

# Ispitivanje Potsovog modela na prepovezanim rešetkama

Nina Jakovljević (2001) Kruševac, Tekija bb, učenica 4. razreda Gimnazije u Kruševcu  
Mentor: Iva Bačić, Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu

## Apstrakt

Potsov model opisuje sistem sačinjen od  $N$  spinova sa  $q$  mogućih stanja. Spinovi menjaju svoje stanje usled interakcija sa susednim spinovima. U ovom radu je ispitano kako narušavanje pravilnosti rešetke koja definiše interakcije utiče na proces usklađivanja stanja spinova na Potsovom modelu sa  $q=3$  stanja pri temperaturi od  $T=0K$ . Simulirano je uređivanje Potsovog modela na dvodimenzionalnoj kvadratnoj rešetki čije su veze prepovezane s verovatnoćom  $p$  u skladu sa Vac-Strogacovim algoritmom, pri čemu je parametar  $p$  variran u opsegu  $p \in [0, 0.95]$ . Kako se ishod simulacije može značajno razlikovati od slučaja do slučaja, svi rezultati su usrednjeni po ansamblu od 1000 realizacija. Proces uređivanja izgleda tako što spinovi usklađuju svoje stanje sa susedima i postepeno formiraju oblasti u kojima su svi spinovi u istom stanju. Pokazuje se da je u takozvanom režimu malog sveta (*small-world*), odnosno za intermedijarne verovatnoće prepovezivanja  $p \in [0, 0.2]$ , usklađivanje stanja spinova sporije u poređenju sa onim na regularnoj rešetki ( $p=0$ ) i uređeno stanje se često ne može dostići. S druge strane, što je rešetka nepravilnija ( $0.2 < p < 0.1$ ), to je uređivanje efikasnije. Neuređena stanja sadrže ili sva tri početna spinska stanja ili bilo koja dva, i sastoje se od velikog broja međusobno isprepletenih domena. U većini slučajeva, konačna neuređena stanja sadrže takozvane treptajuće spinove koji, na granicama domena različitih stanja, beskonačno dugo menjaju svoju orijentaciju.

## Uvod

Standardni modeli uređivanja, motivisani proučavanjem spinskih sistema, su definisani na pravilnim rešetkama. Prilikom modelovanja sistema na pravilnim rešetkama, članovi se najpre rasporede po temenima pravilnih poligona, npr. po temenima kvadratne rešetke i dozvoljeno da interaguju sa članovima koji se nalaze na susednim temenima. Takve "poligone" nazivamo pravilnim mrežama povezanosti odnosno regularnim topologijama i one su okarakterisane odgovarajućim simetrijama. Na primer, kvadratna rešetka ostaje nepromenjena ukoliko se rotira za devedeset stepeni oko ose normalne na nju. Međutim, iako su modeli uređivanja inicijalno korišćeni u magnetizmu i fizici čvrstog stanja tokom poslednjih nekoliko decenija, ovi modeli su primenjeni za opisivanje daleko raznolikijih sistema. Među njima se nalaze modeli dinamike mišljenja koji proučavaju kako se šire stavovi u društvu (Vazquez et al. 2002). Naravno, struktura interakcija u društvu je znatno drugačija od bilo koje pravilne rešetke: često interagujemo sa ljudima koji nisu naši susedi, već imamo i kontakte na daljinu. S druge strane, veze u društvu takođe nisu ni potpuno nasumične, već postoje i neke lokalne pravilnosti. Jednostavan algoritam koji pruža mogućnost interpolacije između potpuno pravilne rešetke i nasumične mreže jeste Vac-Strogacov algoritam (Watts i Strogatz 1998). Simulacije fizičkih modela na neregularnim topologijama, na kojima se interakcije uvode i između slučajno odabranih nesusednih članova, pokazale su da način na koji su povezani članovi u sistemu značajno menja ishod dinamike (Castellano et al. 2004, Sood i Redner 2005). Poseban akcenat u ovakvim istraživanjima je stavljen na modele koji opisuju fazne prelaze između neuređenih i uređenih konfiguracija (Bačić et al. 2017). Paradigmatski model koji opisuje proces uređivanja je Izing-Glauberov model (Spirin et al. 2000, Krapivsky et al. 2007).

Izing-Glauberov model je matematički model uveden prevashodno sa ciljem opisivanja ponašanja magnetnih sistema sačinjenih od velikog broja elemenata. Izingov model je inicijalno definisan na pravilnoj rešetki po kojoj su raspoređeni spinovi. Spinovi mogu biti u jednom od dva stanja: 1 ili -1. Sistem evoluira pod uticajem feromagnetnih interakcija koje teže da usaglase stanja spinova i pod uticajem temperature koja povećava termičku energiju spinova i otežava uređivanje. Ukoliko se

sistem naglo spusti na temperaturu  $T=0$ , ostaje prepušten samo magnetnim interakcijama. Kada se par spinova usaglasi, dolazi do smanjivanja ukupne energije sistema. Hamiltonijan sistema je dat kao:  $H = - \sum \delta(\sigma_i, \sigma_j)$  gde je  $\delta(\sigma_i, \sigma_j)$  Kroneker delta funkcija koja iznosi 1 ukoliko su ulazne promenljive iste, a 0 ukoliko su različite, dok  $\sigma_i$  predstavlja stanje spina i. Kada se dogodi da spin promeni svoje stanje, kaže se da se dogodio obrtaj (engl. flip) tog spina. Sistem teži da dostigne stanje minimalne energije pa se početna konfiguracija postepeno uređuje obrtanjem spinova. Kod Glauberove dinamike, flipovanje je dozvoljeno samo kada se energija snižava ili održava. Parametar koji opisuje uređenost sistema je magnetizacija (Krapivsky et al. 2007).

