

Байесовская деконволюция для эксперимента СФЕРА-2

Игорь Вайман

12 апреля 2021 г.

1 Описание эксперимента СФЕРА-2

Эксперимент СФЕРА-2 основан на сборе и регистрации черенковского света ШАЛ, отражённого от «экрана» – ровной заснеженной поверхности льда озера Байкал. Установка представляет собой сферическое зеркало и мозаику ФЭУ, установленную вблизи фокальной поверхности. Черенковский свет ШАЛ, рассеиваясь на снегу, проходит через диафрагму установки, отражается от зеркала, и попадает на фотокатод. При попадании фотона с длиной волны в области чувствительности фотокатода с него выбиваются 1 – 10 (уточнить) вторичных электронов, которые проходят систему динодов с разностью потенциалов между каждой парой, создавая в результате избыточный на аноде. Этот заряд стекает с анода через цепь усиления, создавая в результате напряжение на входе АЦП. Это напряжение считывается электроникой, в результате и составляя (вместе с некоторой телеметрией) экспериментальные данные.

Этот набор физических процессов мы описываем в следующих предположениях:

1. В системе нет электронных шумов – единственным источником шума являются фоновые фотоны (от звёздного и зодиакального света, так как эксперимент проводится в ясные безлунные ночи). Фотоны шума попадают в установку аналогично «сигнальным» фотонам – после рассеяния на поверхности. Их поток можно приблизительно оценить по каталогам светимости звёзд и из моделей зодиакального света. (Ссылка на работу Энтиной)

2. Работу ФЭУ можно эффективно описать одной «рандомизированной» импульсной характеристикой (РИХ). Понятие и применение РИХ будет раскрыто далее, в общем виде это случайная функция времени, описывающая отклик системы на один фотон, падающий на фотокатод. Главный источник случайности в установке СФЕРА-2 – неопределённость числа вторичных фотонов, вылетевших с фотокатода, приводящая к неопределённости амплитуды импульса тока. Стоит отметить, что случайный характер ИХ проявляется именно на границе между режимом счёта фотонов и режимом измерения потока, поскольку поток фотонов уже слишком велик, чтобы разрешать отдельные импульсы, но недостаточно – чтобы случайные характеристики эффективно усреднялись. Мы также предполагаем, что случайность импульсной характеристики проявлялась независимо между отдельными фотонами и между разными ФЭУ.
3. Используя экспериментальные данные (данные, записанные АЦП, постоянную компоненту анодного тока и абсолютную калибровку ФЭУ) мы можем восстановить показания анодного тока (ссылка на работу по электронике). Неопределённость, вносимая анодной цепью, усилителем и (главным образом) дискретизацией сигнала на входе АЦП, хорошо известна и учитывается во вторую очередь.

2 Постановка задачи

2.1 Общие допущения

Рассмотрим N последовательных равновеликих временных бинов. Для простоты будем считать единицей времени длительность одного бина. Тогда мы можем задать временные бины интервалами $[i-1, i]$, $i = 1 \dots N$. Обратим внимание, что при такой нумерации бинов эффект от фотонов, попавших в i -тый временной бин проявляется впервые в момент времени i . Обозначим число фотонов в каждом бине как n_i , $i = 1, \dots, N$.

Время прихода отдельного фотона относительно начала бина $t_{inbin} = \{t\}$ будем описывать случайной величиной, подразумевая, что мы не интересуемся такими детальными характеристиками сигнала. Эта величина может быть, вообще говоря, распределена произвольным образом в интервале $[0, 1)$, однако мы в простейшем случае будем считать $t_{inbin} \sim U(0, 1)$. Это оправдано для независимых друг от друга фоновых

фотонов, и может служить приближением для фотонов ШАЛ в случае, если дисперсия времён прихода фотонов внутри «пакета» сильно превышает длительность временного бина. По данным модельных ливней это не всегда так, поэтому влияние неравномерности распределения времён прихода фотонов будет исследовано отдельно.

