

Algebraične strukture

- **grupoid** (M, \circ) urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo \circ .
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M \ \forall x \in M : e \circ x = x \circ e = x$.
- **grupa** monoid v katerem ima vsak element inverz $\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \circ y = y \circ x$.

- **kolobar** urejena trojica $(M, +, \cdot)$ z neprazno množico M in dvema operatorjema.
 - $(M, +)$ je abelova grupa
 - $(M - \{0\}, \cdot)$ je polgrupa
 - operaciji sta distributivni $\forall x, y, z \in M : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

- **kolobar z enoto** kolobar v katerem je (M, \cdot) monoid.

- **komutativen kolobar** kolobar v katerem je (M, \cdot) komutativna polgrupa.

- **obseg** urejena trojica $(M, +, \cdot)$ z neprazno množico M in dvema operatorjema.
 - $(M, +)$ je abelova grupa
 - $(M - \{0\}, \cdot)$ je grupa
 - operaciji sta distributivni $\forall x, y, z \in M : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

- **polje** obseg kjer je (M, \cdot) komutativen monoid.

- **podgrupoid** (H, \circ) je podgrupoid od grupoida (G, \circ) , če $H \subset G$ in $\forall x, y \in H : x \circ y \in H$

- **homomorfizem** je funkcija $\varphi : (G_1, \circ_1) \rightarrow (G_2, \circ_2)$ tako, da velja $\forall a, b \in G_1 : \varphi(a \circ_1 b) = \varphi(a) \circ_2 \varphi(b)$
- **izomorfizem** je homomorfizem $\varphi : (G_1, \circ_1) \rightarrow (G_2, \circ_2)$ za katerega obstaja taka $\Psi : (G_2, \circ_2) \rightarrow (G_1, \circ_1)$, da je $\varphi \circ \Psi = id_{G_2}$ in $\Psi \circ \varphi = id_{G_1}$
Homomorfizem je izomorfizem \Leftrightarrow ko je bijektiven.
- **endomorfizem** je homomorfizem, ki slika sam vase.

- **vektorski prostor** nad obsegom F je urejena trojka $(V, +, \cdot)$ kjer je V neprazna množica.
 $+$ je operacija na V , ki zadošča lastnostim:
 - asociativnost $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - komutativnost $a + b = b + a$
 - obstoj enote $\exists 0 \in V \ \forall a \in V : 0 + a = a$

- obstoj inverza $\forall a \in V \ \exists -a \in V : a + (-a) = 0$

\cdot je preslikava $\cdot : F \times V \rightarrow V$, ki zadošča lastnostim:

- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in F \ \forall a, b \in V$
- $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in F \ \forall a \in V$
- $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \quad \forall \alpha, \beta \in F \ \forall a \in V$
- $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$

Definicija vektorskega prostora nam pove, da je $(V, +)$ *Abelova grupa*.

Preslikava $\varphi_\alpha(a + b) = \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b = \varphi_\alpha(a) + \varphi_\alpha(b)$ je *endomorfizem* grupe $(V, +)$ ($\varphi_\alpha \in \text{End}(V, +)$).

Vektorski porstor V nad obsegom F je *Abelova grupa* $(V, +)$ skupaj s homomorfizmom kolobarjev z enico $\varphi : F \rightarrow \text{End}(V, +)$

- **modul** nad F je podoben vektorskemu porstoru le, da je F kolobar.

Baze vektorskih prostorov

Linearna ogrinjača množice $S \subset V$ predstavlja vse linearne kombinacije elementov S .

$$\text{Lin}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid v_1, \dots, v_n \in S \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F\}$$

Množica S je **ogrodje** za V , če velja $\text{Lin}(S) = V$.

Vektorski prostor V je **končno razsežen** (KVRP), če ima končno ogrodje.

Množica $S \subset V$ je **linearno odvisna**, če obsatjajo taki elementi $v_1, \dots, v_n \in S$ in $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, ki niso vsi nič, da velja $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

Množica, ki ni linearno odvisna je **linearno neodvisna**.