Proučavanje Izing-Glauberovog modela je imalo ključnu ulogu u razvoju teorije o fenomenima kritičnih prelaza. Zahvaljujući konceptualnoj jednostavnosti, Izing-Glauberov model je u međuvremenu pronašao primenu u naizgled neočekivnim oblastima poput geologije (Ross 1991) i elektrohemijske (Bosco 1993). Mnogi modeli zasnovani na Izing-Glauberovom modelu se koriste za opisivanje realnih makroskopskih sistema i složenih socijalnih interakcija: dinamike mišljenja i kooperativno ponašanja (Stauffer 2008, Redner 2019). Iz navedenog se može zaključiti da je manifestacija koefekata Izing-Glauberove dinamike i topologije posebno interesantna i od praktičnog značaja za opisivanje najrazličitijih pojava.

Ponašanje Izingovog modela je zbog toga ispitano na raznovrsnim strukturama. Literatura temeljno pokriva slučajeve na pravilnim rešetkama i njihovim varijacijama, kao i na neregularnim topologijama (Bačić et al. 2017). Ovo nas navodi na interesantno pitanje: šta se dešava u sistemima gde varijabla može imati više od dva stanja? Jedna od takvih generalizacija Izingovog modela na proizvoljan broj stanja  $q$  jeste Potsov model (Beaudin 2007). On je poslužio za fizički model viskozne nestabilnosti u tekućoj peni (Sanyal et al. 2006), fizički model rasta tumora (Sun et al. 2004), dinamički model društvene segregacije (Schelling 1971, Fouladvand 2005). Ponašanje Pots-Glauberovog modela često nije predvidivo, a zavisno od razmatrane topologije i broja stanja, sistem se može urediti ili evoluirati ka najrazličitijim konfiguracijama, uključujući neobične mozaične strukture (Olejars et al. 2013, Redner 2019).

U slučaju Pots-Glauberovog modela na regularnoj rešetki, kada se sistem naglo dovede na temperaturu ispod kritične i pusti da evoluira, ne dolazi uvek do uspostavljanja konačne, uređene konfiguracije u sistemu. Tokom procesa uređivanja, svako stanje teži da preovlada i retko će se dogoditi da se svi spinovi nađu u istom stanju (osnovno stanje), već se pojavljuju neuređena stanja koja dugoročno opstaju na nultoj temperaturi. Takve konfiguracije se nazivaju metastabilnim i često su statične i geometrijski jednostavne sa izraženom strukturom mozaika koji čine grupe spinova istih stanja (Olejars et al. 2013).

U ovom radu proučavan je Potsov model feromagneta sa Glauberovom dinamikom uređivanja na nultoj temperaturi na neregularnim topologijama. Uveden broj mogućih stanja spinova je  $q=3$ . Poznato je da je nepravilne rešetke pružaju adekvatniji opis mnogih realnih sistema u odnosu na pravilne rešetke. Regularnost topologije je narušena prepovezivanjem linkova između susednih parova spinova  $s$  verovatnoćom  $p$  pomoću Vac-Strogac algoritma. Verovatnoća prepovezivanja  $p$  je varirana tako da se dobije niz topologija između regularnih struktura i potpuno nasumičnih sistema, a vrednosti su usrednjene nad skupom od 1000 nasumičnih konfiguracija stanja spinova. Dinamika je simulirana pomoću kinetičkog Monte Karlo algoritma (Bortz et al. 1975).

## Model

### 1. Inicijalizacija kvadratne rešetke

Pravilne topologije povezanosti su sačinjene su od  $N$  temena ili čvorova (engl. node) tako da je svako teme povezano sa najbližim susednim temenima. Ako su dva temena povezana, kaže se da između njih postoji veza ili grana (engl. link). Pravilne topologije se modeluju sa periodičnim graničnim uslovima, tako da spinovi na krajevima mreže deluju na one na suprotnom kraju i na taj način ne gube susede ako se nalaze na granicama. Kod većine simulacija modela srodnih Izingovom,

uključujući Potsov model, spinovi na nodovima međusobno interaguju sa svoja četiri najbliža suseda (Olejarz et al. 2013). Ovakva topologija se može realizovati kao kvadratna rešetka dimenzije  $L=51$  po kojoj je raspoređeno  $L \times L$  spinova. Dimenzije rešetke su odabrane u skladu sa referentnim radovima i računarskim ograničenjima, tako da adekvatno reprezentuju sistem. Broj spinova je u ovom slučaju deljiv sa brojem mogućih stanja kako bi se obezbedio jednak broj spinova u svakom od njih (Olejarz et al. 2013). Rešetka ima periodične granične uslove.

