

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ КОСМОСА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

«ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ И  
НАПРАВЛЕНИЯ ПРИХОДА ПЕРВИЧНОЙ ЧАСТИЦЫ  
В ЭКСПЕРИМЕНТЕ СФЕРА-2»

Выполнил студент  
214м группы  
Байман Игорь Алексеевич

Научный руководитель:  
доцент Подгрудков Дмитрий Аркадьевич

Допущена к защите 22.04.2021  
Зав.кафедрой

Москва  
2021

# Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1 Методы регистрации и восстановления параметров ШАЛ	6
1.1 Методы регистрации ШАЛ . . . . .	6
1.2 Оценка энергии первичной частицы и её неопределённость .	7
2 Эксперимент СФЕРА-2	10
2.1 Метод регистрации отражённого черенковского света ШАЛ .	10
2.2 Методы обработки данных и предварительные результаты .	11
2.3 Качественная модель работы детектора . . . . .	14
2.3.1 Развитие ШАЛ в атмосфере . . . . .	14
2.3.2 Отражение света от снега . . . . .	15
2.3.3 Сбор отражённого света . . . . .	15
2.3.4 Регистрация собранного света . . . . .	17
3 Байесовская деконволюция	22
3.1 Предпосылки . . . . .	22
3.2 Структура входного сигнала . . . . .	23
3.2.1 Эффект окна . . . . .	26
3.3 Постановка задачи . . . . .	26
3.4 Выходной сигнал как реализация случайного процесса . . . .	27
3.5 Предварительная оценка . . . . .	27
3.6 Решение задачи байесовской деконволюции . . . . .	31
3.6.1 Выбор априорного распределения . . . . .	32

3.6.2	Полное вычисление функции правдоподобия методом Монте-Карло . . . . .	32
3.6.3	Аппроксимация функции правдоподобия многомерным нормальным распределением . . . . .	33
3.6.4	Сэмплирование апостериорного распределения . . . . .	39
3.7	Деконволюция экспериментальных данных . . . . .	43
3.7.1	Экспериментальная рандомизированная импульсная характеристика . . . . .	45
3.7.2	Модификация процедуры для применения к реальным данным . . . . .	47
3.7.3	Подготовка экспериментальных данных . . . . .	53
4	Оценка параметров ШАЛ . . . . .	60
4.1	Выделение сигнала ШАЛ и оценка значимости . . . . .	60
4.1.1	Выделение пакета фотонов ШАЛ . . . . .	61
4.1.2	Оценка значимости выделенного сигнала . . . . .	62
4.2	Направление прихода ливня . . . . .	66
4.2.1	Перспективы уточнения оценки . . . . .	67
4.3	Положение оси ливня . . . . .	68
4.4	Восстановление функции пространственного распределения черенковского света . . . . .	69
4.4.1	Проекция полей зрения ФЭУ на плоскость ливня . . . . .	70
4.4.2	Преобразование фотонов черенковского света ШАЛ в эквивалентные фотоэлектроны . . . . .	72
4.4.3	Неопределённость процесса сбора света с поверхности . . . . .	73
4.4.4	Аппроксимация ФПР . . . . .	74
4.4.5	Определение параметров ливня . . . . .	75
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	79
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	81

# Введение

Космические лучи (КЛ) — заряженные частицы высоких энергий, движущиеся в космическом пространстве — являются важным фактором динамики космических систем и давно изучаются с помощью многих экспериментальных методов. Энергетический спектр космических лучей простирается почти на 12 порядков — от  $10^9$  до  $10^{21}$  эВ — и имеет ряд особенностей, которые несут информацию об их происхождении и условиях распространения в Солнечной системе, Галактике и Метагалактике. Направления прихода ливней распределены практически изотропно для большей части спектра, что также даёт важную информацию об условиях их распространения, а в области сверхвысоких энергий ведутся поиски анизотропии, которая должна указать на распределение источников этих частиц. В составе космических лучей на сравнительно небольших энергиях преобладают протоны, меньшие доли прочих химических элементов также хорошо изучены, однако для высоких энергий нет однозначных данных, различные эксперименты дают противоречивые оценки состава. Состав космических лучей, связанный с их временем жизни, тоже весьма ценен для ответа на вопросы о распределении источников космических лучей и о крупномасштабных магнитных полях, определяющих их распространение.

В области энергий больше  $10^{15}$  эВ фактически единственным способом экспериментального изучения космических лучей является непрямой метод регистрации каскадов вторичных частиц, порождаемых КЛ в атмосфере — широких атмосферных ливней (ШАЛ). Этот метод ставит земную атмосферу на службу экспериментальной технике, превращая её в гигантский калориметр. За последние 50 лет разработано много методов регистрации

ШАЛ по разным их компонентам и эффектам, который они оказывают на атмосферу. Настоящая работа посвящена обработке данных эксперимента СФЕРА-2, который нацелен на регистрацию ШАЛ методом отражённого черенковского света — сравнительно новым и мало изученным.

Целью работы является развитие и продолжение уже созданных методов обработки данных, но обогащение их более глубоким пониманием принципов работы детектора СФЕРА-2, достигнутым в последние годы. В частности, акцент стоит на количественном измерении инструментальных неопределённостей, вносимых в процессе измерения, которые в предыдущих публикациях описывались лишь в общих чертах. Для достижения этой цели была поставлена задача моделирования детектора как стохастической системы и разработки адекватных этому методов оценки параметров ливня.

С методической точки зрения в данной работе предлагается более модульный по сравнению с предыдущими публикациями подход, основанный на последовательном применении ряда сравнительно независимых процедур реконструкции, вместо единой модели типа «чёрный ящик». С точки зрения используемого математического аппарата, в задаче описания детектора, было найдено плодотворное применение понятиям байесовской статистики и соответствующим численным алгоритмам.

# Глава 1. Методы регистрации и восстановления параметров ШАЛ

В этой главе приводится краткий обзор современных методов регистрации ШАЛ на примере крупнейших установок: Pierre Auger Observatory, Telescope Array, Якутской установки по регистрации ШАЛ; приводится пример метода восстановления энергии первичной частицы и ассоциированные с ними неопределённости. Кроме того, обсуждается важность оценки систематических погрешностей для корректной интерпретации результатов эксперимента.

## 1.1 Методы регистрации ШАЛ

По регистрируемой компоненте ШАЛ установки можно разделить на детекторы заряженных частиц и детекторы сопутствующих оптических излучений ливня (методы регистрации радиоизлучений ШАЛ, также активно развиваемые, оставлены за рамками данной работы). Крупные современные эксперименты используют одновременно несколько каналов регистрации. Так, Pierre Auger Observatory использует наземные детекторы (баки, заполненные водой и снабжённые несколькими ФЭУ для регистрации черенковского света, рождаемого заряженными частицами в воде) и несколько флуоресцентных телескопов, наблюдающих за площадью эксперимента со стороны [1]. Telescope Array использует сходную методику наземных детекторов (в качестве них используются сцинтилляторы, а не водяные баки, как в РАО) и флуоресцентных телескопов [2]. В Якутской установке ШАЛ используются

наземные сцинтилляторы и отдельные счётчики мюонов, расположенные под землёй для исключения электронной компоненты, а также детекторы черенковского излучения, расположенные массивом на поверхности земли [3]. Во всех этих экспериментах активно используются перекрёстные проверки для сравнения и взаимной калибровки разных каналов регистрации.

## 1.2 Оценка энергии первичной частицы и её неопределённость

Энергия первичной частицы является ключевым параметром ливня, а энергетический спектр, получаемый на основе оценки энергий множества событий, является важнейшим результатом для любого эксперимента по наблюдению ШАЛ. Для восстановления энергии разработано множество теоретических методов, но общая идея их заключается в том, что, зная физические закономерности, управляющие развитием ливня, можно предсказать долю энергии, переданную той или иной компоненте либо излучению ливня. Измеряя эту долю энергии экспериментально, можно с некоторой погрешностью перейти назад к полной энергии всего ливня, которая, в свою очередь, даст оценку энергии первичной частицы.

Отдельное внимание следует уделить оценке погрешностей, возникающих при восстановлении энергии. Систематические погрешности являются важным фактором, ограничивающим наши знания о спектре космических лучей в области сверхвысоких энергий. Так, спектры, полученные в разных экспериментах, дают значения, отличающиеся друг от друга иногда на десятки процентов. Этот факт представляет серьёзную проблему, если интерпретировать его как действительную разницу потоков. В то же время это расхождение может быть феноменологически объяснено систематическими сдвигами в шкалах энергий разных экспериментов, после устранения которых спектры совпадают с высокой точностью, причём не только по абсолютным значениям, но и по форме особенностей спектра [4]. Поэтому в

современной экспериментальной технике особое место уделяется процедурам калибровки детекторов и оценке неопределённостей.

Приведём далее пример такого метода — восстановление энергии по данным наземных детекторов эксперименте Pierre Auger Observatory. Этот пример не стремится быть исчерпывающим или полностью актуальным, но дать иллюстрацию и общее представление о методике.

Низкоуровневая калибровка наземных детекторов РАО проводится к величине «вертикальных эквивалентных мюонов» (Vertical Equivalent Muons, VEM) [5]. Эта величина показывает, как подсказывает название, число гипотетических мюонов, движущихся по вертикали и одновременно попавших в объём детектора, которые породили бы такой же сигнал в системе регистрации. Калибровка для перевода измеренного сигнала в единицы VEM происходит онлайн силами электроники каждой наземной станции. В качестве калибровочного источника используются атмосферные мюоны, дающие характерный пик в распределении интенсивностей импульсов. Эта примечательно простая процедура сразу позволяет оперировать сигналами, выраженными в физических единицах.

Далее для каждого экспериментального события рассчитывается значение  $S_{38}$  — это флюенс (плотность потока, интегрированна по времени прохождения ливня) заряженных частиц на расстоянии 1000 м от оси ливня в случае, если бы ливень имел зенитный угол  $38^\circ$  [6]. Такое специфичное определение, приводящее потоки к конкретному зенитному углу, учитывает тот факт, что для наземных ливней детекторы массива будут расположены на разных глубинах. Далее по данным гибридных событий, то есть зарегистрированных одновременно наземными детекторами и флуоресцентными телескопами, проводится кросс-калибровка:  $S_{38}$  оказывается скоррелирована с энергией, восстановленной по данным флуоресцентных телескопов  $E_{FD}$ . Построив зависимость двух величин по гибридным событиям, можно получить оценку энергии по наземным детекторам и для экспериментальных событий без соответствующих измерений флуоресцентного света.



Неопределённость такой процедуры весьма велика и происходит из нескольких факторов. Так, погрешность реконструкции  $S_{38}$  составляла порядка 10% [7], а погрешность перевода этой величины в энергию первичной частицы ливня — ещё около 20% [8].

## Глава 2. Эксперимент СФЕРА-2

В этой главе описывается идея, мотивация и краткая история метода регистрации отражённого черенковского света, который развивается в эксперименте СФЕРА-2; обзревается проведённые измерения и полученные на сегодняшний день результаты, обосновывается необходимость и основные направление дальнейшей работы; наконец, приводится подробная качественная модель процесса регистрации ШАЛ детектором СФЕРА-2.

### 2.1 Метод регистрации отражённого черенковского света ШАЛ

Черенковский свет ШАЛ является важным инструментом исследования ШАЛ, в первую очередь из-за относительно слабой зависимости его полного потока от модели ядерного взаимодействия при высоких энергиях. Традиционный способ прямой регистрации черенковского света наземными детекторами геометрически аналогичен наземной регистрации заряженных частиц: также используется массив детекторов, распределённых по большой площади, которые дают точечные измерения плотности потока.

Однако, в отличие от заряженных частиц, черенковский свет оптического диапазона может весьма эффективно рассеиваться поверхностью Земли и наблюдаться уже отражённым. Метод регистрации этого отражённого света первым предложил академик А. Е. Чудаков [9]. Одной из первых практических реализаций подобной идеи стали измерения Д. Наварры [10]. Позже Р. А. Антоновым была предложена идея установки на основе опти-

ческой схемы Шмидта: с чувствительными элементами вблизи фокальной поверхности сферического зеркала. Первые эксперименты были проведены на базе Тянь-Шаньской установки по регистрации ШАЛ, дальнейшее развитие этой методики велось в экспериментах СФЕРА-1 и СФЕРА-2 [11, 12]. Подробное описание этого эксперимента приведено в разделе 2.3.

Преимущества метода, помимо общих достоинств методики регистрации черенковского света, включают возможность достичь существенной площади регистрации компактным детектором, а также доступ (хотя и косвенный) к черенковскому свету из приосевой области ливня, достигаемый за счёт протяжённых полей зрения отдельных чувствительных элементов прибора. Результаты предварительного моделирования подтверждают эти ожидания [13].

## 2.2 Методы обработки данных и предварительные результаты

Данные эксперимента СФЕРА-2 за 2011-2013 годы анализировались для построения дифференциального энергетического спектра и оценки доли лёгких ядер в зависимости от энергии [14, 15]. Для данных за 2013 год результаты этих исследований представлены на рис. 2.1.

Идеи и физические представления о ШАЛ и об экспериментальной установке, лежащих в основе предварительного анализа, наследуются и развивается в настоящей работе. С другой стороны, между ними можно провести методическое различие в общем подходе к моделированию. В предшествующих работах доминирующим был холистический подход, стремящийся построить замкнутую модель типа «чёрного ящика» для изучаемого явления и его процессов экспериментальной регистрации [16]. На вход такой модели подаются физические параметры первичной частицы (энергия, масса, направление движения), а также ряд параметров установки и среды в момент регистрации, а на выходе получается «модельный» кадр события. Оценки

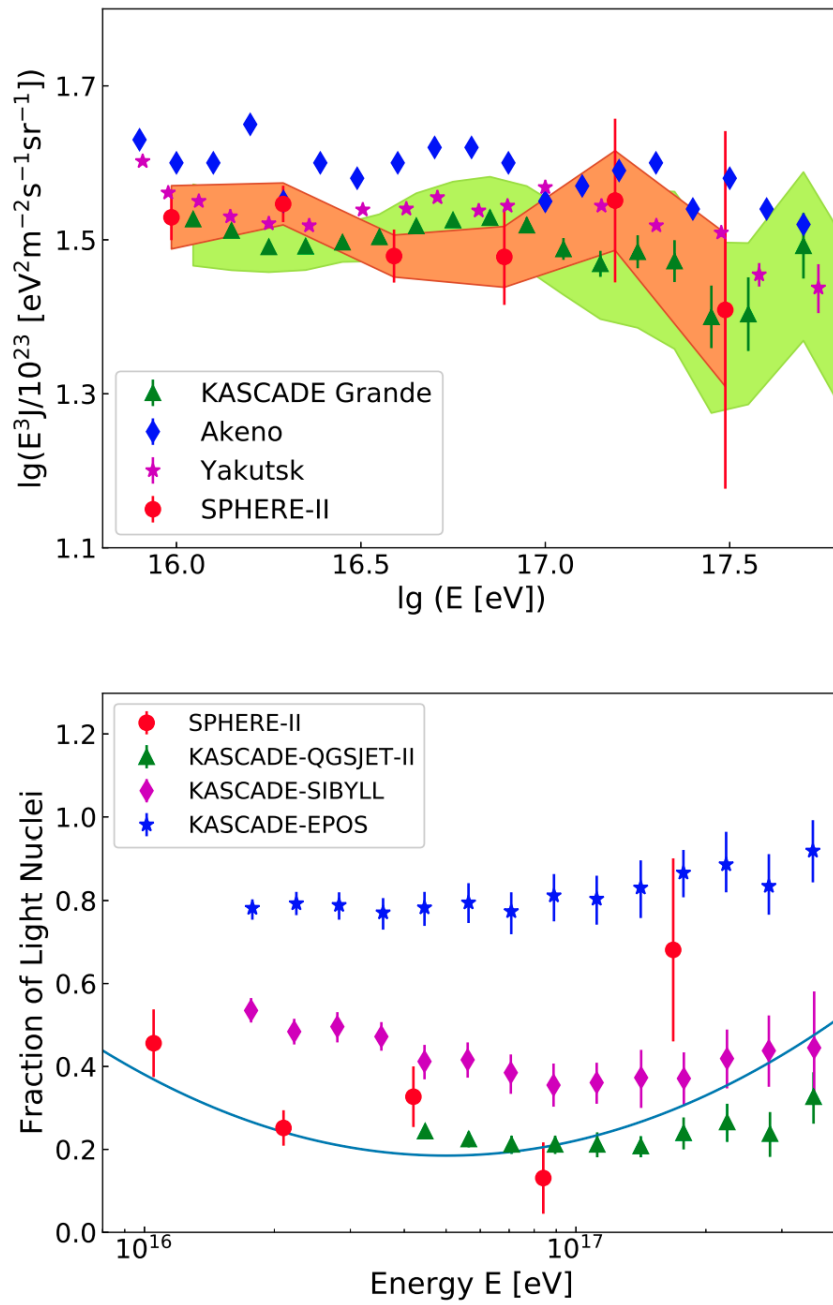


Рис. 2.1: Предварительные результаты измерения дифференциального энергетического спектра и доли лёгких ядер по данным эксперимента СФЕРА-2. Графики из работы [15, рис. 8 и рис. 10]

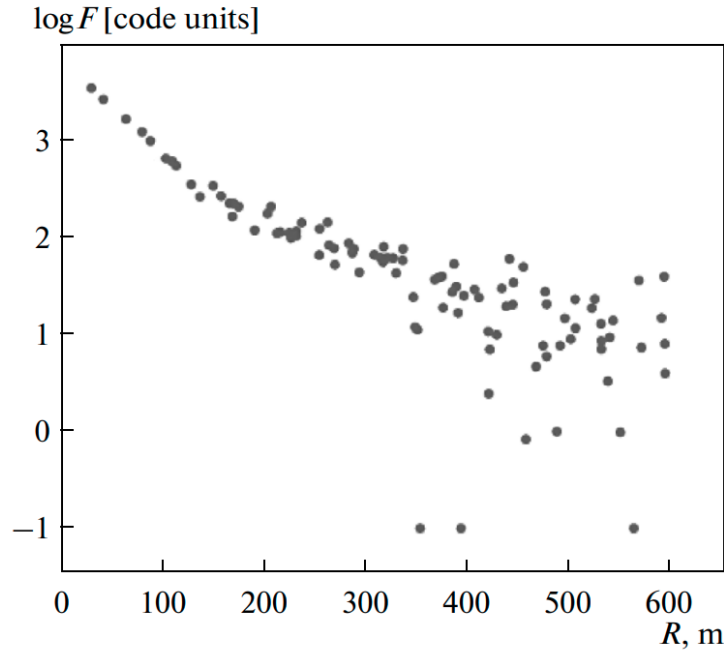


Рис. 2.2: Иллюстрация процесса восстановления ФПР черенковского света для предварительного анализа данных СФЕРА-2. Значения, отложенные по вертикали, измеряются в единицах кода, характеризующих конечный сигнал, усиленный и оцифрованный электроникой детектора (см. текст и раздел 3.7.3). График из работы [17, рис. 27]

интересующих нас параметров первичной частицы предполагается давать, сравнивая экспериментальные кадры с модельными. Иллюстрацией такой методической замкнутости модели может служить процесс построения ФПР, описанный в работе [17] и проиллюстрированный на рис. 2.2: «единицы кода», в которых строится распределение, не являются физическими, но относятся только к эффекту от ливня в установке (понятие единиц кода обсуждается подробнее в разделе 3.7.3).

В настоящей работе предпринята попытка построения более модульного подхода, требующая «расцепить» единую модель на отдельные модели ливня и детектора (а модель детектора — далее на модели его частей). Точкой их смыкания должна быть физическая характеристика ливня, с одной стороны, естественным образом получаемая из модели развития в атмосфере, а с другой — оцениваемая из экспериментальных данных. В

качестве такой характеристики представляется возможным выбрать распределение плотности черенковского света в плоскости фронта ливня, хотя в общем случае этот выбор является предметом соглашения.

## 2.3 Качественная модель работы детектора

Опишем на качественном уровне теоретические представления, которые лежат в основе интерпретации данных СФЕРА-2. Для этого проследим, что происходит от развития каскада в атмосфере и до получения файлов с экспериментальными данными.

### 2.3.1 Развитие ШАЛ в атмосфере

Сколько-нибудь полный обзор теории ШАЛ, и даже черенковского света ШАЛ в отдельности, лежит за рамками данной работы, поэтому изложим только самые общие представления. Широкий атмосферный ливень — каскад вторичных частиц, вызванный взаимодействием первичной частицы большой энергии с атмосферой — развивается в виде тонкого диска заряженных частиц: адронов, мезонов, лептонов, гамма-квантов. Черенковский свет — одно из сопутствующих излучений ШАЛ, возникающее при движении заряженных частиц со скоростью, превышающую скорость света в среде распространения. Черенковский свет ШАЛ также распространяется в виде тонкого, до нескольких метров в толщину, диска, ориентированного перпендикулярно оси ливня. Для практических задач моделирование процессов развития ШАЛ проводится численно, например, с помощью программы CORSIKA [18].

Уже на этапе моделирования ШАЛ закладывается ряд неопределённостей реконструкции параметров первичной частицы. Во-первых, модели ядерного взаимодействия при энергиях больше примерно  $10^{16}$  эВ не проверены экспериментально, являясь, в сущности, экстраполяциями, и разные такие модели приводят к несколько разным картинам развития ливня для

одной и той же первичной частицы. Во-вторых, на развитие ливня сильно влияет состояние атмосферы, которое тоже известно лишь с некоторой погрешностью. Наконец, развитие ШАЛ — принципиально стохастический процесс, что приводит к статистической неопределённости любой реконструкции. Эти неопределённости будем в дальнейшем называть модельными, так как они напрямую связаны с моделью описываемого явления, в противоположность инструментальным неопределёностям, связанным с процессом измерения характеристик ливня установкой.

### 2.3.2 Отражение света от снега

Эксперименты, использующие отражённый черенковский свет, предъявляют особые требования к земной поверхности на уровне наблюдения — она должна служить «экраном», который бы равномерно и предсказуемо рассеивал свет. В случае СФЕРЫ-2 таким экраном служит заснеженный лёд озера Байкал.

Рассеивающие свойства снега могут существенно повлиять на работу эксперимента, поэтому для измерения и мониторинга этих условий были приложены определённые усилия. Помимо общих данных о свойствах снега [20] были проведены прямые измерения коэффициента отражения в зависимости от угла [17, рис. 11]. В результате них был сделан вывод, что зависимость хорошо согласуется с законом рассеяния Ламберта для идеальной диффузной поверхности: яркость рассеянного света не зависит от угла, то есть интенсивность имеет чисто геометрическую зависимость  $I \propto \cos \theta_n$  [19]. Альбеда  $a$  — отношение падающего и отражённого потоков — было принято независимым от длины волны и равным 0.95.