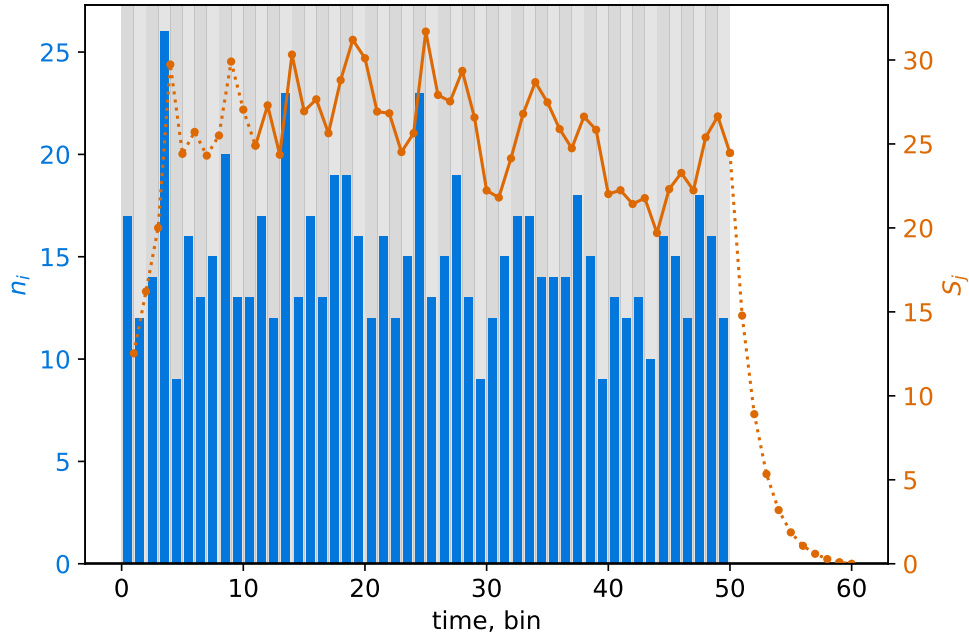


Рис. 1: Пример данных для задачи байесовской деконволюции. Здесь $N = 50$, количество фотонов в каждом бине выбрано из пуассоновского распределения с $\lambda = \mathbb{E}(n_i) = 15$, они показаны синими столбцами; РИХ – $A \exp(-t/2)$, обрезанная на $L = 10$, где случайный множитель $A \sim U(0.75, 1)$; оранжевые точки – выходной сигнал; пунктиром показаны участки, исключаемые из рассмотрения из-за краевых эффектов.

Предположим, что импульсная характеристика системы – случайная функция $\tilde{h}(t)$ в том смысле, что для входного сигнала, состоящего из конечного числа дельта-функций на единицу времени, каждая из этих дельта функций сворачивается с отдельной независимой реализацией $h(t) \sim \tilde{h}(t)$. Будем также считать, что любая реализация удовлетворяет

условию каузальности, то есть $\forall t < 0 \quad \forall h \sim \tilde{h} \quad h(t) = 0$, и конечности во времени, то есть $\exists \tilde{L}$ такое, что $\forall t > \tilde{L} \quad \tilde{h}(t) = 0$.

Заметим, что эффект от фотонов в i -том бине проявляется в отсчётах с i по $i + \lfloor \tilde{L} \rfloor$, где $\lfloor \tilde{L} \rfloor$ – наибольшее целое число, не превышающее \tilde{L} (округление вниз). Обозначим $L \equiv \lfloor \tilde{L} \rfloor$. Тогда полный сигнал от фотонов гарантированно содержится в отсчётах с 1 по $N + L$.

Таким образом, сигнал от изолированных N бинов будет целиком описываться отсчётами S_j в моменты времени $j = 1, \dots, N + L$. Иллюстрация постановки задачи приведена на рис. 1.

2.2 Краевые эффекты

В реальном эксперименте входные фотоны не ограничены интервалом $[0; N]$, но приходят постоянно. Модифицируем постановку задачи так, чтобы устранить краевые эффекты – плавный рост сигнала в начале и затухание в конце.

Для этого достаточно исключить из всего дальнейшего рассмотрения эти участки сигнала. Так, в реальной ситуации фотоны продолжают приходить после $t = N$, и вносят соответствующий вклад в отсчёты начиная с $N - 1$. Фотоны, приходившие до $t = 0$, вносят вклад в отсчёты до L .

Поэтому для восстановления значений n_i , $i = 1, \dots, N$ мы будем использовать только отсчёты S_j при $j = L + 1, \dots, N$. Этот участок изображён на рис. 1 сплошной линией, участки по краям, исключаемые из рассмотрения – пунктиром.

2.3 Байесовская деконволюция

Поставим задачу статистической деконволюции следующим образом, используя байесовскую терминологию (поэтому будем также называть эту процедуру байесовской деконволюцией):

Пусть дана рандомизированная импульсная характеристика системы $\tilde{h}(t)$ и значения S_j , $j = 1, \dots, N + L$. Найти апостериорные функции плотности вероятности для значений n_i , $i = 1, \dots, N$. В качестве априорного распределения n_i используем наивное неограниченное однородное распределение ($p_{n_i}(x) = \text{Const} \quad \forall x \in [0, \infty)$).

