ANÁLISIS NUMÉRICO III – 2025
Práctico N° 2

1. Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) &= f(t, y(t)),\ a \leq t \leq b, \\ y(a) &= y_0 \end{cases} \tag{1}$$

   a) Muestre que el problema de valores iniciales con $f(t, y) = y$ e $y_0 = 1$ admite la solución $y(t) = e^t$.

   b) Escriba una función `Euler` que implemente el método de Euler para resolver el problema de valores iniciales anterior. La función debe tener como argumentos de entrada la función f, los extremos de los intervalos a y b, la condición inicial y_0 y la longitud de paso temporal Δt. Debe devolver un vector y con la aproximación de la solución en los puntos de la partición temporal.

   c) Escriba funciones similares que implementen los métodos de Euler mejorado y de Euler implícito.

   d) Estime las tasas de convergencia de estos métodos experimentalmente. Para ello, considere diferentes valores de N_i y de la longitud de paso $h_i = h_1, h_2, \ldots, h_n$ con $h_{i+1} < h_i$, tales que $h_i = (b-a)/N_i$. Calcule la solución en $t_{N_i} = b$ para cada valor de h_i, y también los errores $E_i = |y_{N_i} - y(t_{N_i})|$. Estime la tasa de convergencia utilizando la formula

$$p = \frac{\log E_i/E_{i+1}}{\log h_i/h_{i+1}}$$

2. Para el problema de valores iniciales (1), considere una grilla uniforme $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ con $h = t_{i+1} - t_i$, y el método trapezoidal para el cálculo de las aproximaciones $y_i \approx y(t_i)$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_i, y_i)\Big),\ i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

   a) Implemente este método en python para resolver el problema $f(t, y) = y$ en $[0, 2]$ con $y_0 = 1$.

   b) Estime experimentalmente la tasa de convergencia de este método numérico.

   c) Formule el método trapezoidal como un método de Runge-Kutta.

   d) Estudie la estabilidad del método trapezoidal y compárela con la estabilidad del método de Euler implícito.

   e) Diseñe un algoritmo utilizando el método de Newton para la resolución de las ecuaciones no lineales en el método trapezoidal y compárelo con el método de Euler mejorado (método de Heun).

3. Escriba una función que implemente el esquema de diferencias finitas centradas para resolver el problema de valores de contorno

$$u''(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_a,\ \text{y}\ u(b) = u_b.$$

La función debe llamarse `two_points`, y tener como entrada los argumentos (`f,a,b,`$\mathtt{u_a}$`,`$\mathtt{u_b}$`,n`). Donde `f`, es la función externa, `a` y `b` los puntos extremos del intervalo, $\mathtt{u_a}$ y $\mathtt{u_b}$ las condiciones de contorno y `n` el número de subintervalos de la grilla. Los argumentos de salida deben ser `x` y `U`, donde `x`$= (x_0, \dots, x_n)$ son los puntos de la grilla y `U`$= (U_0, \dots, U_n)$ la solución aproximada en los puntos de la grilla.

4. Utilice la función del punto anterior para resolver los siguientes items.

   (a) Encontrar numericamente la solución del problema

   $$u''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\, u(1) = -1,$$

   tomando $n = 50$. Grafique la solución obtenida y la solución exacta. Grafique la diferencia entre la solución exacta y numérica en cada punto de la grilla.

   (b) Considere el problema

   $$u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0,\, u(1) = 0,$$

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 < x < x_1, \\ 0 & \quad \text{caso contrario,} \end{cases}$$

   con $0 < x_0 < x_1 < 1$. Encuentre la solución para distintos valores de x_0 y x_1 tomando $n = 50$. Grafique las soluciones obtenidas.

5. Derive el método de diferencias finitas para

   $$u''(x) - q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u(b),$$

   usando el esquema centrado con grilla uniforme.

   (a) Escriba el sistema de ecuaciones $A^h U = F^h$. ¿Cuántas incógnitas hay? ¿La matriz A^h es tridiagonal?

   (b) Si $q(x) = 0$, ¿existe solución? ¿es única? Si no lo es, ¿cómo modificaría el método para obtener una única solución?

6. Aplique el método de diferencias finitas y el método de Newton para encontrar una solución numérica al módelo no lineal del péndulo

   $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K \sin\theta = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi$$
   $$\theta(0) = \theta_1, \quad \theta(2\pi) = \theta_2,$$

   donde K, θ_1 y θ_2 son parámetros. Compare la solución con el modelo linealizado

   $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0.$$

   Tome $\theta_1 = \theta_2 = 0.7$ y $K = 1, 2$. ¿Cómo se comportan el modelo no lineal y linealizado para estos valores de K?

