Algebraične strukture

- **grupoid** $(M, \circ)$ urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo $\circ$.
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M\ \forall x \in M : e \circ x = x \circ e = x$.
- **grupa** monoid v katerem ima vsak element inverz $\forall x \in M\ \exists x^{-1} \in M : x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \circ y = y \circ x$.

- **kolobar** urejena trojica $(M, +, \cdot)$ z neprazno množico M in dvema operatorjema.
  - $(M, +)$ je abelova grupa
  - $(M - \{0\}, \cdot)$ je polgrupa
  - operaciji sta distributivni $\forall x, y, z \in M : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- **kolobar z enoto** kolobar v katerem je $(M, \cdot)$ monoid.
- **komutativen kolobar** kolobar v katerem je $(M, \cdot)$ komutativna polgrupa.
- **obseg** urejena trojica $(M, +, \cdot)$ z neprazno množico M in dvema operatorjema.
  - $(M, +)$ je abelova grupa
  - $(M - \{0\}, \cdot)$ je grupa
  - operaciji sta distributivni $\forall x, y, z \in M : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- **polje** obseg kjer je $(M, \cdot)$ komutativen monoid.

- **podgrupoid** $(H, \circ)$ je podgrupoid od grupoida $(G, \circ)$, če $H \subset G$ in $\forall x, y \in H : x \circ y \in H$

- **homomorfizem** je funkcija $\varphi : (G_1, \circ_1) \to (G_2, \circ_2)$ tako, da velja $\forall a, b \in G_1 : \varphi(a \circ_1 b) = \varphi(a) \circ_2 \varphi(b)$
- **izomorfizem** je homomorfizem $\varphi : (G_1, \circ_1) \to (G_2, \circ_2)$ za katerega obstaja taka $\Psi : (G_2, \circ_2) \to (G_1, \circ_1)$, da je $\varphi \circ \Psi = id_{G_2}$ in $\Psi \circ \varphi = id_{G_1}$

  Homomorfizem je izomorfizem $\Leftrightarrow$ ko je bijektiven.
- **endomorfizem** je homomorfizem, ki slika sam vase.

- **vektorski prostor** nad obsegom F je urejena trojka $(V, +, \cdot)$ kjer je V neprazna množica.

  $+$ je operacija na V, ki zadošča lastnostim:
  - asociativnost $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - komutativnost $a + b = b + a$
  - obstoj enote $\exists 0 \in V\ \forall a \in V : 0 + a = a$
  - obstoj inverza $\forall a \in V\ \exists -a \in V : a + (-a) = 0$

  $\cdot$ je preslikava $\cdot : F \times V \to V$, ki zadošča lastnostim:
  - $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall \alpha \in F\ \forall a, b \in V$
  - $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in F\ \forall a \in V$
  - $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \quad \forall \alpha, \beta \in F\ \forall a \in V$
  - $1 \cdot a = a \quad \forall a \in V$

  Definicija vektorskega prostora nam pove, da je $(V, +)$ *Abelova grupa*.
  Preslikava $\varphi_\alpha(a + b) = \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b = \varphi_\alpha(a) + \varphi_\alpha(b)$ je *endomorfizem* grupe $(V, +)$ ($\varphi_\alpha \in$ End(V,+)).

  Vektorski porstor V nad obsegom F je *Abelova grupa* $(V, +)$ skupaj s homomorfizmom kolobarjev z enico $\varphi : F \to \mathrm{End}(V, +)$
- **modul** nad F je podoben vektorskemu porstoru le, da je F kolobar.

Baze vektorskih prostorov

Linearna ogrinjača množice $S \subset V$ predstavlja vse linearne kombinacije elementov S.

$$\mathrm{Lin}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid v_1, \ldots, v_n \in S\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}$$

Množica S je **ogrodje** za V, če velja $\mathrm{Lin}(S) = V$.
Vektorski prostor V je **končno razsežen** (KVRP), če ima končno ogrodje.
Množica $S \subset V$ je **linearno odvisna**, če obsatjajo taki elementi $v_1, \ldots, v_n \in S$ in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, ki niso vsi nič, da velja $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$
Množica, ki ni linearno odvisna je **linearno neodvisna**.
Množica $S \subset V$ je **baza**, če je *ogrodje* in *linearno neodvisna.*
Vsak vektorski prostor ima bazo.
Vsak KVRP ima končno bazo.

