

引用格式: 周益清, 骆文于, 吴双林. 双层介质声传播问题的标准解及有限元解[J]. 声学技术, 2022, 41(2): 214-219. [ZHOU Yiqing, LUO Wenyu, WU Shuanglin. Benchmark solution and finite element solution of sound propagation in a two-layer medium[J]. Technical Acoustics, 2022, 41(2): 100-105.]
DOI: 10.16300/j.cnki.1000-3630.2022.02.015

双层介质声传播问题的标准解及有限元解

周益清^{1,2}, 骆文于^{1,2}, 吴双林^{1,2}

(1. 中国科学院声学研究所声场声信息国家重点实验室, 北京 100190; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 文章通过双层介质中的声传播问题, 研究了有限元方法在水下声场计算中的应用。基于传统的 Galerkin 方法推导出水下声场的有限元方程, 采用四节点四边形单元离散求解物理域, 可选择辐射边界条件、(Dirichlet to Neumann, DtN)非局部算子、完美匹配层来处理出射声场, 得到有限元解。为了验证该有限元模型, 需要高精度的参考解。水平不变均匀介质中的声传播问题存在解析解, 但双层介质问题不存在解析解。因此, 对于双层介质声传播问题, 使用波数积分法推导出标准解。分别考虑了有限深度和无限深度双层介质两种情况, 并进行了数值模拟。数值结果表明, 文章所提的有限元模型与参考解非常吻合。此外, 还发现当某号简正波的本征值非常接近割线时, 简正波模型 KRAKEN 难以准确计算该号简正波的本征值, 从而声场计算结果存在明显误差; 但是有限元方法不需要计算本征值, 所以当 KRAKEN 模型出现此类问题时, 有限元方法仍能给出准确的声场计算结果, 表明有限元方法在普适性方面优于简正波方法。

关键词: 波数积分方法; 有限元方法; 水下声传播; 简正波方法

中图分类号: P733.21

文献标志码: A

文章编号: 1000-3630(2022)-02-0001-05

Benchmark solution and finite element solution of sound propagation in a two-layer medium

ZHOU Yiqing^{1,2}, LUO Wenyu^{1,2}, WU Shuanglin^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In this paper, the sound propagation problem in a two-layer medium is studied and a finite element model for underwater sound field calculation is proposed. The finite element equation is derived by the traditional Galerkin method and four-node quadrilateral elements are used to discretize the physical domain. Then the traditional radiation boundary condition, the DtN (Dirichlet to Neumann) non-local operator and perfectly matched layer are adopted to process the outgoing sound field for obtaining the finite element solution and the differences between them are compared. In order to verify the finite element model, a benchmark solution is needed. Analytical solutions of sound propagation exist in a homogeneous medium. However, in a two-layer medium, there is no analytical solution. Therefore, for the sound field calculation in a two-layer medium of finite depth, the wavenumber integration method is used to provide benchmark solutions. The numerical simulations of sound field in a two-layer medium with a limited and an unlimited depth are conducted respectively. The results show that the finite element model is in good agreement with benchmark solutions. In addition, it is found that the normal mode model KRAKEN may be difficult to calculate the eigenvalue of the normal mode accurately when the eigenvalue of a normal mode is very close to the secant, so the error of sound field calculation result is significant; but the finite element method does not need to calculate the eigenvalues. Thus, the finite element model proposed in this paper can solve the sound field calculation problem that is hard for KRAKEN model to solve accurately, which means that the practicability of finite element method is better than that of the normal mode method.

Key words: wavenumber integration method; finite element method; underwater sound propagation; normal mode method

收稿日期: 2020-12-17; 修回日期: 2021-01-25

基金项目: 国家重点研发计划项目资助(2018YFC0308600), 国家自然科学基金(11774374)资助项目。

作者简介: 周益清(1996—), 女, 宁夏银川人, 博士研究生, 研究方向为水声物理。

通信作者: 周益清, E-mail: zhouyiqing18@mails.ucas.ac.cn

0 引言

自 20 世纪 60 年代以来, 国内外学者对声场计算方法进行了大量的研究, 先后出现了许多种针对

水下声传播的计算模型。目前比较流行的几种声场计算方法有：射线法^[1-2]、简正波法^[3-4]、抛物方程法^[5-6]、波数积分法^[7-8]，研究人员使用这些方法建立了许多声场计算模型，但是目前还没有非常流行的有限元算法模型。可见，关于有限元方法在水下声场计算中的研究还不是非常充分。

有限元方法是求解偏微分方程复杂边值问题的一种通用数值解法。它首先将物理域离散成有限数量的单元，各单元以节点相连，然后利用各单元间的关联性形成一系列的有限元方程组，求得单元内的精确解或近似解，从而把复杂的偏微分方程边值问题转化为大型方程组的求解问题^[9]。在水声学中，目前有限元方法主要被用来分析换能器的结构振动、解决声散射问题^[10]，而关于声传播的研究^[11-12]相对较少。

由于过去的计算机性能较现在落后很多，且我们常关心的大尺度的声传播问题对计算机的计算速度和内存的要求都很高，所以过去的水下声传播方向的学者对有限元方法的研究较少。但是，近些年，随着计算机软硬件的快速发展，已经有充分的条件使用有限元方法进行水下声传播的研究。因此，希望开发一个基于有限元方法的声场计算模型，以处理复杂边界下的实际水下声传播问题。

本文主要研究双层介质中的声传播问题。首先，讨论有限深度的双层介质中的声场计算，使用波数积分方法计算出标准解后，再使用有限元方法计算相同问题的声场，对于出射边界，我们分别选择传统辐射条件、DtN (Dirichlet to Neumann) 非局部算子和完美匹配层来处理，经过对比，发现使用完美匹配层方法处理出射边界精度更高。然后，讨论无限深度的双层介质，即 Pekeris 波导中的声场计算，这里同样使用波数积分方法计算标准解，再与结合了完美匹配层技术的有限元方法以及常用的简正波模型 KRAKEN 进行对比。我们发现，当某号简正波的本征值非常接近割线时，KRAKEN 可能无法对该本征值进行准确求解，从而导致较大的计算误差。但是有限元方法则不受此类限制，所以相比 KRAKEN 而言，有限元方法的普适性更优。

1 问题描述

1.1 有限深度的双层介质问题

如图 1 所示为有限深度的双层介质，上层介质的下边界深度为 D_1 ，声速和密度分别为 c_1 ， ρ_1 ，下层介质的下边界深度为 D_2 ，声速和密度分别为 c_2 ，

ρ_2 。在 $z=0$ 处为绝对软的上边界，声压为 0；在 $z=D_2$ 处为绝对硬的下边界，质点法向振速为 0。对于无限大三维介质中的无限长线声源，可以将它简化为图 1 所示的二维问题，假设声源位于第一层介质中，深度为 z_s 。

