

有限元声场建模中的人工边界条件

周益清^{1,2}, 骆文于^{1,2}

(1. 中国科学院声学研究所, 声场声信息国家重点实验室, 北京 100190;
2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 有限元方法的普适性广且计算精度高。本文提出一种基于有限元方法的水下声场计算模型。在使用有限元方法时, 需要将无限大的海洋空间进行截断, 并设置人工边界条件以模拟无限空间。本文分别使用传统的辐射边界条件和完美匹配层模拟无限空间的有限元方法, 并将计算结果与解析解进行对比。结果表明, 完美匹配层技术更适合在水下声场计算中模拟无限空间。

关键词: 有限元方法; 水下声传播; 声场建模; 边界条件

中图分类号: TB556

文献标识码: A

Artificial boundary conditions in finite element modeling in sound field calculation

ZHOU Yiqing^{1,2}, LUO Wenyu^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Acoustics, Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The finite element method has wide applicability and high accuracy. In this paper an underwater sound field calculation model based on the finite element method is proposed. When using the finite element method, it is necessary to truncate the infinite ocean space and set artificial boundary conditions to simulate the infinite space. In this paper, the finite element method for simulating an infinite space using traditional radiation boundary conditions and perfectly matched layers is realized, and the results are compared with analytical solutions. The results show that the perfectly matched layer technique is more suitable for simulating an infinite space in underwater sound field calculation.

Key words: finite element method; underwater sound propagation; sound field modeling; boundary condition

0 引 言

有限元方法是求解偏微分方程复杂边值问题的一种通用数值解法。它首先将物理域离散成有限数量的单元, 各单元以节点相连, 然后利用各单元间的关联性形成一系列的有限元方程组, 求得单元内的近似解, 从而把复杂的偏微分方程边值问题转化为大型方程组的求解问题^[1]。

对于有限元方法在水下声传播问题中的应用, 一个主要的问题是对无限空间的截断与模拟。本文建立了一种基于有限元方法的水下声场计算模型, 分别使用传统辐射边界条件与完美匹配层方法来模拟无限空间, 并比较了计算的结果。

1 有限元方程与离散

有限元方法的实现步骤可以分为: 将物理域离散为许多小的计算单元; 根据单元的形状和结点数构造形函数; 写出近似解表达式; 推导出离散的有限元方程; 建立单元刚度矩阵和单元外载荷向量; 合成总体刚度矩阵和载荷向量; 带入边界条件求解声场; 后处理和误差分析。

首先使用 Galerkin 方法对 Helmholtz 方程进行离散。不均匀介质中的 Helmholtz 方程 (二维平面线源问题) 可表示为^[2,3]

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(x, z)} \nabla p \right) + \frac{k^2(x, z)}{\rho(x, z)} p = \frac{S_\omega}{\rho(x, z)} \frac{\delta(z - z_s) \delta(x)}{2\pi}, \quad (1)$$

两边同时乘以试验函数 $q(x, z)$ 并在求解域 Ω 上积分, 应用高斯定理得到

$$\int_{\Gamma} \frac{q}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \iint_{\Omega} \frac{\nabla p \cdot \nabla q}{\rho} dx dz + \iint_{\Omega} \frac{k p q}{\rho} dx dz = \frac{S_\omega}{\rho} \frac{q(z_s)}{2\pi}. \quad (2)$$

其中 Γ 表示边界, Ω 表示求解域。

对于形状规则的计算区域, 可以使用四节点四

收稿日期: XXXX-XX-XX; 修回日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11774374)

作者简介: 周益清(1996—), 女, 宁夏银川人, 博士研究生, 研究方向为水声物理。

通讯作者: 周益清, E-mail: zhouyiqing18@mails.ucas.ac.cn

边形单元对计算区域进行离散。用函数 $N_n(x, z)$ 表示形函数, 其中 $n=1, 2, 3, 4$ 分别表示四个节点, 用拉格朗日插值法构造单元内部的插值函数。令 p_n 表示各个节点上的声压, 将单元内的声压 p 和试验函数 q 分别表示为

$$p(x, z) = \sum_{n=1}^4 N_n(x, z) p_n, \quad (3)$$

$$q(x, z) = N_m(x, z), m=1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

将式(3)和式(4)代入式(2)左侧的第二项和第三项可以得到离散后的不包含边界项的有限元方程

$$\frac{p_n}{\rho} \iint_{\Omega} (k^2 N_n N_m - \nabla N_n \cdot \nabla N_m) dx dz = 0, \quad (5)$$