Заметим, что, в отличие от обычной деконволюции, мы не ставим задачу оценить исходный сигнал сам по себе, представляющий собой сумму δ -функций, но только его несколько обобщённую характеристику.

3 Решение

3.1 Выходной сигнал как реализация случайного процесса

Дадим также несколько определений для промежуточных величин, описывающих $\{S_j\}$ как реализацию случайного процесса.

Очевидно, что $\{S_j\}$ – случайные величины, как в силу того, что РИХ в общем случае представляет собой случайную функцию, так и в силу принципиально случайного распределения фотонов внутри временного бина.

Запишем S_j как сумму вкладов от фотонов разных бинов

$$S_j = \sum_{l=0}^L C(n_{j-l}, l) \quad (1)$$

Здесь $C(n, l)$ – случайная величина, описывающая вклад в сигнал на j -том временном отсчёте от n фотонов в бине $j - l$, иначе говоря, вклад с *задержкой* l бинов. Из выбранной схемы индексации бинов и условий каузальности и ограниченности во времени РИХ легко видеть, что $l \in [0, L]$.

Получим распределение $C(n, l)$. Проще всего сделать это через Монте-Карло-сэмплирование её

распределения. Получим сначала с произвольной точностью эмпирическую функцию плотности распределения для $C(1, l)$. Для этого сгенерируем значения $t_k \sim t_{inbin}$; и функции $h_k(t) \sim \tilde{h}(t)$ для $k = 1 \dots N_{sample}$. Выборка для $C(1, l)$ тогда будет состоять из значений $h_k(l + 1 - t_k)$. Выборка для $C(n, l)$ легко получить, проделав описанную процедуру n раз и сложив все n реализаций N_{sample} -мерных векторов выборок.

3.2 Грубая оценка методом наименьших квадратов

Перед тем, как полностью решать саму задачу байесовской деконволюции, сделаем грубую оценку \vec{n} , зная выходной сигнал и РИХ. Для запи-

шем систему уравнений для математических ожиданий случайных величин S_j .

Для этого используем независимость фотонов в пределах одного бина, из чего следует $\mathbb{E} C(n, l) = n \mathbb{E} C(1, l)$. Нетрудно заранее вычислить для данной РИХ выборки значений $C(1, l)$ для $l = 0 \dots L$. Тогда получим, обозначая $c_l \equiv \mathbb{E} C(1, l)$,

$$\hat{S}_j = \mathbb{E} S_j = \sum_{l=0}^L \mathbb{E} C(n_{j-l}, l) = \sum_{l=0}^L n_{j-l} \mathbb{E} C(1, l) = \sum_{l=0}^L n_{j-l} c_l \quad (2)$$

Суммирование можно записать в матричном виде для $j = 1, \dots, N + L$:

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & & \vdots \\ c_3 & c_2 & c_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & c_3 & c_2 & \ddots & c_0 \\ c_L & \vdots & c_3 & \ddots & c_1 \\ 0 & c_L & \vdots & \ddots & c_2 \\ \vdots & & c_L & & c_3 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \hat{S}_2 \\ \vdots \\ \hat{S}_N \\ \hat{S}_{N+1} \\ \vdots \\ \hat{S}_{N+L} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Для перехода к случаю непрерывного потока фотонов достаточно, как указано в разделе 2.2, ограничиться рассмотрением строк $j = L+1, \dots, N$, то есть убрать первые и последние L уравнений системы.

Это переопределённая система линейных уравнений, для которой можно найти решение в смысле наименьших квадратов с помощью псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза (ссылка). Псевдообратная матрица C^+ для C определяется следующими условиями: (1) $CC^+C = C$, (2) $C^+CC^+ = C^+$, (3) CC^+ и C^+C – эрмитовы матрицы. Псевдообратная матрица всегда существует, и для системы $C\vec{n} = \vec{S}$ вектор $C^+\vec{S}$ даёт искомое МНК-решение системы. Приближённый численный расчёт такой матрицы можно проводить, например, с помощью функции `pinv` модуля `numpy.linalg` в Python (ссылка).

