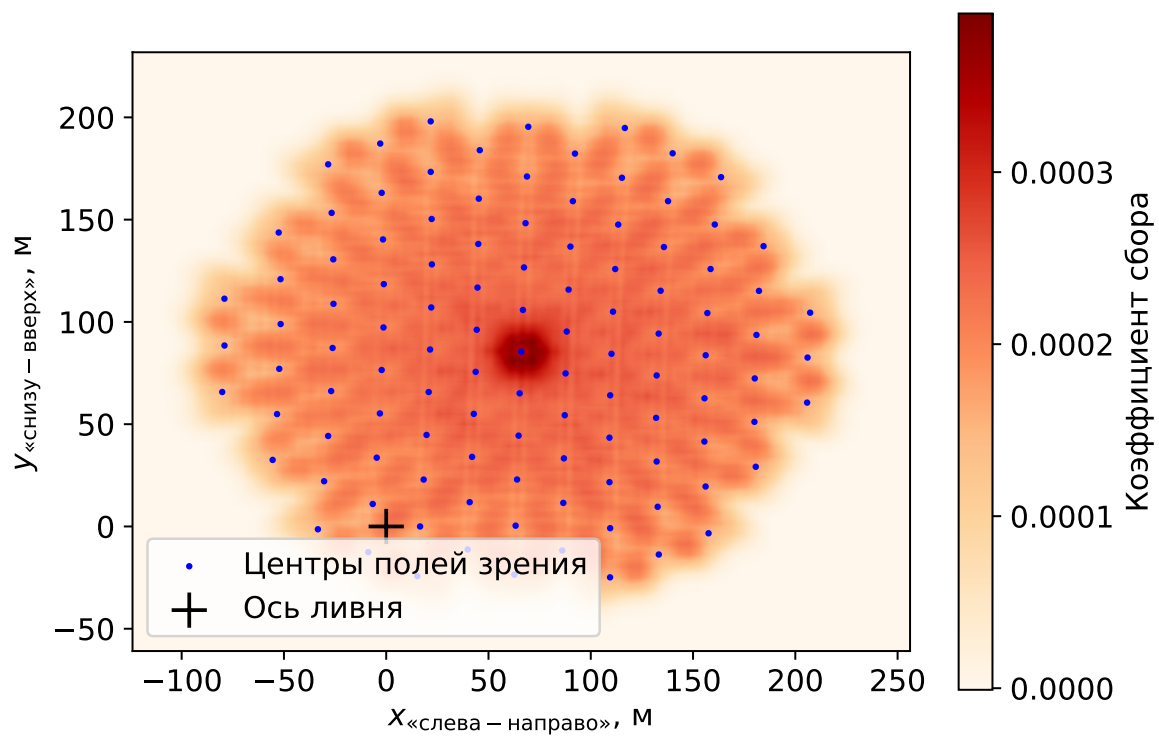


Figure 3.4: Распределение чувствительности установки в плоскости фронта ливня для события % 10675.

Кривые квантовой эффективности для двух видов ФЭУ приведены на рис. 3.5. Коэффициент $\Delta E \bar{\kappa}$ составляет 0.34 эВ для Hamamatsu R3886 и 0.39 эВ для ФЭУ84-3.