Množica $S \subset V$ je **baza**, če je *ogrodje* in *linearno neodvisna*.

Vsak vektorski prostor ima bazo.

Vsak KVRP ima končno bazo.

Dimenzija vektorskega prostora

Naj bo V KVRP in B njegova baza.

$$\dim(V) = |B|$$

Dimenzija KVRP je moč njegove beze.

Če ima KVRP V *ogrodje* iz n elementov, je vsaka podmnožica v V , ki ima več kot n elementov *linearno odvisna*.

Vse baze za V imajo enako moč. Zato lahko definiramo **dimenzijo** KVRP kot moč poljubne baze.

Dopolnitev linearno neodvisne množce do baze

Naj bo V KVRP dimenzije n .

Linearno neodvisna podmnožica, ki ima n elementov je baza za V . Vsako linearno neodvisno množivo, ki ima manj kot n elamentov lahko dopolnimo do baze V .

Če je $\{v_1, \dots, v_m\}$ linearno neodvisna podmnožica V in če $v_{m+1} \notin \{v_1, \dots, v_m\}$, je tudi $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ linearno neodvisna podmnožica V .

Vektorski podprostori

Naj bo V vektorski prostor nad poljem F . Podmnožica $U \subseteq V$ je **vektorski podprostor**, če velja:

- $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$
- $u \in U \ \alpha \in F \implies \alpha u \in U$

Če je V KVRP, je vsak vektorski podprostor v V oblike $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_m\}$ za $v_1, \dots, v_m \in V$

Prehod na novo bazo

Naj bo V KVRP, naj bosta

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

bazi za V in naj bo v vektor.

$$[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1}$$

Če je \mathcal{S} standardna baza:

$$P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}} \cdot P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1} \cdot P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Linearne preslikave

$V, U \dots$ vektorska prostora nad istim obsegom F

Preslikava $L : U \rightarrow V$ je **linearna**, če

- je **aditivna** $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
aditivnost nam pove, da je L homomorfizem grup $(U, +)$ in $(V, +)$.
- in **homogena** $L(\alpha u) = \alpha L(u)$
homogenost nam pove, da je L spoštuje tudi množenje zato je homomorfizem vektorskih porstorov.

Ekvivalentna definicija: preslikava je linearna, če

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2)$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F \ \forall u_1, u_2 \in U$$

Kompozitum linearnih preslikav je tudi linearna preslikava.

Inverz bijektivne linearne preslikave je tudi linearna preslikava.

Matrika linearne preslikave

Vsako linearno preslikavo se da popisati z matriko.

$U \dots$ KVRP z bazo $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$

$V \dots$ KVRP z bazo $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$L : U \rightarrow V \dots$ linearna preslikava

$$[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [L(u_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [L(u_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

Za kompozitum linearnih preslikav velja:

$$[L_2 \circ L_1]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = [L_2]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \cdot [L_1]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Jedro in slika

Naj bosta U , V kvrp in naj bo $L : U \rightarrow V$ linearna preslikava.

- Jedro** L je množica $\operatorname{Ker}(L) := \{u \in U \mid L(u) = 0\}$
Jedro je vektorski podprostor v U .
- Slika** L je množica $\operatorname{Im}(L) := \{L(u) \mid u \in U\}$
Slika je vektorski podprostor v V .

Podobno sta definirana za matrike. Naj bo A $m \times n$ matrika nad F :

- Jedro** matrike A je množica $\operatorname{Ker}(L) := \{u \in F^n \mid Au = 0\}$
Jedro je ekvivalentno ničelnemu prostoru matrike.
- Slika** matrike A je množica $\operatorname{Im}(L) := \{Au \mid u \in F^n\}$
Slika je ekvivalentna stolpičnemu prostoru matrike.

Rang in ničelnost

Naj bo $L : U \rightarrow V$ linearna preslikava.