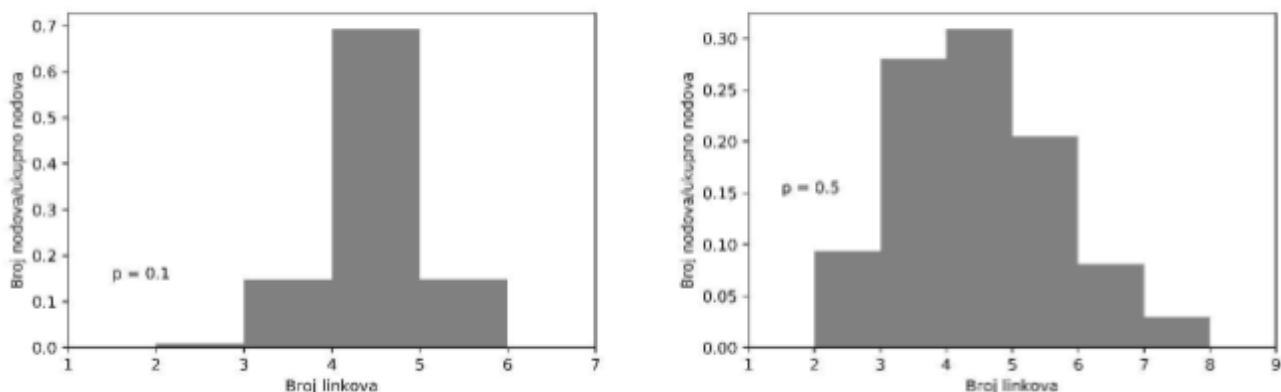
## 2. Prepovezivanje rešetki Vac-Strogac algoritmom

Kako bi se generisala odgovarajuća neregularna topologija polazeći od kvadratne rešetke, potrebno je prepovezati sve veze sa verovatnoćom  $p$ . Broj veza u kvadratnoj rešetki sa  $N$  temena je  $NL = 2N$ . Nakon prepovezivanja, ukupan broj čvorova ostaje nepromenjen, s tim što prepovezanih veza mora biti tačno  $NL \cdot p$ .

Prepovezivanje otpočinje na prvom temenu rešetke tako što se grana između prvog temena i njegovog desnog suseda prepoveže sa verovatnoćom  $p$  sa nasumično odabranim temenom u sistemu. Isti pokušaj da se prepoveže dalje dobija i njegova donja veza. Potom se prelazi na sledeći čvor sistema odnosno na njegovu desnu i donju granu koja se prepovezuje na identičan način. Opisani postupak se ponavlja redom za svaki čvor. Rešetka ima periodične granične uslove pa se pravilom biranja donje i desne grane sve grane uzimaju u obzir. Da ne bi došlo do pomeranja iste veze između čvorova više puta, uvodi se provera veza takva da se prilikom prepovezivanja razmatraju samo one koje potiču sa kvadratne rešetke. Takođe su zabranjena ona prepovezivanja koja jednom razdvojene susede iz regularne rešetke ponovo spajaju. Ukoliko su grane  $n$ -tog noda dobijene prepovezivanjem  $k$ -tog noda, gde je  $k < n$ , ti linkovi se neće ponovo razmatrati i biće preskočeni. Prilikom prepovezivanja se uvode restrikcije kako bi se sprečilo da se mreža rasparča: broj suseda koje čvor u svakom trenutku ima ne sme biti manji od dva.

Kada se jedanput pređe po svim temenima rešetke, proverava se koliko je veza prepovezano i završava se prva etapa algoritma. Uvedene restrikcije o rasparčavanju mreže se proveravaju na kraju, neposredno pred prepovezivanje. Određen broj predviđenih prepovezivanja (od ukupnog broja pokušaja) će biti sprečeno ukoliko gore navedeni uslov nije ispunjen pa će broj prepovezanih veza biti manji od  $p \cdot N$ . Na primer: svaki pokušaj prepovezivanja će biti odbačen ukoliko bi izabran čvor nakon toga ostao sa manje od dva suseda. U drugoj etapi algoritma se iz tog razloga nasumično biraju veze koje će se prepovezati sve dok broj prepovezanih ne postane tačno  $p \cdot N$ .

Prepovezivanjem rešetki Vac-Strogac algoritmom za vrednosti  $0 < p < 1$  dobijaju se mreže malog sveta (engl. small-world networks). Kod takve topologije povezanosti, većina čvorova nisu susedi, ali da je velika šansa da susedi svakog čvora međusobno susedi. Prema Vac-Strogacovom modelu, mreže malog sveta imaju veliku vrednost koeficijenta grupisanja (engl. clustering coefficient) i kratak prosečan put između dva noda (Watts i Strogatz 1998).

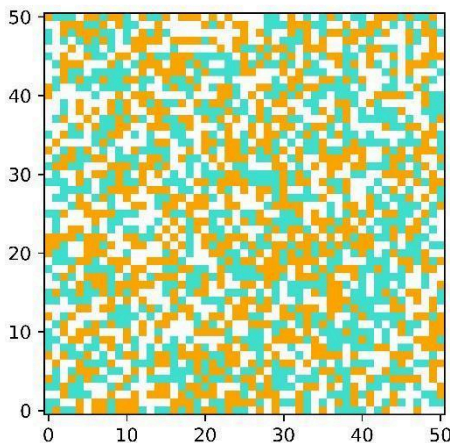


Slika 1. Histogram broja grana posle prepovezivanja rešetke sa verovatnoćom  $p = 0.1$  i  $p = 0.5$ .

Figure 1. The histogram of the ratio of nodes to number of links, obtained for square lattices rewired with probability  $p = 0.1$  i  $p = 0.5$ .