### 2.3.3 Сбор отражённого света

Установка СФЕРА-2 поднималась аэростатом на высоту 400 – 900 м, для сбора света с поверхности использовалась оптическая система из диафрагмы, сферического зеркала и мозаики ФЭУ, которая схематично изоб-

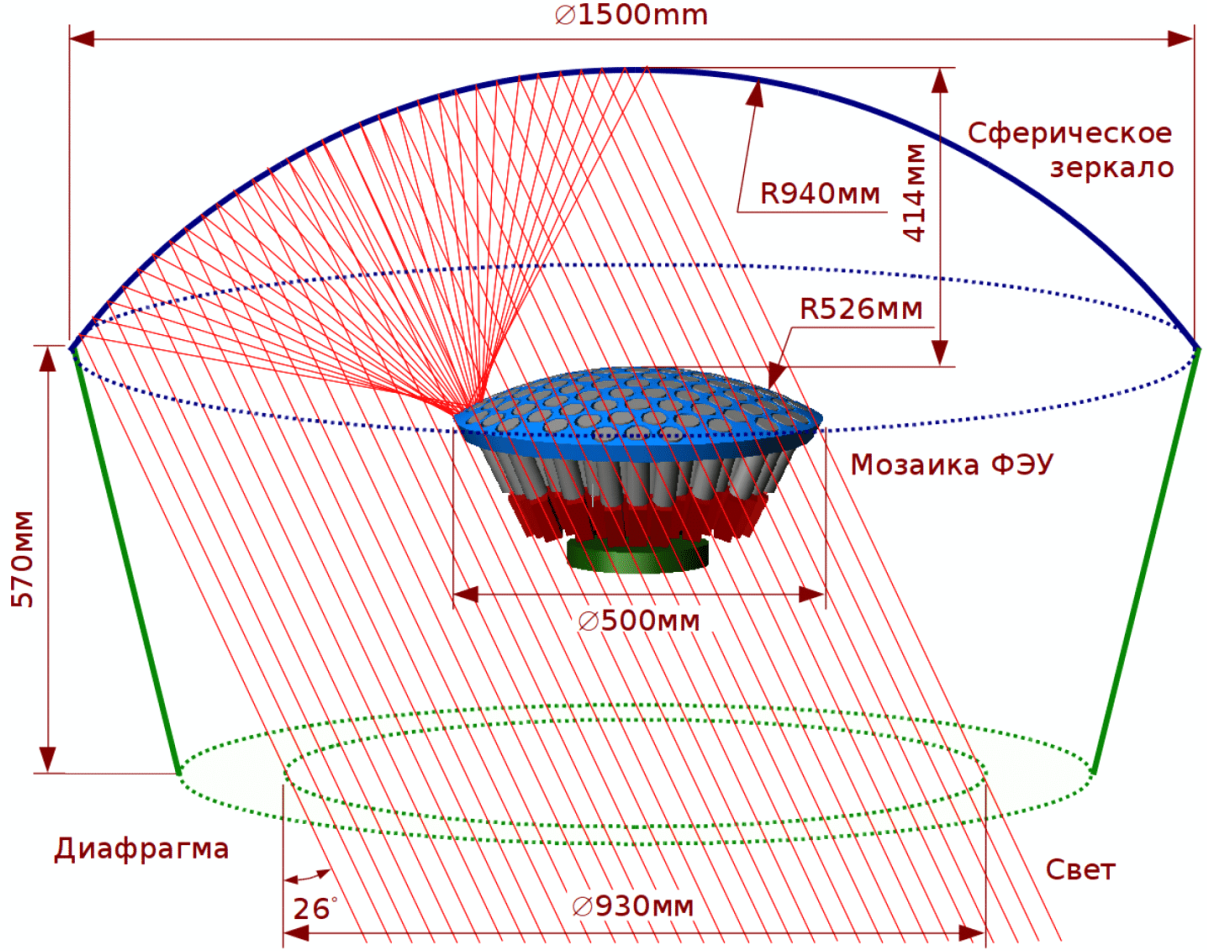


Рис. 2.3: Оптическая схема детектора СФЕРА-2

ражена на рис. 2.3. В результате каждый из ФЭУ обозревал область на поверхности диаметром 10 – 50 м в зависимости от высоты подъёма.

Качественно оценим коэффициент сбора света: пусть на участок поверхности в окрестности точки  $(x, y)$  в системе координат с центром в проекции детектора падает  $\delta N_{gr}$  фотонов, и пусть горизонтально ориентированная диафрагма радиусом  $R_d$ , поднята на высоту  $H$ . Обозначая угол рассеяния света от нормали  $\theta_n$ , можно оценить число фотонов, которое достигнет диафрагмы из результатов предыдущего раздела и геометрических соображений

$$\delta N_d \approx \frac{R_d^2 \cos \theta_n}{H^2 + x^2 + y^2} K \cos \theta_n \delta N_{gr} \quad (2.1)$$



Из этого простого расчёта при характерных значениях  $H = 600$  м,  $R_d \approx 0.465$  м получается оценка общего коэффициента сбора установки:  $(0.5 \div 1) \cdot 10^{-6}$ .

Для расчёта количества фотонов, достигающего каждого отдельно-го ФЭУ, требуется численное моделирование распространения света внутри оптической системы установки: отражения от зеркал и стёкол ФЭУ, поглощения тыльной стороной мозаики и элементами конструкции. Результатом такого моделирования является коэффициент сбора света как функция координат на поверхности, или чувствительность каждого ФЭУ  $f^{(i)}(x, y)$ . Более строго, если флюенс черенковских фотонов равен  $n(x, y)$ , то число ожидаемое число фотонов, попавших в  $i$ -тый ФЭУ, будет равно  $\int_{\infty} f^{(i)}(x, y)n(x, y)dxdy$ .

Функции  $f^{(i)}$  имеют форму пятен, соответствующих полям зрения ФЭУ на поверхности льда. Пример нескольких таких пятен, а также суммарной чувствительности  $\sum_i f^{(i)}(x, y)$  всей мозаики для одного из экспериментальных событий изображён на рис. 2.4. Ясно, что поля зрения зависят от высоты подъёма и ориентации установки, поэтому при расчёте учитываются данные GPS и инклинометра соответственно.

## 2.3.4 Регистрация собранного света

Финальный этап процесса регистрации события — преобразование интенсивности фотонов, попавших на каждый ФЭУ, в оцифрованные данные — включает несколько подэтапов, которые мы изложим особенно подробно, поскольку именно они обуславливают многие исследуемые в настоящей работе эффекты.

### 2.3.4.1 Мозаика ФЭУ

Вблизи фокальной поверхности сферического зеркала расположена мозаика из 109 ФЭУ (см. рис. 2.3), собранных в приближённо гексагональную сетку. В центре расположен ФЭУ Hamamatsu R3886, характеризующийся

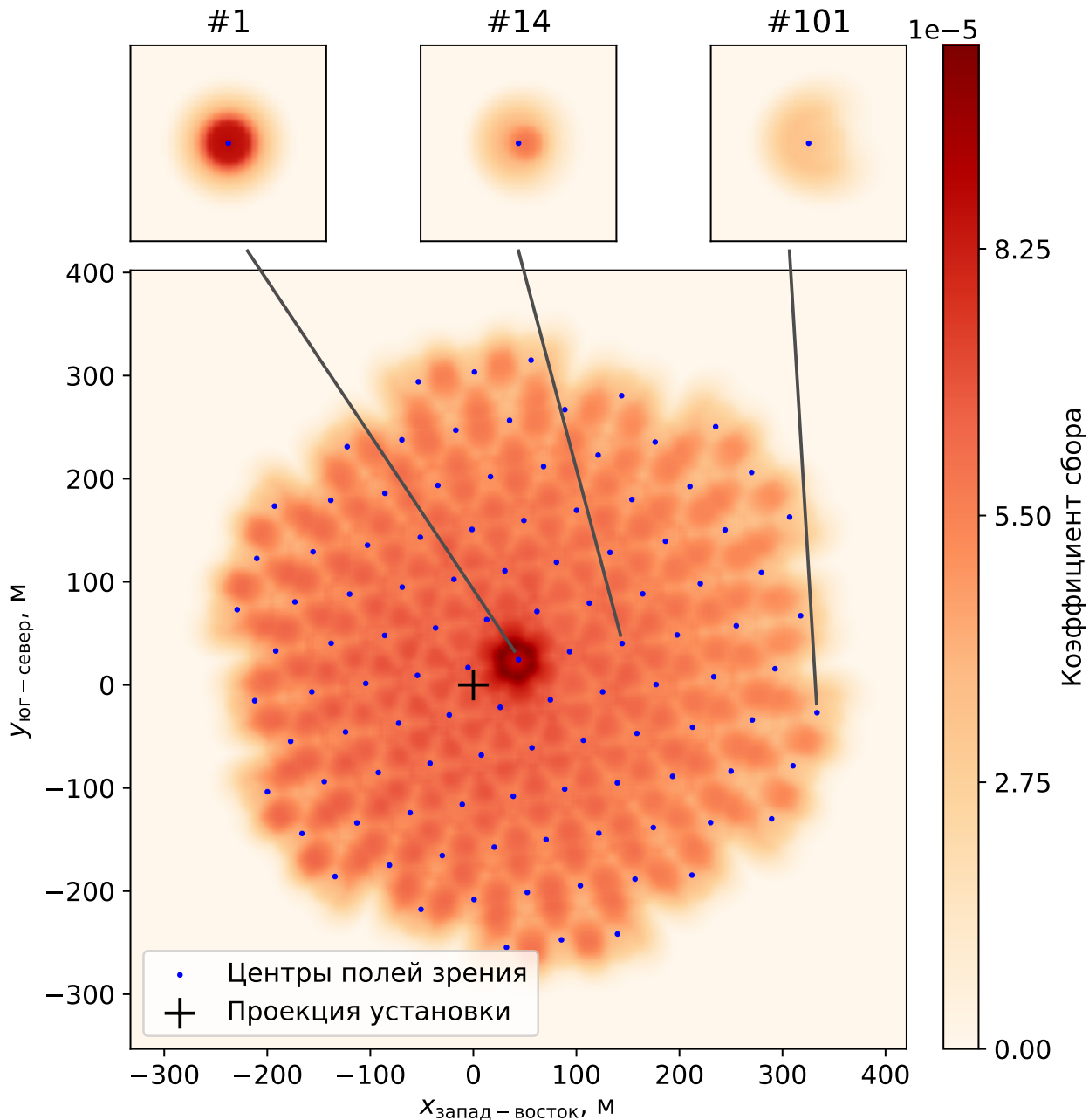


Рис. 2.4: Пример моделирования сбора света с поверхности установкой СФЕРА-2 для экспериментального события #10699. Показаны чувствительности трёх отдельных ФЭУ и суммарная чувствительность всей мозаики. Учтены данные о высоте подъёма и наклоне установки, поэтому картина чувствительности сдвинута относительно проекции установки и слегка вытянута.

большим коэффициентом усиления и площадью фотокатода, остальные — ФЭУ 84-3. Hamamatsu использовался как референсный ФЭУ в процессе калибровки детектора [21].

#### 2.3.4.2 Рождение фотоэлектронов на фотокатоде ФЭУ

Попадая на фотокатод ФЭУ, фотон с определённой вероятностью порождает фотоэлектрон, который затем под действием приложенной разности напряжений устремляется к первому диноду, на котором рождается ещё несколько электронов, и так далее. Таким образом до анода доходит лавина фотоэлектронов, создающая заряд, достаточный для регистрации. Процесс выбивания фотоэлектронов с катода характеризуется функцией квантовой эффективности, которая характеризует вероятность, с которой фотон данной длины волны породит фотоэлектрон в системе.

Однако, поскольку отражающая способность снега в принятой модели (см. раздел 2.3.2) не зависит от длины волны, спектр черенковских фотонов на фотокатоде оказывается таким же, как и в самом ливне. Поэтому для сокращения объёма данных при моделировании ШАЛ паспортная квантовая эффективность ФЭУ была заложена уже на этапе прослеживания ливня в атмосфере: вместо спектра черенковского света сохранялась его свёртка с кривой квантовой эффективности, дающая ожидаемое число фотоэлектронов. Таким образом, в настоящей работе фотоны ШАЛ чаще всего (если не указано обратное) подразумеваются уже преобразованными в фотоэлектроны описанным способом, эти величины в большинстве случаев оказываются взаимозаменяемы, несмотря на фундаментальные физические различия.

#### 2.3.4.3 Усиление сигнала ФЭУ

Процесс развития электронной лавины на системе динодов ФЭУ является принципиально стохастическим. Это подтверждается прямыми лабораторными измерениями флуктуаций заряда, собранного на аноде эталонного ФЭУ [21, рис. 9], но также и общими представлениями о механизме усиления:

если динодная система насчитывает  $N \approx 10$  динодов, а общий коэффициент размножения составляет в среднем  $K \approx 10^6$ , то среднее размножение на одном диноде будет составлять  $\sqrt[N]{K} \approx 4$ . Стохастический характер этого процесса означает, что истинный коэффициент умножения на каждом диноде будет иметь приближённо пуассоновское распределение с математическим ожиданием  $\sqrt[N]{K}$ . Из этих представлений, а также учитывая некоторые специальные особенности ФЭУ (выделенный по множественности первый динод, шанс не попасть в динод вообще) можно получить распределение коэффициента усиления для ФЭУ84-3, для которого недоступны лабораторные измерения. Результаты этого моделирования и их следствия подробно обсуждаются позже в разделе 3.7.1 (см. рис. 3.7).

Ясно, что стохастический характер коэффициента усиления ФЭУ не играет большой роли при измерении больших потоков, так как происходит эффективное усреднение этой величины. Не важен он и при малых потоках, когда ФЭУ работает в режиме счёта фотонов и на осциллограмме можно наблюдать отдельные хорошо разрешённые импульсы. Однако характерная интенсивность потока фотонов и временные характеристики системы регистрации в эксперименте СФЕРА-2 таковы, что режим работы оказывается как раз в промежутке между этими двумя случаями — поток слишком велик, чтобы нельзя было разрешить отдельные фотоны, но не достаточен для того, чтобы произошло эффективное усреднение. Именно этим обусловлена необходимость статистической деконволюции, описанной в главе 3.

#### 2.3.4.4 Оцифровка импульса анодного тока

Учитывая описанные условия, можно охарактеризовать анодный ток ФЭУ. С одной стороны, постоянный поток фоновых фотонов — преимущественно атмосферного свечения, звёздного и зодиакального света, будут приводить к наличию постоянной компоненты тока. С другой стороны, фотоны ШАЛ, приходящие коротким сконцентрированным во времени пакетом, будут выделяться импульсом на этом фоне. Важный качественный

результат лабораторных измерений состоит в том, что другие, нефотонные источники шума в системе (например, темновой ток ФЭУ) пренебрежимо малы, поэтому в дальнейшем они учитываться не будут.

Подробное описание электроники детектора может быть найдено в работе [22], здесь же ограничимся качественной картиной. С помощью RC-фильтра постоянная и импульсная компоненты анодного тока разделяются и записываются отдельными АЦП. Частота дискретизации для импульсной компоненты составляет 12.5 нс, для постоянной — показания АЦП сохраняются поминутно.

#### 2.3.4.5 Линейность

Линейность системы регистрации света (связки ФЭУ и считывающей аппаратуры) была отдельно исследована по калибровочным кадрам. Интенсивность света в них намного выше даже самого яркого события ШАЛ, но даже в этих условиях амплитудная характеристика остаётся весьма близка к линейной, и может быть подвергнута дополнительной небольшой коррекции [21, рис. 6]. Поэтому в дальнейшем система регистрации света считается линейной.

## Глава 3. Байесовская деконволюция

В этой главе будут подробнее рассмотрены физические интуиции, связанные с системой регистрации отражённого черенковского света в эксперименте СФЕРА-2; затем на их основе будет формально поставлена задача байесовской (статистической) деконволюции и описан метод её решения в общем виде; наконец, разработанный метод будет применён к экспериментальным данным эксперимента СФЕРА-2.

### 3.1 Предпосылки

Как описано в разделе 2.3.4.3, процесс генерации импульса анодного тока из фотоэлектронов является существенно стохастическим. Степень влияния этой стохастичности на оценку параметров ШАЛ сложно оценить приближённо, однако ясно, что этот вопрос заслуживает отдельного исследования. Яркие импульсы легко выделяются даже визуально, но сигнал в каналах, наблюдающих удалённые от оси ливня области, будет куда слабее, и его выделение на фоне фотонного шума будет требовать всё большей внимательности к статистическим свойствам методов восстановления.

На ранних этапах работы была предпринята попытка построить процесс оценки параметров пакета фотонов ШАЛ (числа фотонов, среднего времени прихода и ширины пакета во времени) напрямую из записанного сигнала, однако она не увенчалась успехом по ряду причин. Вместо этого возникла идея провести полноценную деконволюцию, то есть извлечь из зарегистрированного в данном канале сигнала информацию о потоке фотонов на его входе в каждый момент времени. Ясно, что эта деконволюция

не может быть точной — требуется процедура, учитывающая стохастические свойства линейной системы. Подобные проблемы рассматриваются и в других областях, например, в обработке спектральных измерений [23] и изображений [24].

В таких задачах плодотворно применяется байесовская статистика, основанная на интерпретации распределения случайной величины как меры информации о ней, или уверенности в её значении [25]. Она была выбрана в качестве теоретической рамки и в настоящей работе.

Имея в виду эти соображения, построим математическое описание системы регистрации света и используем его, чтобы поставить и решить задачу статистической, или байесовской, деконволюции.

## 3.2 Структура входного сигнала

Представим входной сигнал системы набором  $\delta$ -функций, сдвиги которых определённым образом распределены во времени. Рассмотрим  $N$  последовательных равновеликих временных бинов. Для простоты будем считать единицей времени длительность одного бина. Тогда мы можем задать границы бинов парами значений  $[i - 1, i]$ ,  $i = 1 \dots N$ . Обозначим число  $\delta$ -функций в каждом бине  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В дальнейшем при деконволюции будем интересоваться именно величинами  $n_i$ , а не положениями отдельных  $\delta$ -функций.

Следуя байесовской интерпретации вероятности как меры уверенности в определённом факте и учитывая, что нас не будут интересовать положения отдельных  $\delta$ -функций на масштабах меньше 1 временного бина, охарактеризуем их положения случайной величиной  $t_{inbin}$  — временем сдвига относительно начала бина, в который попала  $\delta$ -функция. Эта величина некоторым образом распределена в интервале  $[0, 1)$  — воспользуемся физической интуицией об отсутствии слишком быстрых вариаций в интенсивности входного сигнала и положим  $t_{inbin} \sim U(0, 1)$ . Это оправдано для независимых друг от друга фоновых фотонов, и может служить хорошим приближением

для фотонов ШАЛ в случае, если дисперсия времён прихода фотонов внутри «пакета» превышает длительность временного бина.

Предположим, что импульсная характеристика линейной системы — случайная функция  $\tilde{h}(t)$  в том смысле, что каждая из  $\delta$ -функций, составляющих входной сигнал, будет получать независимую реализацию  $h(t) \sim \tilde{h}(t)$ . Это соответствует представлению о флуктуации коэффициента усиления ФЭУ. Будем считать, что любая реализация удовлетворяет условию каузальности, то есть  $\forall t < 0 \quad \forall h \sim \tilde{h} \quad h(t) = 0$ , и конечности во времени, то есть  $\exists \tilde{L}$  такое, что  $\forall t > \tilde{L} \quad \tilde{h}(t) = 0$ . Такую случайную функцию, которая для каждой входной  $\delta$ -функции даёт новую реализацию, будем называть рандомизированной импульсной характеристикой (РИХ) системы.

Заметим, что эффект от  $\delta$ -функций в  $i$ -том бине проявляется в отсчётах с  $i$  по  $i + \lfloor \tilde{L} \rfloor$ , где  $\lfloor \tilde{L} \rfloor$  — наибольшее целое число, не превышающее  $\tilde{L}$  (округление вниз). Обозначим  $L \equiv \lfloor \tilde{L} \rfloor$ . Тогда полный сигнал от  $\delta$ -функций в выделенном входном окне гарантированно содержится в отсчётах с 1 по  $N + L$ .

Для иллюстрации постановки и решения задачи деконволюции в течение этой главы будем использовать следующую «игрушечную» рандомизированную импульсную характеристику:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \tilde{A} \exp(-t/2) \\ \tilde{A} &\sim U(0.75, 1) \\ L &= 5 \end{aligned} \tag{3.1}$$

В качестве входных данных сгенерируем сигнал, качественно соответствующий фотонному шуму в эксперименте СФЕРА-2:

$$\begin{aligned} N &= 30 \\ \vec{n} &= \{n_i \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \forall i \in [1, N]\} \\ \lambda &= 15 \end{aligned} \tag{3.2}$$



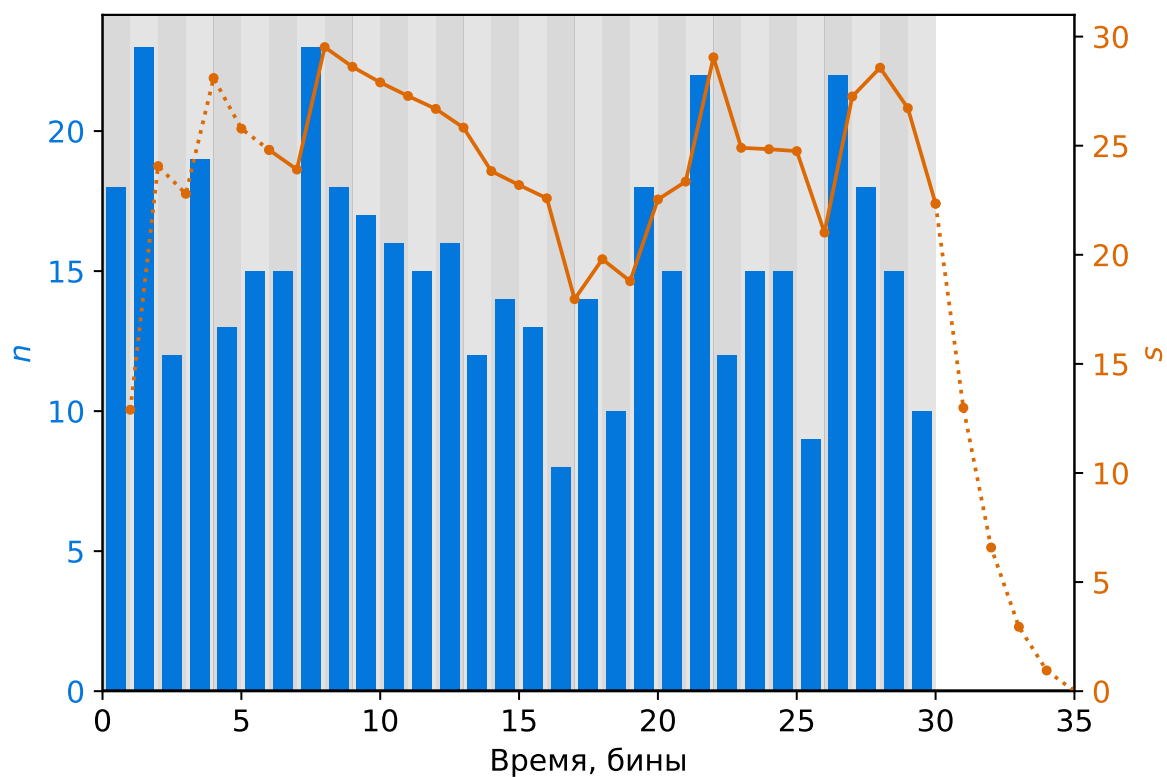


Рис. 3.1: Пример входных и выходных данных для задачи байесовской деконволюции. РИХ определена выражениями (3.1); пунктиром показаны участки, исключаемые из рассмотрения для устранения эффекта окна.

Иллюстрация  $\vec{n}$  и  $\vec{s}$  для этой демонстрационной задачи приведена на рис. 3.1.