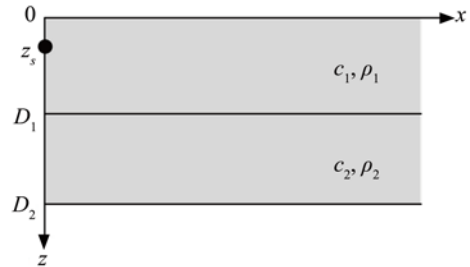


图 1 有限深度的双层介质环境示意图
Fig.1 Schematic diagram of a two-layer medium with limited depth

1.2 无限深度的双层介质问题

如图 2 所示为无限深度的分层介质，即 Pekeris 波导。上层介质的下边界深度为 D_1 ，声速和密度分别为 c_1 ， ρ_1 ，下层介质厚度无限大，声速和密度分别为 c_2 ， ρ_2 。在 $z=0$ 处为绝对软的上边界，声压为 0。对于无限大三维介质中的无限长线声源，同样可以将它简化为图 2 所示的二维问题，声源深度为 z_s ，假设位于第一层介质中。

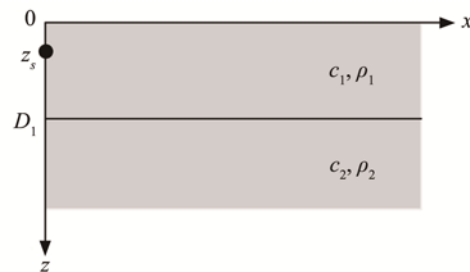


图 2 无限深度的双层介质环境示意图
Fig.2 Schematic diagram of a two-layer medium with unlimited depth

由于这两个问题都不存在解析解，所以我们使用波数积分方法推导出标准解，用于与其他方法进行比对。

2 使用波数积分法计算标准解

2.1 有限深度的双层介质的标准解

对于图 1 所示的无限长线源问题，选用直角坐标系 (x, z) ，让 z 轴通过声源且垂直向下， x 轴平行于海面，此时线源的 Helmholtz 方程表示为^[9]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(z) \right] \psi(x, z) = S_0 \delta(x) \delta(z - z_s) \quad (1)$$

其中, $\psi(x, z)$ 表示位移势。对于线源问题, 利用傅里叶变换对:

$$\psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k_x, z) e^{ik_x x} dk_x \quad (2)$$

$$\Psi(k_x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, z) e^{-ik_x x} dx \quad (3)$$

得到如下形式的深度分离波动方程:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + (k^2 - k_x^2) \right] \Psi(k_x, z) = S_\omega \frac{\delta(z - z_s)}{2\pi} \quad (4)$$

带入边界条件, 求解该方程, 得到深度格林函数 $\Psi(k_x, z)$, 利用逆傅里叶变换求得位移势 $\psi(x, z)$, 进而求得总声场。

对于深度分离的波动方程, 我们只需要考虑介质中的上行波及下行波。图3为双层介质中的上行波与下行波示意图, 在每层介质中, 都分别包含上行波与下行波。其中, 上层介质中的下行波幅值记为 A_1^+ , 上行波幅值记为 A_1^- ; 下层介质中的下行波幅值记为 A_2^+ , 上行波幅值记为 A_2^- 。

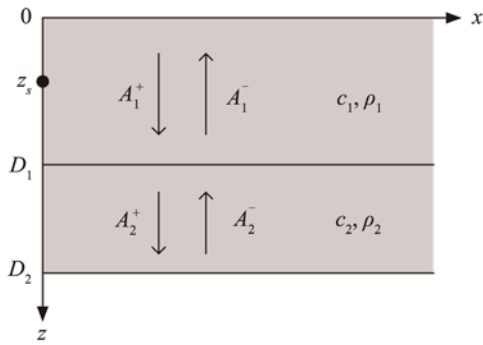


图3 有限深度双层介质中上行波与下行波示意图

Fig.3 Schematic diagram of up-going and down-going waves in the two-layer medium with limited depth

将上层介质中的深度格林函数表示为

$$\Psi_1(k_x, z) = S_\omega \frac{e^{ik_{z1}|z-z_s|}}{4\pi i k_{z1}} + A_1^+ e^{ik_{z1}z} + A_1^- e^{-ik_{z1}(z-D_1)} \quad (5)$$

下层介质中的格林函数表示为

$$\Psi_2(k_x, z) = A_2^+ e^{ik_{z2}(z-D_1)} + A_2^- e^{-ik_{z2}(z-D_2)} \quad (6)$$

其中: k_1, k_2 分别为第一层和第二层介质中的波数, $k_{z1} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2}$ 为第一层介质的垂直波数, $k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2}$ 为第二层介质的垂直波数, k_x 为水平波数。根据边界和连续性条件, 写出两层介质的深度格林函数满足的条件, 然后求解 A_1^+ 、 A_1^- 、 A_2^+ 和 A_2^- 。

当海面处声压为0时:

$$\Psi_1(k_x, 0) = 0 \quad (7)$$

当海底处质点法向振速为0时:

$$\left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} (k_x, z) \right|_{z=D_2} = 0 \quad (8)$$

两层不同介质连接处声压和质点法向振速连续:

$$\rho_1 \omega^2 \Psi_1(k_x, z) \Big|_{z=D_1} = \rho_2 \omega^2 \Psi_2(k_x, z) \Big|_{z=D_1} \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} (k_x, z) \right|_{z=D_1} = \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} (k_x, z) \right|_{z=D_1} \quad (10)$$

联立式(5)~(10)可以得到求解待定系数的系统矩阵方程:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (11)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & e^{ik_{z1}D_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_{z2}(D_2-D_1)} & -1 \\ k_{z1}e^{ik_{z1}D_1} & -k_{z1} & -k_{z2} & k_{z2}e^{ik_{z2}(D_2-D_1)} \\ \rho_1 e^{ik_{z1}D_1} & \rho_1 & -\rho_2 & -\rho_2 e^{ik_{z2}(D_2-D_1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{x} = [A_1^+ \quad A_1^- \quad A_2^+ \quad A_2^-]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{b} = \frac{iS_\omega}{4\pi k_{z1}} \begin{bmatrix} e^{ik_{z1}z_s} \\ 0 \\ k_{z1}e^{ik_{z1}(D_1-z_s)} \\ \rho_1 e^{ik_{z1}(D_1-z_s)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

通过求解此矩阵方程组, 可以得到深度格林函数的系数。然后对深度格林函数做逆傅里叶变换, 求得相应的线源声场的位移势, 但是由于格林函数在实轴附近可能存在奇点, 直接进行积分变换可能会引入较大误差。所以我们将积分围线转移到复平面, 引入围线偏移量 ε , 选取复围线^[9]:

$$k_x(s) = s - i\varepsilon \tanh(\delta s), \quad -\infty < s < \infty \quad (15)$$

