

Algebraične strukture

- grupoid** (M, \circ) urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo \circ .
- polgrupa** grupoid z asociativno operacijo

$\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$
- monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M \ \forall x \in M : e \circ x = x \circ e = x$.
- grupa** monoid v katerem ima vsak element inverz

$\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e.$
- abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \circ y = y \circ x$.

-
- kolobar** urejena trojica $(M, +, \cdot)$ z neprazno množico M in dvema operatorjema.

- $(M, +)$ je abelova grupa
 - $(M - \{0\}, \cdot)$ je polgrupa
 - operaciji sta distributivni $\forall x, y, z \in M : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
 - kolobar z enoto** kolobar v katerem je (M, \cdot) monoid.
 - komutativen kolobar** kolobar v katerem je (M, \cdot) komutativna polgrupa.
 - obseg** urejena trojica $(M, +, \cdot)$ z neprazno množico M in dvema operatorjema.

- $(M, +)$ je abelova grupa
 - $(M - \{0\}, \cdot)$ je grupa
 - operaciji sta distributivni $\forall x, y, z \in M : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
 - polje** obseg kjer je (M, \cdot) komutativen monoid.

-
- podgrupoid** (H, \circ) je podgrupoid od grupoida (G, \circ) , če $H \subset G$ in $\forall x, y \in H : x \circ y \in H$
 - homomorfizem** je funkcija $\varphi : (G_1, \circ_1) \rightarrow (G_2, \circ_2)$ tako, da velja $\forall a, b \in G_1 : \varphi(a \circ_1 b) = \varphi(a) \circ_2 \varphi(b)$
 - izomorfizem** je homomorfizem $\varphi : (G_1, \circ_1) \rightarrow (G_2, \circ_2)$ za katerega obstaja taka $\Psi : (G_2, \circ_2) \rightarrow (G_1, \circ_1)$, da je $\varphi \circ \Psi = id_{G_2}$ in $\Psi \circ \varphi = id_{G_1}$

Homomorfizem je izomorfizem \Leftrightarrow ko je bijektiven.
 - endomorfizem** je homomorfizem, ki slika sam vase.

-
- vektorski prostor** nad obsegom F je urejena trojka $(V, +, \cdot)$ kjer je V neprazna množica.

$+$ je preslikava $\cdot : F \times V \rightarrow V$, ki zadošča lastnostim:

- asociativnost $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - komutativnost $a + b = b + a$
 - obstoj enote $\exists 0 \in V \ \forall a \in V : 0 + a = a$
 - obstoj inverza $\forall a \in V \ \exists -a \in V : a + (-a) = 0$

\cdot je preslikava $\cdot : F \times V \rightarrow V$, ki zadošča lastnostim:

- $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in F \ \forall a, b \in V$
 - $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in F \ \forall a \in V$
 - $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \quad \forall \alpha, \beta \in F \ \forall a \in V$
 - $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$

Definicija vektorskega prostora nam pove, da je $(V, +)$ *Abelova grupa*.

Preslikava $\varphi_\alpha(a + b) = \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b = \varphi_\alpha(a) + \varphi_\alpha(b)$ je *endomorfizem* grupe $(V, +)$ ($\varphi_\alpha \in \text{End}(V, +)$).

Vektorski porstor V nad obsegom F je *Abelova grupa* $(V, +)$ skupaj s homomorfizmom kolobarjev z enico $\varphi : F \rightarrow \text{End}(V, +)$

- modul** nad F je podoben vektorskemu porstoru le, da je F kolobar.

Baze vektorskih prostorov

Linearna ogrinjača množice $S \subset V$ predstavlja vse linearne kombinacije elementov S .

$$\text{Lin}(S) = \{\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n \mid v_1, ..., v_n \in S \ \alpha_1, ..., \alpha_n \in F\}$$

Množica S je **ogrodje** za V , če velja $\text{Lin}(S) = V$.

Vektorski prostor V je **končno razsežen** (KVRP), če ima končno ogrodje.