### 3.2.1 Эффект окна

В реальном эксперименте входные фотоны не ограничены интервалом  $[0; N]$ , но приходят постоянно. Модифицируем постановку задачи так, чтобы устранить эффект окна, то есть плавный рост сигнала в начале и затухание в конце.

Для этого достаточно просто исключить из всего дальнейшего рассмотрения эти участки сигнала. Так, в реальной ситуации фотоны продолжают приходить после  $t = N$ , и вносят соответствующий вклад в отсчёты начиная с  $N - 1$ . Фотоны, пришедшие до  $t = 0$ , вносят вклад в отсчёты до  $L$ .

Поэтому для восстановления значений  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  мы будем использовать только отсчёты  $s_j$  при  $j = L + 1, \dots, N$ . Этот участок изображён на рис. 3.1 сплошной линией, участки по краям, исключаемые из рассмотрения — пунктиром.

## 3.3 Постановка задачи

Поставим задачу статистической деконволюции следующим образом, используя байесовскую терминологию (отсюда и название этой процедуры — байесовская деконволюция):

Пусть дана рандомизированная импульсная характеристика системы  $\tilde{h}(t)$  и значения сигнала на выходе системы  $s_j$ ,  $j = 1, \dots, N + L$ . Найти апостериорные функции плотности вероятности для значений  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Заметим, что, в отличие от обычной деконволюции, мы не ставим задачу оценить исходный сигнал, представляющий собой сумму  $\delta$ -функций, сам по себе, но только его обобщённую характеристику, по сути, интегрированный поток за каждый бин.

### 3.4 Выходной сигнал как реализация случайного процесса

Ясно, что в силу случайного характера отклика системы, а также агрегирования  $\delta$ -функций в бины, значения отсчётов  $\{s_j\}$  являются реализациями некоторых случайных величин. Обозначим сами эти случайные величины как  $\{S_j\}$ .

Запишем  $S_j$  как сумму вкладов от  $\delta$ -функций разных бинов

$$S_j = \sum_{l=0}^L C(n_{j-l}, l) \quad (3.3)$$

Здесь  $C(n, l)$  — случайная величина, описывающая вклад в сигнал на  $j$ -том временном отсчёте от  $n$   $\delta$ -функций, время прихода которых расположено в бине  $j - l$ , иначе говоря, вклад с задержкой  $l$  бинов. Из выбранной схемы индексации бинов и условий каузальности и ограниченности во времени РИХ легко видеть, что  $l \in [0, L]$ , поскольку вклад от  $\delta$ -функций из более ранних бинов равен нулю.

Охарактеризуем распределение  $C(n, l)$ . Проще всего сделать это через Монте-Карло-сэмплирование распределения этой величины. Получим сначала с произвольной точностью эмпирическую функцию плотности распределения для  $C(1, l)$ . Для этого сгенерируем значения  $t_k \sim t_{inbin}$ ; и функции  $h_k(t) \sim \tilde{h}(t)$  для  $k = 1 \dots N_{sample}$ . Выборка для  $C(1, l)$  тогда будет состоять из значений  $h_k(l + 1 - t_k)$ . Выборку для  $C(n, l)$  легко получить, проделав описанную процедуру  $n$  раз и сложив все  $n$  реализаций вместе (так как система линейна, случайная величина отклика от  $n$   $\delta$ -функций равна сумме соответствующих величин для 1  $\delta$ -функций).

### 3.5 Предварительная оценка

Перед тем, как решать задачу деконволюции в статистическом смысле, сделаем грубую оценку  $\vec{n}$ , основанную только на соотношениях между

математическими ожиданиями случайных величин. Для этого применим операцию вычисления математического ожидания к обеим частям равенства (3.3).

$\delta$ -функции независимы друг от друга в пределах одного бина, из чего следует  $\mathbb{E} C(n, l) = n \mathbb{E} C(1, l)$ . Нетрудно заранее вычислить для данной РИХ выборки значений  $C(1, l)$  для  $l = 0 \dots L$ . Тогда получим, обозначая  $c_l \equiv \mathbb{E} C(1, l)$ ,

$$\bar{S}_j = \mathbb{E} S_j = \sum_{l=0}^L \mathbb{E} C(n_{j-l}, l) = \sum_{l=0}^L n_{j-l} \mathbb{E} C(1, l) = \sum_{l=0}^L n_{j-l} c_l \quad (3.4)$$

Суммирование можно записать в матричном виде для  $j = 1, \dots, N+L$ :

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & & \vdots \\ c_3 & c_2 & c_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & c_3 & c_2 & \ddots & c_0 \\ c_L & \vdots & c_3 & \ddots & c_1 \\ 0 & c_L & \vdots & \ddots & c_2 \\ \vdots & & c_L & & c_3 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \vdots \\ \bar{S}_N \\ \bar{S}_{N+1} \\ \vdots \\ \bar{S}_{N+L} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Для исключения граничных эффектов, и тем самым перехода к случаю непрерывного потока фотонов достаточно, как указано в разделе 3.2.1, ограничиться рассмотрением строк  $j = L+1, \dots, N$ , то есть убрать первые и последние  $L$  уравнений системы.

Эта, вероятно, несовместная система линейных уравнений, допускает решение в смысле наименьших квадратов с помощью псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [26]. Псевдообратная матрица  $C^+$  для  $C$  определяется следующими условиями: (1)  $CC^+C = C$ , (2)  $C^+CC^+ = C^+$ , (3)  $CC^+$  и  $C^+C$

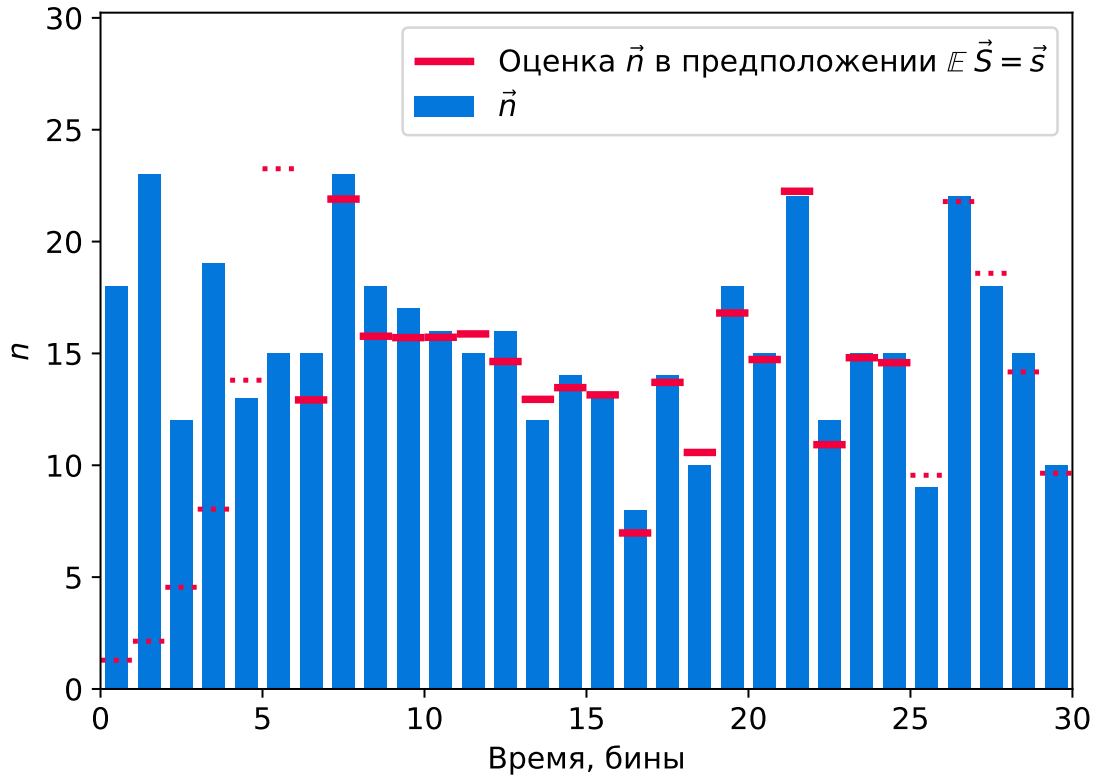


Рис. 3.2: Оценка  $\vec{n}$  в предположении, что выходной сигнал  $\vec{s}$  равен своему математическому ожиданию. Пунктиром показана область, где оценка искажена эффектом ограниченности выборки во времени.

— эрмитовы матрицы. Псевдообратная матрица всегда существует, и для системы  $C\vec{n} = \vec{S}$  вектор  $C^+\vec{S}$  даёт искомое МНК-решение системы. Приближённый численный расчёт такой матрицы можно провести, например, с помощью функции `pinv` модуля `numpy.linalg` в Python [27].

Конечно, для формального использования этого решения системы необходимо знать  $\mathbb{E} S_j$ , в то время как в эксперименте мы имеем всего лишь единственную реализацию этой случайной величины  $s_j$ . Для грубой оценки остаётся положить  $\mathbb{E} S_j \approx s_j$ . Результат описанной процедуры приведён на рис. 3.2 фиолетовым, пунктиром отмечена область, в которой оценка искажена эффектом окна.

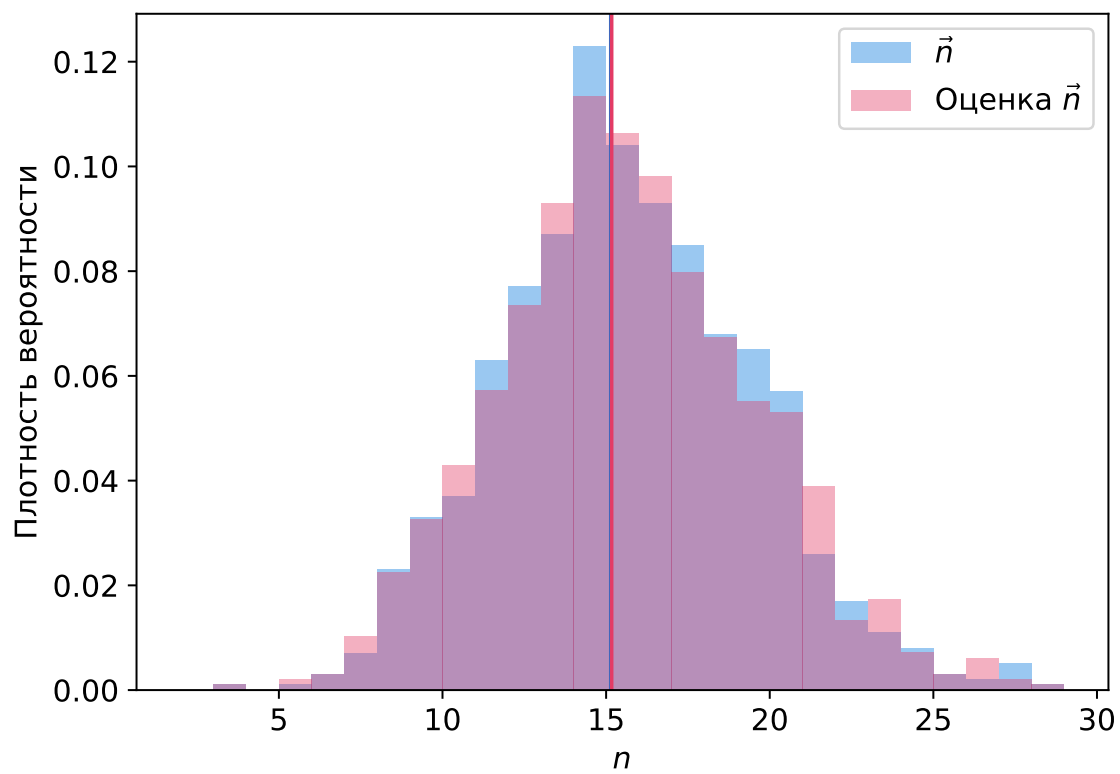


Рис. 3.3: Распределения истинных и грубо восстановленных значений  $\vec{n}$  для окна шириной 1000 бинов.

Строгое исследование свойств такой «one-shot» оценки  $\vec{n}$  находится за рамками данной работы. Однако для простой численной проверки можно провести описанную процедуру для большего числа входных бинов и сравнить распределения истинных и оцененных значений  $\vec{n}$ . На рис. 3.3 приведено такое сравнение для 1000 бинов. Видно, что распределения практически совпадают, а значит отсутствует по крайней мере систематическая ошибка. В дальнейшем эта оценка будет играть роль первого приближения, или стартовой точки, на основе которой с помощью численных методов будет искомое полноценное решение.

## 3.6 Решение задачи байесовской деконволюции

Теперь перейдём к решению полноценной статистической задачи, используя метод, описанный в предыдущем разделе, как первое приближение.

Запишем сначала теорему Байеса в общем виде, учитывая, что наблюдаемыми значениями является сигнал  $\vec{s}$ , а неизвестными параметрами, которые задают распределение наблюдаемых —  $\vec{n}$ :

$$P(\vec{n}|\vec{s}) = \frac{P(\vec{s}|\vec{n}) P(\vec{n})}{P(\vec{s})} \quad (3.6)$$

Поясним вероятности, входящие в выражение:

1.  $P(\vec{n}|\vec{s})$  — искомое апостериорное распределение, описывающее (в байесовском определении вероятности) наши знания о  $\vec{n}$  после проведения измерений
2.  $P(\vec{s}|\vec{n}) \equiv \mathcal{L}(\vec{s}, \vec{n})$  — функция правдоподобия, описывающая, насколько вероятна регистрация определённых значений  $\vec{s}$  при заданных параметрах  $\vec{n}$
3.  $P(\vec{n}) \equiv \pi(\vec{n})$  — априорное распределение  $\vec{n}$ , независимое от знания конкретного выходного сигнала (в философском смысле предшествующее ему)

4.  $P(\vec{s})$  — полная вероятность регистрации данного сигнала при всех возможных значениях  $\vec{n}$ . Она также называется маргинальной вероятностью или нормировочным множителем, по определению  $P(\vec{s}) = \int_{\infty} P(\vec{s}|\vec{n}) P(\vec{n}) d\vec{n}$ . Эту величину можно использовать для сравнения статистических моделей: например, если бы мы имели в распоряжении альтернативную модель объяснения значений  $\vec{s}$  и хотели бы понять, какая из двух лучше описывает наблюдаемые данные. Однако для поставленной задачи нет нужды ни вычислять, ни даже учитывать этот множитель.

Учитывая введенные обозначения и соображения, запишем

$$P(\vec{n}|\vec{s}) \propto \mathcal{L}(\vec{s}, \vec{n}) \pi(\vec{n}) \quad (3.7)$$

### 3.6.1 Выбор априорного распределения

В качестве априорного распределения будем использовать неограниченное равномерное, или неинформативное распределение. Методы байесовской статистики работают даже в ситуации, когда у нас нет вообще никакой информации о распределении  $\vec{n}$  до начала измерений. Формально для этого нужно положить  $\pi(\vec{n}) = Const \forall \vec{n}$ . Такое распределение нельзя использовать напрямую, поскольку его невозможно отнормировать на 1. Однако с точки зрения выражения (3.7) это позволяет просто исключить  $\pi(\vec{n})$  из правой части.

### 3.6.2 Полное вычисление функции правдоподобия методом Монте-Карло

Функция правдоподобия  $\mathcal{L}(\vec{s}, \vec{n})$  определяется как вероятность того, что данный сигнал  $\vec{s}$  получился в результате преобразования системой входного сигнала  $\vec{n}$ .



Опишем сначала Монте-Карло метод оценки правдоподобия, и затем введём упрощения, которые позволят эффективнее вычислять эту функцию, а также обоснуем их корректность. Для этого при фиксированных  $\vec{n}$  необходимо смоделировать выборку из большого числа реализаций случайной величины  $\vec{S}$ , а затем оценить плотность вероятности в точке  $\vec{s}$  по этой выборке.

Существует несколько методов для такой оценки, самый простой из которых — многомерная гистограмма. Для этого пространство реализаций  $\vec{S}$  нужно поделить на ячейки, подсчитать число элементов выборки, попавших в каждую ячейку, и поделить на общее число элементов выборки и на объём ячейки. Нетрудно видеть, что полученное число даст оценку плотности вероятности в произвольной точке, а значит, искомую оценку функции правдоподобия.

Однако оказывается, что для поставленной задачи метод прямого вычисления функции правдоподобия плохо годится из-за «проклятия размерности». Размерность пространства, в котором нужно оценить эмпирическую функцию плотности вероятности, равна ширине окна, в котором рассматривается входной сигнал, в бинах. Соответственно, общее число  $N$ -мерных бинов составляет  $g^N$ , где  $g$  — мощность бинирования значения в каждом отсчёта. В этой ситуации для надёжной оценки придётся генерировать выборку сигналов сравнимого, и очень большого, объёма.

Поэтому вместо прямого использования описанного метода аппроксимируем распределение  $\vec{S}$  более вычислительно эффективной функцией.

### 3.6.3 Аппроксимация функции правдоподобия многомерным нормальным распределением

Проанализируем результат полной Монте-Карло симуляции, чтобы исследовать распределение  $p(\vec{S}|\vec{n})$  и показать, что его в самом деле можно эффективно и с высокой точностью аппроксимировать многомерным нормальным распределением.

### 3.6.3.1 Частные распределения

Из самых общих соображения ясно, что распределение  $S_j \forall j$  будет более или менее близко к нормальному просто в силу того, что каждая из величин  $S_j$  является суммой независимых (хотя и не одинаково распределённых) вкладов от фотонов в предыдущих бинах. Также сразу можно сказать, что чем меньше среднее число фотонов в бине, тем хуже будет аппроксимация нормальным распределением. На рис. 3.4 приведены несколько распределений «лучшего», «медианного» и «худшего» распределений  $S_j$  для нескольких значений среднего числа фотонов в бине  $\lambda_n \equiv \mathbb{E} n_i$ . Из предварительного анализа известно, что интенсивность фоновых фотоэлектронов в экспериментальных кадрах составляет около 3 – 4 штук на бин. При этом видно, что даже для меньших потоков самое существенное среднеквадратичное отклонение плотности распределения от гауссианы не превысит 10%. Таким образом, частное распределение каждой компоненты вектора  $\vec{S}$  можно приблизить нормальным распределением с эффективной погрешностью в несколько процентов для практически значимых случаев.

### 3.6.3.2 Полное $(N - L)$ -мерное распределение

Провести аналогичную процедуру для полного распределения  $\vec{S}$  — непростая задача, поэтому ограничимся здесь визуальной оценкой двухмерных распределений для пар  $(S_j; S_k)$  при  $k - j < L$  (из постановки задачи ясно, что на больших расстояниях элементы  $\vec{S}$  независимы). На рис. 3.5 представлены такие распределения. Видно, что двухмерные распределения представляют собой овалы симметричной формы, как и ожидается от многомерного нормального распределения.

Таким образом, можно положить, что распределение вектора  $\vec{S}$  при заданных  $\vec{n}$  можно приблизить многомерным нормальным распределением. Это приближение существенно упрощает вычисление функции правдоподобия  $\mathcal{L}(\vec{n}) \equiv P(\vec{S}|\vec{n})$ , которая и сводится к вычислению плотности вероятности условного распределения  $\vec{S}$  в точке, заданной наблюдаемым сигналом. Этот

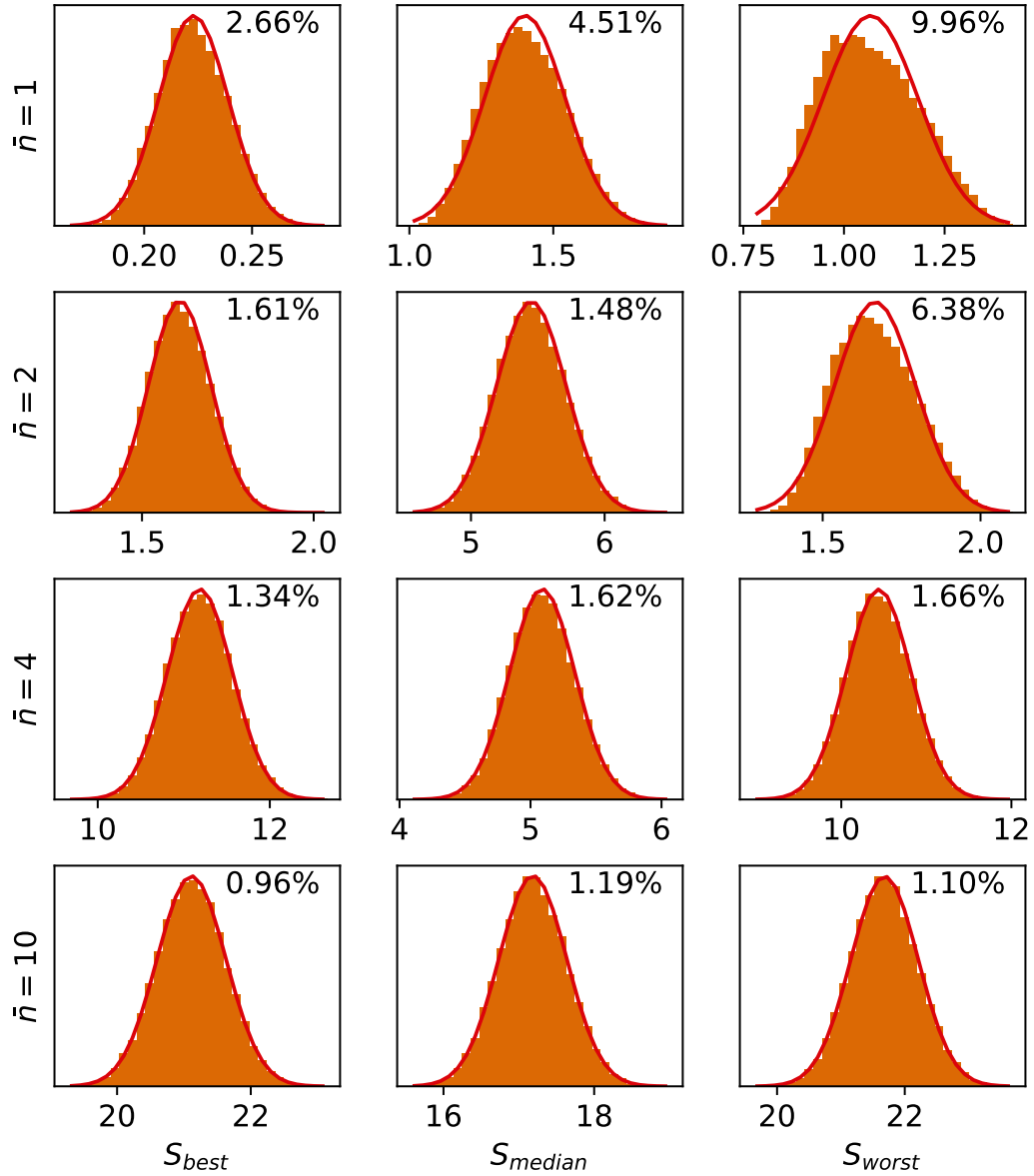


Рис. 3.4: Оценка нормальности частных распределений компонент  $\vec{S}$  для разных интенсивностей входного потока: от экстремально низких 1 и 2 до средней ожидаемой 10. «Лучший», «медианный» и «худший» бины определены эвристически по квадрату разницы выборочного среднего и медианы (чем больше эта величина, тем менее симметрично распределение). На каждом графике построена плотность нормального распределения с соответствующими  $\mu$  и  $\sigma$ , а также приведено среднеквадратичное отклонение гистограммы от гауссианы в процентах относительно максимального значения.