其中:

$$\varepsilon = \frac{3\Delta s}{2\pi l g e} \quad (16)$$

$$\Delta s = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{N-1} \quad (17)$$

$$\delta = \frac{1}{6\Delta s} \quad (18)$$

因此, 式(2)中的积分变换被转换为

$$\psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi[k_x(s), z] e^{ik_x(s)x} ds \quad (19)$$

$$[1 - i\varepsilon \delta \operatorname{sech}^2(\delta s)] ds$$

利用式(19)求得位移势后, 可以将声压表示为

$$p(x, z) = \begin{cases} \rho_1 \omega^2 \psi_1(x, z), & 0 \leq z \leq D_1 \\ \rho_2 \omega^2 \psi_2(x, z), & D_1 < z \leq D_2 \end{cases} \quad (20)$$

定义传播损失为

$$L_1(x, z) = -20 \log_{10} \left| \frac{p(x, z)}{p_0|_{x=1}} \right| \quad (21)$$

其中, 为了与后期的简正波模型比对, 选择与 KRAKEN 模型相同的参考声压:

$$p_0(r) = 2\sqrt{2\pi} \quad (22)$$

2.2 无限深度的双层介质的标准解

对于无限深度的双层介质, 即 Pekeris 波导中的声场, 同样首先求解式(4)中的深度分离的波动方

程。

对于深度分离的波动方程，只需要考虑上行波及下行波。图 4 表示双层介质中的上行波与下行波示意图，在上层介质中，既包含上行波，又包含下行波；而在下层介质中，只存在下行波。其中，上层介质中的下行波幅值记为 A_1^+ ，上行波幅值记为 A_1^- ；下层介质中下行波幅值记为 A_2^+ 。

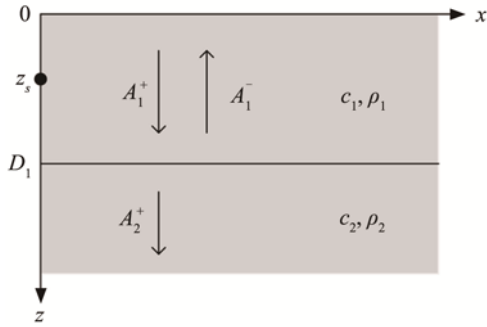


图 4 无限深度双层介质中上行波与下行波模拟示意图

Fig.4 Schematic diagram of up-going and down-going waves in the two-layer medium with an unlimited depth

上层介质中的深度格林函数表达式不变，仍然为式(5)，而下层介质中的格林函数表达式变为

$$\Psi_2(k_x, z) = A_2^+ e^{ik_{z2}(z-D_1)} \quad (23)$$

其中，波数、垂直波数与水平波数的计算方法与之前相同。根据边界和连续性条件，可以写出无限深度的双层介质的深度格林函数满足的边界条件，然后求解 A_1^+ 、 A_1^- 、 A_2^+ 。无限深度的双层介质满足的边界条件与式(7)、(9)和式(10)相同。

将式(5)和式(23)代入式(7)、(9)和式(10)，就可以得到求解待定系数的系统矩阵方程：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (24)$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & e^{ik_{z1}D_1} & 0 \\ k_{z1}e^{ik_{z1}D_1} & -k_{z1} & -k_{z2} \\ \rho_1 e^{ik_{z1}D_1} & \rho_1 & -\rho_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{x} = [A_1^+ \quad A_1^- \quad A_2^+]^T \quad (26)$$

$$\mathbf{b} = \frac{iS_\omega}{4\pi k_{z1}} \begin{bmatrix} e^{ik_{z1}z_s} \\ k_{z1}e^{ik_{z1}(D_1-z_s)} \\ \rho_1 e^{ik_{z1}(D_1-z_s)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

通过求解此矩阵方程组，可以得到深度格林函数的系数。对深度格林函数同样按照式(15)~(19)取围线做逆傅里叶积分变换，就可以得到无限深度的双层介质中的声场。

3 使用有限元方法计算声场

使用有限元方法计算声场主要分为以下步骤：

(1) 将物理域离散为许多小的计算单元；(2) 根据单元的形状和结点数构造形函数；(3) 写出近似解表达式；(4) 推导出离散的有限元方程；(5) 建立单元刚度矩阵和单元外载荷向量；合成总体刚度矩阵和载荷向量；(6) 带入边界条件求解声场；(7) 后处理和误差分析。

3.1 有限元方程的推导

我们使用传统 Galerkin 方法推导有限元方程，即选取与基函数相同的试验函数作为权函数，对待求的微分方程在求解域及其边界上进行加权积分，得到一组易于求解的线性方程组。

不均匀介质中的 Helmholtz 方程可以表示为^[9]

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(x, z)} \nabla p \right) + \frac{k^2(x, z)}{\rho(x, z)} p = \frac{S_\omega}{\rho(x, z)} \frac{\delta(z-z_s)\delta(x)}{2\pi} \quad (28)$$

两边同时乘以试验函数 $q(x, z)$ 并在求解域 Ω 上积分得到：

$$\iint_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(x, z)} \nabla p \right) + \frac{k^2(x, z)}{\rho(x, z)} p \right] q dx dz = \frac{S_\omega}{\rho(x, z)} \frac{q(z_s)}{2\pi} \quad (29)$$

应用高斯定理得到：

$$\int_{\Gamma} \frac{q}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\nabla p \cdot \nabla q}{\rho} dx dz + \iint_{\Omega} \frac{kpq}{\rho} dx dz = \frac{S_\omega}{\rho} \frac{q(z_s)}{2\pi} \quad (30)$$

其中： Γ 表示边界， Ω 表示求解域。

3.2 计算区域离散后的有限元方程

由于计算区域形状规则，所以采用四节点四边形单元对计算区域进行离散。同时，四节点四边形单元比三节点三角形单元具有更高的精度，拥有更高阶的连续性。四节点四边形单元如图 5 所示，单元中点坐标为 (x_0, z_0) ，单元的长和宽分别为 $2a, 2b$ 。

用函数 $N_n(x, z)$ 表示形函数，其中 $n=1, 2, 3, 4$ 分

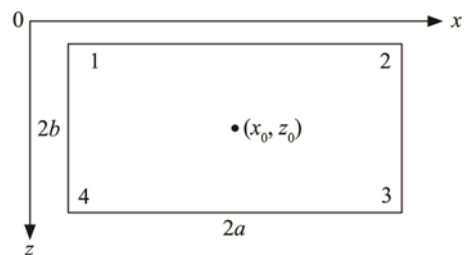


图 5 四节点四边形单元的局部编号、中点坐标、长度与宽度示意图

Fig.5 Schematic illustration of local number, midpoint coordinates, length and width of the four-node quadrilateral element