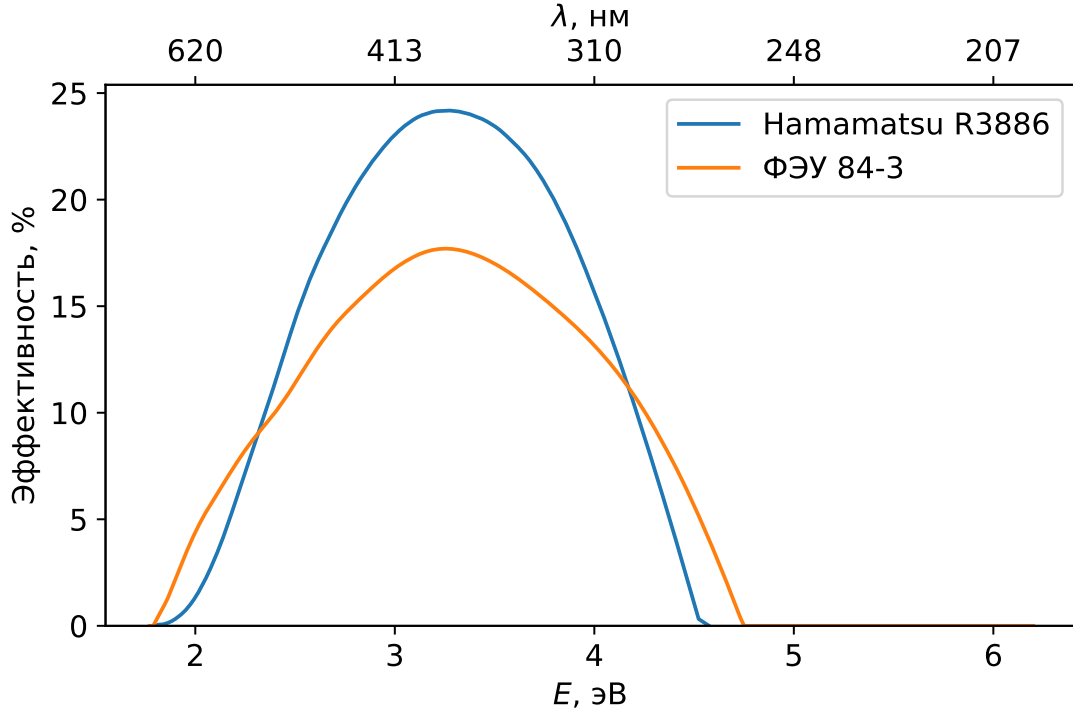


Figure 3.5: Кривые квантовой эффективности для двух видов ФЭУ, использованных в эксперименте СФЕРА-2

3.4.3 Неопределённость процесса сбора света с поверхности

Учтём, что до сих пор мы получали апостериорную оценку на число фотоэлектронов, выбитых с фотокатода ФЭУ под действием фотонов ШАЛ. В то же время из модели ливня, учитывая коэффициенты сбора света с поверхности снега, мы можем получить только математическое ожидание этой величины, но не её точное значение — процесс сбора света сам является стохастическим. Хорошим приближением для него является пуассоновское распределение. Иначе говоря, если среднее число фотонов, ожидаемое к i -том канале, равно $\lambda^{(i)}$, то реально зарегистрировано будет $n^{(i)} \sim \text{Poisson}(\lambda^{(i)})$. Таким образом нам необходимо, зная апостериорное (относительно процесса

деконволюции, выделения пакета фотонов и т.д.) распределение n , нужно получить оценку λ (индекс канала i далее для краткости опущен).

Сначала рассмотрим случай, когда n известно точно. Тогда теорема Байеса сразу даёт апостериорное распределение λ :

$$P(\lambda|n) = P(n|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad (3.6)$$

Иначе говоря, плотность апостериорного распределения непрерывной величины λ задаётся той же формулой, что и само распределение пуассона, но где λ является аргументом, а n — параметром.

Теперь перейдём к случаю, где n не известно точно, но имеет некоторое распределение. Учитывая, что n может принимать только целые значения, представим выборку из апостериорного распределения в виде таблицы частотности: $\{n_i, p_i\}, i = 1, \dots, k$, где p_i — вероятность, что n имеет значение n_i . Тогда ясно, что апостериорное распределение λ будет равно дискретной «свёртке» выражения (3.6) с распределением n :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^k p_i \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_i}}{n_i!} \quad (3.7)$$

На практике оказывается, что такая свёртка уширяет апостериорное распределение n не более чем на 10 – 20%, сдвиг математического ожидания из-за асимметрии распределения Пуассона пренебрежимо мал (менее 1%).

3.4.4 Аппроксимация ФПР

Пользуясь результатами предыдущих двух разделов, запишем окончательное выражение для ожидаемого среднего числа фотоэлектронов от света ШАЛ, зарегистрированных в i -том ФЭУ.

$$\int_{\infty} f^{(i)}(x, y); \Delta E \bar{\kappa} Q(x, y) dx dy = \lambda_n^{(i)} \quad (3.8)$$

Интегрирование можно провести численно по известным точкам распределения $f^{(i)}(x, y)$ в плоскости ливня. Используя данные апостериорного

распределения $\lambda_n^{(i)}$, можно найти среднее значение и стандартное отклонение этой величины для использования в аппроксимации.