### 3. Implementacija Glauberove dinamike Potsovog modela za $q=3$ stanja i početni uslovi

Nakon inicijalizacije odgovarajuće topologije na čvorove mreže se postavljaju spinovi. Svi spinovi se postavljaju potpuno nasumično na rešetku s jednakom verovatnoćom da bi se izbeglo grupisanje (engl. clustering). Neka su moguća stanja spinova  $\{A, B, C\}$ . Za početne uslove je uzet jednak broj spinova u stanju A, u stanju B i u stanju C, tačnije  $N_A = N_B = N_C = N/3$ . Kako bi ovo bilo moguće, potrebno je da se za vrednost  $N$  uzmu celobrojni umnošci broja stanja  $q=3$ . Izraz za magnetizaciju Potsovog modela prema kada imamo tri stanja postaje  $m = \frac{1}{2} \left( \frac{N_{\max} \cdot q}{N} - 1 \right)$ , gde je  $N_{\max}$  broj spinova u većinskom stanju. U slučaju jednakog broja spinova u sva tri stanja dobijamo da je  $m = 0$  (Ferraz i Lima 2017).



Slika 2: Prikaz kvadratne rešetke dimenzija  $L=51$  na nultoj magnetizaciji  $m=0$ . Svaka boja predstavlja jedno od tri moguća stanja.

Figure 2. Zero-magnetisation state of the Potts model on a square lattice of linear dimension  $L = 51$ . Each color represents one of the  $q$  spin states.

Nakon postavljanja spinova, Glauberova dinamika se implementira koristeći Monte Karlo algoritam tako što se u svakom koraku  $N$  puta nasumično bira spin na rešetki i ako se odabere spin: 1) čija bi promena stanja smanjila energiju, obrtanje se uvek desi; 2) čija bi promena stanja povećala energiju, obrtanje se ne dešava i dalje se bira novi nasumični spin; 3) koji ima jednak broj suseda u istom stanju npr. dva suseda u stanju A i dva u stanju B, tada je svejedno da li je taj nod A ili B, pa je verovatnoća  $1/2$  da se taj spin okrene i  $1/2$  da se ne okrene. Ovaj slučaj odgovara energetski-neutralnom procesu.

Ipak, pokazuje se da se relaksacija značajno usporava kada se sistem nađe blizu ekvilibrijuma odnosno upadne u metastabilno stanje. Tada proces relaksacije traje veoma dugo budući da je verovatnoća da obrtanje nasumično odabranog spina smanji energiju mala (Sahni et al. 1983). Iz tog razloga je korisnost standardnog Monte Karlo algoritma u kontekstu generisanja novih konfiguracija ograničena, pa se u ovom radu opredeljujemo za takozvani kinetički Monte Karlo algoritam (Bortz et al. 1975) koji može da generiše novu konfiguraciju u svakom koraku tako da ne remeti opisani proces uređivanja. On funkcioniše tako što se mogućnost promene stanja spinova procenjuje i spin se bira proporcionalno tome koliko je verovatno da on svoje stanje promeni. U praktičnom smislu, kinetički Monte Karlo algoritam se razlikuje u odnosu na standardni algoritam po načinu odabira spinova. Vreme izračunavanja za generisanje nove konfiguracije pomoću ovog algoritma je duže u odnosu na standardni algoritam u slučaju kada imamo veliki broj spinova koji se mogu obrnuti. Međutim, u situacijama u kojima standardni algoritam obično preskače obrtanje, kinetički i dalje

generiše nove konfiguracije dokle god je to moguće. U svakom trenutku postoji uvid u to koliko spinova u konfiguraciji može da se okrene, odnosno, poznato je koji su spinovi usklađeni sa lokalnom većinom. Ako je sistem dostigao stanje u kome više nema spinova koji se mogu okretati, simulacija se prekida, čime se ujedno i pruža odgovor na pitanje da li je konfiguracija u stanju koje neće napustiti – apsorbujućem stanju. Pokazuje se da je ovaj model optimalan kada se ispituju sistemi na  $T=0$  (Bortz et al. 1975).

#### 1. Definisane klase

Kinetički Monte Karlo algoritam deli sve spinove u tri klase. Elementi klase imaju jednak broj mogućih scenarija za obrtanje. Pošto je broj stanja  $q=3$ , spin može imati maksimalno  $k=2$  moguća načina da promeni svoje stanje i to u preostala  $q-1=2$  stanja. Spin koji je, na primer, u stanju A, shodno tome kako lokalno polje to dozvoljava, može da se promeni ili samo u B ili samo u C ili i u B i u C. Neka svaka klasa ima svoju vrednost  $F_k$  koja odgovara njenom broju mogućih scenarija za obrtanje. Kada je  $F_k=0$ , spinovi se ne mogu menjati, pa elemente ove klase ne razmatramo prilikom odabira spinova. Kada je  $F_k=1$ , govorimo o klasi u kojoj svi spinovi mogu da promene stanje u tačno jedno drugo stanje, na primer: spin može iz stanja A preći samo u stanje B. Za spinove klase  $F_k=2$  moguće su dve opcije (npr.  $A \rightarrow \{B, C\}$ ). Prilikom razvrstavanja spinova po klasama, nije važno iz kog u koje stanje se menja, već samo to da li ima jednu ili dve opcije za promenu stanja.

#### 2. Određivanje težine klase

Nakon raspodele spinova po klasama, određuje se takozvana težina klase. Težina klase je veličina koja govori o broju svih mogućih obrtanja u okviru klase i data je izrazom  $W_k = F_k \cdot N_k$ , gde je  $N_k$  broj spinova u klasi  $k = \{1, 2\}$ . Važi da je  $W_1 + W_2$  ukupan broj mogućih mogućih promena na nivou čitavog sistema.