别表示四个节点。在单元外部，形函数的函数值均为 0；在单元内部，用拉格朗日插值法构造单元内部的插值函数：

$$\begin{cases} N_1(x, z) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right) \left(1 - \frac{z-z_0}{b}\right) \\ N_2(x, z) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x-x_0}{a}\right) \left(1 - \frac{z-z_0}{b}\right) \\ N_3(x, z) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x-x_0}{a}\right) \left(1 + \frac{z-z_0}{b}\right) \\ N_4(x, z) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right) \left(1 + \frac{z-z_0}{b}\right) \end{cases} \quad (31)$$

即对点 (x_m, z_m) ，插值函数 $N_n(x, z)$ 满足：

$$N_n(x_m, z_m) = \delta_{nm} \quad (32)$$

根据式(31)和(32)可以看出，每个单元内的声压只与该单元的四个节点值和插值函数有关，所以令 p_n 表示各个节点上的声压，其中 $n=1, 2, 3, 4$ 。将单元内的声压 p 和试验函数 q 分别表示为

$$p(x, z) = \sum_{n=1}^4 N_n(x, z) p_n \quad (33)$$

$$q(x, z) = N_m(x, z), m=1, 2, 3, 4 \quad (34)$$

将式(33)和(34)代入式(30)左侧的第二项和第三项可以得到离散后的不包含边界项的有限元方程：

$$\frac{p_n}{\rho} \iint_{\Omega} (k^2 N_n N_m - \nabla N_n \cdot \nabla N_m) dx dz = 0 \quad (35)$$

其中， p_n 的系数就是单元刚度矩阵的元素 k_{nm} 。

3.3 出射边界的处理

在水下声传播计算方面，有限元方法面对的挑战之一是如何模拟没有边界的无限大海洋环境，即满足无限远处的 Sommerfeld 辐射条件^[13]：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left[\frac{\partial p(R)}{\partial R} + i k p(R) \right] \right\} = 0 \quad (36)$$

其中： R 表示距离； k 表示波数； p 表示声压。下面，分别使用三种常用的出射边界计算方法来求解声场。

3.3.1 传统辐射条件

传统的辐射条件是指：待求量的径向导数等于待求量在声源一定距离处的值与常数的乘积。对于本文讨论的双层介质中的声传播问题，可以将右侧出射边界用传统辐射条件表示为

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{i\omega}{c} p \quad (37)$$

代入式(30)的第一项可以得到：

$$\int_{\Gamma_r} \frac{q}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} dl = \int_{\Gamma_r} \frac{q}{\rho} \frac{i\omega p}{c} dl = \int_0^D \frac{q}{\rho} \frac{i\omega p}{c} dz \quad (38)$$

将式(33)中的声压 p 和式(34)中的试验函数 q 代入式(38)即可求得最右侧单元对应的单元刚度矩

阵。

最后，利用式(35)计算得到的单元刚度矩阵，在集成总体刚度矩阵时，将每个单元的局部坐标与总体坐标一一对应，即可得到总体刚度矩阵。

3.3.2 DtN 非局部算子

传统辐射条件并不能完全吸收出射波，回波会干扰声场，产生误差。1978 年，Fix 和 Marin^[14]对轴对称情况下的分层介质中的声场进行了研究，并且第一次提出了非局部算子，同时指出了非局部算子相对于传统辐射条件的优越性。

在本文讨论的双层介质中，可以将右侧出射边界表示为

$$\frac{\partial p}{\partial n} = T(p) \quad (39)$$

其中， T 是非局部积分算子。为了构建非局部算子，研究如下问题，寻找函数 $p(x, z)$ 满足方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(x, z)} \nabla p \right) + \frac{k^2(x, z)}{\rho(x, z)} p = 0 \\ p_1(x, z)|_{z=D_1} = p_2(x, z)|_{z=D_1} \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z}(x, z) \Big|_{z=D_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z}(x, z) \Big|_{z=D_1} \\ p_1(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial z}(x, z) \Big|_{z=D_2} = 0 \end{cases} \quad (40)$$

将式(40)的解写成级数和的形式：

$$p(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \exp(i\sqrt{\lambda_l} x) w_l(z) \quad (41)$$

其中： α_l 表示每一项的系数； λ_l 表示特征值； $w_l(z)$ 表示深度分离的特征函数。将式(41)代入式(40)可以得到特征函数 $w_l(z)$ 满足的方程：

$$\begin{cases} w'' + (k^2 - \lambda_l) w = 0 \\ w(0) = w'(D) = 0 \\ w(D_1^+) = w(D_1^-) \\ \frac{1}{\rho_1} w'(D_1^-) = \frac{1}{\rho_2} w'(D_1^+) \end{cases} \quad (42)$$

特征函数 $w_l(z)$ 相对于权重 L^2 的内积是标准正交的。定义内积算子：

$$(u, v)_{L^2_p(0, D_2)} = \int_0^{D_1} u \bar{v} dz + \rho \int_{D_1}^{D_2} u \bar{v} dz \quad (43)$$

其中： $\rho = \rho_1 / \rho_2$ 。

因为特征函数在 $(L^2(0, H), (\cdot, \cdot)_{L^2_p(0, D_2)})$ 上组成了一个完备标准正交集，对于出射边界，可以得到：

$$\alpha_l = \exp(-i\sqrt{\lambda_l} x) \int_0^D p(x, z) w_l(z) dz \quad (44)$$

然后我们对式(42)应用 Galerkin 法，即方程两

边同时乘以试验函数 $\chi(z)$ ，得到：

$$-(w_l', \chi') + (k^2 w_l, \chi) = \lambda (w_l, \chi) \quad (45)$$

对特征函数 $w_l(z)$ 进行离散：

$$w_l(z) = \sum_{j=1}^{N_{\text{node}}} d_j \chi_j \quad (46)$$

其中： N_{node} 为节点数； d_j 为每个节点上的特征值； χ_j 为试验函数，也是每个节点处的插值函数。由式 (45)、(46) 可以得到：

$$[-(\chi_j', \chi_i') + (k^2 \chi_j, \chi_i)] d_j = \lambda (\chi_j, \chi_i) d_j \quad (47)$$

取矩阵 \mathbf{S} 、 \mathbf{Q} 和 \mathbf{G} 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{ij} = (\chi_j', \chi_i') \\ \mathbf{Q}_{ij} = (k^2 \chi_j, \chi_i) \\ \mathbf{G}_{ij} = (\chi_j, \chi_i) \end{cases} \quad (48)$$

则式(47)可以简写为

$$(\mathbf{S} + \mathbf{Q})\mathbf{d} = \lambda \mathbf{G}\mathbf{d} \quad (49)$$

对式(49)进行变换得到：

$$\mathbf{G}^{-1/2}(-\mathbf{S} + \mathbf{Q})\mathbf{G}^{-1/2}\mathbf{G}\mathbf{d} = \lambda \mathbf{G}^{1/2}\mathbf{d} \quad (50)$$