Визуализировать такое фитирование в традиционных координатах $R, Q(R)$ непросто, так как величина $Q(R)$ сворачивается с двумерной функцией распределения чувствительности для каждого ФЭУ. Приближённую качественную картину можно получить, если пренебречь протяжённостью полей зрения и считать, что они достаточно малы, чтобы можно было положить $Q(x, y) = Const = Q(x_c, y_c)$: $\Delta E \approx Q(x_c, y_c) \int_{\infty} f^{(i)}(x, y) dx dy = \lambda_n^{(i)}$. Это приближение позволяет приписать каждому измерительному каналу значение приближённое экспериментальное значение Q , которые можно затем нанести на график и визуально сравнить с теоретической кривой.

Такая визуализация приведена на рис. 3.6 и 3.7, однако следует подчеркнуть её неточность. В частности за счёт протяжённых полей зрения, эксперимент СФЕРА-2 чувствителен к черенковскому свету в приосевой области, поэтому точность и устойчивость фита заметно выше, чем может показаться по этим упрощённым графикам. Также точность повышается за счёт наложения полей зрения ФЭУ: в некоторых областях поверхности свет регистрируется сразу двумя или даже тремя ФЭУ, что эффективно уменьшает погрешности определения λ_n в них.

3.4.5 Определение параметров ливня

Используя описанную процедуру фитирования для оценки оптимального значения и неопределённости каждого из параметров ФПР, можно, наконец, перейти к оценке параметров первичной частицы ливня. За рамками данной работы остаются вопросы связи энергии и массы первичной частицы, а также глубины максимума, с наблюдаемыми характеристиками ФПР. На этом этапе необходимо учитывать модельные неопределённости, то есть статистический характер зависимости параметров ФПР от исследуемых характеристик ливня.