#### 3. Flipovanje spinova

Na osnovu težine klase se određuje verovatnoća izbora klase  $k$  i ona je proporcionalna njenoj težini  $W_k$ . Verovatnoća izbora klase će odgovarati relativnoj težini klase, odnosno:  $w_1 = W_1 / (W_1 + W_2)$ ,  $w_2 = W_2 / (W_1 + W_2)$ . Nakon što se na osnovu ove verovatnoće odabere klasa, iz nje se nasumično bira spin. Spin će pripadati prvoj ili drugoj klasi, ukoliko je  $F_k = 1$ , moguća je promena u samo jedno stanje i ono je poznato. Ukoliko je za izabranu klasu  $F_k = 2$ , stanje u koje će se spin preobratiti je određeno sa verovatnoćom  $1/2$  budući da su ta stanja ravnopravna i ima ih tačno dva. Nakon što se jedna promena desi, informacija o raspodeli spinova po klasama se ažurira jer je došlo do promene konfiguracije. Evolucija sistema se odvija na tako što se opisani ciklus ponavlja sve dok ne ostanu samo oni spinovi koji svoje stanje ne mogu promeniti ili nakon što simulacija prekorači veštački postavljenu granicu od  $T=200000$  koraka. Ovaj limit je određen u skladu sa računarskim ograničenjima i empirijskim zapažanjima.

Kod Monte Karlo simulacije se puno vremena gubi na neuspele pokušaje obrtanja. Kod kinetičkog Monte Karlo algoritma se vremenski koraci koji bi odgovarali neuspehim pokušajima u Monte Karlu preskaču, što znači da je realno vreme evolucije daleko duže nego ovako određen broj koraka.

### Rezultati

Pod neuređenim konfiguracijama se ubrajaju stanja koja su ostala aktivna nakon isteka vremenskog ograničenja uređivanja. Kod zamrznutih (engl. frozen) neuređenih stanja nema spinova koji mogu promeniti svoje stanje, a energetski minimum nije postignut. Na slici 3 pod (a), (b), (c) dat je 2D prikaz aktivne, neuređene konfiguracije sa tri, dva stanja i zamrznute konfiguracije, respektivno. Sve su simulirane na kvadratnoj rešetki dimenzija  $51 \times 51$  prepovezanoj sa verovatnoćom  $p=0.4$ . Na slici 4 dat je 3D prikaz aktivne konfiguracije za  $p=0.1$ .

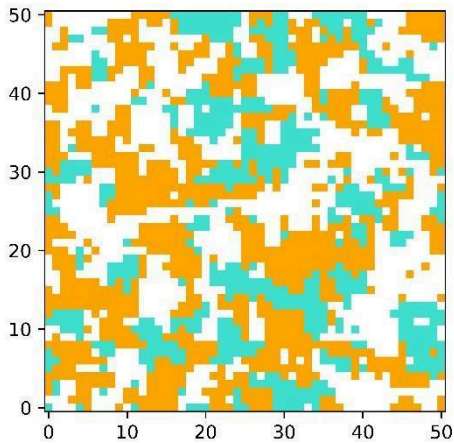
Na slici 5 prikazan je grafik zavisnosti udela osnovnog (engl. ground) stanja na nivou ansambla od 1000 konfiguracija sa promenom verovatnoće prepovezivanja  $p \in [0, 0.95]$ . Generisanje velikog broja prepovezanih rešetki koje ispunjavaju gore navedene uslove za verovatnoću prepovezivanja  $p \approx 1$  je veoma sporo pa je  $p$  varirano na pomenutom opsegu.



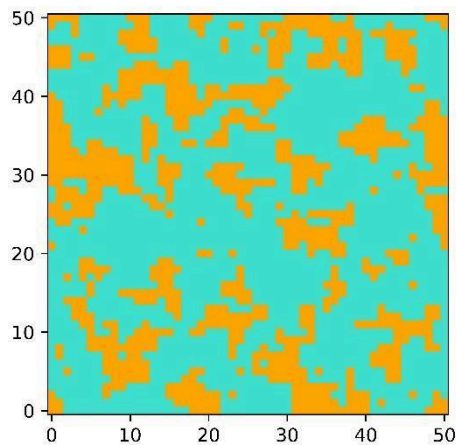
Slika 6 (a) prikazuje kako se menja udeo dominantnog stanja (označenog sa  $N_{\max}$ ), udeo srednje zastupljenog stanja ( $N_{\text{sre}}$ ) i najmanje zastupljenog stanja ( $N_{\min}$ ) na nivou ansambla od 1000 konfiguracija za svako  $p$ . Na slici 6 (b) data je ista zavisnost kao na slici 8, sa vrednostima usrednjenim po neuređenim konfiguracijama ansambla. Na slici 7 pokazano je kako se menja prosečan broj različitih spinskih stanja prisutnih na kraju evolucije sistema, usrednjeno samo po neuređenim konfiguracijama. Na slici 8 je data promena udela takozvanih zamrznutih stanja (kod kojih procesi obrtanja spinova nisu mogući) u zavisnosti od prepovezanosti rešetke.

Slika 3. Uređivanje Potsovog modela sa tri stanja na kvadratnoj rešetki dimenzija  $L=51$  za  $p=0.4$  posle  $T=200000$  koraka simulacije. Slika (a) prikazuje aktivnu konfiguraciju sa tri stanja, (b) prikazuje aktivnu konfiguraciju sa dva stanja, a pod (c) je prikazana zamrznuta konfiguracija sa tri stanja.