即可求出特征值 λ 和特征向量 \mathbf{d} 。将特征值和对应的特征向量代入式(30)的第一项就可以计算最右侧单元的刚度矩阵。

3.3.3 完美匹配层

传统辐射条件可能会引入较大误差，非局部算子会改变全局刚度矩阵的稀疏性。下面引入完美匹配层，在保持刚度矩阵稀疏性的同时，尽量减小误差。

完美匹配层是 Berenger^[15-16] 在 1994 年提出的一种概念，希望用它模拟出射边界，使得只有少量的能量甚至没有任何能量反射回我们计算的物理场中。

如图 6 所示，对于深度有限的双层介质，我们设需要计算的物理域的水平距离为 R ，在物理域的右侧设置一个厚度为 δ_x 的完美匹配层。如图 6 中右侧 PML1 和 PML2 所示，完美匹配层中的声速和密度与相邻的左侧介质相同。

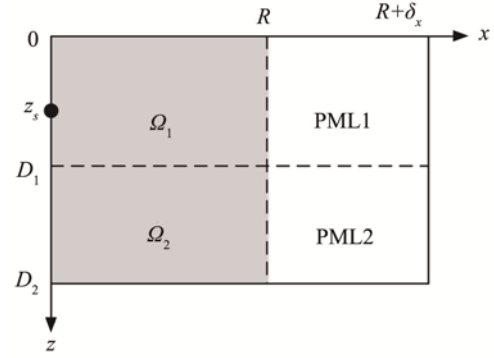


图 6 添加完美匹配层的有限深度双层介质示意图
Fig.6 Schematic diagram of two-layered medium with limited depth plus perfectly matched layers

在完美匹配层中，将实数坐标变换到复数域，选取^[17]：

$$\tilde{x} = x - i \int_0^{x-R} \sigma_x(\xi) d\xi \quad (51)$$

其中选取：

$$\sigma_x(x) = \sigma_{xm} \left(\frac{x-R}{\delta_x} \right)^2 \quad (52)$$

对于完美匹配层，不考虑边界的情况下，式(30)中 p_n 的系数，即单元刚度矩阵的元素变为

$$k_{mn} = \iint_{\Omega} \frac{k^2 N_n N_m}{\rho} \frac{d\tilde{x}}{dx} dx dz - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho} \times \left[\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^{-1} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right) \right] dx dz \quad (53)$$

而对于无限深度的双层介质，设需要计算的物理域的水平距离为 R ，深度为 D_2 ，在物理域的右侧设置一个厚度为 δ_x 的完美匹配层，在物理域的下侧设置一个厚度为 δ_z 的完美匹配层，如图 7 所示。

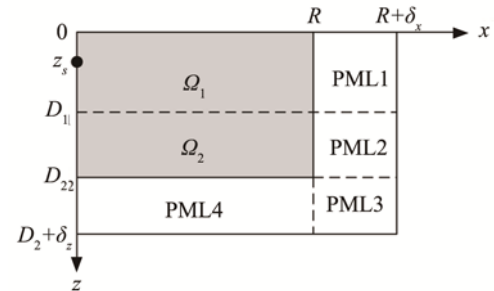


图 7 添加完美匹配层的无限深度双层介质示意图
Fig.7 Schematic diagram of two-layered medium with unlimited depth plus perfectly matched layers

对于右侧的完美匹配层 PML1 和 PML2，声波仅沿 x 轴衰减，我们同样使用式(51)~(53)进行计算。对于下侧的完美匹配层 PML4，声波仅沿 z 轴衰减，同样将实数坐标变换到复数域，选取：

$$\tilde{z} = z - i \int_0^{z-D} \sigma_z(\xi) d\xi \quad (54)$$

其中选取：

$$\sigma_z(z) = \sigma_{zm} \left(\frac{z-D}{\delta_z} \right)^2 \quad (55)$$

对于下侧的完美匹配层 PML4, 式(30)中 p_n 的系数, 即单元刚度矩阵的元素变为

$$k_{mm} = \iint_{\Omega} \frac{k^2 N_n N_m}{\rho} \frac{d\tilde{z}}{dz} dx dz - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho} \times \left[\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} \left(\frac{d\tilde{z}}{dz} \right) + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \left(\frac{d\tilde{z}}{dz} \right)^{-1} \right] dx dz \quad (56)$$

对于右下角的完美匹配层 PML3, 声波同时沿 x 方向与 z 方向衰减, 因此需要按照式(51)和(54)同时对实数坐标进行变换, 则式(30)中 p_n 的系数为

$$k_{mm} = \iint_{\Omega} \frac{k^2 N_n N_m}{\rho} \frac{d\tilde{x}}{dx} \frac{d\tilde{z}}{dz} dx dz - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{d\tilde{z}}{dz} \right) + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right) \left(\frac{d\tilde{z}}{dz} \right)^{-1} \right] dx dz \quad (57)$$

最后, 同样使单元的节点编号与总体的节点编号一一对应, 组成总体刚度矩阵。

3.4 其他边界条件的处理

对于左侧边界, 即 $x=0$ 处, 满足对称条件, 可视为位移为零的绝对硬边界; 对于有限深度的双层介质 $z=D_2$ 处的下边界也是绝对硬边界; $z=0$ 处的上边界是绝对软边界, 声压 $p=0$ 。

对于绝对硬边界, 法向位移为 0, 即 $\partial p / \partial n = 0$, 对刚度矩阵贡献为 0, 不用进行特殊的处理和计算。对绝对软边界, 我们采用“对角元素置 1”法进行计算, 步骤如下:

(1) 设总体刚度矩阵为 \mathbf{K} , 其元素可以表示为 K_{mn} , 外载荷向量为 \mathbf{f} , 声压向量为 \mathbf{p} , 它们满足线性方程组 $\mathbf{Kp} = \mathbf{f}$, 设绝对软边界的节点总体编号为 l 。

(2) 将 \mathbf{K} 的第 l 列与第 l 行置零, 第 l 个对角元素置 1。

(3) 将 \mathbf{f} 的第 l 个元素设置为 0。

(4) 得到更新后的线性方程组 $\mathbf{Kp} = \mathbf{f}$, 求解即可得到每个节点处的声压。

4 计算结果

4.1 有限深度双层介质中的声场

取如图 8 所示的环境参数, 上层介质的厚度为 60 m, 声速 $c_1 = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 密度 $\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 下层介质厚度为 40 m, 声速 $c_2 = 1800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 密度 $\rho_2 = 1800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 声源深度为 20 m。