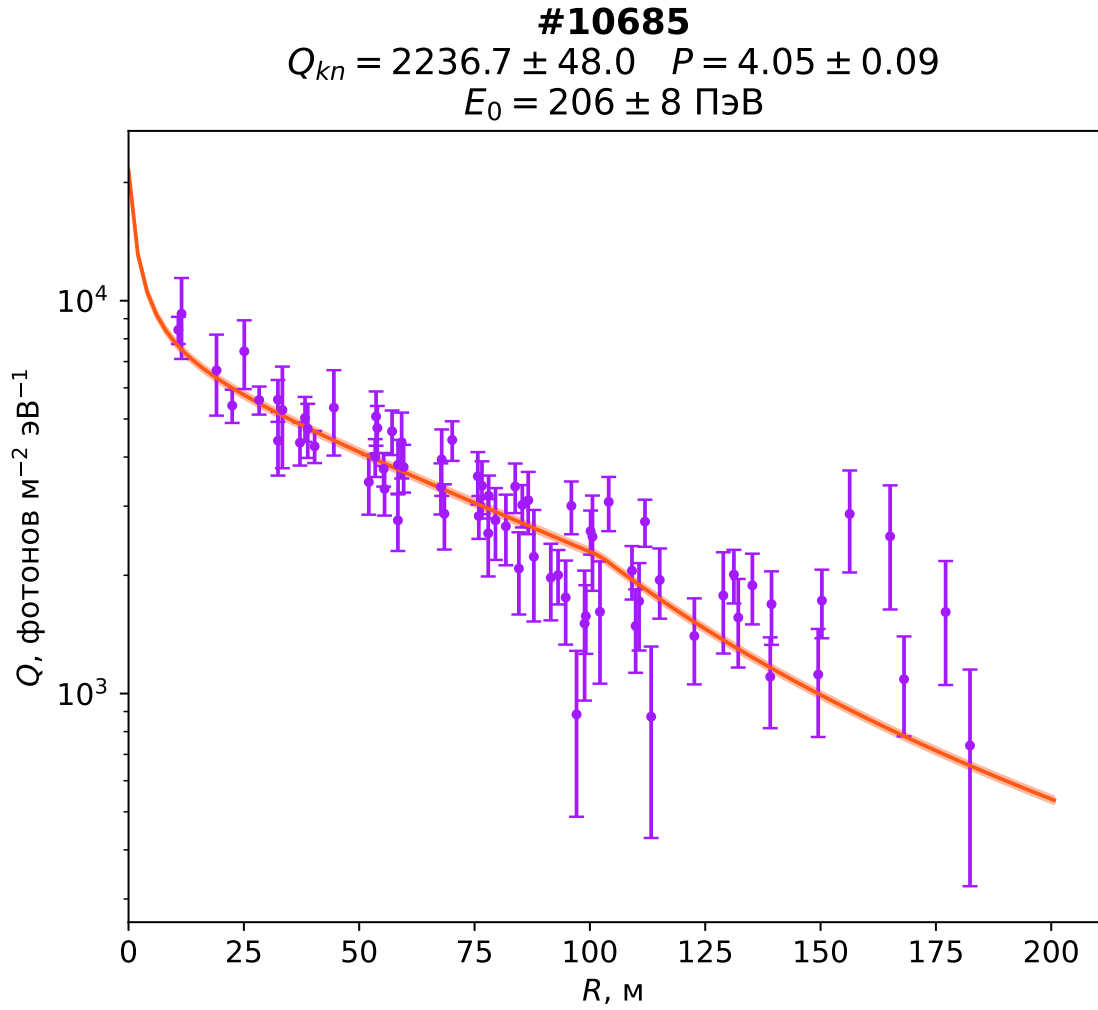


Figure 3.6: Упрощённая визуализация фитирования ФПР по данным эксперимента СФЕРА-2 (см. текст). Погрешность определения нормировки Q_{kn} показана на графике коридором вокруг наиболее вероятной кривой. Инструментальная погрешность определения энергии вычислена по формуле (3.9) с учётом погрешностей Q_{kn} и P .

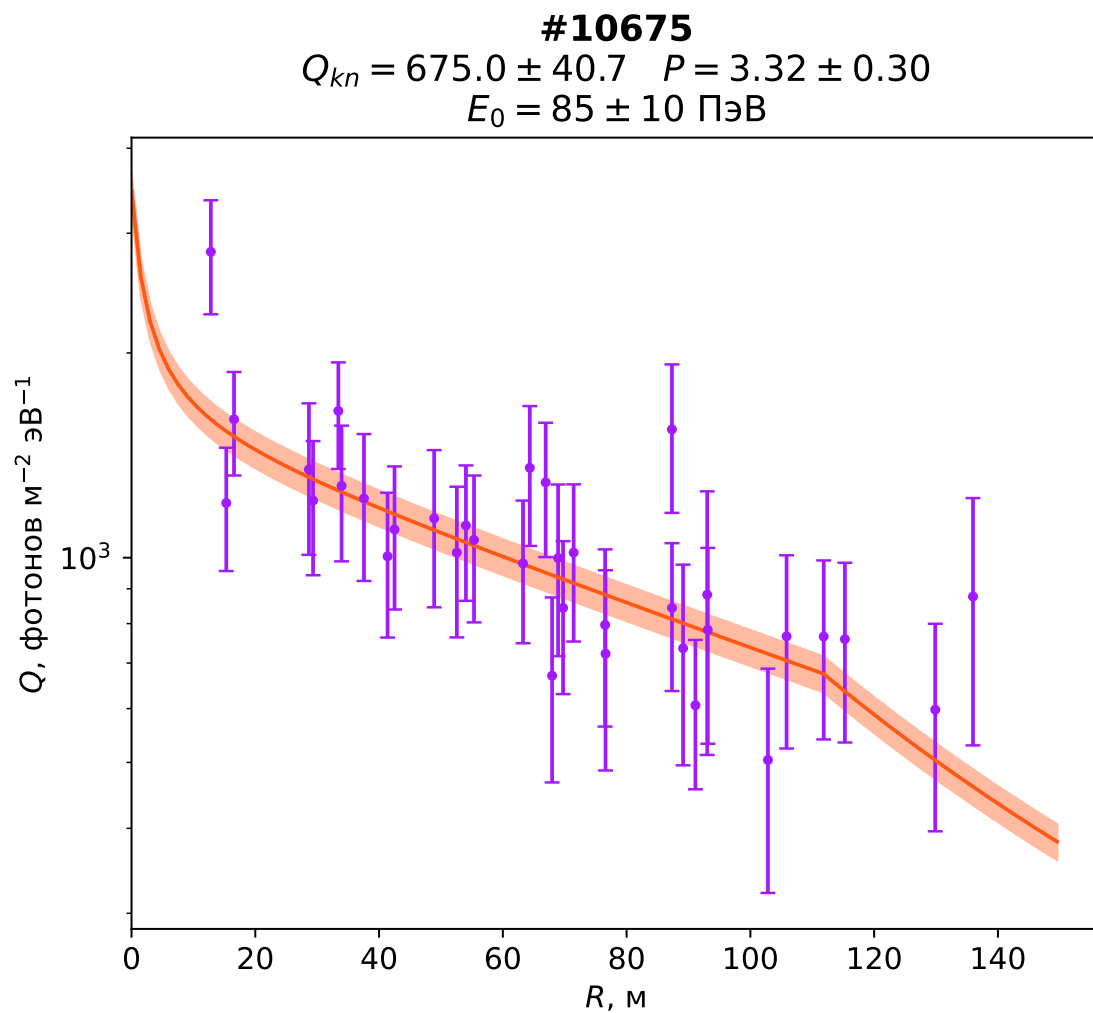


Figure 3.7: То же самое, что рис. 3.6, для другого экспериментального события.