Množica $S \subset V$ je **linearno odvisna**, če obstatjajo taki elementi $v_1, ..., v_n \in S$ in $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$, ki niso vsi nič, da velja $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$

Množica, ki ni linearno odvisna je **linearno neodvisna**.

Množica $S \subset V$ je **baza**, če je *ogrodje* in *linearno neodvisna*.

Vsak vektorski prostor ima bazo.

Vsak KVRP ima končno bazo.

Dimenzija vektorskega prostora

Naj bo V KVRP in B njegova baza.

$$\text{dim}(V) = |B|$$

Dimenzija KVRP je moč njegove beze.

Če ima KVRP V *ogrodje* iz n elementov, je vsaka podmnožica v v V , ki ima več kot n elementov *linearno odvisna*.

Vse baze za V imajo enako moč. Zato lahko definiramo **dimenzijo** KVRP kot moč poljubne baze.

Dopolnitev linearno neodvisne množce do baze

Naj bo V KVRP dimenzije n .

Linearno neodvisna podmnožica, ki ima n elementov je baza za V .

Vsako linearno neodvisno množivo, ki ima manj kot n elamentov lahko dopolnimo do baze V .

Če je $\{v_1, ..., v_m\}$ linearno neodvisna podmnožica V in če $v_{m+1} \notin \{v_1, ..., v_m\}$, je tudi $\{v_1, ..., v_m, v_{m+1}\}$ linearno neodvisna podmnožica V .

Vektorski podprostori

Naj bo V vektorski prostor nad poljem F . Podmnožica $U \subseteq V$ je **vektorski podprostor**, če velja:

- $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$
- $u \in U \ \alpha \in F \implies \alpha u \in U$

Če je V KVRP, je vsak vektorski podprostor v V oblike $\text{Lin}\{v_1, ..., v_m\}$ za $v_1, ..., v_m \in V$

Prehod na novo bazo

Naj bo V KVRP, naj bosta

$$\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$$

$$\mathcal{C} = \{v_1, ..., v_n\}$$

bazi za V in naj bo v vektor.

$$v = \beta_1 u_1 + ... + \beta_n u_n$$

$$v = \gamma_1 v_1 + ... + \gamma_n v_n$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,n} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1}$$

Če je \mathcal{S} standardna baza:

$$P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}} \cdot P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1} \cdot P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Linearne preslikave

$V, U \dots$ vektorska prostora nad istim obsegom F

Preslikava $L : U \rightarrow V$ je **linearna**, če

- je **aditivna** $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$

aditivnost nam pove, da je L homomorfizem grup (U, +) in (V, +).
- in **homogena** $L(\alpha u) = \alpha L(u)$

homogenost nam pove, da je L spoštuje tudi množenje zato je homomorfizem vektorskih porstorov.

Ekvivalentna definicija: preslikava je linearna, če

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2)$$

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F \ \forall u_1, u_2 \in U$$

Kompozitum linearnih preslikav je tudi linearna preslikava.

Inverz bijektivne linearne preslikave je tudi linearna preslikava.

Matrika linearne preslikave

Vsako linearno preslikavo se da popisati z matriko.

$U \dots$ KVRP z bazo $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$

$V \dots$ KVRP z bazo $\mathcal{C} = \{v_1, ..., v_n\}$

$L : U \rightarrow V \dots$ linearna preslikava

$$[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[L(u_1)]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [L(u_n)]_{\mathcal{C}}]$$

Za kompozitum linearnih preslikav velja:

$$[L_2 \circ L_1]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = [L_2]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \cdot [L_1]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Jedro in slika

Naj bosta U, V kvrp in naj bo $L : U \rightarrow V$ linearna preslikava.

- Jedro** L je množica $\text{Ker}(L) := \{u \in U | L(u) = 0\}$

Jedro je vektorski podprostor v U .
- Slika** L je množica $\text{Im}(L) := \{L(u) | u \in U\}$

Slika je vektorski podprostor v V .