7. Escriba una función que implemente el esquema de diferencias finitas centradas usando un ghost point, para resolver el problema de valores de contorno mixto

   $$u''(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad u(a) = u_a \quad u'(b) = ux_b.$$

   La función debe llamarse `ghost_at_b`, y tener como entrada los siguientes argumentos (`f,a,b,`$\mathtt{u_a}$`,`$\mathtt{ux_b}$`,n`). Donde `f` es la función externa, `a` y `b` los puntos extremos del intervalo, $\mathtt{u_a}$ y $\mathtt{ux_b}$ las condiciones de contorno Dirichlet y Neumann respectivamente y `n` el número de puntos en la grilla. Los argumentos de salida deben ser `x` y `U`, donde `x`$= (x_0, \dots, x_n)$ son los puntos de la grilla y `U`$= (U_0, \dots, U_n)$ la solución aproximada en los puntos de la grilla.

8. Utilice la función del punto anterior para encontrar numericamente la solución del problema

$$u''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x), \quad 0 < x < \tfrac{1}{2}, \quad u(0) = 1,\ u'(\tfrac{1}{2}) = -\pi,$$

tomando $n = 50$. Grafique la solución obtenida y la solución exacta. Grafique la diferencia entre la solución exacta y numérica en cada punto de la grilla.

9. Considere el siguiente problema de valores de contorno autoadjunto

$$(p(x)u'(x))' - q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u(a) = u_a, \quad su(b) + tu'(b) = d.$$

(a) Escriba una función para resolver el problema anterior. Dicha función debe implementar una grilla uniforme y el esquema

$$\frac{p_{i+\frac{1}{2}}(U_{i+1} - U_i)/h - p_{i-\frac{1}{2}}(U_i - U_{i-1})/h}{h} - q(x_i)U_i = f(x_i).$$

La función debe llamarse `self_adjoint_bvp`, y tener como entrada los argumentos `(f,p,q,a,b,u`$_{\mathtt{a}}$`,s,t,d,n)`. Donde f es la función externa, p y q las funciones coeficiente, a y b los puntos extremos del intervalo, u a , s, t y d las constantes que definen las condiciones de contorno y n el número de subintervalos de la grilla. Los argumentos de salida deben ser x y U, donde `x` $= (x_0, \ldots, x_n)$ son los puntos de la grilla y `U` $= (U_0, \ldots, U_n)$ la solución aproximada en los puntos de la grilla.

(b) Pruebe su código para el caso

$$p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = x, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad s = 2, \quad t = -3,$$

y las otras funciones o parámetros se determinan a partir de la solución exacta

$$u(x) = e^{-x}(x-1)^2.$$

Grafique la solución obtenida y la solución exacta, y el error para una grilla tomando $n = 80$. Realice el análisis de refinamiento de grilla para determinar el orden de precisión de la solución global.

(c) ¿Puede manejar los casos $s = 0$ o $t = 0$ con su código?

(d) Si el esquema de diferencias finitas es usado para la ecuación equivalente

$$pu'' + p'u' - qu = f,$$

¿Cuáles son las ventajas y desventajas?

10. Considere la siguiente ecuación de convección-difusión de estado estacionario

$$\begin{gathered} \epsilon u'' - u' = -1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 3. \end{gathered}$$

para algún ϵ dado.

(a) Verifique que la solución exacta es $u(x) = 1 + x + \left(\dfrac{e^{x/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1}\right)$.

(b) Compare los siguientes métodos para $\epsilon = 0.3, 0.1, 0.05, 0.0005$.

(i) Esquema de diferencias finitas centrada,

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = -1.$$

(ii) Esquema de diferencias finitas central-upwind:

$$\epsilon \frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = -1.$$

Realice el análisis de refinamiento de grilla para cada caso, para determinar el orden de precisión. Grafique la solución encontrada y la exacta para $h = 0.1$, $h = \frac{1}{25}$, y $h = 0.01$.

(iii) ¿Qué método diría que es mejor? Justificar.

11. Para el siguiente problema

$$\begin{gathered} u'' = f, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = \sigma, \end{gathered}$$

muestre que el método de diferencias finitas usando la fórmula centrada y el método de ghost point en $x = 1$ son consistentes. Encuentre los órdenes de convergencia. Además, grafique, en ambos casos, la norma de la inversa de la matriz asociada al sistema para distintos valores de n ($n \gg 0$).