- ničenost** preslikave L je število $n(L) = \dim \operatorname{Ker}(L)$
- rang** preslikave L je število $r(L) = \operatorname{rang}(L) = \dim \operatorname{Im}(L)$

Če L zamenjamo z $L_A : F^n \rightarrow F^n$; $L_A(x) = Ax$, dobimo definicijo za rang in ničelnost matrike A .

$$L \text{ je injektivna} \iff \operatorname{Ker} L = 0 \iff n(L) = 0$$

$$L \text{ je surjektivna} \iff \operatorname{Im} L = V \iff \operatorname{rang}(L) = \dim V$$

$$\operatorname{rang}(L) + n(L) = \dim(U)$$

Ekvivalentnost matrik

Matriki A in B sta **ekvivalentni**, če obstajata taki obrnljivi matriki P in Q , da velja

$$B = PAQ$$

Ekvivalentnost matrik je *ekvivalenčna* relacija; če je A ekvivalentna B je tudi B ekvivalentna A .

Vsaka matrika A je ekvivalentna matriki $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ kjer je $r = r(A)$.

Matriki A in B sta **ekvivalentni** \iff ko sta enakih dimenzij in imata enak rang.

Podobnost matrik

Matirki $A, B \in M_n(F)$ sta podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika $P \in M_n(F)$, da velja:

$$B = PAP^{-1}$$

Podobnost matrike je *ekvivalenčna* relacija.

Iz *podobnosti* očitno sledi *ekvivalenčnost* matrik, obratno pa ne drži.

Podobne matirke imajo enak karakteristični polinom, determinanto, lastne vrednosti, lastne vektorje, ...

Lastni problem

Naj bo $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$ in $v \in F^n$.

$$Av = \lambda v$$

Skalar λ je **lastna vrednost** matrike A , če obstaja tak neničeln vektor v , da velja zgornja enačba. Takemu vektorju rečemo **lastni vektor**, ki propada lastni vrednosti λ .

Množica vseh lastnih vektorjev matrike A , ki pripadajo lastni vrednosti λ je $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$. Ta množica je vedno neskončna, ker je vsak večkratnik lastnega vektorja spet lastni vektor.

Če je λ lastna vrednost matrike A , je $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ **lastni podprostor** matirke A za lastno vrednost λ . Njegovi dimenziji pravimo **geometrijska večkratnost** lastne vrednosti. **Lastne vrednosti** matrike A so ničle **karakterističnega polinoma**

$$p_A(x) = \det(A - xI)$$

Če je lastna vrednost λ m -kratna ničla p_A , je njena **algebraična večkratnost** enaka m .

Diagonalizacija

Diagonalizacija matrike A je razcep $A = PDP^{-1}$, kjer je P obrnljiva, D pa diagonalna matrika. Če ima $n \times n$ matrika A n LN lastnih vektorjev, je diagonalizacija možna. V tem primeru so diagonalni elementi matrike D ravno lastne vrednosti matrike A , stolpci matrike P pa lastni vektorji, ki se ujemajo z lastnimi vrednostmi v stolpcih.

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- matrika A ima diagonalizacijo
- matrika A je podobna diagonalni matriki
- matrika A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev
- vsota lstnih podprostorov matrike A je \mathbb{C}^n
- za vsako lastno vrednost se ujemata *geometrijska* in *algebraična* večkratnost
- naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti: $(A - \lambda_1 I) \cdot \dots \cdot (A - \lambda_k I) = 0$
- minimalni polinom m_A nima nibene večkratne ničle

Če ima matrika A n različnih lastnih vrednosti \implies ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev \implies ima diagonalizacijo.

Minimalni polinom

Polinom $m \in \mathbb{C}[x]$ je minimalni polinom matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, če velja:

- $m(A) = 0$
- m ima vodilni koeficient 1
- med vsemi polinomi, ki zadoščajo zgornjima pogojem, ima m najnižjo stopnjo

Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paorma različne lastne vrednosti matrike A .