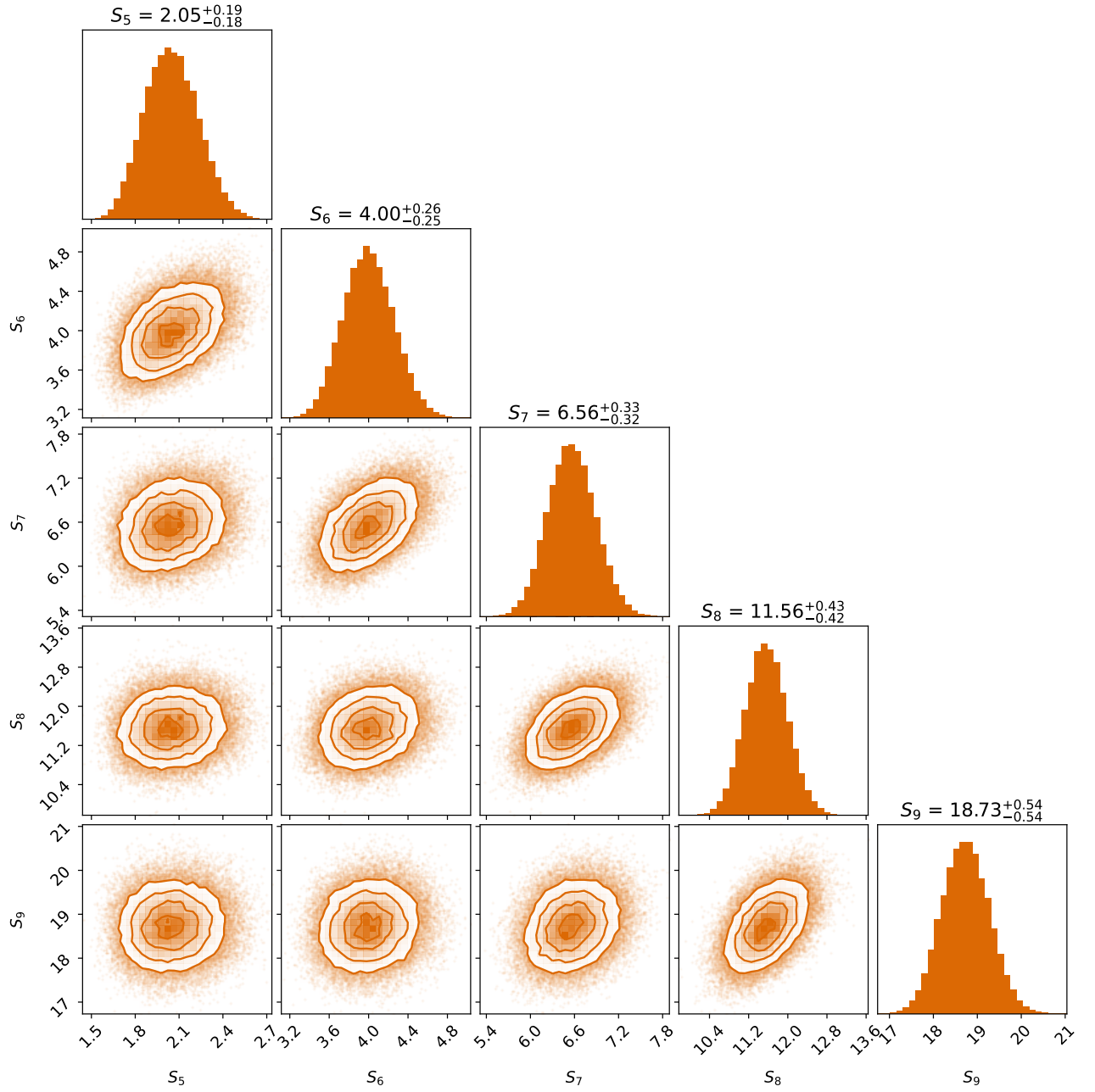


Рис. 3.5: Оценка нормальности совместных двумерных распределений для пар компонент  $\vec{S}$ . График построен с помощью библиотеки corner [28].

метод оказывается гораздо более устойчивым и вычислительно эффективным, чем наивный метод Монте-Карло, описанный в разделе 3.6.2.

Многомерное нормальное распределение в общем виде задаётся вектором математических ожиданий  $\vec{\mu}$  и матрицей ковариаций  $\Sigma$ . Функция плотности вероятности  $(N + L)$ -мерного случайного вектора  $\vec{S}$  тогда вычисляется как

$$p(\vec{S}) = ((2\pi)^{N+L} \det \Sigma)^{-1/2} \exp \left( -\frac{1}{2} (\vec{S} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{S} - \vec{\mu}) \right) \quad (3.8)$$

Вектор  $\vec{\mu} \equiv \mathbb{E} \vec{S}$  как функция  $\vec{n}$  вычисляется в соответствии с выражением (3.5). Вычислим, аналогично, произвольный элемент матрицы  $\Sigma_{ij} \equiv \text{cov}(S_i, S_j)$  при заданном  $\vec{n}$ . В силу симметричности матрицы ковариаций можно положить для определённости  $i \leq j$ . Запишем выражение (3.3) для двух интересующих нас элементов  $\vec{S}$ :

$$S_i = \sum_{l=0}^L C(n_{i-l}, l) \quad (3.9)$$

$$S_j = \sum_{k=0}^L C(n_{j-k}, k) \quad (3.10)$$

Источник возможной ненулевой ковариации этих величин — члены, описывающие вклады фотонов из одного бина, но на разных задержках, все прочие слагаемые являются независимыми. Условие, описывающее такие попарно-скоррелированные члены, получается из равенства индексов  $n$  в суммах:  $i - l = j - k$ . Вводя  $\Delta \equiv j - i$ , откуда получаем  $k = l + \Delta$ . Отсюда сразу следует интуитивный вывод о том, что при  $\Delta > L$  ковариация будет заведомо нулевой в силу конечности РИХ во времени.

Используем следующее свойство ковариации: если  $x, y, \epsilon, \eta$  — случайные величины, из которых только  $x$  и  $y$  являются зависимыми, то  $\text{cov}(x + \epsilon, y + \eta) = \text{cov}(x, y)$ . Иначе говоря, заведомо независимые члены при вычислении ковариации можно просто опустить. Прделаем это в сум-

мах выше, получив таким образом «скореллированные части»  $\hat{S}_i$  и  $\hat{S}_j$  такие, что  $\text{cov}(S_i, S_j) = \text{cov}(\hat{S}_i, \hat{S}_j)$ :

$$\hat{S}_i = \sum_{l=0}^{L-\Delta} C(n_{i-l}, l) \quad (3.11)$$

$$\hat{S}_j = \sum_{k=\Delta}^L C(n_{j-k}, k) = [k = l + \Delta] = \sum_{l=0}^{L-\Delta} C(n_{i-l}, l + \Delta) \quad (3.12)$$

Наконец, используем ещё одно свойство ковариации: если среди случайных величин  $x_1, x_2, y_1, y_2$  независимы все пары, кроме  $x_1$  и  $y_1, x_2$  и  $y_2$ , то  $\text{cov}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \text{cov}(x_1, y_1) + \text{cov}(x_2, y_2)$ . Индуктивно обобщая на случай сумм с произвольным числом членов, и принимая во внимание, что фотоны в разных бинах независимы, получаем

$$\text{cov}(S_i, S_j) = \text{cov}(\hat{S}_i, \hat{S}_j) = \sum_{l=0}^{L-\Delta} \text{cov}(C(n_{i-l}, l), C(n_{i-l}, l + \Delta)) \quad (3.13)$$

Наконец, принимая во внимание, что сама по себе величина  $C(n, l)$  есть сумма  $n$  независимых одинаково распределённых случайных величин, а между членами сумм  $C(n, l)$  и  $C(n, l + \Delta)$  есть только попарные корреляции в отношении 1 к 1, можно записать окончательную формулу для вычисления элемента матрицы ковариации:

$$\text{cov}(S_i, S_{i+\Delta}) = \sum_{l=0}^{L-\Delta} n_{i-l} \text{cov}(C(1, l), C(1, l + \Delta)) \quad (3.14)$$

Из формулы видно, что автоковариация сигнала описана полностью в терминах автоковариации РИХ и чисел фотонов в соответствующих бинах, служащих весами для вклада разных участков РИХ.

Для удобства вычислений можно записать это равенство в матричном виде для значений  $\Delta \in [0; L]$ . Для этого введём обозначение  $\xi(l, \Delta) \equiv \text{cov}(C(1, l), C(1, l + \Delta))$  и с помощью него запишем:

$$\begin{pmatrix} \xi(L, 0) & \xi(L-1, 0) & \xi(L-2, 0) & \cdots & \xi(0, 0) \\ 0 & \xi(L-1, 1) & \xi(L-2, 1) & \cdots & \xi(0, 1) \\ 0 & 0 & \xi(L-2, 2) & \cdots & \xi(0, 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi(0, L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{i-L} \\ n_{i-(L-1)} \\ n_{i-(L-2)} \\ \vdots \\ n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{i,i} \\ \Sigma_{i,i+1} \\ \Sigma_{i,i+2} \\ \vdots \\ \Sigma_{i,i+L} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Это достаточно громоздкое выражение позволяет, однако, единожды вычислить матрицу  $\Xi$  и эффективно рассчитывать все элементы матрицы ковариаций  $\Sigma$  при каждом заданном  $\vec{n}$ . Для окончательного вычисления матрицы  $\Sigma$  достаточно просто составить её из векторов  $(\Sigma_{i,i}, \dots, \Sigma_{i,i+L})^T$ , учитывая свойство симметрии  $\Sigma_{i,j} = \Sigma_{j,i}$ , а также доказанный факт  $\Sigma_{i,j} = 0 \quad \forall j > i + L$

После исключения областей влияния эффекта окна (первых и последних  $L$  элементов  $\vec{S}$ ) нас будут интересовать только внутренняя часть матрицы  $\Sigma$ , то есть индексы  $i, j \in [L+1; N]$ . Это удобно, так как для вычисления интересующей нас части  $\Sigma$  не нужно рассматривать «урезанную» матрицу  $\Xi$ , что потребовалось бы, если бы мы не исключали границы.

Таким образом, функция правдоподобия задаётся формулой (3.8), где вектор математических ожиданий и матрица ковариаций являются функциями  $\vec{n}$  и вычисляются в соответствии с формулами (3.5) и (3.15).

### 3.6.4 Сэмплирование апостериорного распределения

Имея функцию правдоподобия  $\mathcal{L}$  и учитывая выбранные неинформативные априорные распределения, мы получаем апостериорную функцию плотности вероятности  $P(\vec{n}|\vec{s}) \propto \mathcal{L}(\vec{n}, \vec{s})$ , которую теперь требуется исследовать.

Требуется получить не только наиболее оптимальное значение  $\vec{n}$ , но и оценку неопределённости этой величины. Поэтому, например, простой метод максимального правдоподобия, в котором мы нашли бы максимум

$\mathcal{L}$  в пространстве параметров, не подходит — хотя и для него существуют методы поиска доверительных интервалов, они чаще всего ограничены предположениями о форме профиля правдоподобия. Мы будем использовать метод Монте-Карло с марковскими цепями (Markov Chain Monte Carlo), который не имеет этого ограничения и хорошо применим к задачам большой размерности. Суть метода сводится к запуску марковского процесса случайного блуждания в пространстве параметров  $\vec{\pi}$  с такой специально подобранной вероятностью перехода из точки в точку, зависящей от апостериорной вероятности, что в пределе «след» от этого блуждания даст выборку из исследуемой функции плотности. Общей характеристикой таких методов является то, что они зависят только от отношения вероятностей в разных точках пространства параметров, именно поэтому в выражении (3.7) и во всех последующих вычислениях мы не интересовались ни полной маргинальной вероятностью наблюдаемых данных, ни нормировкой априорного распределения.

Подробный обзор и теоретическое исследование весьма широкой области МСМС-сэмплирования находятся за рамками данной работы, но могут быть найдены, например, в обзоре [29].

#### 3.6.4.1 Афинно-инвариантное МСМС-сэмплирование

В данной работе будем использовать популярный алгоритм афинно-инвариантного сэмплирования, предложенный в 2010 году в работе [30].

В этом алгоритме используется не одна марковская цепь (англ. *walker*), а целый ансамбль из нескольких сотен или даже тысяч цепей, и новый шаг генерируется для каждой цепи в зависимости от состояний остальных. Конкретный алгоритм генерации шага (или просто «шаг», англ. *move*) не фиксирован и может быть выбран в зависимости от конкретной задачи. Каждый из шагов обладает своими особенностями и по-своему влияет на предпочтительное количество цепей и необходимое количество итераций. Самый универсальный — так называемый «шаг-растяжка» (англ. *stretch*



move), будет использоваться далее. Опишем вкратце алгоритм генерации шага-растяжки.

Рассмотрим  $i$ -тую цепь, находящуюся в состоянии  $X_i(t)$  (состояние цепи есть точка в пространстве параметров, иначе говоря, конкретное значение  $\vec{n}$ ). Выберем случайным образом комплементарную цепь из ансамбля и обозначим её  $X_j(t)$ ,  $j \neq i$ . Сгенерируем «предложение» (англ. proposal) для данной цепи:

$$Y = X_j(t) + Z (X_i(t) - X_j(t)) \quad (3.16)$$

Предложенное новое положение  $i$ -той цепи находится на прямой, соединяющей её с другой цепью на данном шаге. Масштабный множитель  $Z$  — случайная величина, на которую накладывается теоретическое ограничение: для существования стационарного распределения марковской цепи достаточно обеспечить детальное равновесие, то есть равенство вероятностей перехода  $X_i \rightarrow Y$  и  $Y \rightarrow X_i$ . Для этого, в свою очередь, достаточно потребовать, чтобы функция плотности вероятности величины  $Z$  удовлетворяла свойству симметрии  $g(1/z) = z g(z)$ . В качестве конкретного вида этой функции авторы предлагают использовать

$$g(z) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z}} & \text{при } z \in \left[\frac{1}{a}, a\right], \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (3.17)$$

Наконец, после генерации предложения для нового положения  $i$ -той цепи (не важно, описанным шагом-растяжкой или любым другим алгоритмом) требуется принять или отвергнуть предложенное значение  $Y$ . Вероятность того или иного исхода получается из условия частичного ресэмплинга (которое в свою очередь выводится из принципа детального равновесия, записанного для всего ансамбля цепей), которое гласит: чтобы переход ансамбля цепей в новое состояние не менял совместного распределения всего ансамбля (которое полагается равным целевому сэмплируемому распределению), достаточно, чтобы переход одной цепи не менял условную плотность вероятности для данной цепи при фиксированных всех остальных. Вероятность

принять предложение  $Y$ , обеспечивающая выполнение условия, задаётся величиной

$$P(X_i(t+1) = Y) = \min \left\{ 1, Z^{N-1} \frac{p(Y)}{p(X_i(t))} \right\} \quad (3.18)$$

Упрощённо можно сказать, что цепи ансамбля будут с большей вероятностью переходить в области большего значения сэмплируемой функции (то есть исследуемой плотности апостериорной распределения), но при этом также чаще оставаться вблизи «соседей» по ансамблю.

#### 3.6.4.2 Имплементация МСМС-сэмплирования в пакете емсее

Эффективная и устойчивая реализация алгоритма МСМС-сэмплирования представляет собой непростую задачу. В дальнейшем будет использоваться популярная имплементация описанного алгоритма в пакете емсее на языке Python [28].

Пакет предоставляет возможность не только провести само сэмплирование, но и оценить корректность результата. Строгое математическое доказательство позволяет установить только асимптотическую сходимость ансамбля цепей к целевому распределению. При этом реальная длина цепей конечна, и степень сходимости требует отдельной оценки. Количество шагов должно быть достаточно большим для использования результата, но достаточно малым для завершения вычисления за разумное время и с использованием разумного объёма памяти.

Даже если ансамбль сошёлся с хорошей точностью, из него ещё требуется получить выборку независимых реализаций случайной величины. Состояние ансамбля на конкретном (например, последнем) шаге даёт ряд значений, однако число цепей в ансамбле чаще всего меньше, чем желаемое количество элементов выборки, значит, приходится брать значения на нескольких шагах. Шаги каждой цепи принципиально зависимы, но корреляция падает с расстоянием, а следовательно, для получения выборки нужно выбирать достаточно редкие состояния ансамбля цепей.

На практике эти две проблемы выражаются в необходимости выбрать время «разгона» (англ. burn-in) и «прореживание» (англ. thinning) цепей. Информированный выбор обоих параметров можно провести с помощью оценки интегрированного времени автокорреляции  $\tau$  [31]. Интегрированное время автокорреляции даёт оценку числа шагов, на котором корреляция значений цепи падает в  $\epsilon$  раз. Соответственно, период разгона можно взять равным нескольким  $\tau$ , и прореживать значения примерно каждые  $\tau$  шагов. Пакет emcee предоставляет готовые средства для оценки величины  $\tau$ <sup>1</sup>.

Помимо метапараметров (количество цепей, параметр  $a$  для «шага-растяжки» или соответствующих параметров для других шагов) важной является инициализация сэмплера. Несмотря на теоретически предсказываемое «забывание» состояния цепей в течении нескольких  $\tau$ , в большинстве практических задач начальное положение цепей желательно задавать разумным образом. Здесь пригодится результат раздела 3.5, дающий возможность простым и быстрым способом можно получить  $\vec{n}_{rough}$  — грубую оценку  $\vec{n}$ . Следуя практической рекомендации из статьи [28], инициализируем  $N_{walker}$  цепей значениями, близкими к этой оценке, но дополнительно разбросанными в соответствии с нормальным распределением числа фотонов в каждом бине. Стандартное отклонение этого начального разброса должно быть заметно меньше разброса самих данных<sup>2</sup>, например  $\hat{\sigma}_{rough}/10$ , где  $\hat{\sigma}_{rough}$  — выборочное стандартное отклонение, рассчитанное по элементам  $\vec{n}_{rough}$ .

Результат таким образом проведённого сэмплирования для демонстрационной задачи приведён на 3.6.

## 3.7 Деконволюция экспериментальных данных

Общий метод байесовской деконволюции, изложенный в предыдущем разделе, применим теперь к экспериментальным данным.

<sup>1</sup>Autocorrelation analysis & convergence. 2019. URL: <https://emcee.readthedocs.io/en/stable/tutorials/autocorr/>.

<sup>2</sup>«Another general approach is to start the walkers in a very tight N-dimensional ball in parameter space around one point that is expected to be close to the maximum probability point.» ([28])

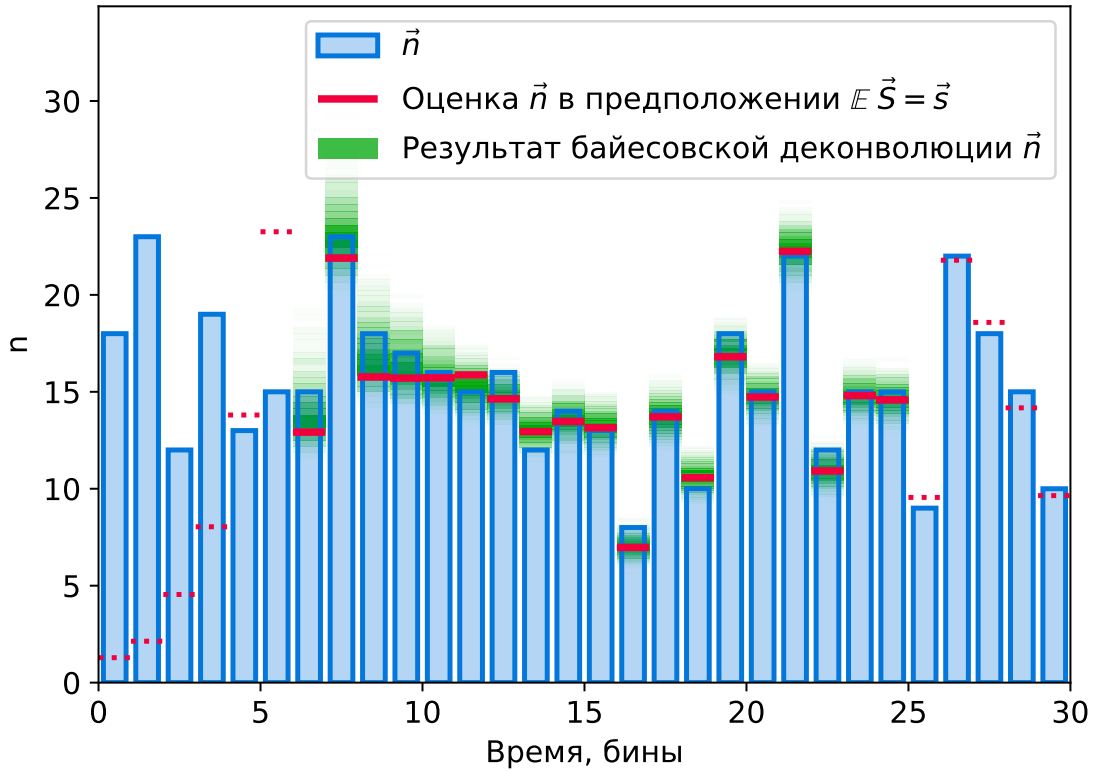


Рис. 3.6: Результат решения задачи байесовской деконволюции. Зелёным показаны маргинальные апостериорные распределения, то есть однопараметрические проекции апостериорного распределения как функции  $n_i$  для области  $i$ , не подверженной влиянию эффекта окна. Следует заметить, что на самом деле многомерное апостериорное распределение не обязательно факторизуемо, поэтому для дальнейшего анализа нельзя рассматривать маргинальные распределения по отдельности — они приведены только для иллюстрации результата.

В этом разделе будем рассматривать преобразование фотоэлектронов, испущенных фотокатодом ФЭУ под воздействием собранных фотонов, в импульс анодного тока, стекающего с его анодной RC-цепочки. На этом этапе преобразований сигнала определяется и временные характеристики (форма размытия импульса во времени зависит от параметров анодной цепи и собственной формы сигнала ФЭУ), и его амплитуда, причём значение последней носит случайный характер для каждого фотона, однако среднее её значение измеряется в процессе калибровки детектора. При этом система «ФЭУ + анодная схема + АЦП» является линейной с высокой точностью, и небольшая коррекция нелинейности применяется к данным для компенсации тех небольших искажений, что всё же проявляются [17].

Детальное описание схем подключения и питания ФЭУ, схему преобразования и усиления сигнала, а также характеристики использованных аналого-цифровых преобразователей можно найти в работе [22].

### 3.7.1 Экспериментальная рандомизированная импульсная характеристика

Определим случайную функцию  $\tilde{h}(t)$ , которую будем использовать в качестве рандомизированной импульсной характеристики системы. Сначала факторизуем её следующим образом

$$\tilde{h}(t) = C \tilde{C}_{PMT} h_I(t) \quad (3.19)$$

Здесь

1.  $h_I(t)$  — функция времени, описывающая форму импульсной характеристики, то есть безразмерная и нормированная таким образом, что её интеграл равен 1. Эта функция известна из лабораторного измерения, оно же показывает, что форму можно считать одинаковой для всех 109 каналов мозаики. В этой функции мы феноменологически учитываем все физические процессы, искажающие сигнал во времени: фильтрацию

импульса анодной RC-цепочкой, влияние длинной линии, по которой сигнал передаётся с мозаики ФЭУ к бортовому компьютеру, а также любые другие частотно-зависимые характеристики операционных усилителей или АЦП. График  $h_I(t)$  изображён на верхней панели рис. 3.7.

