Analyse, classification et indexation des données: feuille 2

Descente de gradient

La méthode de la descente de gradient permet de trouver un minimum local d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. L'objectif de ce TD est de comprendre cette méthode pour pouvoir l'utiliser par la suite dans différentes applications où on cherche à minimiser un critère.

Echauffement : testez le script Matlab `TD02.m`.

Exercice 1. Polynôme : affichage et calcul de dérivée

1. Ecrivez une fonction Matlab `v = valeurPolynome (coeff, x)` qui calcule la valeur `v` du polynôme défini par le tableau de coefficients `coeff` pour la valeur `x`.
2. Utilisez cette fonction pour afficher un polynôme dont vous choisirez les coefficients.
3. La dérivée d'un polynôme est elle même un polynôme. Ecrivez une fonction Matlab `coeffDeriv = derivPoly(coeff)` qui retourne le tableau de coefficients représentant la dérivée du polynôme défini par `coeff`.

Exercice 2. Descente de gradient pour trouver le minimum d'une parabole

1. Testez le script `animationDescenteParabole.m`.
2. Retrouvez dans le code les étapes de l'algorithme de descente du gradient.
3. Testez en modifiant l'initialisation de la recherche du minimum.
4. Comment évolue la variable `nu` au fur et à mesure des itérations ?
5. Testez en modifiant la variable `nu` par une valeur constante inférieure à 1, par exemple `nu = 0.1`. Que se passe-t-il si elle est fixée à 1 ? Est-ce spécifique à la fonction choisie ?

Exercice 3. Descente de gradient pour trouver le minimum d'un polynôme

1. On choisit comme exemple le polynôme $30 - 61x + 41x^2 - 11x^3 + x^4$. Ecrivez un script Matlab qui affiche ce polynome entre 0 et 6 et qui montre les étapes de la descente de gradient à partir de la valeur initiale 5.
2. Changez la valeur initiale à 0.
3. Faites varier les paramètres de la descente de gradient (atténuation, test d'arrêt) et commentez le comportement de l'algorithme.

Exercice 4. Descente de gradient pour trouver le minimum d'une surface

1. On choisit comme exemple la fonction définie par $f(x, y) = (x-1)(x-2)+(y+3)(y+4)$. Visualisez la surface correspondante avec x et y variant entre -8 et 8. Quelles sont les coordonnées du minimum ?
2. Ecrivez une fonction Matlab `animationDescenteSurface(pdep)` qui affiche cette surface sous forme de contours vus "du dessus" (utilisez la fonction `contour`) et qui montre les étapes de la descente de gradient à partir du point initial `pdep`.

3. Testez avec comme point initial `pdep = [1 -5]` puis `[-1 -3]`, `[-1 -5]` et `[2 -4]`.

Exercice 5. Application : régression linéaire

Comme dans le TD 1, on cherche la droite de régression linéaire correspondant à un nuage de points 2D $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\}$. C'est la droite $y = \theta_1 x + \theta_0$ qui minimise le critère suivant :

$$\frac{1}{m} \sum (\theta_0 + \theta_1 x_i - y_i)^2$$

Autrement dit on cherche à minimiser la moyenne des distances verticales entre chaque point du nuage et la droite. Utilisez une descente de gradient (en 2D) pour trouver les caractéristiques θ_0 et θ_1 de la droite de régression linéaire correspondant à un nuage de points généré comme dans le TD1. Vérifiez votre résultat en utilisant une des méthodes de calcul direct du TD1.