Dimenzija vektorskega prostora

Naj bo V KVRP in B njegova baza.

$$\dim(V) = |B|$$

Dimenzija KVRP je moč njegove beze.
Če ima KVRP V *ogrodje* iz n elementov, je vsaka podmnožica v V, ki ima več kot n elementov *linearno odvisna.*
Vse baze za V imajo enako moč. Zato lahko definiramo **dimenzijo** KVRP kot moč poljubne baze.

Dopolnitev linearno neodvisne množce do baze

Naj bo V KVRP dimenzije n.
Linearno neodvisna podmnožica, ki ima n elementov je baza za V.
Vsako linearno neodvisno množivo, ki ima manj kot n elamentov lahko dopolnimo do baze V.
Če je $\{v_1, \ldots, v_m\}$ linearno neodvisna podmnožica V in če $v_{m+1} \notin \{v_1, \ldots, v_m\}$, je tudi $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}\}$ linearno neodvisna podmnožica V.

Vektorski podprostori

Naj bo V vektorski prostor nad poljem F. Podmnožica $U \subseteq V$ je **vektorski podprostor**, če velja:

- $u_1, u_2 \in U \implies u_1 + u_2 \in U$
- $u \in U\ \alpha \in F \implies \alpha u \in U$

Če je V KVRP, je vsak vektorski podprostor v V oblike $\mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_m\}$ za $v_1, \ldots, v_m \in V$

Prehod na novo bazo

Naj bo V KVRP, naj bosta

$$\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$$
$$\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

bazi za V in naj bo v vektor.

$$v = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n$$
$$v = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_n v_n$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$[v]_\mathcal{C} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_\mathcal{B}$$

$$P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \cdot P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$
$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1}$$

Če je $\mathcal{S}$ standardna baza:

$$P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{bmatrix}$$

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{S}} \cdot P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{C}})^{-1} \cdot P_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Linearne preslikave

$V, U \ldots$ vektorska prostora nad istim obsegom F
Preslikava $L : U \to V$ je **linearna**, če

- je **aditivna** $L(u_1 + u_2) = L(u1) + L(u2)$
  aditivnost nam pove, da je L homomorfizem grup $(U, +)$ in $(V, +)$.
- in **homogena** $L(\alpha u) = \alpha L(u)$
  homogenost nam pove, da je L spoštuje tudi množenje zato je homomorfizem vektorskih porstorov.

Ekvivalentna definicija: preslikava je linearna, če

$$L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L(u_1) + \alpha_2 L(u_2)$$
$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F\ \forall u_1, u_2 \in U$$

Kompozitum linearnih preslikav je tudi linearna preslikava.
Inverz bijektivne linearne preslikave je tudi linearna preslikava.

Matrika linearne preslikave

Vsako linearno preslikavo se da popisati z matriko.
$U \ldots$ KVRP z bazo $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$
$V \ldots$ KVRP z bazo $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$
$L : U \to V \ldots$ linearna preslikava

$$[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [L(u_1)]_\mathcal{C} & \ldots & [L(u_n)]_\mathcal{C} \end{bmatrix}$$

Za kompozitum linearnih preslikav velja:

$$[L_2 \circ L_1]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = [L_2]_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \cdot [L_1]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Jedro in slika

Naj bosta U, V kvrp in naj bo $L : U \to V$ linearna preslikava.

- **Jedro** L je množica $\mathrm{Ker}(L) := \{u \in U | L(u) = 0\}$
  Jedro je vektorski podprostor v U.
- **Slika** L je množica $\mathrm{Im}(L) := \{L(u) | u \in U\}$
  Slika je vektorski podprostor v V.