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k}$$

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x - \lambda_k)^{r_k}$$

$\operatorname{Ker} m_A$ deli p_A in ker je vasaka lastna vrednost ničla m_A , je

$$1 \leq r_i \leq n_i; \quad i = 1, \dots, k$$

Korenski podprostori

Korenki podprostor matrike A za lastno vrednost λ_i je množica

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$$

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)}_{\text{lastni podprostor}} \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^2 \subset \dots \subset \underbrace{\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}}_{\text{korenski podprostor}} \\ = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i+1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i+2} = \dots$$

Dimenzija korenkega prostora je enaka *alegebraični večkratnosti* lastene vrednosti.

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i} = n_i$$

Vsota vseh koronskih podprostorov je \mathbb{C}^n

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$$

Vektorski prostor $U \subset \mathbb{C}^n$ je **invarianten** na matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$, če

$$\forall u \in U : Au \in U$$

Lastni in korenski podprostor matrike A sta invariantna na A . Vsak netrivialen ($\neq \{0\}$) invarianten podprostor matrike A vsebuje vsaj en lastni vektor.

Presek dveh korenskih podprostorov matrike je trivialen ($\{0\}$).

Jordanska končna forma

Jordanska kletka je matrika oblike:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Jordanska matrika je matrika oblike

$$\begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & J_m \end{bmatrix} \quad J_1, \dots, J_m \text{ so jordanske kletke}$$

Vsaka kompleksna kvadratna matrika A je podobna kaki jordanki matirki J . Pravimo, da je J **jordanska kanonična forma** za A .

$$A = PJP^{-1}$$

J je jordanska matrika, ki vsebuje jordaske kletke velikosti jordanske verige in s propadajočimi lastnimi vrednostmi A . P je prehodna matrika, katere stolpci so povrsti zloženi elementi jordankih verig lastne vrednosti, ki je v J v istoležnem stolpcu. Iz jodranske matrike J lahko preberemo:

- algebraične večkratnosti** lastne vrednosti - kolikokrat se le ta pojavi na diagonali
- geometrijske večkratnosti** lastne vrednosti - število kletk lastne vrednosti
- večkratnost lastne vrednosti v **min. polinomu** - največja kletka lastne vrednosti

- število linearno neodvisnih **lastnih vektorjev** matrike - število kletk

Jordanska veriga (za lastno vrednost λ matrike A) dolžine k je tako zaporedje vektorjev v_1, \dots, v_k , da velja

$$(A - \lambda I)v_1 = 0, \quad (A - \lambda I)v_2 = v_1, \dots, \quad (A - \lambda I)v_k = v_{k-1}$$

Jordanska baza je baza, ki je unija jordanskih verig.

Iskanje jordanskih verig

Iščemo jordanske verige za lastno vrednost λ matrike A .

Najprej izračunamo vse podprostore od *lastnega* do *korenskega*. $A - \lambda I$ označimo z N .

Nato sestavimo urejene množice C_r, \dots, C_1 . C_i sestavimo tako, da vzamemo vse elementi iz C_{i-1} in jih pomnožimo z matriko N . Nato izberemo vektorje, ki te elemente in $\text{Ker} N^i$ dopolnijo do baze za $\text{Ker} N^{i-1}$.

$$\begin{aligned} C_r &= \text{baza} \left(\text{Ker} N^r \setminus \text{Ker} N^{r-1} \right) \\ C_{r-1} &= N(C_r) \cup \text{baza} \left(\text{Ker} N^{r-1} \setminus (\text{Ker} N^{r-2} \cup \text{Lin} N C_r) \right) \\ C_{r-2} &= N(C_{r-1}) \cup \text{baza} \left(\text{Ker} N^{r-2} \setminus (\text{Ker} N^{r-3} \cup \text{Lin} N C_{r-1}) \right) \\ &\vdots \\ C_2 &= N(C_3) \cup \text{baza} \left(\text{Ker} N^2 \setminus (\text{Ker} N \cup \text{Lin} N C_3) \right) \\ C_1 &= N(C_2) \cup \text{baza} \left(\text{Ker} N \setminus \text{Lin} N C_2 \right) \end{aligned}$$

i. jordansko verigo dobimo tako, da vzamemo *i.* elemente iz C_1, \dots, C_r .