2.  $\tilde{C}_{PMT}$  — случайная величина, описывающая неопределённость коэффициента усиления ФЭУ. Лавинообразный процесс генерации вторичных электронов сильно зависит от случайных процессов, проходящих в области первого динода, и в зависимости от них коэффициент усиления также оказывается случайной величиной — это и есть источник «рандомизированности» импульсной характеристики.  $\tilde{C}_{PMT}$  безразмерна и масштабирована так, чтобы  $\mathbb{E}\tilde{C}_{PMT} = 1$ , плотность и функция распределения показана на нижней панели рис. 3.7.
3.  $C$  — масштабный коэффициент, размерность совпадает с размерностью сигнала  $s(t)$ . Также можно сказать, что с точки зрения экспериментальных данных это средний абсолютный коэффициент усиления данного канала. Для иллюстрации этого заметим, что для однородного во времени шумового сигнала в длинном окне ( $N \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \int_1^N S(t) dt \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^N \left( n_i \int_{\infty} h(t) dt \right) \right] = \mathbb{E} \left[ \int_{\infty} h(t) dt \right] \sum_{i=1}^N n_i = C \sum_{i=1}^N n_i \\ \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \int S(t) dt \right] &= C \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i \\ \bar{S} &= C \bar{n}\end{aligned}\tag{3.20}$$

Иначе говоря,  $C$  — коэффициент пропорциональности между средним значением числа фотоэлектронов в бине и средним значением выходного сигнала. Строго говоря,  $\bar{S}$  — среднее значение интеграла выходного сигнала за один бин, однако численно они совпадают из-за принятой временной шкалы; различие будет проявляться только в размерности:

например, если  $S$  выражает анодный ток и измеряется в микроамперах, то  $C$  будет иметь размерность заряда (микроампер \* бин).

Постоянный коэффициент калибровки  $C$  не влияет на статистические свойства системы, и пока можно считать равным единице, его роль будет описана в разделе 3.7.3.

Получив РИХ, можно смоделировать отклик установки на определённый входной  $\vec{n}$  и провести деконволюцию, чтобы оценить корректность работы метода, аналогично тому, как это было сделано с «игрушечной» РИХ (3.1). На рис. 3.8 приведён результат такой процедуры. По сравнению с решением «игрушечной» задачи, приведённым на рис. 3.6, очевидна худшая точность деконволюции, что вполне объяснимо — в первом случае РИХ быстро спадала во времени, была ограничена всего  $L_1 = 5$  отсчётами, а её амплитуда варьировалась от 0.75 до 1; реальная РИХ, напротив, имеет широкий основной пик (около 5 отсчётов) и длинный хвост, а её амплитуда варьируется в пределах от 0 до 2-3 относительно среднего значения. Однако в этом и состоит главное достоинство статистической деконволюции: неполнота информации не ведёт к некорректности метода (что, вероятнее всего, случилось бы в случае с обыкновенной, детерминистичной деконволюцией методом взятия частного фурье-образов свёрнутого сигнала и импульсной характеристики), но предсказуемым образом отражается в результатах.

### 3.7.2 Модификация процедуры для применения к реальным данным

Перед тем как, наконец, перейти от исследования метода к деконволюции реальных данных, необходимо внести в описанную процедуру две важные модификации.

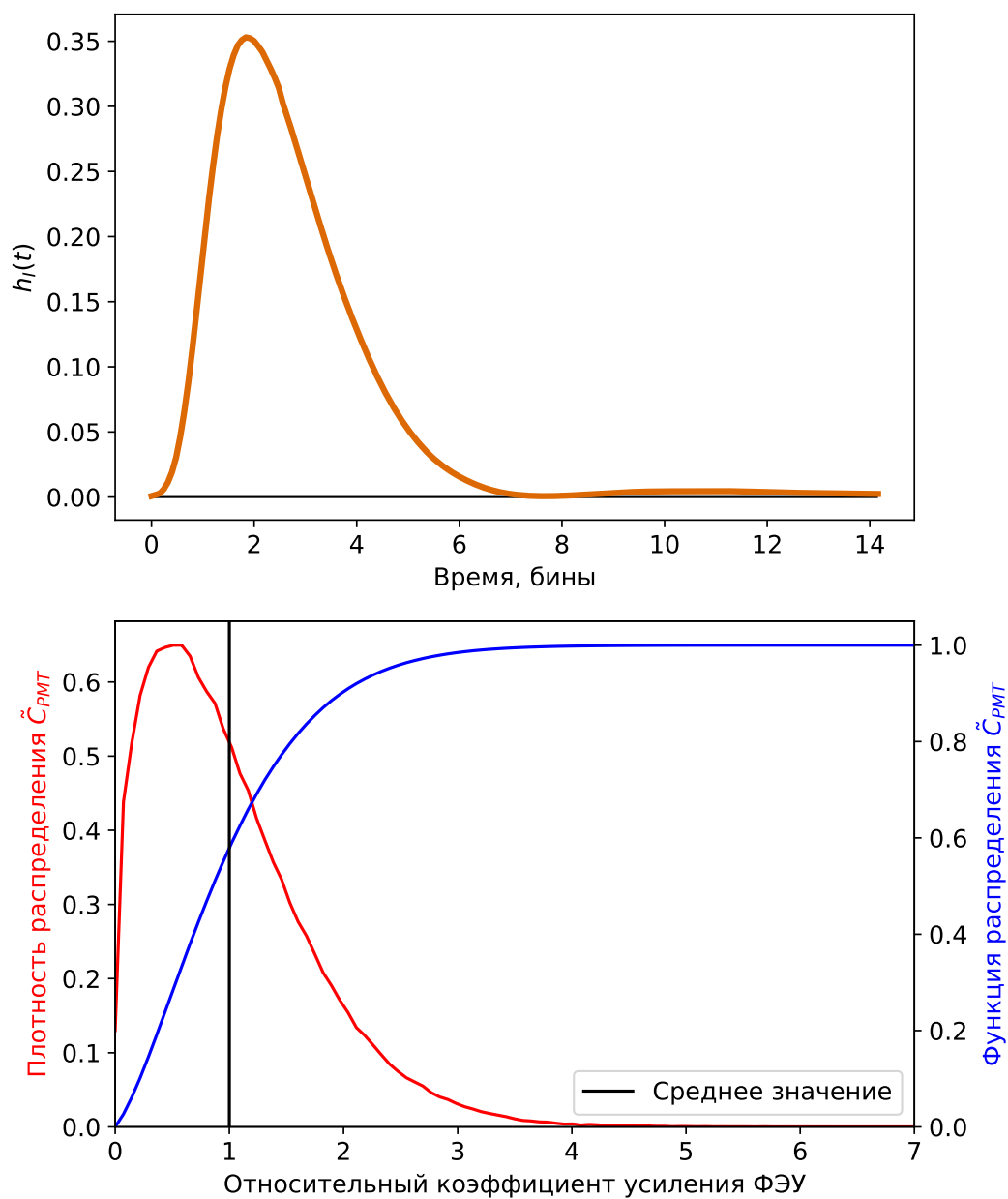


Рис. 3.7: Компоненты экспериментальной рандомизированной импульсной характеристики. Функция  $h_I(t)$  (верхняя панель) описывает форму импульса во времени, а случайная величина  $\tilde{C}_{PMT}$  (функции распределения и плотности вероятности на нижней панели) — неопределённость коэффициента усиления ФЭУ.



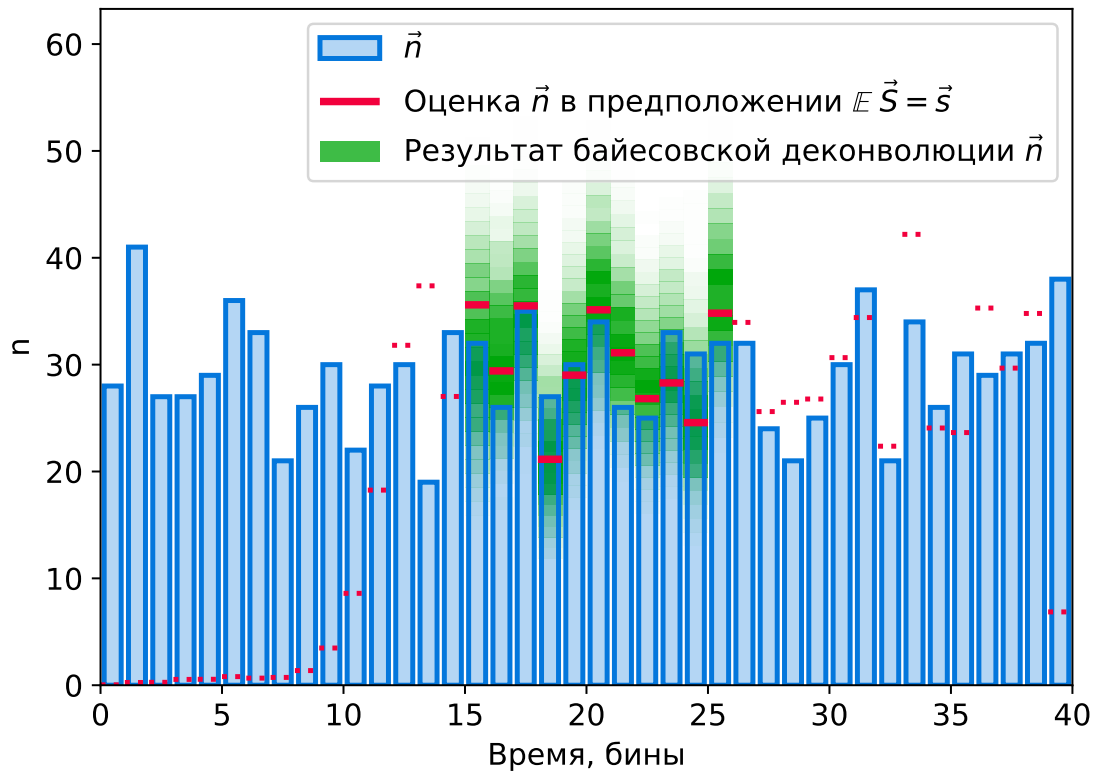


Рис. 3.8: Решение задачи байесовской деконволюции для РИХ, определённой выражением (3.19). Синие столбцы — истинный входной сигнал  $\vec{n}$ , розовые полосы — первичная грубая оценка, зелёным изображены маргинальные апостериорные распределения в центральных бинах (см. описание рис. 3.6).

### 3.7.2.1 Учёт неопределённости экспериментального сигнала

Функция правдоподобия, введённая в разделе 3.6, и её аппроксимация, описанная в подразделе 3.6.3, справедливы для случая, когда сигнал на выходе известен точно. В этом случае не совсем корректно определение правдоподобия как вероятности получить данный сигнал  $\vec{s}$  при фиксированных  $\vec{n}$ , ведь вероятность каждой конкретной реализации непрерывного распределения равна нулю. Поэтому до сих пор под правдоподобием на самом имела в виду плотность этой вероятности.

Однако сигнал в реальном эксперименте известен с погрешностью, в первую очередь это погрешность дискретизации АЦП. Поэтому требуется модифицировать функцию правдоподобия так, чтобы она показывала не плотность вероятности единичного значения  $\vec{S}$ , а вероятность нахождения  $\vec{S}$  в некотором наборе состояний. В рамках байесовской интерпретации вероятности будем считать, что неопределённость измерения сигнала выражается некоторым апостериорным распределением (апостериорным относительно процедуры его экспериментального измерения)  $p_{exp}(\vec{s})$ . Тогда, обозначая плотность вероятности (3.8)  $p(\vec{s}, \vec{n})$ , можно записать модифицированную функцию правдоподобия в виде

$$\mathcal{L}(\vec{n}) = \int_{\infty} p_{exp}(\vec{s}) p(\vec{s}, \vec{n}) d\vec{s} \quad (3.21)$$

В эксперименте ошибка дискретизации АЦП превосходит другие источники ошибки как минимум на порядок (см. таблицу 3.1). Поэтому можно считать, что, если АЦП округляет сигнал вниз и имеет величину дискретизации  $\delta$ , то в  $i$ -том отсчёте истинное значение  $s_i$  равномерно распределено между записанным округлённым значением  $\bar{s}_i$  и следующей «ступенькой», отстоящей от него вверх на  $\delta$ , и распределено независимо от других отсчётов. Иначе говоря,  $p_{exp}(\vec{s}) = \prod_i U(\bar{s}_i, \bar{s}_i + \delta_s)$ . Это сводит вычисление интеграла (3.21) к более простому

$$\mathcal{L}(\vec{n}) = \int_{s_1}^{s_1+\delta} \int_{s_2}^{s_2+\delta} \dots \int_{s_N}^{s_N+\delta} p(\vec{s}, \vec{n}) d\vec{s} \quad (3.22)$$

Задача вычисления функции правдоподобия сводится к интегрированию плотности вероятности многомерного нормального распределения по многомерному кубу, и представляет собой отдельную вычислительную задачу. Для её решения можно воспользоваться готовым алгоритмом адаптивного интегрирования, описанным в работе [33], имплементация которого доступна в пакете `scipy.stats` [34] в виде Fortran-сабрутины с интерфейсом для Python.

На рис. 3.9 представлена постановка и решение задачи в этой форме, уже предельно близкой к задаче деконволюции экспериментальных сигналов. Величина шага дискретизации АЦП положена равной 2, а к исходному сигналу добавлена простейшая имитация сигнала ШАЛ: к шумовым фотонам количество которых, как и раньше, выбиралось из пуассоновского распределения с  $\lambda_n = 20$ , в трёх центральных бинах добавлено по  $2\lambda_n$  «сигнальных» фотонов.

### 3.7.2.2 Каскадное сэмплирование

Полученная функция правдоподобия (3.22) всё ещё требует существенного времени для вычисления. Бóльшая часть вычислений функции правдоподобия приходится на период «разгона» сэмплера и набора достаточного количества итераций для устойчивой оценки времени автокорреляции  $\tau$  (см. параграф 3.6.4.2). Этот процесс можно ускорить, если инициализировать сэмплер не точками в области грубой оценки  $\vec{n}$ , но некоторым промежуточным распределением, близким к конечному, но более простым в получении. Такое промежуточное распределение можно получить, рассмотрев функцию правдоподобия в приближении факторизованного многомерного нормального распределения.

Если бы корреляции между элементами случайного вектора  $\vec{S}$  при заданных  $\vec{n}$  были бы пренебрежимо малы (то есть попарные распределения

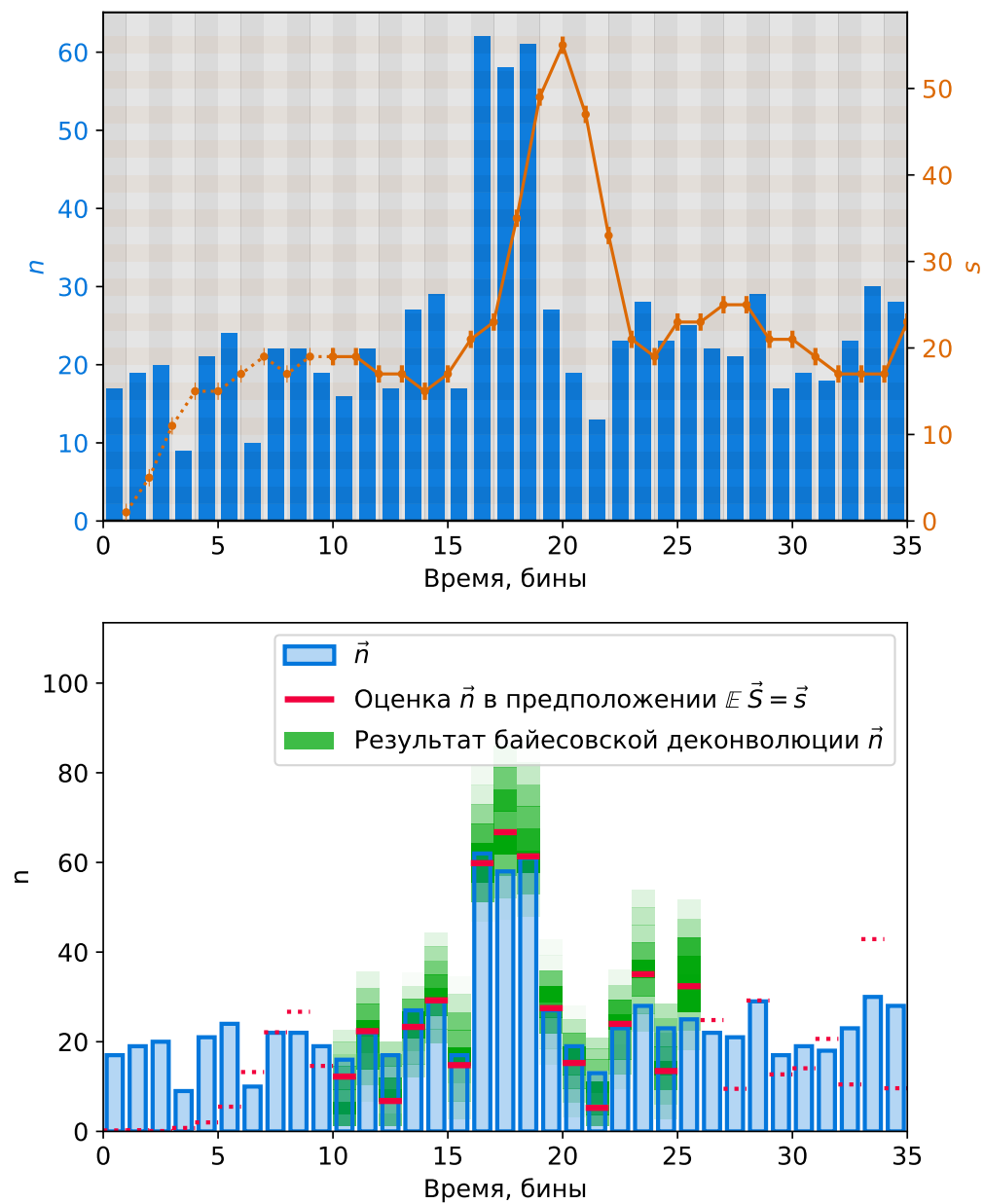


Рис. 3.9: Постановка и решение задачи байесовской деконволюции для экспериментальной РИХ с учётом погрешности измерения сигнала. В центре окна добавлена имитация пакета фотонов ШАЛ, двукратно превышающая фон в течение 3 бинов.

на рис. 3.5 имели форму окружностей), вычисление функции правдоподобия даже с учётом ошибок измерения сигнала было бы гораздо проще. А именно, оно свелось бы к перемножению вероятностей получить наблюдаемое значение в каждом отсчёте, которые в свою очередь рассчитывались бы из функции одномерного нормального распределения. С вычислительной точки зрения такой расчёт оказывается примерно в 100 раз эффективнее, а получающееся в результате сэмплирования этой упрощенной функции правдоподобия апостериорное распределение качественно подобно истинному.

Всё это позволяет ввести процедуру каскадного сэмплирования:

1. Сгенерировать длинные марковские цепи с упрощённой и вычислительно дешёвой функцией правдоподобия, тем самым получить выборку, близкую к апостериорному распределению, а также оценку времени автокорреляции  $\tau$ .
2. «Подменить» функцию правдоподобия на истинную, и провести сравнительно короткое финальное сэмплирование, которое сойдётся уже к искомому апостериорному распределению

На практике оказывается достаточным провести предварительное сэмплирование на 20000 шагов с 256 цепями, и затем окончательное — всего  $4000 \approx 2\tau$  шагов с 128 цепями. На рис. 3.10 приведено сравнение маргинальных распределений в отдельно взятом бине после предварительного и окончательного сэмплирования. Видно постепенное уточнение оценки. С точки зрения времени вычислений предварительное сэмплирование занимает примерно в 30-50 раз меньше времени, несмотря на большее число шагов и цепей.

### 3.7.3 Подготовка экспериментальных данных

Данные эксперимента СФЕРА-2 представлены тремя сущностями, из которых нам предстоит сконструировать искомые сигналы анодного тока. Итак, для каждого из 109 каналов известны [22]:

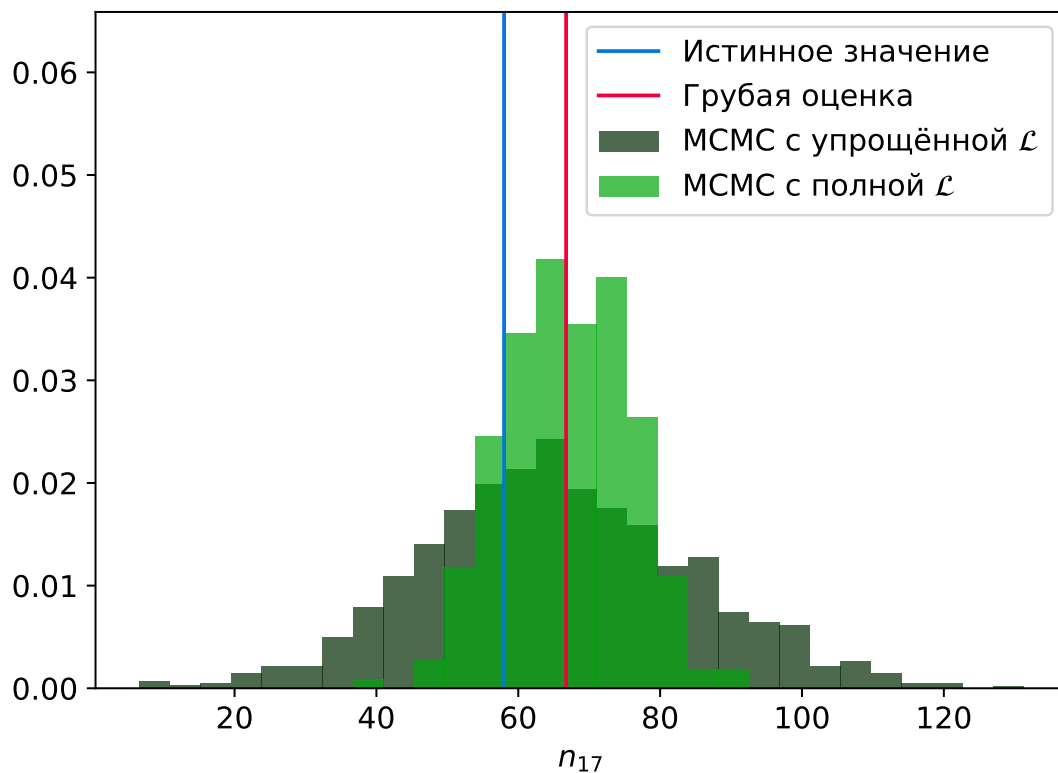


Рис. 3.10: Сравнение маргинальных апостериорных распределений в отдельно взятом бине, полученных с упрощённой функцией правдоподобия (предварительный расчёт, «разгон» сэмплера) и с полной функцией, дающий окончательный результат.