Podobno sta definirana za matrike. Naj bo A $m \times n$ matrika nad F:

- **Jedro** matrike A je množica $\mathrm{Ker}(L) := \{u \in F^n | Au = 0\}$
  Jedro je ekvivalentno ničelnemu prostoru matrike.
- **Slika** matrike A je množica $\mathrm{Im}(L) := \{Au | u \in F^n\}$
  Slika je ekvivalentna stolpičnemu prostoru matrike.

Rang in ničelnost

Naj bo $L : U \to V$ linearna preslikava.

- **ničenost** preslikave L je število $\mathrm{n}(L) = \mathrm{dimKer}(L)$
- **rang** preslikave L je število $\mathrm{r}(L) = \mathrm{rang}(L) = \mathrm{dimIm}(L)$

Če L zamenjamo z $L_A : F^n \to F^n;\ L_A(x) = Ax$, dobimo definicijo za rang in ničelnost matrike A.

$$L \text{ je injektivna } \Leftrightarrow \mathrm{Ker}L = 0 \Leftrightarrow \mathrm{n}(L) = 0$$
$$L \text{ je surjektivna } \Leftrightarrow \mathrm{Im}L = V \Leftrightarrow \mathrm{rang}(L) = \mathrm{dim}V$$
$$\mathrm{rang}(L) + \mathrm{n}(L) = \dim(U)$$

Ekvivalentnost matrik

Matriki A in B sta **ekvivalentni**, če obstajata taki obrnljivi matriki P in Q, da velja

$$B = PAQ$$

Ekvivalentnost matrik je *ekvivalenčna* relacija; če je A ekvivalentna B je tudi B ekvivalentna A.
Vsaka matrika A je ekvivalentna matriki $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ kjer je $r = r(A)$.
Matriki A in B sta **ekvivalentni** $\Leftrightarrow$ ko sta enakih dimenzij in imata enak rang.

Podobnost matrik

Matriki $A, B \in M_n(F)$ sta podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika $P \in M_n(F)$, da velja:

$$B = PAP^{-1}$$

Podobnost matrike je *ekvivalenčna* relacija.
Iz *podobnosti* očitno sledi *ekvivalenčnost* matrik, obratno pa ne drži.
Podobne matirke imajo enak karakteristični polinom, determinanto, lastne vrednosti, lastne vektorje, ...

Lastni problem

Naj bo $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$ in $v \in F^n$.

$$Av = \lambda v$$

Skalar λ je **lastna vrednost** matrike A, če obstaja tak neničeln vektor v, da velja zgornja enačba. Takemu vektorju rečemo **lastni vektor**, ki propada lastni vrednosti λ.

Množica vseh lastnih vektorjev matrike A, ki pripadajo lastni vrednosti λ je $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$. Ta množica je vedno neskončna, ker je vsak večkratnik lastnega vektorja spet lastni vektor.

Če je λ lastna vrednost matrike A, je $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ **lastni podprostor** matirke A za lastno vrednost λ. Njegovi dimenziji pravimo **geometrijska večkratnost** lastne vrednosti.
Lastne vrednosti matrike A so ničle **karakterističnega polinoma**

$$p_A(x) = \det(A - xI)$$

Če je lastna vrednost λ m-kratna ničla p_A, je njena **algebraična večkratonost** enaka m.

Diagonalizacija

Diagonalizacija matrike A je razcep $A = PDP^{-1}$, kjer je P obrnljiva, D pa diagonalna matrika.
Če ima $n \times n$ matrika A n LN lastnih vektorjev, je diagonalizacija možna. V tem primeru so diagonalni elementi matrike D ravno lastne vrednosti matrike A, stolpci matrike P pa lastni vektorji, ki se ujemajo z lastnimi vrednostmi v stolpcih.
Naslednje trditve so ekvivalentne:

- matrika A ima diagonalizacijo
- matrika A je podobna diagonalni matriki
- matrika A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev
- vsota lstnih podprostorov matrike A je $\mathbb{C}^n$
- za vsako lastno vrednost se ujemata *geometrijska* in *algebraična* večkratnost
- naj bodo $\lambda_1, ..., \lambda_k$ vse paroma razlčne lastne vrednosti: $(A - \lambda_1 I) \cdot ... \cdot (A - \lambda_k) = 0$
- minimalni polinom m_A nima nibene večkratne ničle

Če ima matrika A n različnih lastnih vrednosti $\implies$ ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $\implies$ ima diagonalizacijo.