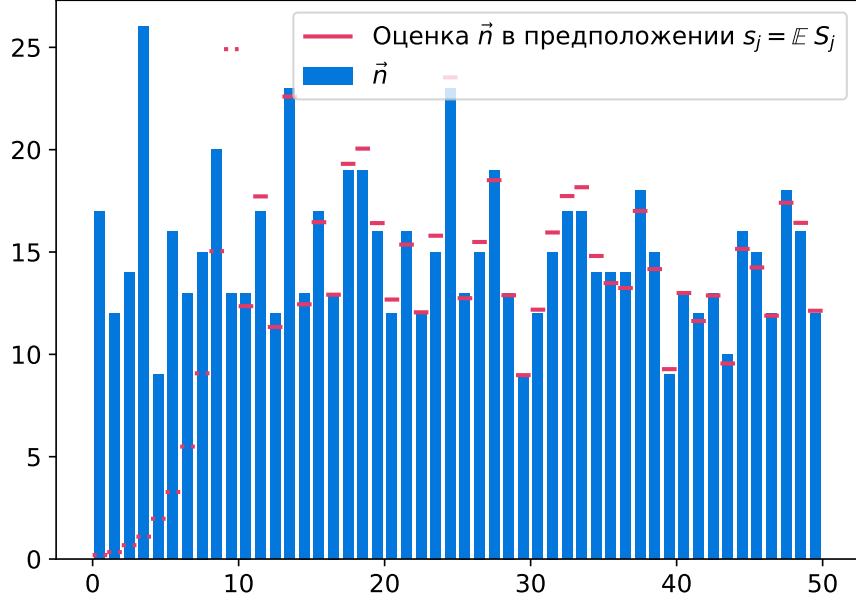


Рис. 2: Оценка \vec{n} в предположении, что выходной сигнал \vec{S} равен своему математическому ожиданию. Пунктиром показана область, где оценка оказывается искажена эффектом ограниченности выборки во времени.

Решение системы предполагает, что нам известны $\mathbb{E} S_j$, в то время как в эксперименте мы имеем единственную реализацию этой случайной величины s_j , и принципиально не можем пропустить одни и те же фотоны через установку несколько раз. Для грубой оценки остаётся положить $\mathbb{E} S_j \approx s_j$. Результат этой процедуры приведён на рис. 2 фиолетовым, пунктиром отмечена область, в которой оценка искажена краевым эффектом, её необходимо отбросить.

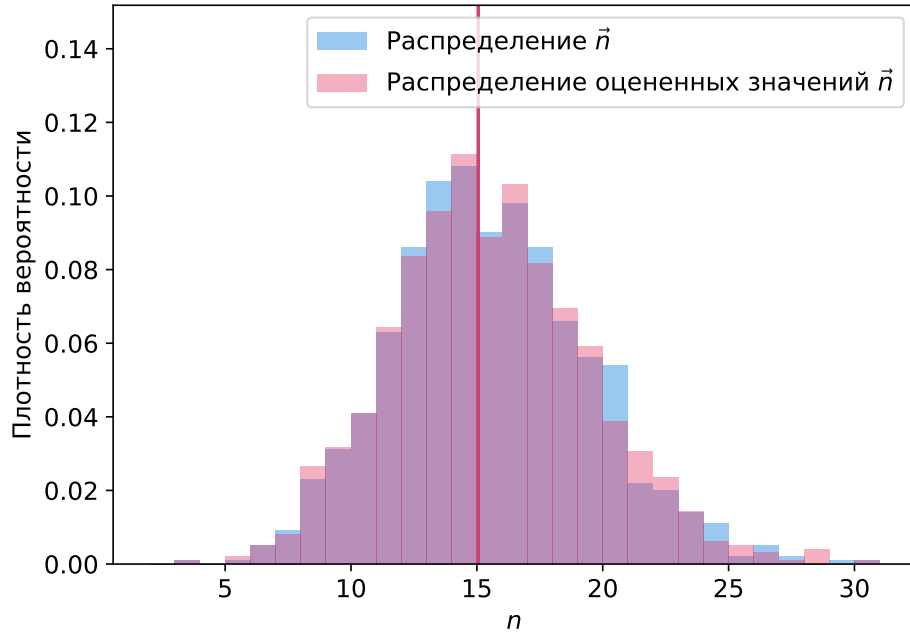


Рис. 3: Распределения истинных и восстановленных значений \vec{n} для 1000 значений. Истинные значения выбраны из пуассоновского распределения с $\lambda = 15$, как и на рис. 1 и 2.

Строгое исследование корректности и свойств такой оценки \vec{n} находится за рамками данной работы. Однако для простой численной проверки можно вычислить такую оценку для большего числа бинов и сравнить распределения истинных и оцененных значений \vec{n} . На рис. (!) приведено такое распределение для 1000 бинов. Видно, что распределения практически совпадают, систематический сдвиг отсутствует, а значит, метод подходит в качестве первого приближения.

3.3 Метод Монте-Карло с марковскими цепями (Markov Chain Monte Carlo)

Для решения задачи байесовской деконволюции необходимо найти апостериорное распределение вектора \vec{n} :