其中, p_n 的系数就是单元刚度矩阵的元素 k_{mn} 。

2 无限空间的两种处理方法

传统的辐射条件是指: 待求量的径向导数等于待求量在声源一定距离处的值与常数的乘积。对于本文讨论的双层介质中的声传播问题, 可以将右侧出射边界用传统辐射条件表示为

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{i\omega}{c} p, \quad (6)$$

将它代入式(2)的第一项可以得到

$$\int_{\Gamma_r} \frac{q}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dl = \int_{\Gamma_r} \frac{q}{\rho} \frac{i\omega p}{c} dl = \int_0^D \frac{q}{\rho} \frac{i\omega p}{c} dz. \quad (7)$$

将式(3)中的声压 p 和式(4)中的试验函数 q 代入上式即可求得最右侧单元对应的单元刚度矩阵。

完美匹配层是 Berenger^[4,5]在 1994 年提出的概念, 希望用它模拟出射边界, 使得只有少量的能量甚至没有任何能量反射回我们计算的物理场中。对于深度有限的全反射理想波导, 我们设需要计算的物理域的水平距离为 X , 在物理域的右侧设置一个厚度为 δ_x 的完美匹配层, 完美匹配层中的声速和密度与相邻的左侧介质相同。

在完美匹配层中, 将实数坐标变换到复数域, 我们选取^[6]

$$\tilde{x} = x - i \int_0^{x-R} \sigma_x(\xi) d\xi, \quad (8)$$

其中选取

$$\sigma_x(x) = \sigma_{xm} \left(\frac{x-R}{\delta_x} \right)^2. \quad (9)$$

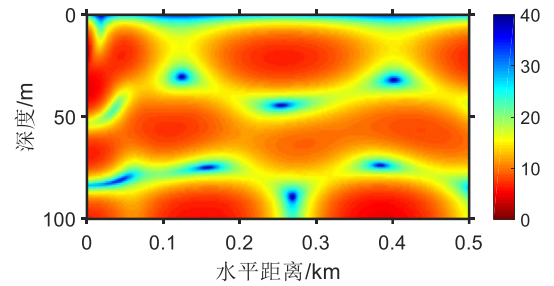
对于完美匹配层, 不考虑边界的情况下, 式(2)中 p_n 的系数, 也就是单元刚度矩阵的元素变成了

$$k_{mn} = \iint_{\Omega} \frac{k^2 N_n N_m}{\rho} d\tilde{x} dx dz - \iint_{\Omega} \frac{1}{\rho} \times \left[\frac{\partial N_n}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} \left(\frac{d\tilde{x}}{dx} \right)^{-1} + \frac{\partial N_n}{\partial z} \frac{\partial N_m}{\partial z} \left(\frac{d\tilde{x}}{dz} \right) \right] dx dz. \quad (10)$$

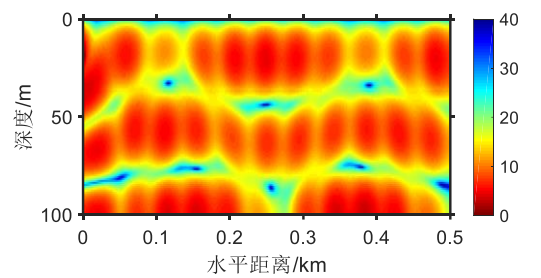
3 仿真与讨论

首先考虑全反射理想波导内均匀介质中的声传播问题, 将海面视为绝对软边界, 声压为零, 将海底视为绝对硬边界, 质点法向振速为零。海水声速 $c=1500\text{m/s}$, 密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$, 声源深度 $z_s=20\text{m}$, 频率为 $f=25\text{Hz}$ 。

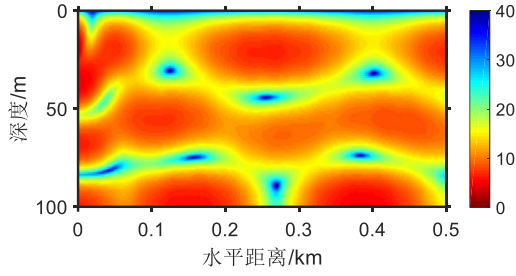
图 1 为该全反射理想波导中的传播损失, 其中图 1(a)为解析解^[1], 图 1(b)为使用传统辐射条件处理无限空间的有限元解, 图 1(c)为使用完美匹配层方法处理右侧无限空间的有限元解。可以看出完美匹配层边界处理方法可以提高有限元模型的计算精度。



(a) 全反射理想波导中的声场解析解
(a) Analytical solution of the sound field in a totally reflected waveguide



(b) 使用传统辐射边界条件处理无限空间的有限元解
(b) Finite element method with the traditional radiation boundary condition