Minimalni polinom

Polinom $m \in \mathbb{C}[x]$ je minimalni polinom matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$, če velja:

- $m(A) = 0$
- m ima vodilni koeficient 1
- med vsemi polinomi, ki zadoščajo zgornjima pogojema, ima m najnižjo stopnjo

Naj bodo $\lambda_1, ..., \lambda_k$ paorma različne lastne vrednosti matrike A.

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (x - \lambda_k)^{n_k}$$
$$m_A(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (x - \lambda_k)^{r_k}$$

Ker m_A deli p_A in ker je vasaka lastna vrednost ničla m_A, je

$$1 \leq r_i \leq n_i; \quad i = 1, ..., k$$

Korenski podprostori

Korenki podprostor matrike A za lastno vrednost λ_i je množica

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}$$

$$\overbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)}^{\text{lastni podprostor}} \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^2 \subset \cdots \subset \overbrace{\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i}}^{\text{korenski podprostor}}$$
$$= \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i + 1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i + 2} = \ldots$$

Dimenzija korenkega prostora je enaka *algebraični večkratnosti* lastene vrednosti.

$$\mathrm{dim}\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_i} = n_i$$

Vsota vseh koronskih podprostorov je $\mathbb{C}^n$

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{r_1}$$

Vektorski prostor $U \subset \mathbb{C}^n$ je **invarianten** na matriko $A \in M_n(\mathbb{C})$, če

$$\forall u \in U : Au \in U$$

Lastni in korenski podprostor matrike A sta invariantna na A.
Vsak netrivialen ($\neq \{0\}$) invarianten podprostor matrike A vsebuje vsaj en lastni vektor.
Presek dveh korenskih podprostorov matrike je trivialen ($\{0\}$).

Jordanska končna forma

Jordanska kletka je matrika oblike:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

Jordanska matrika je matrika oblike

$$\begin{bmatrix} J_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & J_m \end{bmatrix} \qquad J_1, ..., J_m \text{ so jordanske kletke}$$

Vsaka kompleksna kvadratna matrika A je podobna kaki jordanki matirki J. Pravimo, da je J **jordanska kanonična forma** za A.

$$A = PJP^{-1}$$

J je jordanska matrika, ki vsebuje jordaske kletke velikosti jordanske verige in s propadajočimi lastnimi vrednostmi A.
P je prehodna matrika, katere stolpci so povrsti zloženi elementi jordankih verig lastne vrednosti, ki je v J v istoležnem stolpcu.
Iz jodranske matrike J lahko preberemo:

- **algebraične večkratonosti** lastne vrednosti - kolikokrat se le ta pojavi na diagonali
- **geometrijske večkratnosti** lastne vrednosti - število kletk lastne vrednosti
- večkratnost lastne vrednosti v **min. polinomu** - največja kletka lastne vrednosti
- število linearno neodvisnih **lastnih vektorjev** matrike - število kletk

Jordanska veriga (za lastno vrednost λ matrike A) dolžine k je tako zaporedje vektorjev $v_1, ..., v_k$, da velja

$$(A - \lambda I)v_1 = 0, \ (A - \lambda I)v_2 = v_1, ..., \ (A - \lambda I)v_k = v_{k-1}$$

Jordanska baza je baza, ki je unija jordanskih verig.

Iskanje jordanskih verig

Iščemo jordanske verige za lastno vrednost λ matrike A.
Najprej izračunamo vse podprostore od *lastnega* do *korenskega*. $A - \lambda I$ označimo z N.
Nato sestavimo urejene množice $C_r, ...C_1$. C_i sestavimo tako, da vzamemo vse elementi iz C_{i-1} in jih pomnožimo z matriko N. Nato izberemo vektorje, ki te elemente in $\mathrm{Ker}N^i$ dopolnijo do baze za $\mathrm{Ker}N^{i-1}$.

