ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2025
Práctico N° 3

1. Escriba un código para resolver el siguiente problema mediante el esquema de Crank-Nicolson y el Método de Líneas para comparar los resultados obtenidos:

$$\begin{gathered} u_t(t,x) = \beta u_{xx}(t,x) + f(t,x), \quad a < x < b, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u(a,t) = g_1(t), \quad u(b,t) = g_2(t). \end{gathered}$$

   Donde β es constante. Utilice $u(t,x) = cos(t)x^2 sen(\pi x)$, $0 < x < 1$ y $t_{final} = 1.0$ para testear los códigos. Para el problema semidiscreto utilice Runge-Kutta de orden 4.

2. Implemente y testee los esquemas UpWind y Lax-Wendroff para resolver la siguiente ecuación hiperbólica (con las dos condiciones iniciales):

$$\begin{gathered} u_t + u_x = 0, \quad -1 < x < 1, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x); \end{gathered}$$

   con $u_0(x) = (x+1)e^{-x/2}$ y

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

   con $t_{final} = 1$ con la siguiente condición de borde $u(-1,t) = 0$.

3. Implemente y testee los siguientes esquemas:

   a) UpWind conservativo

   b) UpWind no conservativo

   c) Lax-Wendroff-Richtmyer

   d) MacCormack

   para resolver la siguiente ecuación hiperbólica (con las dos condiciones iniciales):

$$\begin{gathered} u_t + (\tfrac{u^2}{2})_x = 0, \quad -1 < x < 1, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x); \end{gathered}$$

   con $u_0(x) = (x+1)e^{-x/2}$ y

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

   con $t_{final} = 1$.

4. Considere la ecuación elíptica:

$$u_{xx} + p(x,y)u_{yy} + r(x,y)u(x,y) = f(x,y)$$
$$a < x < b, \quad c < y < d,$$

sujeta a las siguientes condiciones de borde

$$u(a,y) = 0, \quad u(x,c) = 0 \quad u(x,d) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b,y) = -\pi \sin(\pi y)$$

   a) Implemente los métodos de Gauss-Seidel y SOR(ω)

   b) Pruebe su código para el caso $0 < x, y < 1$, donde

   $$p(x,y) = 1 + x^2 + y^2, \quad r(x,y) = -xy$$

   y el término fuente, $f(x,y)$ se determina a partir de la solución exacta

   $$u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

   Intente encontrar el mejor valor de ω testeando su código con diferentes valores de ese parámetro.

   c) Realice el análisis de refinamiento de grilla para $n = 16$, $n = 32$ y $n = 64$, usando una tolerancia de 10^{-8}

   d) Introduzca una fuente puntual $f(x,y) = \delta(x-0.5)\delta(y-0.5)$, utilice la condición de borde $u_x = -1$ en $x = 1$, con $p(x,y) = 1$ y $r(x,y) = 0$. En el resto de los bordes utilice la condición $u = 0$. La solución que encuentre puede interpretarse como la solución estacionaria de la distribución de temperatura en una habitación con tres paredes aisladas, una pared con un flujo de calor permanente, y una fuente puntual (como una estufa) en el centro de la habitación. Grafique la solución obtenida.

5. Considere la ecuación elíptica autoadjunta:

$$\nabla \cdot (p\nabla u) - qu = f(x,y)$$
$$a < x < b, \quad c < y < d,$$

sujeta a una condición de borde de tipo Neumann en $x = a$ y a condiciones de borde de tipo Dirichlet en los otros tres bordes. Escriba una función que resuelva este tipo de problemas utilizando algun alguna libreria usual para sistemas de ecuaciones (`np.linalg.solve`, por ejemplo). Pruebe su código para los siguientes casos:

   a) $u(x,y) = x^2 + y^2$, $p(x,y) = 1$ y $q(x,y) = 1$.

   b) $u(x,y) = \cos(x)\sin(x)$, $p(x,y) = e^{x+y}$ y $q(x,y) = x^2 + y^2$.

En ambos casos grafique la solución obtenida y el error absoluto.

6. Considere la siguiente ecuación de calor:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(t,x,y), \quad a < x < b, \quad c \leq y \leq d, \quad t \geq 0,$$
$$u(0,x,y) = u_0(x,y),$$

con condiciones de borde de tipo Dirichlet. Implemente y compare el método de Crank-Nicolson y el método implicito de direcciones alternadas (ADI). Utilice el método SOR(ω) (tratando de utilizar el ω óptimo) para resolver los sistemas de ecuaciones asociados. Elija un problema con solución exacta conocida para depurar el código.