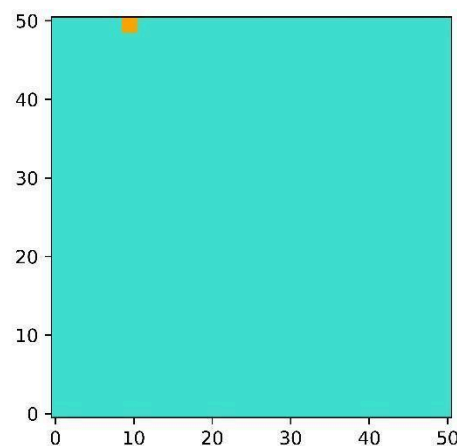
Figure 3. Coarsening of the 3-state Potts model for linear dimension  $L = 51$  for  $p=0.4$  obtained after  $T=200000$  MC simulation steps. Subplot (a) shows a blinking configuration with three states, (b) shows a similar configuration with two states, while (c) depicts a frozen state.



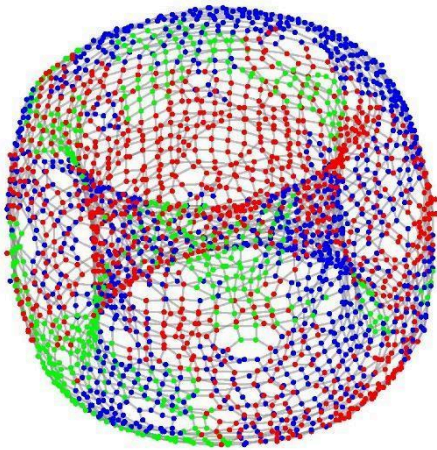
Slika 3 (a).  
Figure 3 (a).



Slika 3 (b).  
Figure 3 (b).

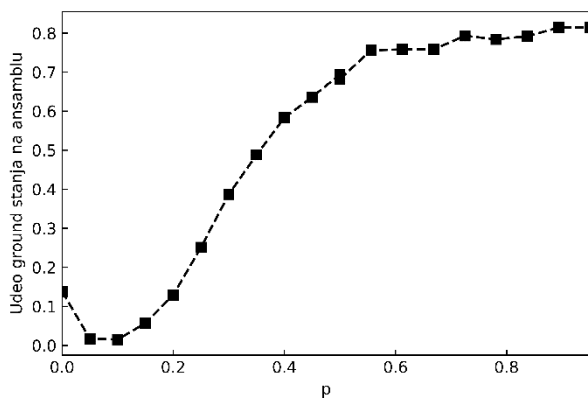


Slika 3 (c).  
Figure 3 (c).



Slika 4. 3D prikaz aktivne konfiguracije za  $L=51$  na topologiji prepovezanoj sa  $p=0.1$ . Boje predstavljaju stanja spinova.

Figure 4. Example of a disordered, active configuration obtained for the network of size  $51 \times 51$ , with  $k = 4$  neighbors on average and  $p = 0.1$  rewired links.

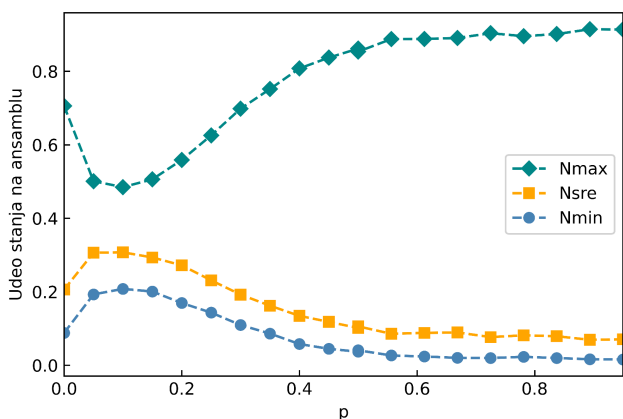


Slika 5. Grafik zavisnosti udela konfiguracija u osnovnom stanju od verovatnoće prepovezivanja  $p$  na nivou ansambla od 1000 uzoraka za  $L=51$ .

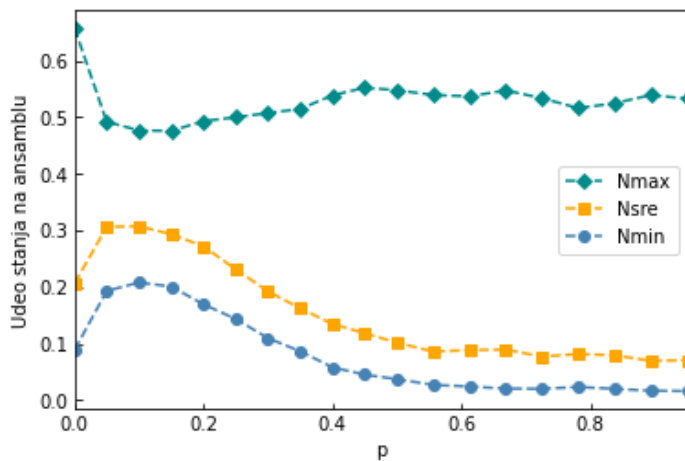
Figure 5. Fraction of ground states averaged over the ensemble of 1000 configurations as a function of  $p$ ,  $L=51$ .

Slika 6. Grafik promene udela dominantnog ( $N_{max}$ ), srednje zastupljenog ( $N_{sre}$ ) i najmanje zastupljenog ( $N_{min}$ ) stanja u konfiguraciji u zavisnosti od verovatnoće prepovezivanja  $p$ .