$$\begin{aligned} C_r &= \text{baza}\left(\mathrm{Ker}N^r \setminus \mathrm{Ker}N^{r-1}\right) \\ C_{r-1} &= N\left(C_r\right) \cup \text{baza}\left(\mathrm{Ker}N^{r-1} \setminus \left(\mathrm{Ker}N^{r-2} \cup \mathrm{Lin}NC_r\right)\right) \\ C_{r-2} &= N\left(C_{r-1}\right) \cup \text{baza}\left(\mathrm{Ker}N^{r-2} \setminus \left(\mathrm{Ker}N^{r-3} \cup \mathrm{Lin}NC_{r-1}\right)\right) \\ &\vdots \\ C_2 &= N\left(C_3\right) \cup \text{baza}\left(\mathrm{Ker}N^2 \setminus (\mathrm{Ker}N \cup \mathrm{Lin}NC_3)\right) \\ C_1 &= N\left(C_2\right) \cup \text{baza}\left(\mathrm{Ker}N \setminus \mathrm{Lin}NC_2\right) \end{aligned}$$

i. jordansko verigo dobimo tako, da vzamemo i. elemente iz $C_1, ..., C_r$.

Funkcije matrik

Če poznamo rezcep $A = PJP^{-1}$ matrike A se računje potenc A^n prevede na računanje potenc posameznih jordanskih kletk.
Formula za potenciranje $k \times k$ jordaske kletke

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \ldots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^n & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \ldots & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Formula za funkcijo $k \times k$ jordanske kletke

$$f(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \ldots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ \vdots & & & \ddots & f'(\lambda) \\ 0 & \ldots & & & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

Vektorski prostori s skalarnim produktom

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{C}$.
Skalarni produkt je prelikava, ki paru $u, v \in V$ priredi skalar $\langle u, v \rangle$ in zadošča lastnostim:

- pozitivna definitnost $\forall v \in V, v \neq 0 : \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ in $\langle v, v \rangle > 0$
- konjugirana simetričnost $\forall u, v \in V : \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
- linearnost v prvem faktorju
  $\forall u_1, u_2, v \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} : \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$

Posledice:

- konjugirana linearnost v drugem faktorju
  $\forall u, v_1, v_2 \in V, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C} : \langle u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle = \overline{\beta_1} \langle u, v_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle u, v_2 \rangle$
- $\forall v \in V : \langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$
- $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$
- $\langle 0, 0 \rangle = 0$

Standardni skalarni produkt

$$\langle (\alpha_1, ..., \alpha_n), (\beta_1, ..., \beta_n) \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + ... + \alpha_n \overline{\beta_n}$$

Norma iz skalarnega produkta

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Cauchy-Schwartzova neenakost

$$|\langle v, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Osnovne lastnosti norme

- $\forall v \in V : \|v\| > 0$
- $\forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- $\forall u, v \in V : \|u + v\| < \|u\| + \|v\|$ (trikotniška neenakost)

Zveza med slakarnim produktom in normo (polarizacijske identitete)
Če je V KVRP nad $\mathbb{R}$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \right)$$

Če je V KVRP nad $\mathbb{C}$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|u + i^k v\|^2$$

Vektorski prostori s skalarnim produkton

- **Orotgonalna množica** je množica v kateri so vsi vektorji pravokotni in noben ni 0.

  $$\forall u, v \in M, u \neq 0, v \neq 0 : \langle u, v \rangle = 0$$

  Vsaka orotogonalna množica je *linearno neodvisna*.

- **Normirana množica** je množica v kateri so vsi vektorji dolžine 1.

  $$\forall u \in M : \|u\| = 1$$

  Množico normiramo tako, da vse vektorje delimo z njihovo normo

  $$\{v_1, ..., v_n\} \to \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, ..., \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$$

- **Ortonormirana množica** je *orotgonalna* in *normalna*.

- Orotgonalna množica v V, ki je *ogrodje* za V je **ortogonalna baza** za V. Vsak KVRP ima *ortogonalno bazo*. Vsako ortogonalno množico lahko dopolnimo do ortogonalne baze.

Furierov razvoj

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1, ..., v_n\}$ orotgonalna baza za V.