Funkcije matrik

Če poznamo recept $A = PJP^{-1}$ matrike A se računje potenc A^n prevede na računanje potenc posameznih jordanskih kletk.

Formula za potenciranje $k \times k$ jordaske kletke

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^n & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \dots & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Formula za funkcijo $k \times k$ jordanske kletke

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ \vdots & & & \ddots & f'(\lambda) \\ 0 & \dots & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom \mathbb{C} .

Skalarni produkt je prelikava, ki paru $u, v \in V$ priredi skalar $\langle u, v \rangle$ in zadošča lastnostim:

- pozitivna definitnost $\forall v \in V, v \neq 0 : \langle v, v \rangle \in \mathbb{R} \text{ in } \langle v, v \rangle > 0$
- konjugirana simetričnost $\forall u, v \in V : \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
- linearnost v prvem faktorju $\forall u_1, u_2, v \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} : \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$

Posledice:

- konjugirana linearnost v drugem faktorju $\forall u, v_1, v_2 \in V, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C} : \langle u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle = \beta_1 \langle u, v_1 \rangle + \beta_2 \langle u, v_2 \rangle$
- $\forall v \in V : \langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$
- $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$
- $\langle 0, 0 \rangle = 0$

Standardni skalarni produkt

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \dots + \alpha_n \overline{\beta_n}$$

Norma iz skalarnega produkta

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Cauchy-Schwartzova neenakost

$$|\langle v, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Osnovne lastnosti norme

- $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$
- $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- $\forall u, v \in V : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (trikotniška neenakost)

Zveza med slakarnim produktom in normo (polarizacijske identitete)

Če je V KVRP nad \mathbb{R}

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

Če je V KVRP nad \mathbb{C}

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u + i^k v\|^2$$

Vektorski prostori s skalarnim produkton

- **Orotgonalna množica** je množica v kateri so vsi vektorji pravokotni in noben ni 0.

$$\forall u, v \in M, u \neq 0, v \neq 0 : \langle u, v \rangle = 0$$

Vsaka orotogonalna množica je *linearno neodvisna*.

- **Normirana množica** je množica v kateri so vsi vektorji dolžine 1.

$$\forall u \in M : \|u\| = 1$$

Množico normiramo tako, da vse vektorje delimo z njihovo normo

$$\{v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

- **Ortonormirana množica** je *orotgonalna* in *normalna*.

- Orotgonalna množica v V , ki je *ogrodje* za V je **ortogonalna baza** za V .

Vsak KVRP ima *ortogonalno bazo*. Vsako ortogonalno množico lahko dopolnimo do ortogonalne baze.

Furierov razvoj

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonalna baza za V .

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}_{\alpha_i} v_i$$

Če je ta baza orotnormirana, velja:

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$$

Parsevalova identiteta

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonalna baza za V .

$$\forall v \in V : \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Če je ta baza orotnormirana, velja:

$$\forall v \in V : \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$$

Ortogonalna projekcija

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $W \subset V$ vektorski podprostor z ortogonalno bazo $\{w_1, \dots, w_k\}$. Ortogonalna projekcija vektorja $v \in V$ na podprostor W :

$$v' = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *ortogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev v_1, \dots, v_k , uporabimo postopek:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$

Orotogonalni komplement

Naj bo *V* vektorski prostor s skalarnim produktom. Podmnožici *S* ⊆ *V* in *T* ⊆ *V* sta **pravokotni** (*S*⊥*T*), če so vis njuni elementi paroma pravokotni.