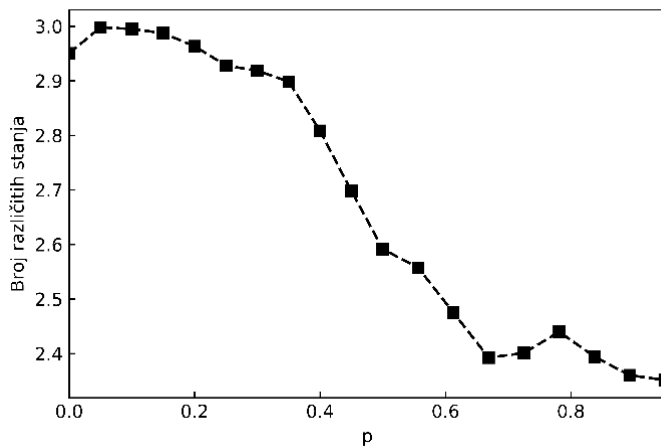
Figure 6. Ratio of dominant, middle and least dominant spin state in dependence of rewiring probability: subplot (a) shows results for simulations over the ensemble of 1000 configurations, averaged over ground configurations; subplot (b) shows results for simulations over the ensemble of 1000 configurations averaged over the disordered configurations.



Slika 6 (a) Usrednjeno po konfiguracijama koje su dostigle osnovno stanje na ansamblu od 1000 konfiguracija ukupno.

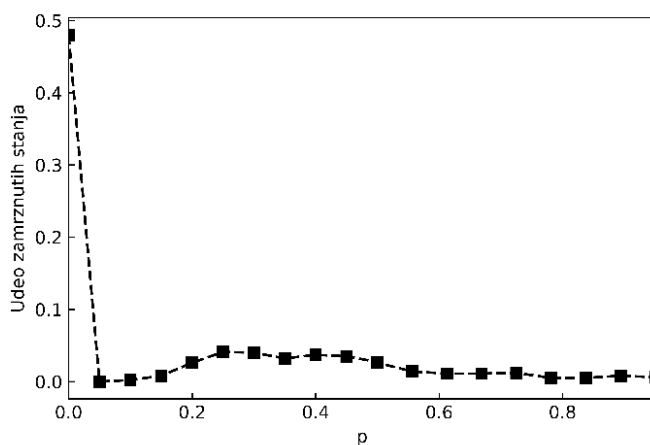


Slika 6 (b) Usrednjeno po aktivnim konfiguracijama ansambla od 1000 konfiguracija.



Slika 7. Grafik zavisnosti prosečnog broja različitih spinskih stanja prisutnih na kraju evolucije sistema posle  $T=200000$  koraka. Vrednosti su usrednjene po neuređenim konfiguracijama ansambla od ukupno 1000 konfiguracija.

Figure 10. Number of observed spin states after  $T=200000$  simulation steps, averaged over the ensemble of disordered configurations in dependence of  $p$ ,  $L=51$ .



Slika 8. Grafik promene udela zamrznutih stanja u zavisnosti od verovatnoće prepovezivanja  $p$ . Usrednjeno na nivou ansambla od 1000 konfiguracija.

Figure 11. Ratio of frozen states averaged over the ensemble of 1000 configurations in dependence of  $p$ ,  $L=51$ .

## Diskusija

Sa slike 5 uočava se da je za verovatnoću prepovezivanja  $p \in [0, 0.2]$  proces uređivanja manje efikasan u odnosu na regularnu rešetku ( $p=0$ ). Ovo se zaključuje na osnovu malog udela konačnih stanja na tom intervalu. Ipak, s povećanjem  $p$  ( $p>0.2$ ), kako topologija teži nasumičnoj ( $p>1$ ),



uređivanje sistema se izrazito pospešuje. U većini slučajeva, konačna, neuređena stanja sadrže takozvane treptajuće (engl. blinker) spinove na krajevima domena jednog stanja koja mogu beskonačno dugo menjati svoje stanje. Kao posledica efekata neregularne topologije i dinamike, pored formiranja uređenih i treptajućih stanja, uspostavlja se i širok diverzitet zamrznutih stanja tj. onih u kojima se orijentacija ne može menjati. Slično ponašanje, odnosno efikasnije uređivanje za umereno prepovezane rešetke koje odgovaraju režimu malog sveta, uočeno je i kod Izing-Glauberove dinamike, odnosno Potts-Glauberove sa 2 stanja. Ovo otvara pitanje: da li se Potts model na prepovezanim rešetkama ponaša isto za proizvoljan broj stanja  $q$  ili postoji nekakva granica za vrednost  $q$  posle kojeg se istovetnost procesa gubi?

Sa slike 6 (a) vidimo da je dominantno stanje najmanje zastupljeno u režimu malog sveta kao i da je zastupljenost različitih stanja najslabija. Ukoliko se ista zavisnost posmatra usrednjena isključivo po stanjima koja su neuređena, kao što je prikazano na slici 6 (b), jasnije se uočava da postoji nagli pad udela srednje zastupljenog stanja spinova. Ovom padu odgovara i smanjivanje broja različitih stanja u sistemu što je pokazano na slici 7. Zaključuje se da se posle određenog praga  $p$  srednje zastupljeno stanje gubi te se u sistemu se mogu naći samo dva stanja. Ovaj rezultat je neočekivan i pokazuje da je s porastom nasumičnosti topologije olakšano "izbacivanje" jednog stanja iz sistema. Ostaje nerazjašnjeno zašto je to tako i kojim se mehanizmom dešava. Zaključuje se da je kod topologije malog sveta ponašanje na nivou ansambla najbliže "ravnopravnosti": sva stanja su uvek zastupljena, nikada ne prevagne jedno ili dva i njihova brojnost je međusobno najslabija.