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}_{\alpha_i} v_i$$

Če je ta baza orotnormirana, velja:

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

Parsevalova identiteta

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1, ..., v_n\}$ orotgonalna baza za V.

$$\forall v \in V : \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

Če je ta baza orotnormirana, velja:

$$\forall v \in V : \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2$$

Ortogonalna projekcija

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $W \subset V$ vektorski podprostor z ortogonalno bazo $\{w_1, ..., w_k\}$.
Ortogonalna projekcija vektorja $v \in V$ na podprostor W:

$$v' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) \\
u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3) \\
&\vdots \\
u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k)
\end{aligned}$$

Orotogonalni komplement

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Podmnožici $S \subseteq V$ in $T \subseteq V$ sta **pravokotni** ($S \perp T$), če so vis njuni elementi paroma pravokotni.
Če je $S \perp T$:

- $T \perp S$
- $\forall S' \subseteq S : S' \perp T$
- $\text{Lin} S \perp \text{Lin} T$
- $S \cap T \subseteq \{0\}$

Orotogonalni komplement množice $S \subseteq V$ ($S^\perp$) je največja podmnožica v V, ki je pravokotna na S.

$$\forall S \subseteq V : S^\perp = \{v \in V \mid \{v\} \perp S\}$$
$$\forall S \subseteq V : S^\perp = (\text{Lin} S)^\perp$$

Ortogonalni razcep

Naj bo V KVRP skalarnim produktom in $U \subset V$ podprostor. Potem velja naslednje:

- $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
- $(U^\perp)^\perp = U$
- $V = U \oplus U^\perp$ (ortogonalni razcep prostora V glede na U)

Linearni funkcionali

Linearni funkcional je *linearna preslikava* iz vektorskega prostora V na obseg (tudi vektorski prostor) F^1.

$$L : V \to F$$

Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ baza za V in $\mathcal{S} = \{1\}$ baza za F. Matrika linearnega funkcionala je potem $[L]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \{L(v_1), ..., L(v_n)\}$

Reiszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov

Za KVRP V s skalarnim produktom in linearno preslikavo $L : V \to F$ velja:

$$\exists w \in V \ \forall v \in V : \ L(v) = \langle v, w \rangle$$

Adjugirana linearna preslikava

Naj bo $L : U \to V$ linearna preslikava med dvema vektorskima prostoroma s skalarnim produktom. Linearna preslikava $L^* : V \to U$ je **adjugirana linearna preslikava** preslikave L če velja:

$$\langle Lu, v \rangle_V = \langle u, L^* v \rangle_U$$

Vsaka linearna preslikava ima točno eno adjugirana preslikavo.
Lastnosti adjugirane linearne preslikave

- $\text{Ker} L^* = (\text{Im} L)^\perp$
- $\text{Im} L = (\text{Ker} L^*)^\perp$
- $\text{Ker} L = (\text{Im} L^*)^\perp$
- $\text{Im} L^* = (\text{Ker} L)^\perp$
- $(L^* L)^* = L^* L$ in $(LL^*)^* = LL^*$
- $\text{Ker} L^* L = (\text{Ker} L)$

Prve 4 formule veljajo tudi za matrike, pri čemer se orotogonalni komplement nanaša na standardni skalarni produkt.

Matrika adjugirane linearne preslikave

U ... KVRP z *ortonormirano* bazo $\mathcal{B}$
V ... KVRP z *ortonormirano* bazo $\mathcal{C}$
$L : U \to V$ ... linearna preslikava
$L^* : V \to U$ ... njena adjugirana linearna preslikava

Matriko $[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ dobimo tako, da v matriki $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ vse elemente konjugiramo in doblejeno matriko transponiramo.