Podobno sta definirana za matrike. Naj bo A $m \times n$ matrika nad F :

- Jedro** matrike A je množica $\text{Ker}(L) := \{u \in F^n | Au = 0\}$

Jedro je ekvivalentno ničelnemu prostoru matrike.
- Slika** matrike A je množica $\text{Im}(L) := \{Au | u \in F^n\}$

Slika je ekvivalentna stolpičnemu prostoru matrike.

Rang in ničelnost

Naj bo $L : U \rightarrow V$ linearna preslikava.

- ničenost** preslikave L je število $n(L) = \text{dimKer}(L)$

- rang** preslikave L je število $\text{r}(L) = \text{rang}(L) = \text{dimIm}(L)$

Če L zamenjamo z $L_A : F^n \rightarrow F^n$; $L_A(x) = Ax$, dobimo definicijo za rang in ničelnost matrike A .

$$L \text{ je injektivna} \Leftrightarrow \text{Ker} L = 0 \Leftrightarrow n(L) = 0$$

$$L \text{ je surjektivna} \Leftrightarrow \text{Im} L = V \Leftrightarrow \text{rang}(L) = \text{dim} V$$

$$\text{rang}(L) + n(L) = \text{dim}(U)$$

Ekvivalentnost matrik

Matriki A in B sta **ekvivalentni**, če obstajata taki obrnljivi matriki P in Q , da velja

$$B = PAQ$$

Ekvivalentnost matrik je *ekvivalenčna* relacija; če je A ekvivalentna B je tudi B ekvivalentna A.

Vsaka matrika A je ekvivalentna matriki $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ kjer je $r = r(A)$.

Matriki A in B sta **ekvivalentni** \Leftrightarrow ko sta enakih dimenzij in imata enak rang.

Podobnost matrik

Matirki $A, B \in M_n(F)$ sta podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika $P \in M_n(F)$, da velja:

$$B = PAP^{-1}$$

Podobnost matrike je *ekvivalenčna* relacija.

Iz *podobnosti* očitno sledi *ekvivalenčnost* matrik, obratno pa ne drži.

Podobne matirke imajo enak karakteristični polinom, determinanto, lastne vrednosti, lastne vektorje, ...

Lastni problem

Naj bo *A* ∈ *M*_{*n*}(*F*), λ ∈ *F* in *v* ∈ *F*^{*n*}.

$$Av = \lambda v$$

Skalar λ je **lastna vrednost** matrike *A*, če obstaja tak neničeln vektor *v*, da velja zgornja enačba. Takemu vektorju rečemo **lastni vektor**, ki propada lastni vrednosti λ.

Množica vseh lastnih vektorjev matrike *A*, ki pripadajo lastni vrednosti λ je Ker(*A* − λ*I*) ∖ {0}. Ta množica je vedno neskončna, ker je vsak večkratnik lastnega vektorja spet lastni vektor.

Če je λ lastna vrednost matrike *A*, je Ker(*A* − λ*I*) **lastni podprostor** matirke *A* za lastno vrednost λ. Njegovi dimenziji pravimo **geometrijska večkratnost** lastne vrednosti.

Lastne vrednosti matrike *A* so ničle **karakterističnega polinoma**

$$p_A(x) = \det(A - xI)$$

Če je lastna vrednost λ *m*-kratna ničla *p*_{*A*}, je njena **algebraična večkratnost** enaka *m*.

Diagonalizacija

Diagonalizacija matrike *A* je razcep *A* = *PDP*^{−1}, kjer je *P* obrnljiva, *D* pa diagonalna matrika.

Če ima *n* × *n* matrika *A* *n* LN lastnih vektorjev, je diagonalizacija možna. V tem primeru so diagonalni elementi matrike *D* ravno lastne vrednosti matrike *A*, stolpci matrike *P* pa lastni vektorji, ki se ujemajo z lastnimi vrednostmi v stolpcih.