Na grafiku 8 se uočava da za  $p$  na sredini posmatranog intervala javlja mali broj konfiguracija koji je u zamrznutom stanju što je interesantan rezultat budući da prepovezane topologije ne preferiraju zamrznuta stanja, već ili osnovna ili stanja sa treptajućim spinovima. Ovo je zapaženo i na Izing-Glauberovom modelu. Zamrznute konfiguracije se dešavaju kada mali broj spinova ostane zaglavljen u suprotnom stanju i ne može da se obrne jer na lokalnom nivou svaki spin već usklađen sa većinskim stanjem u susedstvu. Ovo ne može da se dogodi kod pravilne topologije. Neuređene konfiguracije u većini slučajeva sadrže treptajuće spinove na granicama koji beskonačno dugo mogu da menjaju stanja.

## Reference

1. Olejarczyk J., Krapivsky P. L., Redner, S. 2013. "Zero-temperature coarsening in the 2d Potts model", *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. IOP Publishing, 2013(06), bl P06018.
2. Bačić I., Franović, I., Perc M. 2017. "Disordered configurations of the Glauber model in two-dimensional networks", *EPL (Europhysics Letters)*. IOP Publishing, 120(6), bl 68001.
3. Denholm J., Redner S. (2019) "Topology-controlled Potts coarsening", *Phys. Rev. E*. American Physical Society, 99, bl 062142.
4. Spirin V., Krapivsky P., Redner S. 2001. "Fate of Zero-Temperature Ising Ferromagnets", *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 63, bl 036118.
5. Bosco E. 1993. "Kinetic Ising model in electrochemistry: Its general scope and particular applications in adsorption kinetics", *Journal of Electroanalytical Chemistry*, 346, bl 433–449.
6. Redner S. 2019. "Reality-inspired voter models: A mini-review", *Comptes Rendus Physique*, 20(4), bl 275–292.
7. Vazquez F., Krapivsky P. L., Redner S. 2003. "Constrained opinion dynamics: freezing and slow evolution", *Journal of Physics A: Mathematical and General*. IOP Publishing, 36(3), bl L61–L68.
8. Sood V., Redner S. 2005. "Voter Model on Heterogeneous Graphs", *Phys. Rev. Lett.* American Physical Society, 94, bl 178701.

9. Castellano C., Vilone D., Vespignani A. 2003. “Incomplete ordering of the voter model on small-world networks”, *Europhysics Letters (EPL)*. IOP Publishing, 63(1), bll 153–158. doi: 10.1209/epl/i2003-00490-0.
10. Sahni P. S. *et al.* 1983. “Kinetics of ordering in two dimensions. II. Quenched systems”, *Phys. Rev. B*. American Physical Society, 28, bll 2705–2716.
11. Bortz A. B., Kalos M. H., Lebowitz J. L. 1975. “A new algorithm for Monte Carlo simulation of Ising spin systems”, *Journal of Computational Physics*, 17(1), bll 10–18.
12. Ferraz C. H. A., Lima J. L. S. 2017. “Three-state Potts model on non-local directed small-world lattices”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 484, bll 488–498.
13. Olejarz J., Krapivsky P. L., Redner S. 2011. “Zero-temperature freezing in the three-dimensional kinetic Ising model”, *Phys. Rev. E*. American Physical Society, 83, bl 030104.
14. Krapivsky P. L., Redner S., Ben-Naim E. 2010. *A kinetic view of statistical physics*. Cambridge University Press.
15. Schulze C. 2005. “Potts-like model for ghetto formation in multi-cultural societies”, *International Journal of Modern Physics C*. World Scientific, 16(03), bll 351–355.
16. Stauffer D. 2008. “Social applications of two-dimensional Ising models”, *American Journal of Physics*. American Association of Physics Teachers, 76(4), bll 470–473.
17. Sanyal S., Glazier J. A. 2006. “Viscous instabilities in flowing foams: A Cellular Potts Model approach”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. IOP Publishing, 2006(10), bl P10008.
18. Schelling T. C. 1971. “Dynamic models of segregation”, *Journal of mathematical sociology*. Taylor & Francis, 1(2), bll 143–186.
19. Beaudin L. 2007. “A Review of the Potts Model”, *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 8(1), bl 13.
20. Sun L., Chang Y. F., Cai X. 2004. “A discrete simulation of tumor growth concerning nutrient influence”, *International Journal of Modern Physics B*. World Scientific, 18(17n19), bll 2651–2657.
21. Watts D. J., Strogatz S. H. (1998) “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, *nature*. Nature Publishing Group, 393(6684), bll 440–442.

Abstract

Nina Jakovljević

## Potts coarsening on rewired lattices

Abstract

The Potts model describes a system of  $N$  spins with  $q$  possible states. The spins change their state due to interactions with neighboring spins. In this paper, we investigate the long-time phase ordering kinetics of such systems with  $q = 3$  states on rewired lattices, following a zero-temperature quench. To introduce disorder into the interaction network, regular two-dimensional square lattices are rewired with probability  $p$  in accordance with the Watts-Strogatz algorithm, where  $p$  is varied in the range  $p \in [0, 0.95]$ . As the outcome of such dynamics significantly varies from case to case, all results are averaged over an ensemble of 1000 realizations. It is shown that in the small-world regime, for intermediate rewiring probabilities  $p \in [0, 0.2]$ , the ordering process is slower in comparison to the regular lattice ( $p = 0$ ) and the ground state often cannot be reached. On the other hand, the more random the topology ( $0.2 < p < 0.1$ ), the higher the probability of the system reaching the ground state. In some cases, on the surfaces of the domains separating different states, one can find “blinker” spins. Such spins can flip with no energy cost, indefinitely changing their orientation.