1.  $\tilde{s}$  — переменная компонента анодного тока в области триггера, усиленная и записанная АЦП, сохранённая в единицах кода. Погрешность дискретизации в этих величинах составляет 1 по определению единицы кода. Также присутствует дополнительная погрешность, связанная с тем, что для перевода сигнала в динамический диапазон АЦП к нему искусственно добавлялся постоянный ток («пьедестал»). Далее из записанных событий этот пьедестал удалялся вычитанием среднего значения по выборке из 200 шумовых отсчётов. Следовательно, если дисперсия шумовых отсчётов составляет порядка нескольких единиц кода, то погрешность, вносимая процедурой вычитания пьедестала, рассчитывается по формуле для дисперсии выборочного среднего и составит порядка  $1/\sqrt{200} \approx 0.07$  единиц кода.
2.  $\bar{s}$  — постоянная компонента анодного тока, отфильтрованная RC-цепочкой и записанная отдельным АЦП. Показания этого АЦП сразу пересчитывались к значению в микроамперах, погрешность его составляет 0.1 мкА, типичные значения — от 7 до 15 мкА для разных каналов, то есть погрешность измерения этой величины также на 1 – 2 порядка меньше, чем погрешность дискретизации переменной части сигнала.
3.  $A$  — коэффициент относительной калибровки канала. Эта величина имеет следующий смысл: домножая  $\tilde{s}$  и  $\bar{s}$  на  $A$ , мы получаем сигнал, который записал бы референсный канал — ФЭУ Hamamatsu R3886 при температуре  $0^\circ$  и напряжении 1000 В на системе динодов. Величина  $A$  измеряется для всех каналов экспериментально с помощью специального калибровочного кадра, а также паспортных зависимостей коэффициента усиления от температуры и давления для центрального ФЭУ, этот процесс подробно описан в работе [21].

Для референсного канала известно значение параметра  $C$  в выражениях (3.19 - 3.20) при условии, что сигнал измеряется в единицах кода:  $C_{ref} = 0.326$  ед. кода \* бин. Таким образом, для произвольного канала  $C = C_{ref}/A$ .

Остаётся пересчитать  $\bar{s}$  из микроамперов в единицы кода, чтобы можно было восстановить постоянную компоненту сигнала так, как она была бы записана АЦП в отсутствии разделения постоянной и переменной компоненты. Для этого необходимо: 1) разделить эту величину на 2 (разделение тока на согласованном сопротивлении кабеля, по которому импульс передаётся от мозаики к АЦП) 2) ещё раз разделить на 2 (разделение тока на два идентичных канала АЦП, в сумме дающих дискретизацию 12.5 нс, см. [22]) 3) умножить на 30 (коэффициент усиления операционного усилителя) 4) преобразовать в падение напряжения на 100  $\Omega$  резисторе 5) разделить на шаг дискретизации, который для 10-битного АЦП с рабочим диапазоном напряжений 2 В будет равен  $2 \text{ В} / 2^{10} \approx 1.95 \text{ мВ}$ . В итоге получим

$$\bar{s} [\text{ед. кода}] = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot \bar{s}\right) [\text{мкА}] \cdot 100 [\Omega]}{1.95 [\text{мВ/ед. кода}]} \approx 0.38 [\text{ед. кода/мкА}] \cdot \bar{s} [\text{мкА}] \quad (3.23)$$

Дополнительная ошибка, вносимая при этом пересчёте, составляет порядка 1 – 2% — она вызвана неопределённостью параметров цепи, коэффициента усиления операционного усилителя, диапазона работы АЦП, и т.д. Разные источники ошибки измерения сигнала приведены в таблице 3.1. Видно, что доминирующей ошибкой является ошибка дискретизации, все прочие источники неопределённости составляют в сумме около 10% от её величины. Поэтому в дальнейшем будем учитывать только ошибку дискретизации АЦП, что даёт возможность вычислять функцию правдоподобия сигнала как описано в разделе 3.7.2.1.

Таким образом, финальная процедура «сборки» сигнала из экспериментальных данных выглядит так:

1. Перевести  $\bar{s}$  из мкА в единицы кода домножением на 0.38
2. Сложить  $\tilde{s}$  и  $\bar{s}$ , получив полный сигнал  $s$  в единицах кода, как он был бы записан АЦП в отсутствии разделения на постоянную и переменную компоненты



Источник ошибки	Распределение	Характерная величина [ед. кода]
Дискретизация АЦП	$U$	1
Измерение $\bar{s}$	$N$	$0.38 \cdot 0.1 \approx 0.03$
Перевод $\bar{s}$ в ед. кода	$N$	$\approx 0.08$
Вычитание пьедестала $\tilde{s}$	$N$	$\approx 0.07$

Таблица 3.1: Сравнение разных источников погрешностей измерения экспериментального сигнала.

3. Вычислить масштабный множитель РИХ  $C$  для данного канала по формуле  $C_{ref}/A$ , где  $A$  — коэффициент относительной калибровки

Вообще говоря, деконволюцию можно было бы проводить уже на этом этапе, однако тогда для каждого сигнала придётся использовать свою РИХ. Заметим, что ситуацию можно облегчить, если добавить ещё один шаг:

4. Привести сигнал  $s$  и ошибку дискретизации к относительным единицам, разделив на  $C$

В этих относительных единицах все каналы имеют одну, единичную РИХ; все их индивидуальные характеристики оказываются выражены в величине ошибки дискретизации: канал с большим коэффициентом усиления будет давать бóльший сигнал в единицах кода и как следствие иметь меньшую ошибку округления в приведённом относительном масштабе. Кроме того, как следует из выражения (3.20), в таком масштабе среднее значение сигнала равно среднему количеству фотоэлектронов в бине.

Пример экспериментального кадра после всех описанных преобразований приведён на рис. 3.11. Наконец, к полученному сигналу можно применить процедуру деконволюции. Её результат для одного из экспериментальных сигналов приведён на рис. 3.12. Аналогичным образом обрабатывается каждый канал, что открывает возможность выделять оценить параметры сигнала ШАЛ в каждом из них, а значит и параметры ливня. Этому процессу посвящена следующая глава.

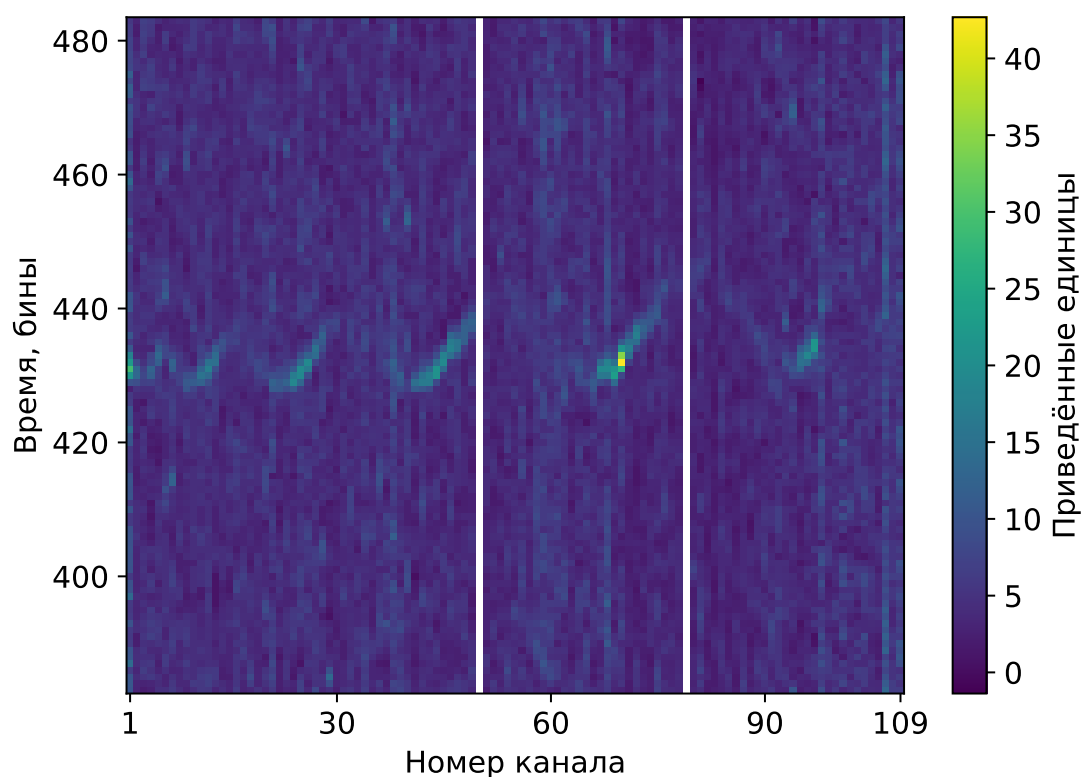


Рис. 3.11: Пример экспериментального события в приведённом масштабе (см. текст). Видна характерная «змейка» фронта черенковского света в центре кадра, и общая однородная яркость фона — её систематическое изменение от канала к каналу объясняется разными коэффициентами сбора света с поверхности для каждого ФЭУ и, как следствие, немного разными интенсивностями фоновых фотонов. Исключены каналы 50 и 79, которые не работали из-за сбоя электроники.

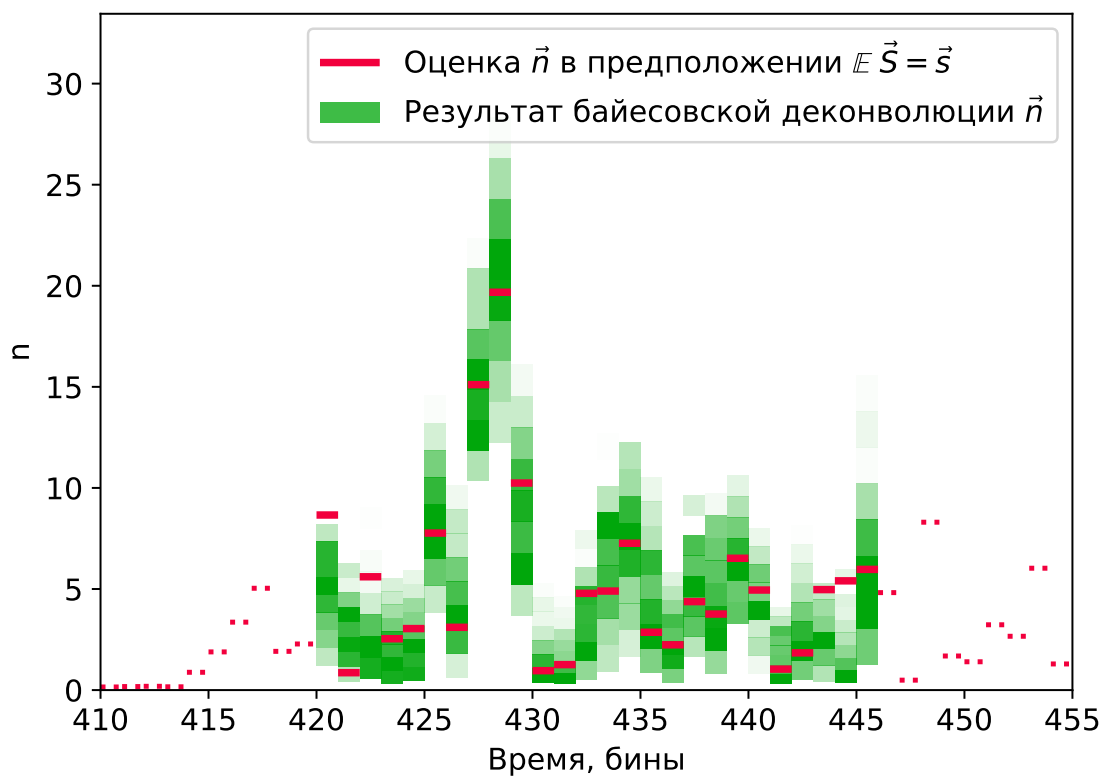


Рис. 3.12: Результат байесовской деконволюции для 2 канала события, изображённого на рис. 3.11.

## Глава 4. Оценка параметров ШАЛ

В результате проведения процедуры байесовской деконволюции получена безмодельная оценка потоков фотонов (в эквивалентных фотоэлектронах) на мозаике ФЭУ. Безмодельной она является в том смысле, что не зависит от детальных предположений о свойствах и источниках света, падающего на мозаику, кроме самых общих представлений. В этой главе на основе полученного результата, а также качественного представления о пространственно-временной структуре сигнала ШАЛ реконструируется функция пространственного распределения (ФПР) черенковского света. Наконец, на основе полученной ФПР делаются оценки параметров ШАЛ.

Стоит отметить, что методы, изложенные в этой главе, не являются новаторскими сами по себе, напротив, использованы уже хорошо изученные подходы. Основной целью является демонстрация того, как эти методы работают в контексте эксперимента СФЕРА-2 с учётом описанной процедуры деконволюции и неопределённостей, которые она порождает.

### 4.1 Выделение сигнала ШАЛ и оценка значимости

В процессе деконволюции не делается предположений о наличии или отсутствии сигнала ШАЛ в исследуемой области экспериментального кадра. Из моделирования ливня и оптической системы эксперимента известен общий вывод: фотоны ШАЛ достигают мозаики в виде пакетов — групп фотонов с приближённо нормальным распределением времён прихода. Каждый пакет можно описать тремя параметрами:  $n_{EAS}$  — суммарное число фотонов в пакете,  $\mu_t$  — среднее время прихода фотонов,  $\sigma_t$  — стандартное

отклонение времён прихода. Ещё одним параметром является среднее число фоновых фотонов  $\lambda_n$ , однако, как показано в разделе 3.7.3, оно известно из абсолютной калибровки сигнала.

#### 4.1.1 Выделение пакета фотонов ШАЛ

Как и задача деконволюции (3.6), задача выделения сигнала ШАЛ может быть решена с помощью формализма байесовского вывода алгоритмом МСМС-сэмплирования. В качестве параметров модели используем  $\Theta \equiv (n_{EAS}, \mu_t, \sigma_t)$ , в качестве наблюдаемых данных — полученную в результате деконволюции выборку значений  $\vec{n}$ .

Определим функцию правдоподобия для этой задачи: она должна давать вероятность того, что при фиксированном значении  $\Theta$  будет получено наблюдаемое  $\vec{n}$ . То обстоятельство, что  $\vec{n}$  измерен не прямо, а задан апостериорным распределением, легко учесть, просто усреднив значения функции правдоподобия по всем элементам этой выборки.

Представим  $\vec{n}$  в виде суммы  $\vec{n}_{EAS} + \vec{n}_{noise}$ . Распределение случайного вектора  $\vec{n}_{EAS}$  проще всего разыграть численно, генерируя выборки времён прихода фотонов объёмом  $n_{EAS}$  из распределения  $N(\mu_t, \sigma_t)$ , и рассчитывая из них гистограмму в границах экспериментальных бинов. Для нахождения искомой функции правдоподобия остаётся вычислить вероятность того, что «остаток» фотоэлектронов  $n_{noise}^{(i)}$  в каждом бине имеет пуассоновское распределение с  $\lambda_n$ :

$$\mathcal{L}(\Theta) \equiv P(\vec{n}|n_{EAS}, \mu_t, \sigma_t) = \prod_i \frac{e^{-\lambda_n} \lambda_n^{n_{noise}^{(i)}}}{(n_{noise}^{(i)})!} \quad (4.1)$$

Формула выше описывает значения правдоподобия при фиксированных  $\vec{n}_{EAS}$  и  $\vec{n}$ , поэтому для получения окончательного результата требуется усреднить значение  $\mathcal{L}(\Theta)$  по соответствующим распределениям (флуктуациям гистограммы  $\vec{n}_{EAS}$  и апостериорному распределению деконволюции).

В отличие от неинформативного априорного распределения, описанного для деконволюции в разделе 3.6.1, для  $\Theta$  можно выбрать осмысленные априорные распределения из данных моделирования. Известно, что  $n_{EAS}$  для интересующего нас диапазона энергий в 1 - 100 ПэВ имеет априорное распределение, экспоненциально спадающее от нуля с показателем  $\sim 40$ , а  $\sigma_t \sim N(2.4, 1)$ , обрезанное в нуле. Для  $\mu_t$  было выбрано априорное распределение, равномерное на ширине окна деконволюции<sup>1</sup>. Использование информативных априорных распределений помогает в процессе сэмплирования быстрее «навестись» на нужные области, например, сразу отбросить слишком широкие или многочисленные пакеты как маловероятные.

Техническая реализация МСМС-сэмплирования полностью аналогична описанной в разделе 3.6.4.

#### 4.1.2 Оценка значимости выделенного сигнала

Одно из преимуществ полностью статистического подхода — возможность использовать понятие значимости в процессе разделения сигнала ШАЛ и сигнала от фоновых фотонов. Широко принятый в байесовской статистике инструмент для этого — байесовский информационный критерий (Bayesian information criterion, BIC), введённый Шварцем [35] и представляющий собой в некотором смысле информационный критерий Акаике [36], адаптированный для байесовского анализа. Суть его состоит в следующем: при наличии нескольких моделей, описывающих данные, их можно сравнить по количеству информации, которое теряется при замене данные на модель. Чем меньше потеря информации, тем меньше будет значение критерия, и тем лучше показывает себя модель. Вычисление проводится по формуле

$$\text{BIC} = k \ln n - 2 \ln \mathcal{L}_{\max} \quad (4.2)$$

---

<sup>1</sup>В будущем при развитии методики можно уже на этапе поиска пакета «угадывать» его предполагаемое положение из приближённой оценки ориентации плоскости ливня по нескольким самым ярким каналам, и вносить эту информацию в априорное распределение  $\mu_t$ .

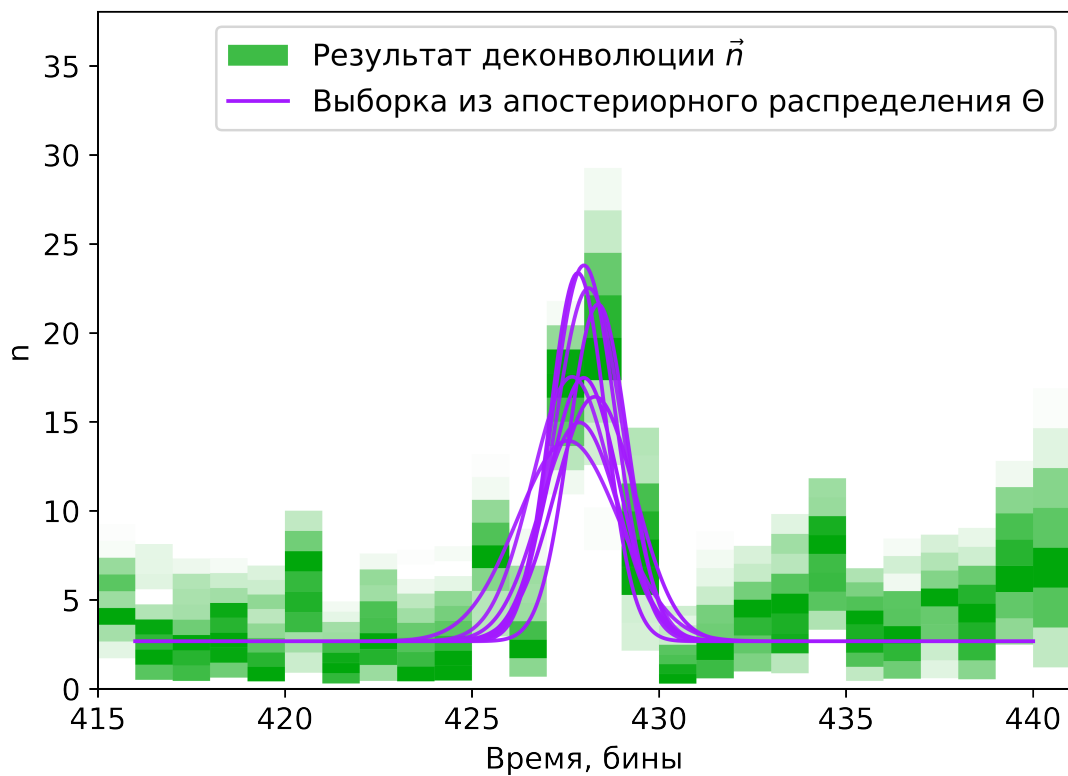


Рис. 4.1: Выделение пакета фотонов ШАЛ из результатов байесовской деконволюции. Фиолетовыми кривыми представлены 10 пакетов фотонов, соответствующих случайным элементам из апостериорной выборки  $\Theta$  (см. текст). Видно, что пакеты группируются вблизи ожидаемого пика, но их параметры варьируются, учитывая неопределённость данных деконволюции.

Здесь  $k$  — число параметров модели,  $n$  — число элементов выборки данных,  $\mathcal{L}_{max}$  — максимальное значение функции правдоподобия для данной модели. Структура выражения указывает на важное качество критерия: чем больше число параметров модели  $k$ , тем больше требуемый прирост  $\mathcal{L}_{max}$ , это позволяет предотвратить переобучение модели с большим числом параметров.

Для определения значимости найденного сигнала ШАЛ нам нужно сравнить две модели: модель «только шума» ( $n_{EAS} = 0$ ) вовсе без параметров ( $k = 0$ ), и модель «шум + сигнал», описанную в предыдущем разделе, которая имеет  $k = 3$  параметра. По разнице  $\Delta\text{BIC} = \text{BIC}_{noise} - \text{BIC}_{noise+EAS}$  можно судить о значимости восстановленного сигнала.

Если  $\Delta\text{BIC} \leq 0$ , то модель только шума оказывается более состоятельной, и такой канал можно удалить из анализа. Если  $0 < \Delta\text{BIC} < 4$ , то сигнал можно считать слабо значимым [37], на практике оказывается, что в эту область чаще всего попадают артефакты деконволюции или сильные флуктуации фона. Каналы, в которых  $\Delta\text{BIC} > 4$ , принимались как достоверные (хотя и в этом случае иногда находятся артефакты, которые позже отсеиваются на этапе восстановления геометрии ливня).

На рис. 4.2 представлен пример сначала деконволюции, а затем восстановления параметров пакетов фотонов для экспериментального события. Оценка значимости сигналов использована, чтобы часть точек отсеить совсем, а часть — пометить как «сомнительные», однако видно, что в последних каналах присутствуют, по-видимому, артефакты деконволюции, которые дают сигналы высокой значимости, не лежащие в картину ливня. Их, впрочем, легко отделить по времени прихода, этот процесс будет описан в следующей главе. Тем не менее, наличие подобных ложных срабатываний затрудняет поиск истинных слабых сигналов ШАЛ, способы борьбы с ними разрабатываются — в первую за счёт повышения вычислительной устойчивости процедуры деконволюции — и будут применены в будущем.