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- matrika *A* ima diagonalizacijo
- matrika *A* je podobna diagonalni matriki
- matrika *A* ima *n* linearno neodvisnih lastnih vektorjev
- vsota lstnih podprostorov matrike *A* je ℂ^{*n*}
- za vsako lastno vrednost se ujemata *geometrijska* in *algebraična* večkratnost
- naj bodo λ₁, ..., λ_{*k*} vse paroma različne lastne vrednosti: (A − λ₁*I*) · ... · (A − λ_{*k*}) = 0
- minimalni polinom *m*_{*A*} nima nibene večkratne ničle

Če ima matrika *A* *n* različnih lastnih vrednosti ⟹ ima *n* linearno neodvisnih lastnih vektorjev ⟹ ima diagonalizacijo.

Minimalni polinom

Polinom *m* ∈ ℂ[*x*] je minimalni polinom matrike *A* ∈ *M*_{*n*}(ℂ), če velja:

- m*(*A*) = 0
- m* ima vodilni koeficient 1
- med vsemi polinomi, ki zadoščaja zgornjima pogojema, ima *m* najnižjo stopnjo

Naj bodo λ₁, ..., λ_{*k*} paorma različne lastne vrednosti matrike *A*.

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{n_k}$$

$$m_A(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k)^{r_k}$$

Ker *m*_{*A*} deli *p*_{*A*} in ker je vasaka lastna vrednost ničla *m*_{*A*}, je

$$1 \leq r_i \leq n_i; \quad i = 1, ..., k$$

Korenski podprostori

Korenki podprostor matrike *A* za lastno vrednost λ_{*i*} je množica

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$$

$$\begin{array}{ccc} \overbrace{\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)}^{\text{lastni podprostor}} & \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^2 \subset \cdots \subset & \overbrace{\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}}^{\text{korenski podprostor}} \\ & = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i+1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i+2} = \ldots & \end{array}$$

Dimenzija korenkega prostora je enaka *alegebraični večkratnosti* lastene vrednosti.

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i} = n_i$$

Vsota vseh korenskih podprostorov je ℂ^{*n*}

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_1}$$

Vektorski prostor *U* ⊂ ℂ^{*n*} je **invarianten** na matriko *A* ∈ *M*_{*n*}(ℂ), če

$$\forall u \in U : Au \in U$$

Lastni in korenski podprostor matrike *A* sta invariantna na *A*.

Vsak netrivialen (≠ {0}) invarianten podprostor matrike *A* vsebuje vsaj en lastni vektor.

Presek dveh korenskih podprostorov matrike je trivialen ({0}).

Jordanska končna forma

Jordanska kletka je matrika oblike:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

Jordanska matrika je matrika oblike

$$\begin{bmatrix} J_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & J_m \end{bmatrix}$$

$$J_1,...,J_m \text{ so jordanske kletke}$$

Vsaka kompleksna kvadratna matrika *A* je podobna kaki jordanki matirki *J*. Pravimo, da je *J* **jordanska kanonična forma** za *A*.

$$A = PJP^{-1}$$

J je jordanska matrika, ki vsebuje jordske kletke velikosti jordanske verige in s propadajočimi lastnimi vrednostmi *A*.

P je prehodna matrika, katere stolpci so povrsti zloženi elementi jordankih verig lastne vrednosti, ki je v *J* v istoležnem stolpcu.

Iz jodranske matrike *J* lahko preberemo:

- algebraične večkratnosti** lastne vrednosti - kolikokrat se le ta pojavi na diagonali
- geometrijske večkratnosti** lastne vrednosti - število kletk lastne vrednosti
- večkratnost lastne vrednosti v **min. polinomu** - največja kletka lastne vrednosti
- število linearno neodvisnih **lastnih vektorjev** matrike - število kletk

Jordanska veriga (za lastno vrednost λ matrike *A*) dolžine *k* je tako zaporedje vektorjev *v*₁, ..., *v*_{*k*}, da velja

$$(A - \lambda I)v_1 = 0, \; (A - \lambda I)v_2 = v_1, ..., \; (A - \lambda I)v_k = v_{k-1}$$

Jordanska baza je baza, ki je unija jordanskih verig.