В этом разделе ограничимся простым применением формулы для связи E_0 и $Q(R)$ [25]:

$$E [\text{ТэВ}] = 400 \cdot Q(175)^{0.95} \quad (3.9)$$

Чтобы определить неопределённость Q_{175} , и как следствие E с учётом оцененных неопределённостей параметров Q_{kn} и P сэмплируем каждый из них и вычислим среднее и стандартное отклонение по декартову произведению выборок (как видно из выражения (3.4), ФПР нетривиальным образом зависит от P).

Полученные энергии с соответствующими погрешностями приведены на рис. 3.6 и 3.7 вместе с параметрами ФПР. Погрешность определяется для каждого события отдельно, но в общем по двум примерам с различными энергиями и положениями оси относительно детектора её можно оценить в 5 – 10%. Детальное исследование систематической инструментальной погрешности (в том числе её зависимость от энергии и положения ливня, высоты и ориентации установки) будет предметом дальнейших изысканий с использованием набранной статистики событий.

Также следует качественно сравнить полученные величины с модельными погрешностями, которые могут быть найдены, например, в работе [27, табл. 1]. Для ливней с энергией 1 – 10 ПэВ флуктуации $Q(150)$, например, оцениваются в 2 – 10%, уменьшаясь с энергией и массой первичной частицы. Для событий с энергиями ≈ 80 и ≈ 206 ПэВ эти модельные неопределённости будут ещё меньше — следовательно, особенно важным становится именно точное определение инструментальной погрешности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе развиваются методы обработки данных эксперимента СФЕРА-2, нацеленные на восстановление детальной структуры ШАЛ. Основное направление развития состоит в построении более глубокой и детальной модели детектора и оценки инструментальных неопределённостей, сопряжённых с процессом регистрации черенковского света ШАЛ. Предложен новый, более модульный по сравнению с предшествующими работами, принцип построения процедуры анализа, призванный обеспечить её большую прозрачность и дать инструменты для перекрёстной проверки всех промежуточных выводов.

Для достижения поставленных целей реализован оригинальный метод деконволюции на основе байесовской статистики и метода Монте-Карло с марковскими цепями, приведены обоснования его корректности и примеры применения. Байесовский формализм для описания восстановленных величин с помощью их апостериорных распределений оказался удобным и во всём последующем анализе, и его применение предлагается расширять.

Результаты разработанных алгоритмов деконволюции и выделения сигнала ШАЛ следует считать предварительными: ещё предстоит провести тщательную проверку, оптимизацию, детальное сравнение с результатами предыдущих методов. Алгоритмы оценки параметров ливня и первичной частицы, приведённые в работе, также являются предварительными и служат в большей степени для проверки концепции.

Однако уже эти новые результаты представляются качественно верными. В частности, оценка относительной инструментальной погрешности определения энергии первичной частицы ШАЛ в 5 – 10% согласуется с

ожидаемым значением, в частности, с систематическими погрешностями других экспериментов по регистрации ШАЛ. В то же время, так как это значение получается пособытийно, несколько примеров, приведённых в работе, несомненно, не могут дать полной картины.

В духе принципов открытой науки весь анализ проведён с помощью свободных программных инструментов с открытым исходным кодом: на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy, emcee. Все оригинальные коды, с помощью которых получены приведённые результаты, доступны в публичном git-репозитории².

Bibliography

- [1] R.A. Antonov и др. «Primary cosmic ray spectrum measured using Cherenkov light reflected from the snow surface». В: Nuclear Physics B - Proceedings Supplements 52.3 (февр. 1997), с. 182—184. DOI: 10.1016/s0920-5632(96)00876-6.
- [2] R. A. Antonov и др. «Balloon-Borne measurements of the CR energy spectrum in the energy range 10^{16} - 10^{17} EV». В: International Cosmic Ray Conference. Т. 1. International Cosmic Ray Conference. ЯНВ. 2001, с. 59.
- [3] R.A. Antonov и др. «The LED calibration system of the SPHERE-2 detector». В: Astroparticle Physics 77 (апр. 2016), с. 55—65. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2016.01.004.
- [4] R.A. Antonov и др. «The SPHERE-2 detector for observation of extensive air showers in 1 PeV – 1 EeV energy range». В: Astroparticle Physics 121 (сент. 2020), с. 102460. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2020.102460.