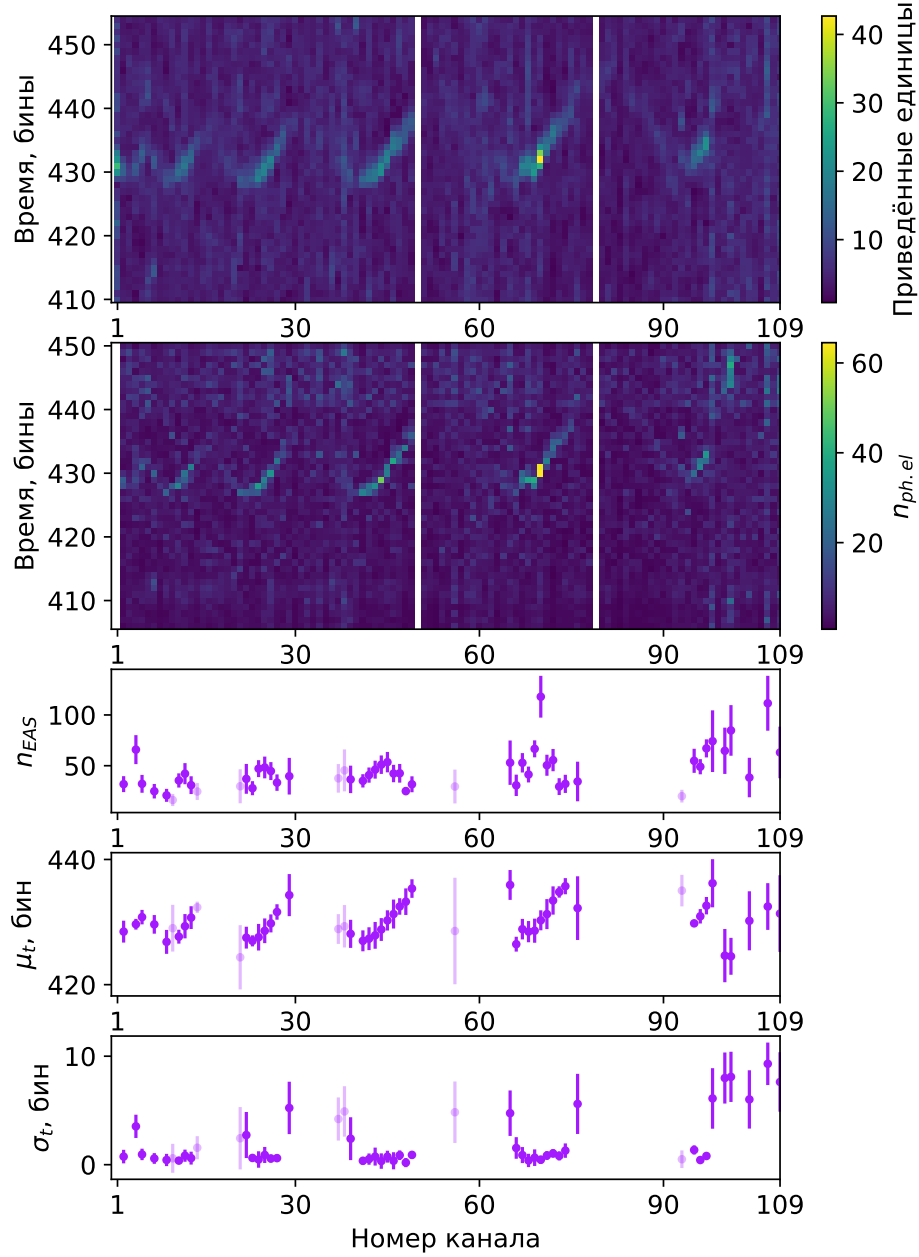


Рис. 4.2: Деконволюция и восстановление параметров пакетов для экспериментального события #10675. Для параметров  $n_{EAS}$ ,  $\mu_t$ ,  $\sigma_t$  ярким цветом показаны точки со значениями  $\Delta\text{BIC} > 4$ , тусклым —  $\Delta\text{BIC} \in (0, 4]$ , значения с отрицательным  $\Delta\text{BIC}$  исключены, видно, что они соответствуют «пустым» областям кадра.

## 4.2 Направление прихода ливня

Стандартный метод оценки направления прихода (или, иначе, ориентации оси) ливня основан на представлении о том, что фронт черенковского света (а в случае с другими установками — и заряженных частиц) с хорошей точностью является плоским. Поэтому, аппроксимируя плоскостью экспериментально измеренную зависимость времени прихода фронта  $\bar{t}_{gnd}(x, y)$ , мы сразу получаем оценку углов ориентации вектора нормали.

Для обработки данных эксперимента СФЕРА-2 требуется сделать дополнительный шаг: учесть время распространения света от снега до детектора. Это легко сделать, учитывая, что для каждого ФЭУ известен центр его поля зрения на поверхности  $(x_i, y_i)$  (см. раздел 2.3.3 и в частности рис. 2.4), и отсюда, зная высоту подъёма установки  $H$ , получаем  $\bar{t}_i = \mu_t^{(i)} - \frac{\sqrt{H^2 + x_i^2 + y_i^2}}{c}$ .

Задача аппроксимации трёхмерных точек плоскостью решается линейным методом наименьших квадратов, однако сам по себе этот метод неустойчив к выбросам, а, как видно на рис. 4.2, выбросы в данных  $\mu_t$  присутствуют. Для решения этой проблемы была разработана методика итеративного фитирования: аппроксимируется набор точек, находится самая удалённая от плоскости точка, выбрасывается, новый набор аппроксимируется заново, и так далее. Процедура повторяется до тех пор, пока угол между векторами нормали в двух последовательных аппроксимациях не станет меньше заданного наперёд значения. Значение допустимого «дрожания» было положено равным  $0.1^\circ$ . Следует заметить, что это не ограничение на погрешность определения ориентации оси, но только на устойчивость оптимального значения этой ориентации относительно удаления «наихудшей» точки. Погрешность определения углов  $\theta$  и  $\phi$  получается естественным образом в процессе фитирования, зависит от числа точек и составляет в общем случае порядка нескольких градусов. На рис. 4.3 показаны два примера этой процедуры для разных событий.

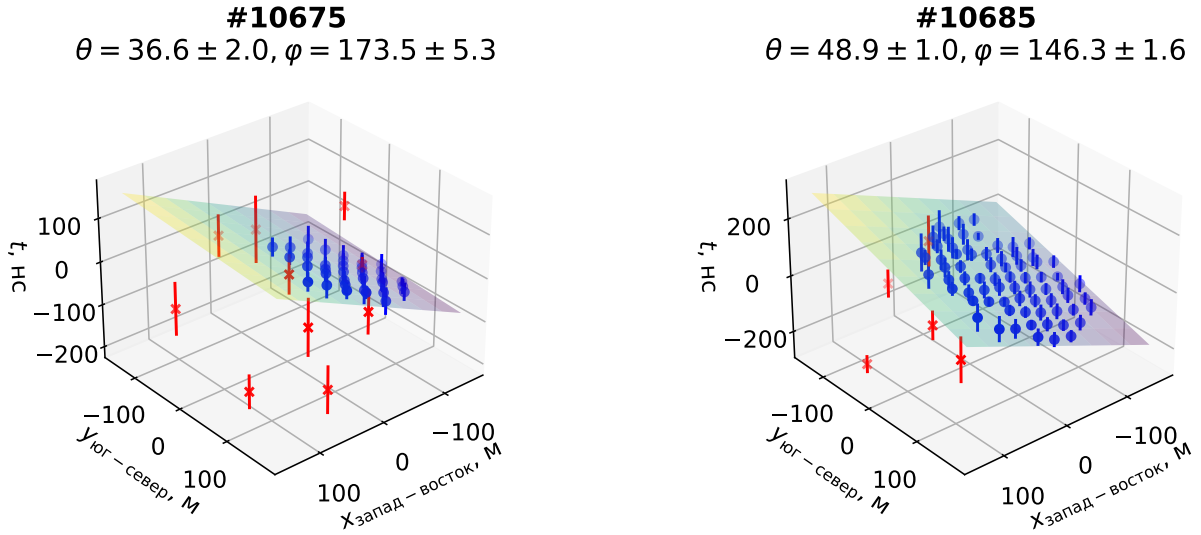


Рис. 4.3: Восстановление ориентации ШАЛ для двух экспериментальных событий. Красными показаны точки, автоматически исключённые в процессе итеративного фитирования (см. текст).

#### 4.2.1 Перспективы уточнения оценки

Описанный метод является стандартным и устоявшимся, однако может быть уточнён с учётом индивидуальных особенностей эксперимента СФЕРА-2. В бакалаврской дипломной работе [38] был разработан метод уточнения оценки ориентации оси, рассматривающий ширину пакета фотонов как вторичный показатель. Идея метода основана на том, что для протяжённых полей зрения ФЭУ ожидается наличие зависимости  $\sigma_t(x, y)$  — для ФЭУ, через которые фронт ливня проходит первым, пакет фотонов будет уже, чем для расположенных на противоположной стороне мозаики. Этот «геометрический эффект» является следствием взаимной угла между падающим и рассеянным черенковским светом, и соответствующим сжатием или растяжением пакета во времени.

В настоящую работу такой анализ не вошёл, поскольку процедура требует отдельной модификации для работы с новыми данными, однако будет внесён в общий алгоритм обработки данных в дальнейшем.

### 4.3 Положение оси ливня

Для оценки положения оси ливня, то есть координат её пересечения с поверхностью наблюдения, можно использовать ряд методов; в этом разделе описан один из простейших, основанный только на предположении о том, что функция пространственного распределения черенковских фотонов монотонно убывает с расстоянием от оси ливня.

Из восстановленных параметров пакетов фотонов в каждом канале мы имеем зависимость оценки  $n_{EAS}$ , найденной для каждого канала в разделе 4.1.1, от координат на поверхности наблюдения. К этому моменту мы исключили из рассмотрения сигналы с низкой значимостью, а также сигналы, не вошедшие по времени прихода в восстановленную плоскость ливня (см. предыдущий раздел).

Сформулируем функцию правдоподобия, задающую вероятность того, что ось пересекает поверхность наблюдения в точке  $(x_{ax}, y_{ax})$ . Зная эти координаты, перенумеруем каналы по возрастанию расстояния от предполагаемого положения оси — тогда функция правдоподобия будет равна вероятности того, что  $\forall i, j : i < j$  будет выполняться  $n_{EAS}^{(i)} > n_{EAS}^{(j)}$ . Для простоты положим здесь и далее, что апостериорное распределение  $n_{EAS}^{(i)}$  в  $i$ -том бине приближённо нормально, то есть полностью описывается средним  $\mu_i$  и стандартным отклонением  $\sigma_i$ .

$$\mathcal{L}(x_{ax}, y_{ax}) = \prod_i \prod_{j>i} (1 - F_N(0, \mu_i - \mu_j, \sqrt{\sigma_i + \sigma_j})) \quad (4.3)$$

Здесь  $F_N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right]$  — функция распределения гауссовой случайной величины, её параметры  $\mu_i - \mu_j$  и  $\sqrt{\sigma_i + \sigma_j}$  соответствуют распределению разности двух нормальных случайных величин,  $1 - F_N(0)$  даёт вероятность того, что разность случайных величин больше нуля.

Эту функцию правдоподобия можно максимизировать для поиска наиболее вероятного положения оси. Следует заметить, что, так как в основе  $\mathcal{L}$

лежит только представление о монотонности ФПР, но не о характере зависимости потока от радиуса, область максимального правдоподобия будет иметь конечные размеры, в её пределах упорядочивание каналов по возрастанию расстояния от оси не будет изменяться, и функция правдоподобия будет иметь строго одинаковые значения. На практике оказалось, что область такого «вырождения» весьма мала, и метод пригоден по крайней мере для начальной оценки.

Более сложные методы, вероятно, могут использовать описанный метод как первое приближение, но в дальнейшем восстанавливать положение оси вместе с формой ФПР в едином фитировании. Переход к таким методам не представляет концептуальной сложности.

## 4.4 Восстановление функции пространственного распределения черенковского света

После определения ориентации и положения оси ливня в пространстве можно приступить к оценке пространственного распределения черенковского света ШАЛ. Форма ФПР черенковского света представляет существенный интерес, так как даёт способ оценки параметров ливня, слабо зависящий от модели ядерного взаимодействия. В частности, нормировка ФПР даёт информацию об энергии ливня, а форма (часто измеряемая показателем наклона, определяемого как отношение потоков на двух радиусах), предоставляет возможность для определения массы первичной частицы ШАЛ [39, 40, 41].

Полный обзор и сравнение разных аппроксимаций черенковской ФПР остаётся за рамками настоящей работы, для демонстрации используем двухпараметрическую функцию, разработанную для аппроксимации данных детекторов черенковского света в эксперименте Тунка-25 [42]:

$$\begin{aligned}
Q(R) = Q_{kn} \cdot \begin{cases} \exp\left(\frac{(R_{kn} - R) \cdot (1 + 3/(R + 3))}{R_0}\right) & \text{при } R < R_{kn} \\ \left(\frac{R_{kn}}{R}\right)^b & \text{при } R \geq R_{kn} \end{cases} \\
R_0 = 10^{2.95 - 0.245P}, \text{ м} \\
R_{kn} = 155 - 13P, \text{ м} \\
b = 1.19 + 0/23P
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Параметр  $Q_{kn}$  задаёт нормировку ФПР, а  $P$  называется параметром наклона, он равен отношению  $Q(100)/Q(200)$  и определяет форму пространственного распределения.

Также стоит отметить, что возможен другой подход, основанный не на аналитической аппроксимации ФПР, а на прямом сравнении экспериментальных данных с ФПР, полученной из Монте-Карло симуляции ливня. Предполагается, что такой метод должен давать наибольшую точность, хотя и требовать больше вычислительных ресурсов. Вне зависимости от способа получения функции  $Q(x, y)$  и количества её варьируемых параметров, способ сравнения с экспериментальными данными остаётся тем же.

#### 4.4.1 Проекция полей зрения ФЭУ на плоскость ливня

В разделе 2.3.3 описан процесс получения «полей зрения» ФЭУ — распределений коэффициентов сбора  $f^{(i)}(x_{gnd}, y_{gnd})$  по отражающей поверхности под установкой. Однако функция  $Q(x_{shw}, y_{shw})$  задаётся в плоскости ливня, поэтому требуется спроецировать  $f^{(i)}$  на неё же.

Для этого учтём, что плоскость ливня задаётся нормалью  $(\theta_{shw}, \varphi_{shw})$  в системе земли и для определённости пересекает поверхность земли в начале координат. На плоскости ливня можно ввести систему координат с горизонтальной осью  $x_{shw}$ , направленной «слева-направо» с точки зрения движущегося ливня, и осью  $y_{shw}$ , лежащей в одной плоскости с вертикалью («снизу-вверх» с точки зрения ливня). Тогда для произвольной точки на

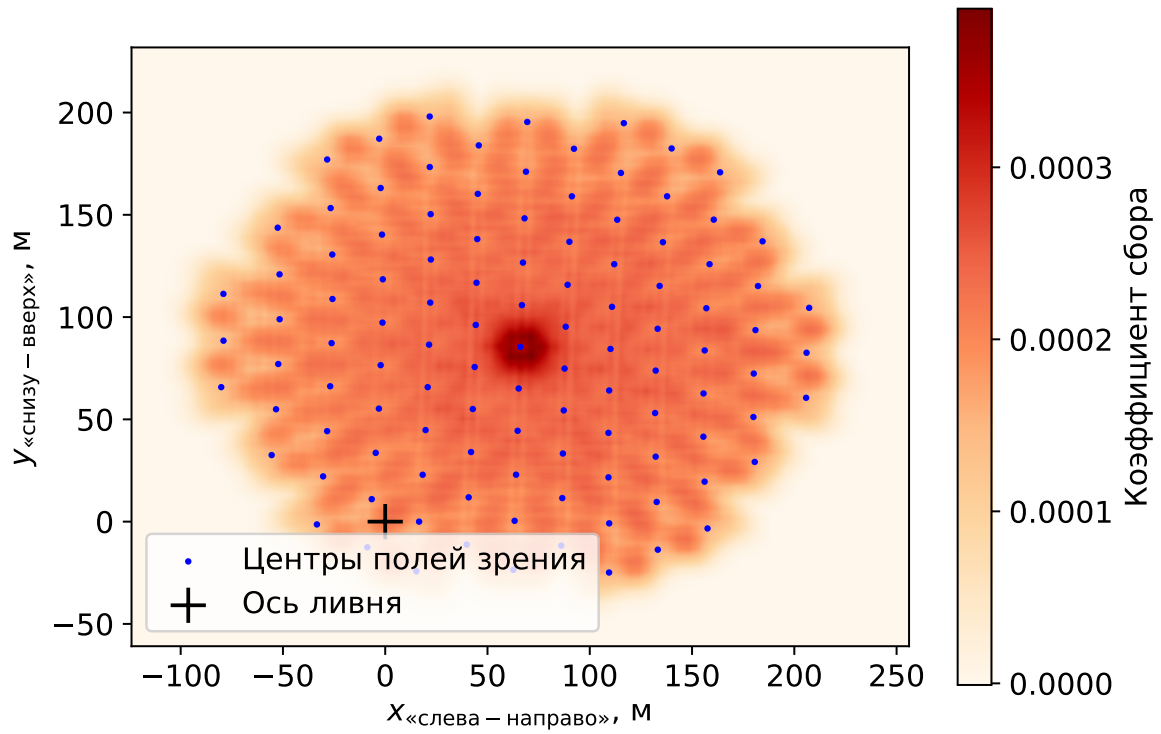


Рис. 4.4: Распределение чувствительности установки в плоскости фронта ливня для события % 10675.

поверхности земли, выраженной полярными координатами  $(r_{gnd}, \varphi_{gnd})$  из простых геометрических соображений найдём  $x_{shw} = -r_{gnd} \sin(\varphi_{shw} - \varphi_{gnd})$ ,  $y_{shw} = -r_{gnd} \cos(\varphi_{shw} - \varphi_{gnd}) \cos \theta_{shw}$ .

Таким образом спроецированные поля зрения дают суммарное распределение чувствительности установки  $f(x_{shw}, y_{shw})$  в плоскости фронта ливня. Пример такой проекции для ливня с зенитным углом падения  $\approx 30^\circ$  приведён на рис. 4.4. Заметим, что, так как функция  $f$  является безразмерным коэффициентом сбора, нет необходимости учитывать преобразование элемента площади при проекции.

#### 4.4.2 Преобразование фотонов черенковского света ШАЛ в эквивалентные фотоэлектроны

До сих пор мы, как указано в разделе 2.3.4.2, работали с количеством эквивалентных фотоэлектронов, рождённых сигналом ШАЛ на фотокатоде ФЭУ. Для построения ФПР черенковского излучения требуется описать, как происходит пересчёт одной величины в другую.

Заметим, что искомая величина плотности черенковского света измеряется на единицу энергии:  $Q(x, y)$  [фотоны  $\cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{эВ}^{-1}$ ] [42], так как в соответствии с формулой Франка-Тамма [43]  $dN_\gamma/dE \approx \text{Const}$  в видимой части спектра. Тогда зная квантовую эффективность ФЭУ  $\kappa(E)$ , а точнее её среднее значение  $\bar{\kappa}$  в диапазоне энергий  $[E_{min}, E_{min} + \Delta E]$ , можно перейти от  $Q$  к флюенсу эквивалентных фотоэлектронов  $n_{ph.el.}(x, y)$  [фотоэлектроны  $\cdot \text{м}^{-2}$ ]:

$$\Delta E \bar{\kappa} Q(x, y) = n_{ph.el.} \quad (4.5)$$

Кривые квантовой эффективности для двух видов ФЭУ приведены на рис. 4.5. Коэффициент  $\Delta E \bar{\kappa}$  составляет 0.34 эВ для Hamamatsu R3886 и 0.39 эВ для ФЭУ84-3.



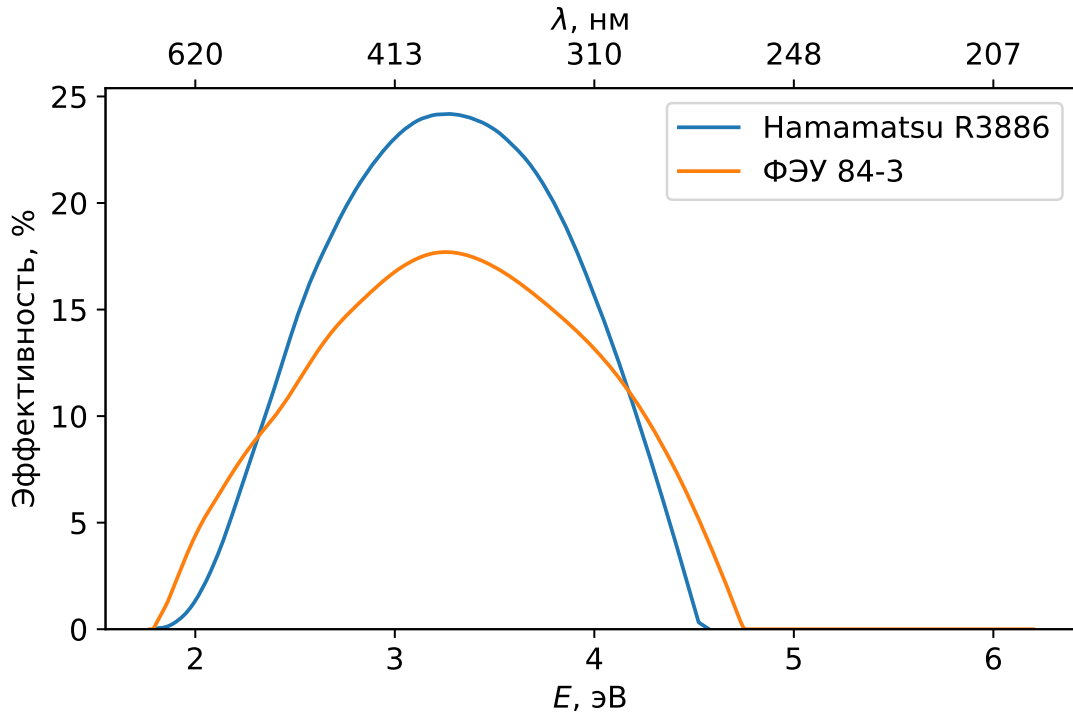


Рис. 4.5: Кривые квантовой эффективности для двух видов ФЭУ, использованных в эксперименте СФЕРА-2

#### 4.4.3 Неопределённость процесса сбора света с поверхности

Учтём, что до сих пор мы получали апостериорную оценку на число фотоэлектронов, выбитых с фотокатода ФЭУ под действием фотонов ШАЛ. В то же время из модели ливня, учитывая коэффициенты сбора света с поверхности снега, мы можем получить только математическое ожидание этой величины, но не её точное значение — процесс сбора света сам является стохастическим. Хорошим приближением для него является пуассоновское распределение. Иначе говоря, если среднее число фотонов, ожидаемое к  $i$ -том канале, равно  $\lambda^{(i)}$ , то реально зарегистрировано будет  $n^{(i)} \sim \text{Poisson}(\lambda^{(i)})$ . Таким образом нам необходимо, зная апостериорное (относительно процесса деконволюции, выделения пакета фотонов и т.д.) распределение  $n$ , нужно получить оценку  $\lambda$  (индекс канала  $i$  далее для краткости опущен).

Сначала рассмотрим случай, когда  $n$  известно точно. Тогда теорема Байеса сразу даёт апостериорное распределение  $\lambda$ :

$$P(\lambda|n) = P(n|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (4.6)$$

Иначе говоря, плотность апостериорного распределения непрерывной величины  $\lambda$  задаётся той же формулой, что и само распределение пуассона, но где  $\lambda$  является аргументом, а  $n$  — параметром.

Теперь перейдём к случаю, где  $n$  не известно точно, но имеет некоторое распределение. Учитывая, что  $n$  может принимать только целые значения, представим выборку из апостериорного распределения в виде таблицы частотности:  $\{n_i, p_i\}, i = 1, \dots, k$ , где  $p_i$  — вероятность, что  $n$  имеет значение  $n_i$ . Тогда ясно, что апостериорное распределение  $\lambda$  будет равно дискретной «свёртке» выражения (4.6) с распределением  $n$ :

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^k p_i \frac{e^{-\lambda} \lambda^{n_i}}{n_i!} \quad (4.7)$$

На практике оказывается, что такая свёртка уширяет апостериорное распределение  $n$  не более чем на 10 – 20%, сдвиг математического ожидания из-за асимметрии распределения Пуассона пренебрежимо мал (менее 1%).