Iskanje jordanskih verig

Iščemo jordanske verige za lastno vrednost λ matrike *A*.

Najprej izračunamo vse podprostore od *lastnega* do *korenskega*. *A* − λ*I* označimo z *N*.

Nato sestavimo urejene množice *C*_{*r*}, ...*C*₁. *C*_{*i*} sestavimo tako, da vzamemo vse elementi iz *C*_{*i*−1} in jih pomnožimo z matriko *N*. Nato izberemo vektorje, ki te elemente in Ker*N*^{*i*} dopolnijo do baze za Ker*N*^{*i*−1}.

$$C_r = \text{baza} \left(\operatorname{Ker} N^r \setminus \operatorname{Ker} N^{r-1} \right)$$

$$C_{r-1} = N \left(C_r \right) \cup \text{baza} \left(\operatorname{Ker} N^{r-1} \setminus \left(\operatorname{Ker} N^{r-2} \cup \operatorname{Lin} NC_r \right) \right)$$

$$C_{r-2} = N \left(C_{r-1} \right) \cup \text{baza} \left(\operatorname{Ker} N^{r-2} \setminus \left(\operatorname{Ker} N^{r-3} \cup \operatorname{Lin} NC_{r-1} \right) \right)$$

$$\vdots$$

$$C_2 = N \left(C_3 \right) \cup \text{baza} \left(\operatorname{Ker} N^2 \setminus \left(\operatorname{Ker} N \cup \operatorname{Lin} NC_3 \right) \right)$$

$$C_1 = N \left(C_2 \right) \cup \text{baza} \left(\operatorname{Ker} N \setminus \operatorname{Lin} NC_2 \right)$$

i. jordansko verigo dobimo tako, da vzamemo *i.* elemente iz *C*₁, ..., *C*_{*r*}.

Funkcije matrik

Če poznamo rezcep *A* = *PJP*^{−1} matrike *A* se računje potenc *A*^{*n*} prevede na računanje potenc posameznih jordanskih kletk.

Formula za potenciranje *k* × *k* **jordske kletke**

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \ldots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^n & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \ldots & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Formula za funkcijo *k* × *k* **jordanske kletke**

$$f(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \ldots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ & & & \ddots & f'(\lambda) \\ 0 & \ldots & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo *V* vektorski prostor nad obsegom ℂ.

Skalarni produkt je prelikava, ki paru *u*, *v* ∈ *V* priredi skalar ⟨*u*, *v*⟩ in zadošča lastnostim:

- pozitivna definitnost ∀*v* ∈ *V*, *v* ≠ 0 : ⟨*v*, *v*⟩ ∈ ℝ in ⟨*v*, *v*⟩ > 0
- konjugirana simetričnost ∀*u*, *v* ∈ *V* : ⟨*v*, *u*⟩ =  *u*,*v*
- linearnost v prvem faktorju
∀*u*₁, *u*₂, *v* ∈ *V*, α₁, α₂ ∈ ℂ : ⟨α₁*u*₁ + α₂*u*₂, *v*⟩ = α₁⟨*u*₁, *v*⟩ + α₂⟨*u*₂, *v*⟩

Posledice:

- konjugirana linearnost v drugem faktorju
∀*u*, *v*₁, *v*₂ ∈ *V*, β₁, β₂ ∈ ℂ : ⟨*u*, α₁*v*₁ + α₂*v*₂⟩ =  *u*,*v* +  *u*,*v*
- ∀*v* ∈ *V* : ⟨*v*, 0⟩ = ⟨0, *v*⟩ = 0
- ∀*v* ∈ *V* : ⟨*v*, *v*⟩ ≥ 0
- ⟨0, 0⟩ = 0

Standardni skalarni produkt

$$\langle (\alpha_1,...,\alpha_n),(\beta_1,...,\beta_n)\rangle = \alpha_1\overline{\beta_1} + \ldots + \alpha_n\overline{\beta_n}$$