²github.com/nj-vs-vh/masters-thesis. 2021. URL: <https://github.com/nj-vs-vh/masters-thesis>.

- [5] Cynthia Rhode и Scott Whittenburg. «Bayesian Deconvolution». В: Spectroscopy Letters 26.6 (июль 1993), с. 1085—1102. DOI: 10.1080/00387019308011596.
- [6] David Wipf и Haichao Zhang. «Revisiting Bayesian Blind Deconvolution». В: arXiv e-prints, arXiv:1305.2362 (май 2013), arXiv:1305.2362. arXiv: 1305.2362 [cs.CV].
- [7] Andrew Gelman и др. Bayesian Data Analysis. Chapman и Hall/CRC, нояб. 2013. DOI: 10.1201/b16018.
- [8] R. Penrose. «On best approximate solutions of linear matrix equations». В: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 52.1 (янв. 1956), с. 17—19. DOI: 10.1017/s0305004100030929.
- [9] Charles R. Harris и др. «Array programming with NumPy». В: Nature 585.7825 (сент. 2020), с. 357—362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [10] Daniel Foreman-Mackey. «corner.py: Scatterplot matrices in Python». В: The Journal of Open Source Software 1.2 (июнь 2016), с. 24. DOI: 10.21105/joss.00024.
- [11] Sanjib Sharma. «Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy». В: Annual Review of Astronomy and Astrophysics 55.1 (авг. 2017), с. 213—259. DOI: 10.1146/annurev-astro-082214-122339.
- [12] Jonathan Goodman и Jonathan Weare. «Ensemble samplers with affine invariance». В: Communications in Applied Mathematics and Computational Science 5.1 (янв. 2010), с. 65—80. DOI: 10.2140/camcos.2010.5.65.
- [13] A. Sokal. «Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics: Foundations and New Algorithms». В: Functional Integration. Springer US, 1997, с. 131—192. DOI: 10.1007/978-1-4899-0319-8_6.
- [14] Autocorrelation analysis & convergence. 2019. URL: <https://emcee.readthedocs.io/en/stable/tutorials/autocorr/>.

- [15] R. A. Antonov и др. «Detection of reflected Cherenkov light from extensive air showers in the SPHERE experiment as a method of studying superhigh energy cosmic rays». В: Physics of Particles and Nuclei 46.1 (январь 2015), с. 60—93. DOI: 10.1134/s1063779615010025.
- [16] Alan Genz. «Numerical Computation of Multivariate Normal Probabilities». В: Journal of Computational and Graphical Statistics 1.2 (июнь 1992), с. 141—149. DOI: 10.2307/1390838.
- [17] Pauli Virtanen и др. «SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python». В: Nature Methods 17 (2020), с. 261—272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [18] Gideon Schwarz. «Estimating the Dimension of a Model». В: The Annals of Statistics 6.2 (март 1978). DOI: 10.1214/aos/1176344136.
- [19] H. Akaike. «A new look at the statistical model identification». В: IEEE Transactions on Automatic Control 19.6 (декабрь 1974), с. 716—723. DOI: 10.1109/tac.1974.1100705.
- [20] Robert E. Kass и Adrian E. Raftery. «Bayes Factors». В: Journal of the American Statistical Association 90.430 (июнь 1995), с. 773—795. DOI: 10.1080/01621459.1995.10476572.
- [21] Вайман И.А. «Восстановление направления прихода первичной частицы ШАЛ по данным эксперимента СФЕРА-2». бакалаврская ВКР. Физический факультет МГУ, кафедра физики космоса, 2018.
- [22] J R Patterson и A M Hillas. «The relation of the lateral distribution of Cerenkov light from cosmic-ray showers to the distance of maximum development». В: Journal of Physics G: Nuclear Physics 9.11 (ноябрь 1983), с. 1433—1452. DOI: 10.1088/0305-4616/9/11/015.
- [23] B R Dawson и др. «The lateral distribution of Cerenkov light from extensive air showers». В: Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 15.6 (июнь 1989), с. 893—908. DOI: 10.1088/0954-3899/15/6/017.