#### 4.4.4 Аппроксимация ФПР

Пользуясь результатами предыдущих двух разделов, запишем окончательное выражение для ожидаемого среднего числа фотоэлектронов от света ШАЛ, зарегистрированных в  $i$ -том ФЭУ.

$$\int_{\infty} f^{(i)}(x, y); \Delta E \bar{\kappa} Q(x, y) dx dy = \lambda_n^{(i)} \quad (4.8)$$

Интегрирование можно провести численно по известным точкам распределения  $f^{(i)}(x, y)$  в плоскости ливня. Используя данные апостериорного распределения  $\lambda_n^{(i)}$ , можно найти среднее значение и стандартное отклонение этой величины для использования в аппроксимации.

Визуализировать такое фитирование в традиционных координатах  $R, Q(R)$  непросто, так как величина  $Q(R)$  сворачивается с двумерной функ-

цией распределения чувствительности для каждого ФЭУ. Приближённую качественную картину можно получить, если пренебречь протяжённостью полей зрения и считать, что они достаточно малы, чтобы можно было положить  $Q(x, y) = Const = Q(x_c, y_c)$ :  $\Delta E \bar{\kappa} Q(x_c, y_c) \int_{\infty} f^{(i)}(x, y) dx dy = \lambda_n^{(i)}$ . Это приближение позволяет приписать каждому измерительному каналу значение приближённое экспериментальное значение  $Q$ , которые можно затем нанести на график и визуально сравнить с теоретической кривой.

Такая визуализация приведена на рис. 4.6 и 4.7, однако следует подчеркнуть её неточность. В частности за счёт протяжённых полей зрения, эксперимент СФЕРА-2 чувствителен к черенковскому свету в приосевой области, поэтому точность и устойчивость фита заметно выше, чем может показаться по этим упрощённым графикам. Также точность повышается за счёт наложения полей зрения ФЭУ: в некоторых областях поверхности свет регистрируется сразу двумя или даже тремя ФЭУ, что эффективно уменьшает погрешности определения  $\lambda_n$  в них.

#### 4.4.5 Определение параметров ливня

Используя описанную процедуру фитирования для оценки оптимального значения и неопределённости каждого из параметров ФПР, можно, наконец, перейти к оценке параметров первичной частицы ливня. За рамками данной работы остаются вопросы связи энергии и массы первичной частицы, а также глубины максимума, с наблюдаемыми характеристиками ФПР. На этом этапе необходимо учитывать модельные неопределённости, то есть статистический характер зависимости параметров ФПР от исследуемых характеристик ливня.

В этом разделе ограничимся простым применением формулы для связи  $E_0$  и  $Q(R)$  [42]:

$$E [\text{ТэВ}] = 400 \cdot Q(175)^{0.95} \quad (4.9)$$

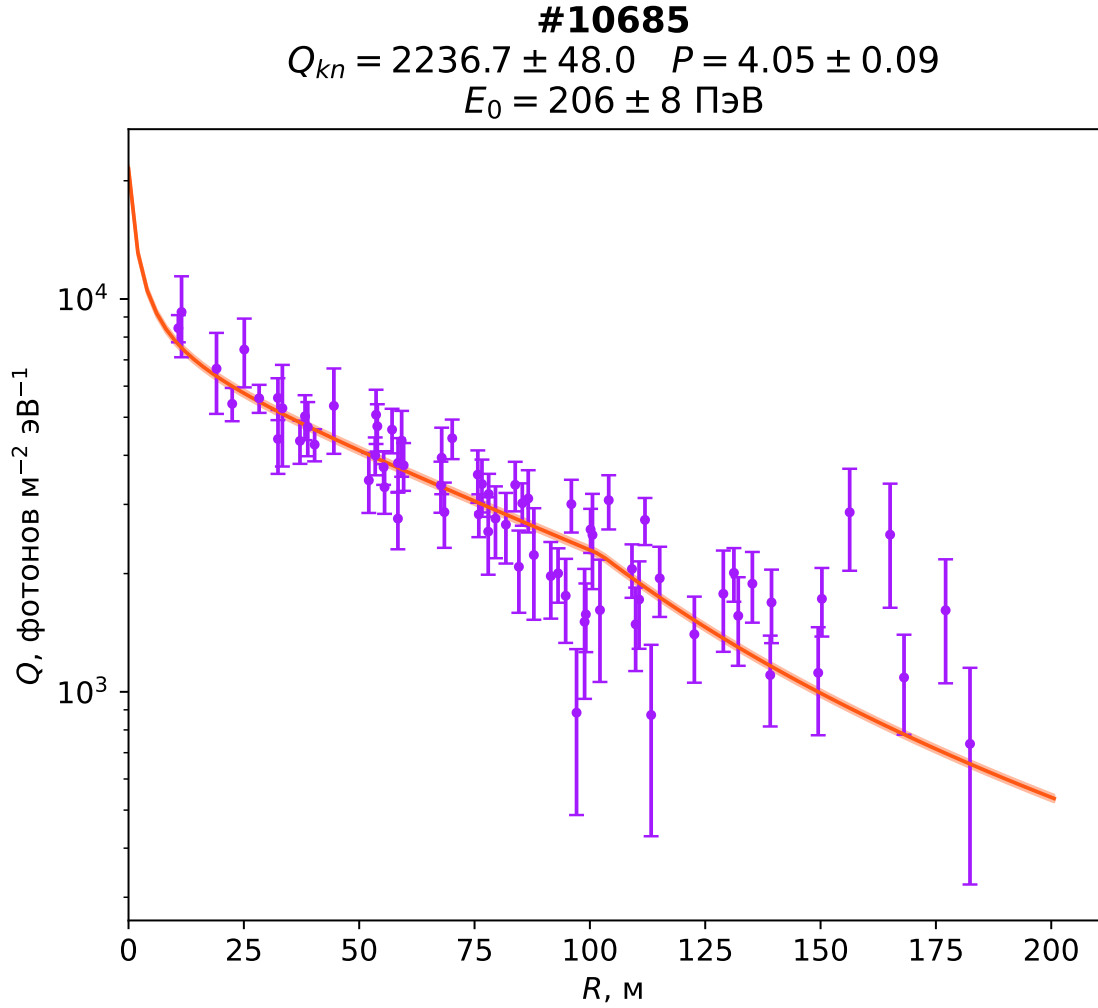


Рис. 4.6: Упрощённая визуализация фитирования ФПР по данным эксперимента СФЕРА-2 (см. текст). Погрешность определения нормировки  $Q_{kn}$  показана на графике коридором вокруг наиболее вероятной кривой. Инструментальная погрешность определения энергии вычислена по формуле (4.9) с учётом погрешностей  $Q_{kn}$  и  $P$ .

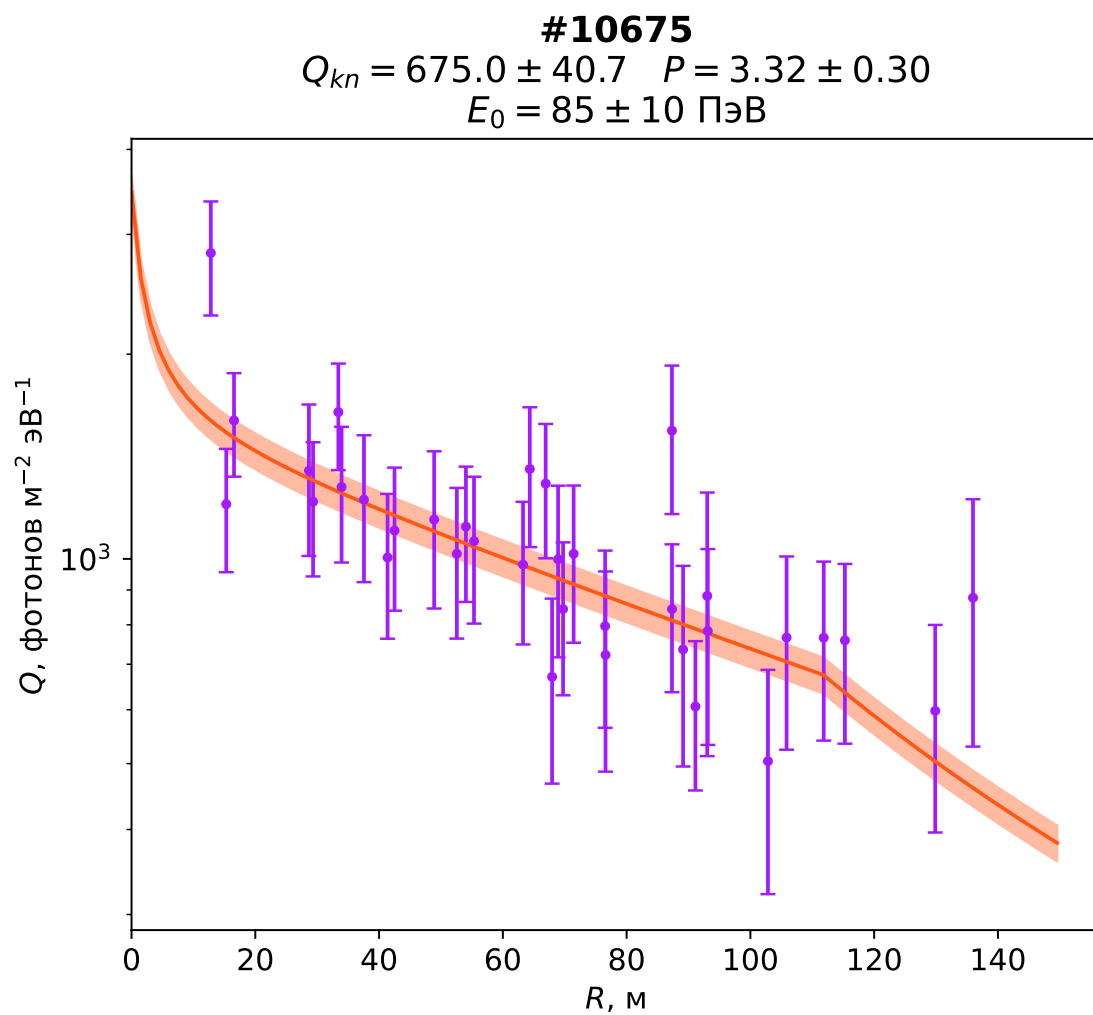


Рис. 4.7: То же самое, что рис. 4.6, для другого экспериментального события.

Чтобы определить неопределённость  $Q_{175}$ , и как следствие  $E$  с учётом оцененных неопределённостей параметров  $Q_{kn}$  и  $P$  сэмплируем каждый из них и вычислим среднее и стандартное отклонение по декартову произведению выборок (как видно из выражения (4.4), ФПР нетривиальным образом зависит от  $P$ ).

Полученные энергии с соответствующими погрешностями приведены на рис. 4.6 и 4.7 вместе с параметрами ФПР. Погрешность определяется для каждого события отдельно, но в общем по двум примерам с различными энергиями и положениями оси относительно детектора её можно оценить в 5 – 10%. Детальное исследование систематической инструментальной погрешности (в том числе её зависимость от энергии и положения ливня, высоты и ориентации установки) будет предметом дальнейших изысканий с использованием набранной статистики событий.

Также следует качественно сравнить полученные величины с модельными погрешностями, которые могут быть найдены, например, в работе [13, табл. 1]. Для ливней с энергией 1 – 10 ПэВ флуктуации  $Q(150)$ , например, оцениваются в 2 – 10%, уменьшаясь с энергией и массой первичной частицы. Для событий с энергиями  $\approx 80$  и  $\approx 206$  ПэВ эти модельные неопределённости будут ещё меньше — следовательно, особенно важным становится именно точное определение инструментальной погрешности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе развиваются методы обработки данных эксперимента СФЕРА-2, нацеленные на восстановление детальной структуры ШАЛ. Основное направление развития состоит в построении более глубокой и детальной модели детектора и оценки инструментальных неопределённостей, сопряжённых с процессом регистрации черенковского света ШАЛ. Предложен новый, более модульный по сравнению с предшествующими работами, принцип построения процедуры анализа, призванный обеспечить её большую прозрачность и дать инструменты для перекрёстной проверки всех промежуточных выводов.

Для достижения поставленных целей реализован оригинальный метод деконволюции на основе байесовской статистики и метода Монте-Карло с марковскими цепями, приведены обоснования его корректности и примеры применения. Байесовский формализм для описания восстановленных величин с помощью их апостериорных распределений оказался удобным и во всём последующем анализе, и его применение предлагается расширять.

Результаты разработанных алгоритмов деконволюции и выделения сигнала ШАЛ следует считать предварительными: ещё предстоит провести тщательную проверку, оптимизацию, детальное сравнение с результатами предыдущих методов. Алгоритмы оценки параметров ливня и первичной частицы, приведённые в работе, также являются предварительными и служат в большей степени для проверки концепции.

Однако уже эти новые результаты представляются качественно верными. В частности, оценка относительной инструментальной погрешности определения энергии первичной частицы ШАЛ в 5 – 10% согласуется с

ожидаемым значением, в частности, с систематическими погрешностями других экспериментов по регистрации ШАЛ. В то же время, так как это значение получается пособытийно, несколько примеров, приведённых в работе, несомненно, не могут дать полной картины.

В духе принципов открытой науки весь анализ проведён с помощью свободных программных инструментов с открытым исходным кодом: на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy, емсее. Все оригинальные коды, с помощью которых получены приведённые результаты, доступны в публичном git-репозитории<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>[github.com/nj-vs-vh/masters-thesis](https://github.com/nj-vs-vh/masters-thesis). 2021. URL: <https://github.com/nj-vs-vh/masters-thesis>.



# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] J. Abraham и др. «Measurement of the energy spectrum of cosmic rays above  $10^{18}$  eV using the Pierre Auger Observatory». в: Physics Letters B 685.4-5 (март 2010), с. 239—246. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.02.013.
- [2] Т. Abu-Zayyad и др. «THE COSMIC-RAY ENERGY SPECTRUM OBSERVED WITH THE SURFACE DETECTOR OF THE TELESCOPE ARRAY EXPERIMENT». в: The Astrophysical Journal 768.1 (апр. 2013), с. L1. DOI: 10.1088/2041-8205/768/1/11.
- [3] А. А. Иванов, С. Р. Кнуренко и И. Е. Слепцов. «Determining the primary cosmic ray energy from the total flux of Cherenkov light measured at the Yakutsk EAS array». в: Journal of Experimental and Theoretical Physics 104.6 (июнь 2007), с. 872—886. DOI: 10.1134/s1063776107060052.
- [4] Bruce R. Dawson и др. «The energy spectrum of cosmic rays at the highest energies». в: EPJ Web of Conferences 53 (2013). под ред. К.-Н. Kampert и др., с. 01005. DOI: 10.1051/epjconf/20135301005.
- [5] X. Bertou и др. «Calibration of the surface array of the Pierre Auger Observatory». в: Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment 568.2 (дек. 2006), с. 839—846. DOI: 10.1016/j.nima.2006.07.066.
- [6] The Pierre Auger Collaboration. «First Estimate of the Primary Cosmic Ray Energy Spectrum above 3 EeV from the Pierre Auger Observatory». в:

arXiv e-prints, astro-ph/0507150 (июль 2005), astro-ph/0507150. arXiv: astro-ph/0507150 [astro-ph].

- [7] Pierre Auger Collaboration. «Statistical and systematic uncertainties in the event reconstruction and S(1000) determination by the Pierre Auger surface detector». в: Proceedings of the 29th International Cosmic Ray Conference, Pune, India (2005) (июль 2005). arXiv: astro-ph/0507029 [astro-ph].
- [8] Markus Roth. «Measurement of the UHECR energy spectrum using data from the Surface Detector of the Pierre Auger Observatory». в: (июнь 2007). arXiv: 0706.2096 [astro-ph].
- [9] А Чудаков. «Возможный метод регистрации ШАЛ по черенковскому излучению, отраженному от снежной поверхности Земли». в: Экспериментальные методы исследования космических лучей сверхвысоких энергий. Материалы Всесоюзного симпозиума, Якутск (1972), с. 69.
- [10] C. Castagnoli, C. Morello и G. Navarra. «On the Observation of EAS Cerenkov Light Reflected from Mountain Snow». в: International Cosmic Ray Conference. т. 6. International Cosmic Ray Conference. янв. 1981, с. 103.
- [11] R.A. Antonov и др. «Primary cosmic ray spectrum measured using Cherenkov light reflected from the snow surface». в: Nuclear Physics B - Proceedings Supplements 52.3 (февр. 1997), с. 182—184. DOI: 10.1016/s0920-5632(96)00876-6.
- [12] R. A. Antonov и др. «Balloon-Borne measurements of the CR energy spectrum in the energy range  $10^{16}$ - $10^{17}$  EV». в: International Cosmic Ray Conference. т. 1. International Cosmic Ray Conference. янв. 2001, с. 59.
- [13] А. М. Anokhina и др. «Method for mass analysis of primary cosmic ray particles with the SPHERE-2 system». в: Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics 71.4 (апр. 2007), с. 506—509. DOI: 10.3103/s106287380704020x.

- [14] R A Antonov и др. «Results on the primary CR spectrum and composition reconstructed with the SPHERE-2 detector». в: Journal of Physics: Conference Series 409 (февр. 2013), с. 012088. DOI: 10.1088/1742-6596/409/1/012088.
- [15] Dmitry Chernov и др. «Cosmic ray study by means of reflected EAS Cherenkov light method with the SPHERE-2 detector». в: Proceedings of 35th International Cosmic Ray Conference — PoS(ICRC2017). Sissa Medialab, авг. 2017. DOI: 10.22323/1.301.0537.
- [16] D. V. Chernov и др. «Investigation of SPHERE-2 data sensitivity to chemical composition of primary cosmic rays». в: Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics 79.3 (март 2015), с. 359—361. DOI: 10.3103/s1062873815030144.
- [17] R. A. Antonov и др. «Detection of reflected Cherenkov light from extensive air showers in the SPHERE experiment as a method of studying superhigh energy cosmic rays». в: Physics of Particles and Nuclei 46.1 (янв. 2015), с. 60—93. DOI: 10.1134/s1063779615010025.
- [18] D. Heck и др. CORSIKA: a Monte Carlo code to simulate extensive air showers. 1998.
- [19] R.A. Antonov и др. «Spatial and temporal structure of EAS reflected Cherenkov light signal». в: Astroparticle Physics 108 (март 2019), с. 24—39. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2019.01.002.
- [20] Stephen G. Warren. «Optical properties of snow». в: Reviews of Geophysics 20.1 (1982), с. 67. DOI: 10.1029/rg020i001p00067.
- [21] R.A. Antonov и др. «The LED calibration system of the SPHERE-2 detector». в: Astroparticle Physics 77 (апр. 2016), с. 55—65. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2016.01.004.
- [22] R.A. Antonov и др. «The SPHERE-2 detector for observation of extensive air showers in 1 PeV – 1 EeV energy range». в: Astroparticle Physics 121 (сент. 2020), с. 102460. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2020.102460.

- [23] Cynthia Rhode и Scott Whittenburg. «Bayesian Deconvolution». в: Spectroscopy Letters 26.6 (июль 1993), с. 1085—1102. DOI: 10.1080/00387019308011596.
- [24] David Wipf и Haichao Zhang. «Revisiting Bayesian Blind Deconvolution». в: arXiv e-prints, arXiv:1305.2362 (май 2013), arXiv:1305.2362. arXiv:1305.2362 [cs.CV].
- [25] Andrew Gelman и др. Bayesian Data Analysis. Chapman и Hall/CRC, нояб. 2013. DOI: 10.1201/b16018.
- [26] R. Penrose. «On best approximate solutions of linear matrix equations». в: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 52.1 (январь 1956), с. 17—19. DOI: 10.1017/s0305004100030929.
- [27] Charles R. Harris и др. «Array programming with NumPy». в: Nature 585.7825 (сентябрь 2020), с. 357—362. DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2. URL: <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- [28] Daniel Foreman-Mackey. «corner.py: Scatterplot matrices in Python». в: The Journal of Open Source Software 1.2 (июнь 2016), с. 24. DOI: 10.21105/joss.00024.
- [29] Sanjib Sharma. «Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy». в: Annual Review of Astronomy and Astrophysics 55.1 (август 2017), с. 213—259. DOI: 10.1146/annurev-astro-082214-122339.
- [30] Jonathan Goodman и Jonathan Weare. «Ensemble samplers with affine invariance». в: Communications in Applied Mathematics and Computational Science 5.1 (январь 2010), с. 65—80. DOI: 10.2140/camcos.2010.5.65.
- [31] A. Sokal. «Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics: Foundations and New Algorithms». в: Functional Integration. Springer US, 1997, с. 131—192. DOI: 10.1007/978-1-4899-0319-8\_6.
- [32] Autocorrelation analysis & convergence. 2019. URL: <https://emcee.readthedocs.io/en/stable/tutorials/autocorr/>.

- [33] Alan Genz. «Numerical Computation of Multivariate Normal Probabilities». в: Journal of Computational and Graphical Statistics 1.2 (июнь 1992), с. 141—149. DOI: 10.2307/1390838.
- [34] Pauli Virtanen и др. «SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python». в: Nature Methods 17 (2020), с. 261—272. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- [35] Gideon Schwarz. «Estimating the Dimension of a Model». в: The Annals of Statistics 6.2 (март 1978). DOI: 10.1214/aos/1176344136.
- [36] H. Akaike. «A new look at the statistical model identification». в: IEEE Transactions on Automatic Control 19.6 (дек. 1974), с. 716—723. DOI: 10.1109/tac.1974.1100705.
- [37] Robert E. Kass и Adrian E. Raftery. «Bayes Factors». в: Journal of the American Statistical Association 90.430 (июнь 1995), с. 773—795. DOI: 10.1080/01621459.1995.10476572.
- [38] Вайман И.А. «Восстановление направления прихода первичной частицы ШАЛ по данным эксперимента СФЕРА-2». бакалаврская ВКР. Физический факультет МГУ, кафедра физики космоса, 2018.
- [39] J R Patterson и A M Hillas. «The relation of the lateral distribution of Cerenkov light from cosmic-ray showers to the distance of maximum development». в: Journal of Physics G: Nuclear Physics 9.11 (нояб. 1983), с. 1433—1452. DOI: 10.1088/0305-4616/9/11/015.
- [40] B R Dawson и др. «The lateral distribution of Cerenkov light from extensive air showers». в: Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 15.6 (июнь 1989), с. 893—908. DOI: 10.1088/0954-3899/15/6/017.
- [41] H TOKUNO и др. «The cosmic ray primary composition at the knee region from lateral distributions of atmospheric Cerenkov photons in extensive air showers». в: Astroparticle Physics 29.6 (июль 2008), с. 453—460. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2008.05.001.

- [42] N. M. Budnev и др. «Cosmic Ray Energy Spectrum and Mass Composition from 1015 to 1017 eV by Data of the Tunka EAS Cherenkov Array». в: 29th International Cosmic Ray Conference (ICRC29), Volume 6. т. 6. International Cosmic Ray Conference. янв. 2005, с. 257. arXiv: astro-ph/0511215 [astro-ph].
- [43] I. Tamm. «Radiation Emitted by Uniformly Moving Electrons». в: Journal of Physics, Academy of Sciences USSR 1 (1939), с. 439—454.
- [44] github.com/nj-vs-vh/masters-thesis. 2021. URL: <https://github.com/nj-vs-vh/masters-thesis>.