Norma iz skalarnega produkta

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Cauchy-Schwartzova neenakost

$$|\langle v,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Osnovne lastnosti norme

- ∀*v* ∈ *V* : ‖*v*‖ > 0
- ∀*v* ∈ *V*, ∀α ∈ ℂ : ‖α*v*‖ = |α|‖*v*‖
- ∀*u*, *v* ∈ *V* : ‖*u* + *v*‖ < ‖*u*‖ + ‖*v*‖ (trikotniška neenakost)

Zveza med slakarnim produktom in normo (polarizacijske identitete)
Če je *V* KVRP nad ℝ

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

Če je *V* KVRP nad ℂ

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^3 i^k\|u+i^kv\|^2$$

Vektorski prostori s skalarnim produkton

- Orotgonalna množica** je množica v kateri so vsi vektorji pravokotni in noben ni 0.

$$\forall u,v\in M,u\neq 0,v\neq 0:\langle u,v\rangle=0$$

Vsaka orotogonalna množica je *linearno neodvisna*.

- Normirana množica** je množica v kateri so vsi vektorji dolžine 1.

$$\forall u\in M:\|u\|=1$$

Množico normiramo tako, da vse vektorje delimo z njihovo normo

$$\{v_1,...,v_n\}\rightarrow\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|},..., \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$$

- Ortonormirana množica** je *orotgonalna* in *normalna*.

- Orotgonalna množica v *V*, ki je *ogrodje* za *V* je **ortogonalna baza** za *V*. Vsak KVRP ima *ortogonalno bazo*. Vsako ortogonalno množico lahko dopolnimo do ortogonalne baze.

Furierov razvoj

Naj bo *V* vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1,...,v_n\}$ orotgonalna baza za *V*.

$$\forall v\in V:v=\sum_{i=1}^n\underbrace{\langle v,v_i\rangle}_{\alpha_i}v_i$$

Če je ta baza orotnormirana, velja:

$$\forall v\in V:v=\sum_{i=1}^n\langle v,v_i\rangle v_i$$

Parsevalova identiteta

Naj bo *V* vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1,...,v_n\}$ orotgonalna baza za *V*.

$$\forall v\in V:\|v\|^2=\sum_{i=1}^n\frac{|\langle v,v_i\rangle|^2}{\langle v_i,v_i\rangle}$$

Če je ta baza orotnormirana, velja:

$$\forall v\in V:\|v\|^2=\sum_{i=1}^n|\langle v,v_i\rangle|^2$$

Ortogonalna projekcija

Naj bo *V* vektorski prostor s skalarnim produktom in *W* ⊂ *V* vektorski podprostor z ortogonalno bazo $\{w_1,...,w_k\}$.

Ortogonalna projekcija vektorja *v* ∈ *V* na podprostor *W*:

$$v'=\sum_{i=1}^k\frac{\langle v,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja *v* na *u*

$$\mathrm{proj}_u(v)=\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}u$$

Če želimo *ortogonalizirati* *k* linearno neodvisnih vektorjev *v*₁, ..., *v*_{*k*}, uporabimo postopek:

$$\begin{array}{l} u_1=v_1\\ u_2=v_2-\mathrm{proj}_{u_1}(v_2)\\ u_3=v_3-\mathrm{proj}_{u_1}(v_3)-\mathrm{proj}_{u_2}(v_3)\\ \vdots\\ u_k=v_k-\sum_{j=1}^{k-1}\mathrm{proj}_{u_j}(v_k) \end{array}$$

Orotogonalni komplement

Naj bo *V* vektorski prostor s skalarnim produktom. Podmnožici *S* ⊆ *V* in *T* ⊆ *V* sta **pravokotni** (*S*⊥*T*), če so vis njuni elementi paroma pravokotni. Če je *S*⊥*T*:

- T*⊥*S*
- ∀*S'* ⊆ *S* : *S'*⊥*T*
- Lin*S*⊥Lin*T*
- S* ∩ *T* ⊆ {0}

Orotogonalni komplement množice *S* ⊆ *V* (*S*[⊥]) je največja podmnožica v *V*, ki je pravokotna na *S*.

$$\forall S\subseteq V: S^\perp=\{v\in V\mid \{v\}\perp S\}$$

$$\forall S\subseteq V: S^\perp=(\mathrm{Lin}S)^\perp$$

Ortogonalni razcep

Naj bo *V* KVRP skalarnim produktom in *U* ⊂ *V* podprostor. Potem velja naslednje:

- dim *U*[⊥] = dim *V* − dim *U*
- (*U*[⊥])[⊥] = *U*
- V* = *U* ⊕ *U*[⊥] (ortogonalni razcep prostora *V* glede na *U*)

Linearni funkcionali

Linearni funkcional je *linearna preslikava* iz vektorskega prostora *V* na obseg (tudi vektorski prostor) *F*¹.

$$L:V\rightarrow F$$

Naj bo *B* = {*v*₁, ..., *v*_{*n*}} baza za *V* in *S* = {1} baza za *F*. Matrika linearnega funkcionala je potem [*L*]_{*S*←*B* = {*L*(*v*₁), ..., *L*(*v*_{*n*}))}

Reiszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov

Za KVRP *V* s skalarnim produktom in linearno preslikavo *L* : *V* → *F* velja:

$$\exists w\in V\,\forall v\in V:\,\,L(v)=\langle v,w\rangle$$

Adjugirana linearna preslikava

Naj bo *L* : *U* → *V* linearna preslikava med dvema vektorskima prostoroma s skalarnim produktom. Linearna preslikava *L*^{*} : *V* → *U* je **adjugirana linearna preslikava** preslikave *L* če velja:

$$\langle Lu,v\rangle_V=\langle u,L^*v\rangle_U$$

Vsaka linearna preslikava ima točno eno adjugirana preslikavo.

Lastnosti adjugirane linearne preslikave

- Ker*L*^{*} = (Im*L*)[⊥]
- Im*L* = (Ker*L*^{*})[⊥]
- Ker*L* = (Im*L*^{*})[⊥]
- Im*L*^{*} = (Ker*L*)[⊥]
- (*L*^{*}*L*)^{*} = *L*^{*}*L* in (*LL*^{*})^{*} = *LL*^{*}
- Ker*L*^{*}*L* = (Ker*L*)

Prve 4 formule veljajo tudi za matrike, pri čemer se ortogonalni komplement nanaša na standardni skalarni produkt.

Matrika adjugirane linearne preslikave

U ... KVRP z *ortonormirano* bazo *B*

V ... KVRP z *ortonormirano* bazo *C*

L : *U* → *V* ... linearna preslikava

L^{*} : *V* → *U* ... njena adjugirana linearna preslikava

Matriko [*L*^{*}]_{*B*←*C*} dobimo tako, da v matriki [*L*]_{*C*←*B*} vse elemente konjugiramo in doblejeno matriko transponiramo.

Adjugirana matrika

Naj bo *A* kompleksna *m* × *n* matrika in *A*[̄] matrika *A* z konjugiranimi elamenti.

$$A^*=(\overline{A})^T$$

Lastnosti adjugiranja

- (α*A* + β*B*)^{*} = α*A*^{*} + β*B*^{*}
- (*A*^{*})^{*} = *A*
- (*AB*)^{*} = *B*^{*}*A*^{*}
- 0^{*} = 0, *I*^{*} = *I*

Lastne vrednosti adjugirane preslikave

λ je lastna vrednost *A* ⇔ λ[̄] lastna vrednost *A*^{*}

Normalne matrike

Kompleksna matrika *A* je **normalna**, če velja *A*^{*}*A* = *AA*^{*}.

Vsaka normalna matrika je kvadratna.

Vsaka normalna matrika je podobna diagonalni matriki.