Adjugirana matrika

Naj bo A kompleksna $m \times n$ matrika in $\overline{A}$ matrika A z konjugiranimi elementi.

$$A^* = (\overline{A})^T$$

Lastnosti adjugiranja

- $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$
- $(A^*)^* = A$
- $(AB)^* = B^* A^*$
- $0^* = 0, I^* = I$

Lastne vrednosti adjugirane preslikave

λ je lastna vrednost $A \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ lastna vrednost A^*

Normalne matrike

Kompleksna matrika A je **normalna**, če velja $A^* A = AA^*$.
Vsaka normalna matrika je kvadratna.
Vsaka normalna matrika je podobna diagonalni matriki.
Lastni podprostori normalne matrike so poraoma ortogonalni.
A je normalna $\Leftrightarrow \exists P, D$ (diagonalna) : $A = PDP^{-1}$ in $P^{-1} = P^*$

Izometirje

Izometirje so preslikave, ki ohranjajo razdaljo.
Naj bosta U in V KVRP s skalarnim produktom. Linearna preslikava $L : U \to V$ je izometrija, če

$$\forall u \in U : \|Lu\|_V = \|u\|_U$$

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- L je izometrija
- $\langle Lu, Lu' \rangle_V = \langle u, u \rangle_U$ za $\forall u, u' \in U$
- $L^* L = id_U$
- Za vsako ortonormirano bazo $\{u_1, ..., u_n\}$ v U je $\{Lu_1, ..., Lu_n\}$ ortonormirana množica v V.

Če imamo KVRP V in U z *orotonormiranima bazama* $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$, je $L : U \to V$ izometrija natanko tedaj, ko za njeno matriko $A = [L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ velja $A^* A = I$.

Ortogonalne in unitarne matrike

Kompleksni matriki A, ki zadošča $A^* A = I$ pravimo **unitarna**. Realni unitarni matriki pravimo **ortogonalna**.
Za kvadratne matrike iz $A^* A = I$ sledi $AA^* = I$. Odtod sledijo lastnosti:

- Vsaka unitarna matrika je normalna
- Vsaka unitarna matrika je obrnljiva in $A^{-1} = A^*$
- Če je A unitarna je tudi A^* unitarna.

Grupe:

- $\text{GL}(n, F)$ **splošna linearna grupa** - gurpa vseh obrnljivih $n \times n$ matrik.
- $\text{SL}(n, F)$ **specialna linearna grupa** - gurpa vseh obrnljivih $n \times n$ matrik z det 1.
- $\text{U}(n)$ **splošna unitarna grupa** - gurpa vseh unitarnih $n \times n$ matrik.
- $\text{SU}(n)$ **specialna unitarna grupa** - gurpa vseh unitarnih $n \times n$ matrik z det 1.
- $\text{O}(n)$ **splošna ortogonalna grupa** - gurpa vseh ortogonalnih $n \times n$ matrik.
- $\text{SO}(n)$ **specialna orotgonalna grupa** - gurpa vseh orotogonalnih $n \times n$ matrik z det 1.

$$\begin{array}{ccc}
\text{GL}(n, \mathbb{C}) & \supset & \text{U}(n) \\
\cup & & \cup \\
\text{SL}(n, \mathbb{C}) & \supset & \text{SU}(n)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\text{GL}(n, \mathbb{R}) & \supset & \text{O}(n) \\
\cup & & \cup \\
\text{SL}(n, \mathbb{R}) & \supset & \text{SO}(n)
\end{array}$$

Lastne vrednosti *unitarne matrike* imajo absolutno vrednost 1. Različnim lastnim vrednostim unitarne matrike pripadajo *ortogonalni* lastni vektorji.

Simetričnen in hermitske matrike

Linearna preslikava $L : U \to V$ je **sebiadjugirana**, če velja $L = L^*$.
Kompleksna matrika A je **hermitska** če $A = A^*$. Realnim hermitskima matrikam rečemo **simetrične**.
Kompleksna matrika je *hermitska* $\Leftrightarrow$ ko obstaja taka unitarna matrika P in realana matrika D, da $A = PDP^{-1}$.
Realna matrika je *simetrična* $\Leftrightarrow$ ko obstaja taka orotgonalna matrika P in realana diagonalna matrika D, da $A = PDP^{-1}$.

Determinanta

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb \qquad \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Determinanta gornjetrikotne matrike je zmnožek diagonalnih elementov.

$$\det \alpha A = \alpha^n \det A$$

Sled

Sled matrike je vsota vseh diagonalnih elementov.

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \qquad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Transponiranje

$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad (AB)^T = B^T A^T$$