Ce je *S*⊥*T*:

- T*⊥*S*
- ∀*S'* ⊆ *S* : *S'*⊥*T*
- Lin*S*⊥Lin*T*
- S* ∩ *T* ⊆ {0}

Orotogonalni komplement množice *S* ⊆ *V* (*S*[⊥]) je največja podmnožica v *V*, ki je pravokotna na *S*.

$$\forall S \subseteq V: S^\perp = \{v \in V \mid \{v\} \perp S\}$$

$$\forall S \subseteq V: S^\perp = (\operatorname{Lin} S)^\perp$$

Ortogonalni razcep

Naj bo *V* KVRP skalarnim produktom in *U* ⊂ *V* podprostor. Potem velja naslednje:

- dim*U*[⊥] = dim*V* − dim*U*
- (*U*[⊥])[⊥] = *U*
- V* = *U* ⊕ *U*[⊥] (ortogonalni razcep prostora *V* glede na *U*)

Linearni funkcionali

Linearni funkcional je *linearna preslikava* iz vektorskega prostora *V* na obseg (tudi vektorski prostor) *F*¹.

$$L:V\rightarrow F$$

Naj bo *B* = {*v*₁, ..., *v*_{*n*}} baza za *V* in *S* = {1} baza za *F*. Matrika linearnega funkcionala je potem [*L*]_{*S*←*B* = {*L*(*v*₁), ..., *L*(*v*_{*n*})}}

Reiszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov

Za KVRP *V* s skalarnim produktom in linearno preslikavo

L : *V* → *F* velja:

$$\exists w \in V \; \forall v \in V: \; L(v) = \langle v, w \rangle$$

Adjugirana linearna preslikava

Naj bo *L* : *U* → *V* linearna preslikava med dvema vektorskima prostoroma s skalarnim produktom. Linearna preslikava *L*^{*} : *V* → *U* je **adjugirana linearna preslikava** preslikave *L* če velja:

$$\langle Lu,v \rangle_V = \langle u,L^*v \rangle_U$$

Vsaka linearna preslikava ima točno eno adjugirana preslikavo.

Lastnosti adjugirane linearne preslikave

- Ker*L*^{*} = (Im*L*)[⊥]
- Im*L* = (Ker*L*^{*})[⊥]
- Ker*L* = (Im*L*^{*})[⊥]
- Im*L*^{*} = (Ker*L*)[⊥]
- (*L*^{*}*L*)^{*} = *L*^{*}*L* in (*LL*^{*})^{*} = *LL*^{*}
- Ker*L*^{*}*L* = (Ker*L*)

Prve 4 formule veljajo tudi za matrike, pri čemer se orotogonalni komplement nanaša na standardni skalarni produkt.

Matrika adjugirane linearne preslikave

U ... KVRP z *ortonormirano* bazo *B*

V ... KVRP z *ortonormirano* bazo *C*

L : *U* → *V* ... linearna preslikava

L^{*} : *V* → *U* ... njena adjugirana linearna preslikava

Matriko [*L*^{*}]_{*B*←*C* dobimo tako, da v matriki [*L*]_{*C*←*B* vse elemente konjugiramo in doblejeno matriko transponiramo.}}

Adjugirana matrika

Naj bo *A* kompleksna *m* × *n* matrika in   *A*[∗] matrika *A* z konjugiranimi elamenti.

$$A^* = (\overline{A})^T$$

Lastnosti adjugiranja

- (α*A* + β*B*)^{*} = α*A*^{*} + β*B*^{*}
- (*A*^{*})^{*} = *A*
- (*AB*)^{*} = *B*^{*}*A*^{*}
- 0^{*} = 0, *I*^{*} = *I*

Lastne vrednosti adjugirane preslikave

λ je lastna vrednost *A* ⇔  *λ*[¯] lastna vrednost *A*^{*}

Normalne matrike

Kompleksna matrika *A* je **normalna**, če velja *A*^{*}*A* = *AA*^{*}.

Vsaka normalna matrika je kvadratna.

Vsaka normalna matrika je podobna diagonalni matriki.

Lastni podprostorι normalne matrike so poraoma ortogonalni.

A je normalna ⇔ ∃*P*,*D* (diagonalna) : *A* = *PDP*^{−1} in *P*^{−1} = *P*^{*}

Izometirje

Izometirje so preslikave, ki ohranjajo razdaljo.