Lastni podprostori normalne matrike so poraoma ortogonalni.

A je normalna ⇔ ∃*P*, *D* (diagonalna) : *A* = *PDP*^{−1} in *P*^{−1} = *P*^{*}

Izometirje

Izometirje so preslikave, ki ohranjajo razdaljo.

Naj bosta *U* in *V* KVRP s skalarnim produktom. Linearna preslikava

L : *U* → *V* je izometrija, če

$$\forall u\in U:\|Lu\|_V=\|u\|_U$$

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- L* je izometrija
- ⟨*Lu*, *Lu'*⟩*V* = ⟨*u*, *u'*⟩*U* za ∀*u*, *u'* ∈ *U*
- L*^{*}*L* = *i**I*_{*U*}
- Za vsako ortonormirano bazo {*u*₁, ..., *u*_{*n*}} v *U* je {*Lu*₁, ..., *Lu*_{*n*}} ortonormirana množica v *V*.

Če imamo KVRP *V* in *U* z *orotonormiranimi bazama* *B* in *C*, je *L* : *U* → *V* izometrija natanko tedaj, ko za njeno matriko *A* = [*L*]_{*C*←*B*} velja *A*^{*}*A* = *I*.

Ortogonalne in unitarne matrike

Kompleksni matriki *A*, ki zadošča *A*^{*}*A* = *I* pravimo **unitarna**. Realni unitarni matriki pravimo **ortogonalna**.

Za kvadratne matrike iz *A*^{*}*A* = *I* sledi *AA*^{*} = *I*. Odtod sledijo lastnosti:

- Vsaka unitarna matrika je normalna
- Vsaka unitarna matrika je obrnljiva in *A*^{−1} = *A*^{*}
- Če je *A* unitarna je tudi *A*^{*} unitarna.

Grupe:

- GL(*n*, *F*) **splošna linearna grupa** - gurpa vseh obrnljivih *n* × *n* matrik.
- SL(*n*, *F*) **specialna linearna grupa** - gurpa vseh obrnljivih *n* × *n* matrik z det 1.
- U(*n*) **splošna unitarna grupa** - gurpa vseh unitarnih *n* × *n* matrik.
- SU(*n*) **specialna unitarna grupa** - gurpa vseh unitarnih *n* × *n* matrik z det 1.
- O(*n*) **splošna ortogonalna grupa** - gurpa vseh ortogonalnih *n* × *n* matrik.
- SO(*n*) **specialna orotgonalna grupa** - gurpa vseh orotogonalnih *n* × *n* matrik z det 1.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) & \supset & \mathrm{U}(n) & & \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) & \supset & \mathrm{O}(n) \\ & \cup & \cup & & \cup & \cup & \cup \\ \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) & \supset & \mathrm{SU}(n) & & \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) & \supset & \mathrm{SO}(n) \end{array}$$

Lastne vrednosti *unitarne matrike* imajo absolutno vrednost 1. Različnim lastnim vrednostim unitarne matrike pripadajo *ortogonalni* lastni vektorji.

Simetričen in hermitske matrike

Linearna preslikava *L* : *U* → *V* je **sebiadjugirana**, če velja *L* = *L*^{*}.

Kompleksna matrika *A* je **hermitska** če *A* = *A*^{*}. Realnim hermitskima matrikam rečemo **simetrične**.

Kompleksna matrika je *hermitska* ⇔ ko obstaja taka unitarna matrika *P* in realana matrika *D*, da *A* = *PDP*^{−1}.

Realna matrika je *simetrična* ⇔ ko obstaja taka orotgonalna matrika *P* in realana diagonalna matrika *D*, da *A* = *PDP*^{−1}.

Determinanta

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb \qquad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Determinanta gornjetrikotne matrike je zmnožek diagonalnih elementov.

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

Sled

Sled matrike je vsota vseh diagonalnih elementov.

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B) \qquad \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$$

Transponiranje

$$(A+B)^T=A^T+B^T \qquad (AB)^T=B^T A^T$$