Integral s parametrom

Naj bo $D = [a, b] \times [c, d]$ in $f : D \to \mathbb{R}$ dana funkcija. Integralu

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

pravimo integral s parametrom.

Zveznost integrala s parametrom

Če je $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ zvezna, je F zvezna na $[c, d]$.

Odvajnaje pod integralom

Naj bo f zvezna nad D in f_y zvezna nad D. Potem je

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y)dx$$

Odvajnaje integrala

Naj bosta $u, v : [c, d] \to [a, b]$ in $u, v \in \mathcal{C}^1([c, d])$,
$f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$, $f_y \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$
Definirajmo:

$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)dx$$

Potem je F odvedljiva in

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x, y)dx + f\left(v(y), y\right) v'(y) - f\left(u(y), y\right) u'(y)$$

Dvokratno integriranje funkcije

Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [c, d])$. Definirajmo

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx \quad G(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

Potem je

$$\int_a^b G(x)dx = \int_c^d F(y)dy = \iint_D f(x, y)dxdy$$

Integrali na neomejenih območjih

Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, \infty] \times [c, d])$:

$$F(y) := \int_a^\infty f(x, y)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x, y)dx$$

Enakomerna konvergenca funkcij

Funkcijsko zaporedje F_b enakomerno konvergira proti F, če za $\forall \varepsilon > 0 : \exists B : b > B$:

$$|F_b(y) - F(y)| < \varepsilon; \quad \forall y \in [c, d]$$

Če to prepišemo v obliki integrala, dobimo:

$$|F_b(y) - F(y)| = \left| \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^\infty f(x, y)dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon; \quad \forall y \in [c, d]$$

Integral s parametrom je enakomerno konvergenten na $[c, d]$, če za $\forall \varepsilon > 0 : \exists B$: $\forall b > B$:

$$\left| \int_b^\infty f(x, y)dx \right| < \varepsilon$$

Posledica: Če je za $f \in \mathcal{C}([a, \infty] \times [c, d])$ integral s parametrom $F(x) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ enakomerno konvergenten na $[c, d]$, je F zvezna na $[c, d]$.

Menjava vrstnega reda integracije

Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, \infty] \times [c, d])$ in $F(y) := \int_a^\infty f(x, y)dx$ enakomerno konvergentna. Definirajmo še $G(x) = \int_c^d f(x, y)dy$. Potem velja

$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^\infty G(x)dx$$

oziroma

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy$$

Odvajanje integrala na neomejenih območjih

Naj bosta $f, f_y \in \mathcal{C}([a, \infty] \times [c, d])$, $F(y) := \int_a^\infty f(x, y)dx$ obstaja za $\forall y \in [c, d]$ in $G(y) := \int_a^\infty f_y(x, y)dx$ enakomerno konvergira na $[c, d]$.
Potem je F odvedljiva in $F'(y) = G(y)$.

Funkcija Γ

Funkcija gama je definirana s predpisom

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$$

Lastnosti funkcije gama:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
4. $\Gamma(n + 1) = n! \qquad n \in \mathbb{R}$

Funkcija B

Funkciaj beta je definirana kot

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad \forall p,q > 0$$

Lastnosti funkcije beta:

1. simetričnost: $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du$
3. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1} = \frac{1}{2}B(p,q)$

Dvojni in trojni integral