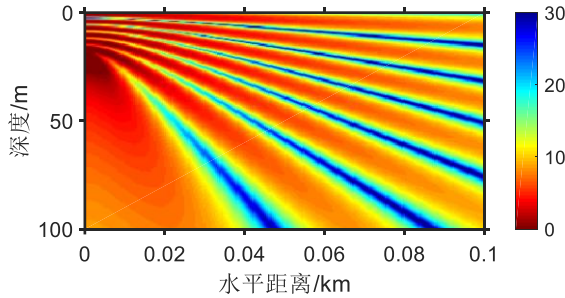
(c) 使用完美匹配层处理无限空间的有限元解
(c) Finite element solution with the perfectly matched layer technique

图 1 声源频率为 25 Hz 时使用不同方法计算的全反射理想波导中的传播损失

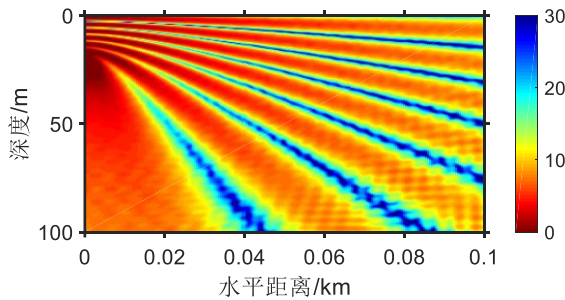
Fig. 1 Transmission loss in the totally reflected ideal waveguide calculated by different methods at 25 Hz

下面考虑无限大的均匀海水半空间中的声传播问题，海面可视为绝对软边界，声压为零，海水可视为无限大的区域，需要分别在侧方和下方设置有限的人工边界条件模拟无限大空间。海水声速 $c=1500\text{m/s}$ ，密度 $\rho=1000\text{kg/m}^3$ ，声源深度 $z_s=20\text{m}$ ，频率为 $f=25\text{Hz}$ 。

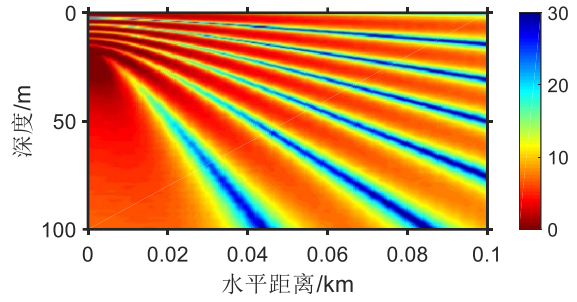
图 2 为该无限大的均匀海水半空间中的传播损失，其中图 2(a)为解析解^[1]，图 2(b)为使用传统辐射条件处理无限空间的有限元解，图 2(c)为使用完美匹配层方法处理无限空间的有限元解。可以看出完美匹配层边界处理方法可以提高有限元模型的计算精度。



(a) 无限大均匀海水半空间中的解析解
(a) Analytical solution in a fluid half space



(b) 使用传统辐射边界条件处理无限空间的有限元解
(b) Finite element method with the traditional radiation boundary condition



(c) 使用完美匹配层处理无限空间的有限元解
(c) Finite element solution with the perfectly matched layer technique

图 2 声源频率为 25 Hz 时使用不同方法计算的无限大均匀海水半空间中的传播损失

Fig. 2 Transmission loss in the homogeneous fluid half space calculated by different methods at 25 Hz

4 结 论

当使用人工边界条件对计算区域进行截断，从而模拟无限空间时，传统辐射边界条件会比完美匹配层方法引入更大的误差。当入射波遇到传统辐射边界条件时，反射系数不为零，会产生一定的反射波。入射波与传统辐射边界条件引入的反射波会产生干涉现象，可以观察到明显的干涉条纹。而完美匹配层在边界处的反射系数为零，几乎不引入反射误差，因此与解析解吻合得非常好。所以在对水下声传播问题进行声场建模时，使用完美匹配层技术处理无限空间可以获得更高的计算精度。

参 考 文 献

- [1] Jensen F B, Kuperman W A, Porter M B, et al. Computational Ocean Acoustics[M]. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] Burnett D S, Zampolli M. FESTA: a 3-D finite element program for acoustic scattering from undersea targets[J]. NURC Report SR, 2004, 394.
- [3] Pierce A D. Acoustics: an introduction to its physical principles and applications[M]. Springer, 2019.
- [4] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of computational physics, 1994, 114(2): 185-200.
- [5] Berenger J P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems[J]. IEEE Transactions on antennas and propagation, 1996, 44(1): 110-117.
- [6] You X, Chai Y, Li W. Edged-based smoothed point interpolation method for acoustic radiation with perfectly matched layer[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2020, 80(6): 1596-1618.