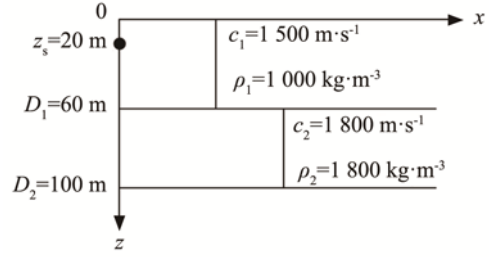
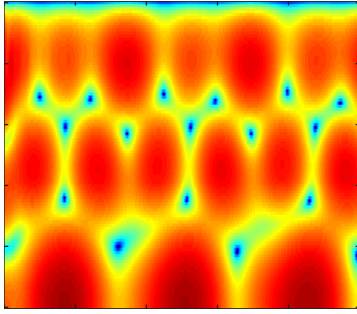


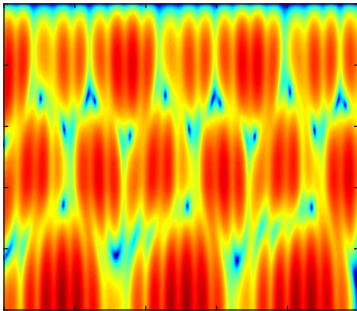
图8 双层介质环境参数示意图

Fig.8 Specific environmental parameters of a two-layer medium

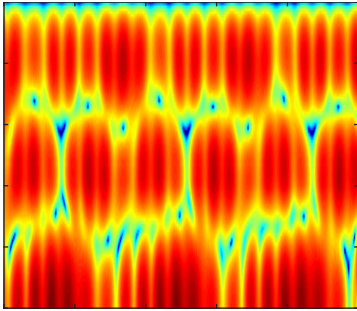
图 9 表示使用不同方法计算的 25 Hz 声源产生的声场。其中, 图 9(a)为使用波数积分方法计算得到的解, 可视为标准解。图 9(b)是使用传统辐射条件处理出射边界的有限元解。可以看出有限元解与



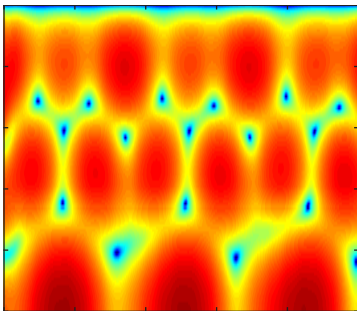
(a) 波数积分方法计算的标准解



(b) 使用传统辐射条件处理出射声场的有限元解



(c) 使用 DtN 非局部算子处理出射声场的有限元解



(d) 使用完美匹配层处理出射声场的有限元解

图9 声源频率为 25 Hz 时使用不同方法计算的双层介质中的声场

Fig.9 Transmission loss in the two-layer medium calculated by different methods at 25 Hz

标准解的图案基本一致，但是在水平方向存在明显的干涉条纹。这是由于传统辐射条件没有完全吸收出射波，向右传播的出射波与向左传播的反射波产生干涉现象，从而引入了误差。图 9(c)是使用 DtN 非局部算子处理出射边界的有限元解。可以看到，相比传统辐射条件而言，干涉现象有了轻微的削弱，但是依然存在，且不可忽略。同时，DtN 非局部算子只能用于处理单向出射边界，即难以处理可穿透海底的问题。图 9(d)是使用完美匹配层处理出射边界的有限元解，可以看到，该计算结果与标准解吻合得较好。

图 10 表示深度为 48 m 处的传播损失，其中，蓝色实线表示使用完美匹配层处理出射边界的有限元解，红色虚线表示标准解。该深度下，有限元解和标准解的平均误差为 0.09 dB，两组计算结果吻合得较好。

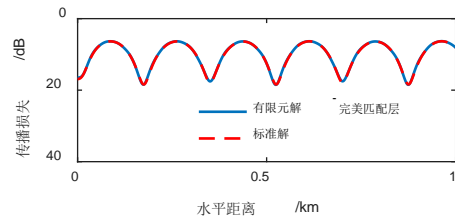
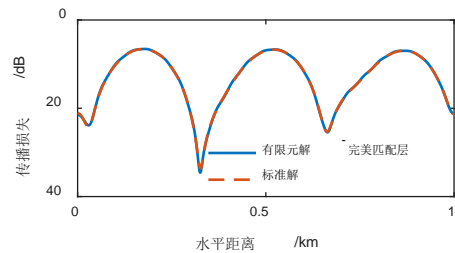
图 10 声源频率为 25 Hz 时接收深度 48 m 处的传播损失
Fig.10 Transmission loss at 25 Hz and 48 m receiving depth

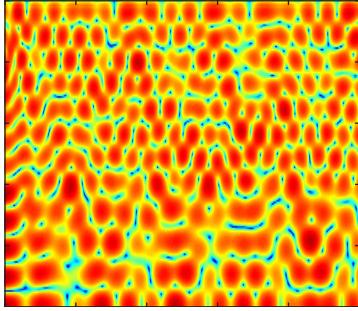
图 11 表示深度为 80 m 处的传播损失，其中，蓝色实线表示使用完美匹配层处理出射边界的有限元解，红色虚线表示标准解。该深度下，有限元解和标准解的平均误差为 0.09 dB，两个计算结果吻合得较好。

图 11 声源频率为 25 Hz 时接收深度 80 m 处的传播损失
Fig.11 Transmission loss at 25 Hz and 80 m receiving depth

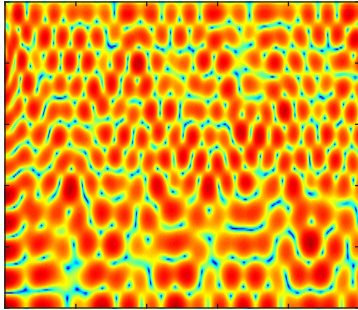
从以上结果可以看出，本文所提的有限元模型计算得到的结果与标准解吻合得较好。下面我们需要验证，对于更高的频率，该有限元模型是否依然具有较高的精度。

图 12 表示声源频率为 100 Hz 时分别使用波数积分方法和有限元方法计算的声场，其中图 12(a)表示使用波数积分方法计算得到的声场标准解，图

12(b)是使用完美匹配层处理出射边界的有限元解。从计算结果可以看出,本文所提的有限元解与波数积分方法计算的标准解吻合得较好。



(a) 使用波数积分方法计算的标准解



(b) 使用完美匹配层处理出射声场的有限元解

图 12 声源频率为 100 Hz 时使用不同方法计算的双层介质中的声场

Fig.12 Transmission loss in the two-layer medium calculated by different methods at 100 Hz

图 13 为深度 60 m 处的传播损失,其中,蓝色实线表示使用完美匹配层处理出射边界的有限元解,红色虚线表示标准解。该深度下,因为存在一个传播损失波谷,所以有限元解和标准解的平均误差稍大,近似为 0.19 dB。两组计算结果总体上吻合得较好。