Naj bosta *U* in *V* KVRP s skalarnim produktom. Linearna

preslikava *L* : *U* → *V* je izometrija, če

$$\forall u \in U: \|Lu\|_V = \|u\|_U$$

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- L* je izometrija
- ⟨*Lu*, *Lu'*⟩_{*V*} = ⟨*u*, *u'*⟩_{*U*} za ∀*u*, *u'* ∈ *U*
- L*^{*}*L* = *id*_{*U*}
- Za vsako ortonormirano bazo {*u*₁, ..., *u*_{*n*}} v *U* je {*Lu*₁, ..., *Lu*_{*n*}} ortonormirana množica v *V*.

Če imamo KVRP *V* in *U* z *orotonormiranima* bazama *B* in *C*, je *L* : *U* → *V* izometrija natanko tedaj, ko za njeno matriko

A = [*L*]_{*C*←*B* velja *A*^{*}*A* = *I*.}

Ortogonalne in unitarne matrike

Kompleksni matriki *A*, ki zadošča *A*^{*}*A* = *I* pravimo **unitarna**.

Realni unitarni matriki pravimo **ortogonalna**.

Za kvadratne matrike iz *A*^{*}*A* = *I* sledi *AA*^{*} = *I*. Odtod sledijo lastnosti:

- Vsaka unitarna matrika je normalna
- Vsaka unitarna matrika je obrnljiva in *A*^{−1} = *A*^{*}
- Če je *A* unitarna je tudi *A*^{*} unitarna.

Grupe:

- GL(*n*,*F*) **splošna linearna grupa** - gurpa vseh obrnljivih *n* × *n* matrik.
- SL(*n*,*F*) **specialna linearna grupa** - gurpa vseh obrnljivih *n* × *n* matrik z det 1.
- U(*n*) **splošna unitarna grupa** - gurpa vseh unitarnih *n* × *n* matrik.
- SU(*n*) **specialna unitarna grupa** - gurpa vseh unitarnih *n* × *n* matrik z det 1.
- O(*n*) **splošna ortogonalna grupa** - gurpa vseh ortogonalnih *n* × *n* matrik.
- SO(*n*) **specialna orotogonalna grupa** - gurpa vseh orotogonalnih *n* × *n* matrik z det 1.

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{GL}(n,\mathbb{C}) & \supset & \operatorname{U}(n) & & \operatorname{GL}(n,\mathbb{R}) & \supset & \operatorname{O}(n) \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ \operatorname{SL}(n,\mathbb{C}) & \supset & \operatorname{SU}(n) & & \operatorname{SL}(n,\mathbb{R}) & \supset & \operatorname{SO}(n) \end{array}$$

Lastne vrednosti *unitarne matrike* imajo absolutno vrednost 1. Različnim lastnim vrednostim unitarne matrike pripadajo *ortogonalni* lastni vektorji.

Simetričen in hermitske matrike

Linearna preslikava *L* : *U* → *V* je **sebiadjugirana**, če velja *L* = *L*^{*}.

Kompleksna matrika *A* je **hermitska** če *A* = *A*^{*}. Realnim

hermitskima matrikam rečemo **simetrične**.

Kompleksna matrika je *hermitska* ⇔ ko obstaja taka unitarna

matrika *P* in realana matrika *D*, da *A* = *PDP*^{−1}.

Realna matrika je *simetrična* ⇔ ko obstaja taka orotogonalna matrika *P* in realana diagonalna matrika *D*, da *A* = *PDP*^{−1}.

Determinanta

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb \qquad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Determinanta gornjetrikotne matrike je zmnožek diagonalnih elementov.

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

Sled

Sled matrike je vsota vseh diagonalnih elementov.

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Transponiranje

$$(A+B)^T = A^T + B^T \qquad (AB)^T = B^T A^T$$

Vektorski produkt

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = -(b \times a)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$[a,b,c] = \langle a,b \times c \rangle$$

[*a*,*b*,*c*] = −[*c*,*b*,*a*] Če zamenjamo 2 parametra se rezultat negira.