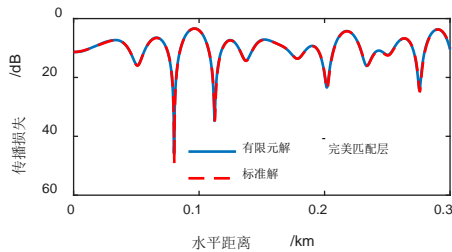


图 13 声源频率为 100 Hz 时接收深度 60 m 处的传播损失

Fig.13 Transmission loss at 100 Hz and 60 m receiving depth

4.2 无限深度双层介质中的声场

对于无限深度的双层介质,即 Pekeris 波导,我们取如图 14 所示的环境参数,上层介质的厚度为 40 m,声速 $c_1=1500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,密度 $\rho_1=1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$;

下层介质无限大,声速 $c_2=1650 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$,密度 $\rho_2=1500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 。声源深度为 20 m,接收深度为 40 m。

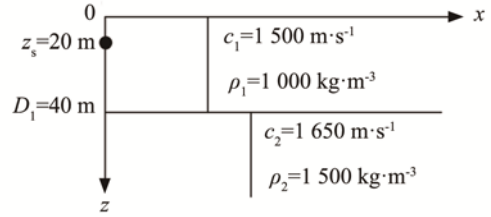
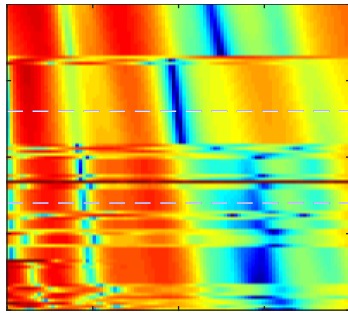


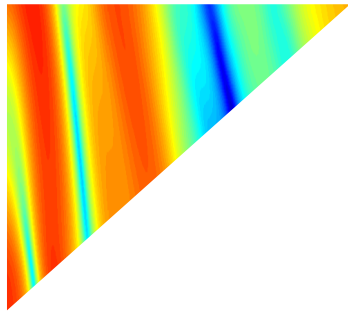
图 14 无限深度双层介质环境参数示意图

Fig.14 Specific environmental parameters of a two-layer medium with an unlimited depth

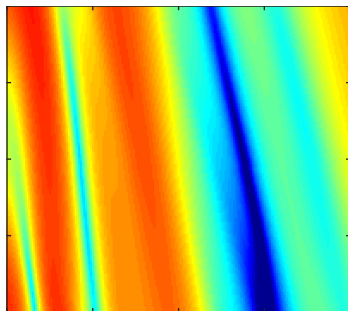
首先计算声源频率为 105~125 Hz 的传播损失。如图 15 所示为不同声源频率在接收深度 40 m 处的传播损失,其中图 15(a)为常用的简正波模型 KRAKEN 计算的传播损失,图 15(b)为使用波数积分方法推导出的标准解,图 15(c)为使用有限元方法计算的传播损失。从图 15 可以看出,有限元解与波数积分方法计算的标准解吻合得较好,而 KRAKEN 计算的结果在某些频率上存在显著误差,这是由于对声场有主要贡献的某号本征值位于割线附近时,KRAKEN 无法准确计算该号本征值导致的^[18]。可以看出在声源频率为 112、118 Hz 时,KRAKEN 计算的传播损失有明显的差别。下面分别分析这两个频率处的本征值与传播损失的关系。



(a) 简正波模型 KRAKEN 计算的结果



(b) 波数积分方法计算的标准解



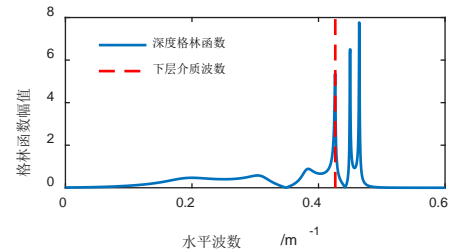
(c) 有限元解

图 15 声源频率为 105~125 Hz 时不同方法计算的接收深度为 40 m 处的传播损失

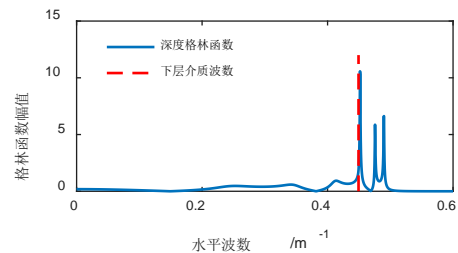
Fig.15 Transmission loss calculated by different methods at 40 m receiving depth from 105 Hz to 125 Hz

图 16 为不同声源频率时使用波数积分方法计算的深度格林函数, 图中红色虚线是下层介质中的波数。图 16(a)中声源频率为 112 Hz, 对应的下层介质波数约为 0.4265 m^{-1} 。在这个频率下, KRAKEN 得到的前五号简正波的水平波数(即本征值)分别为 0.464 455、0.449 802、0.381 011+i0.009 161、0.309 880+i0.017 855、0.188 504+i0.039 225, 对于当前问题, 由于第 3 号简正波的水平波数与海底波数非常接近, KRAKEN 未能计算出该号简正波, 从而导致 KRAKEN 模型的传播损失结果出现了较大的误差。图 16(b)中声源频率为 118 Hz, 对应的

下层介质波数约为 0.4493 m^{-1} 。在此频率下, KRAKEN 得到的前五号简正波的水平波数分别为 0.489 759、0.475 685、0.451 877、0.411 541+i0.007 906、0.346 650+i0.015 463。比较简正波的水



(a) 112 Hz 时的格林函数



(b) 118 Hz 时的格林函数

图 16 不同声源频率对应的深度为 40 m 处的深度格林函数
Fig.16 Magnitude of the depth-dependent Green's function at depth 40 m and the frequencies of 112 and 118 Hz

平波数与图 16(b)可以发现, 声源频率为 118 Hz 时, 第 3 号简正波的水平波数与海底波数的差异足够大, KRAKEN 可以准确求出这号简正波, 因此在声源频率为 118 Hz 时, KRAKEN 计算结果与标准解的一致性非常好。

然后我们分别对声源频率为 112、118 Hz 时, 三种不同方法计算的传播损失进行比较。图 17(a)、17(b)分别为声源频率为 112、118 Hz 时接收深度 40 m 处的传播损失, 其中蓝色实线表示波数积分方法计算的标准解, 红色虚线表示有限元解, 绿色虚线表示 KRAKEN 计算的传播损失。可以看到, 声源频率为 112 Hz 时, KRAKEN 遗漏了第三号有主要贡献的简正波, 导致计算误差较大, 而有限元方法不需要计算简正波, 与

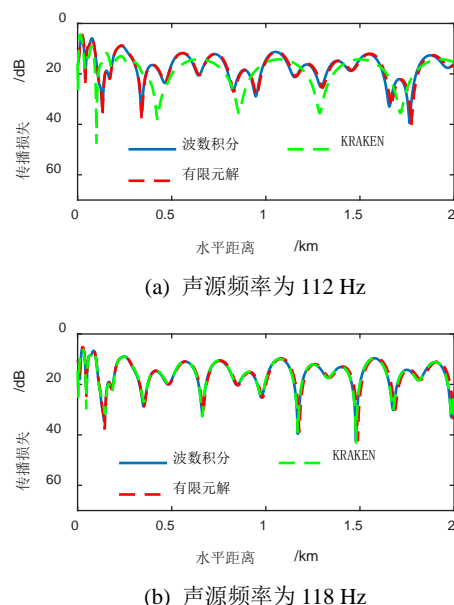


图 17 算例 2 中不同声源频率在 40 m 深度上的传播损失结果
Fig. 17 Transmission losses at depth of 40 m and the frequencies of 112 and 118 Hz

标准解吻合得非常好。声源频率为 118 Hz 时, **KRAKEN** 包含了前三号有主要贡献的简正波, 所以与有限元解和标准解吻合得非常好。

通过对比发现, 简正波模型 **KRAKEN** 需要求解简正波, 而在一些特定的情况下, 可能会遗漏对声场有主要贡献的简正波, 从而产生较大误差。而有限元模型不需要求解简正波, 所以对几乎所有频率都具有较高的精度, 即有限元方法的普适性优于简正波方法。

5 结论

本文研究了双层介质中的声传播, 分别讨论了有限深度的双层介质和无限深度的双层介质的情况。

由于有限深度双层介质问题不存在解析解, 因此首先使用波数积分方法推导出标准解。然后提出一个有限元模型, 并研究不同出射边界的方法对有限元解的影响, 发现传统辐射条件会引入较大的误差, 非局部算子会破坏总体刚度矩阵的稀疏性, 而且不适用于沿不同方向出射的声波, 而完美匹配层拥有较高的精度, 且不会破坏总体刚度矩阵的稀疏性, 使用也十分灵活。本文所提的有限元模型选取精度最高、使用方法最灵活的完美匹配层方法来处理出射声场, 并进行后续计算。数值结果表明本文所提的有限元解和标准解吻合得较好。

对于无限深度的双层介质, 同样先使用波数积分方法推导出标准解, 然后分别使用本文所开发的

结合了完美匹配层的有限元模型和常用的简正波模型 **KRAKEN**, 计算不同频率下的声场。研究发现, 在一些特定的频率, 由于 **KRAKEN** 在计算时遗漏了一些对声场有主要贡献的简正波, 会产生明显的误差。而有限元方法不需要计算简正波, 因此在各频率都与标准解吻合得较好。

本文基于传统的 **Galerkin** 方法推导出水下声传播有限元方程, 然后使用完美匹配层处理出射声场, 设计并实现了一个水下声场计算有限元模型。通过该模型计算得到的双层介质中的声场, 与标准解吻合得较好。同时, 由于有限元方法不要求解简正波, 因此对于某些简正波方法不能准确处理的问题, 有限元方法仍能给出准确的声场结果, 表明有限元方法的普适性优于简正波方法。

值得一提的是, 有限元方法的优缺点都非常突出, 优点在于普适性强且精度高, 缺点在于计算量大且物理意义不清晰。因此, 本文选择研究有限元方法并非希望建立一个通用的声场计算模型来解决实际应用中的声传播问题, 而是希望使用有限元方法提供参考解, 来优化其他声场计算模型。例如, 在计算复杂海洋环境中的声场时, 如复杂地形或内波等问题, 很难验证现有模型的计算结果的正确性, 这时就可以使用有限元方法提供标准解, 用于校验现有模型的结果, 从而对其进行改进, 使其适用于解决更加复杂的环境中的声场问题。

本文的内容是有限元方法在水下声场计算中的一些初步工作, 接下来将对本文所提的有限元声场计算模型进一步改进, 提升模型精度, 并使之可以计算更加复杂的环境中的声场。

参考文献

- [1] PORTER M B, BUCKER H P. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1987, 82(4): 1349-1359.
- [2] BOWLIN J B, SPIESBERGER J L, DUDA T F, et al. Ocean acoustical ray-tracing: Software Ray[M]. Woods Hole, MA: Woods Hole Oceanographic Institution, 1992.
- [3] EVANS R B. A coupled mode solution for acoustic propagation in a waveguide with stepwise depth variations of a penetrable bottom[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1983, 74(1): 188-195.
- [4] LUO W Y, YANG C M, QIN J X, et al. A numerically stable coupled-mode formulation for acoustic propagation in range-dependent waveguides[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2012, 55(4): 572-588.
- [5] LEE D, BOTSEAS G, SIEGMANN W L. Examination of three-dimensional effects using a propagation model with azimuth-coupling capability (FOR3D)[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1992, 91(6): 3192-3202.
- [6] GILBERT K E, EVANS R B. A Green's Function Method for One-Way Wave Propagation in a Range-Dependent Ocean Environment Ocean Seismo-Acoustics, 1986: 21-28.

- [7] COLLINS M D, SCHMIDT H, SIEGMANN W L. An energy-conserving spectral solution[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2000, **107**(4): 1964-1966.
- [8] SCHMIDT H, GLATTETRE J. A fast field model for three-dimensional wave propagation in stratified environments based on the global matrix method[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1985, **78**(6): 2105-2114.
- [9] JENSEN F B, KUPERMAN W A, PORTER M B, et al. Computational Ocean acoustics[J]. Physics Today, 2008, **47**(11): 91.
- [10] ZAMPOLLI M, TESEI A, JENSEN F B, et al. A computationally efficient finite element model with perfectly matched layers applied to scattering from axially symmetric objects[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2007, **122**(3): 1472.
- [11] KAMPANIS N A, DOUGALIS V A. A finite element code for the numerical solution of the Helmholtz equation in axially symmetric waveguides with interfaces[J]. Journal of Computational Acoustics, 1999, **7**(2): 83-110.
- [12] 李军. 有限元法数值模拟浅海声场的研究[D]. 北京: 北京大学, 2005.
- [13] SHIRRON J J, GIDDINGS T E. A finite element model for acoustic scattering from objects near the ocean bottom[J]. Proceedings of OCEANS 2005 MTS/IEEE, 2005(2): 1644-1651.
- [14] FIX G J, MARIN S P. Variational methods for underwater acoustic problems[J]. Journal of Computational Physics, 1978, **28**(2): 253-270.
- [15] BERENGER J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, **114**(2): 185-200.
- [16] BERENGER J P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, **44**(1): 110-117.
- [17] YOU X Y, CHAI Y B, LI W. Edged-based smoothed point interpolation method for acoustic radiation with perfectly matched layer[J]. Computers & Mathematics With Applications, 2020, **80**(6): 1596-1618.
- [18] LUO W Y, YU X L, YANG X F, et al. Analytical solution based on the wavenumber integration method for the acoustic field in a Pekeris waveguide[J]. Chinese Physics B, 2016, **25**(4): 044302.