Integral s parametrom

Naj bo $D = [a,b] \times [c,d]$ in $f : D \to \mathbb{R}$ dana funkcija.

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

Zveznost

Če je f zvezna, je $F(y)$ zvezna na $[c,d]$.

Odvajanje integrala

Naj bosta $u, v : [c,d] \to [a,b]$ in $u, v \in \mathcal{C}^1([c,d])$,
$f \in \mathcal{C}([a,b] \times [c,d])$, $f_y \in \mathcal{C}([a,b] \times [c,d])$
Definirajmo:

$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$

Potem je F odvedljiva in

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x,y)dx + f\left(v(y), y\right) v'(y) - f\left(u(y), y\right) u'(y)$$

Dvokratno integriranje funkcije

Če je f zvezna funkcija $f \in \mathcal{C}([a,b] \times [c,d])$, lahko zamenjamo vrstni red integracije:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$$

Integral z limito

Če je f zvezna, $f \in \mathcal{C}([a,b] \times [Y-\varepsilon, Y+\varepsilon])$, velja:

$$\lim_{y \to Y} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to Y} f(x,y)dx$$

Integrali na neomejenih območjih

Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,\infty] \times [c,d])$:

$$F(y) := \int_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x,y)dx$$

Enakomerna konvergenca funkcij

Funkcijsko zaporedje F_b enakomerno konvergira proti F, če za $\forall \varepsilon > 0 : \exists B : b > B$:

$$|F_b(y) - F(y)| < \varepsilon; \quad \forall y \in [c,d]$$

Integral s parametrom je enakomerno konvergenten na $[c,d]$, če za $\forall \varepsilon > 0 : \exists B : \forall b > B$:

$$\left| \int_b^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

Posledica: Če je za $f \in \mathcal{C}([a,\infty] \times [c,d])$ integral s parametrom $F(x) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ enakomerno konvergenten na $[c,d]$, je F zvezna na $[c,d]$.

Menjava vrstnega reda integracije

Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,\infty] \times [c,d])$ in $F(y) := \int_a^\infty f(x,y)dx$ *enakomerno konvergentna.* Definirajmo še $G(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Potem velja

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Odvajanje integrala na neomejenih območjih

Naj bosta $f, f_y \in \mathcal{C}([a,\infty] \times [c,d])$, $F(y) := \int_a^\infty f(x,y)dx$ obstaja za $\forall y \in [c,d]$ in $G(y) := \int_a^\infty f_y(x,y)dx$ *enakomerno konvergira* na $[c,d]$.
Potem je F odvedljiva in

$$F'(y) = \int_a^\infty f_y(x,y)dx$$

Funkcija Γ

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx, \qquad \forall s > 0$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Funkcija B

- $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad \forall p,q > 0$
- $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du$
- $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $\frac{1}{2}B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1}(\cos x)^{2q-1}$
- simetričnost: $B(p,q) = B(q,p)$

Gaussov integral:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Trigonometrične identitete

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$
$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x)\cot(y) \mp 1}{\tan(x) \pm \tan(y)}$$
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$$
$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Koordinatni sistemi

Nove koordinate uvedemo z dimorfizmom (glatka bijekcija z gladkim inverzom) $g : \Pi \to P$.

$$g(u_1, ..., u_n) = (g_1(u_1, ..., u_n), ..., g_n(...))$$

Zanjo lahko izračunamo jakobijevo matriko:

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}$$

$$\int_P f(x_1, ..., x_n)dP = \int_\Pi f(g(u_1, ..., u_n))|\det J_g| d\Pi$$

Polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad |\det J| = r$$

Eliptične koordinate

$$x = a\,r\cos\varphi, \quad y = b\,r\sin\varphi \qquad |\det J| = a\,b\,r$$

Cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z \qquad |\det J| = r$$

Sferične koordinate

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\cos\theta, \quad z = r\sin\theta \qquad |\det J| = r^2\cos\theta$$

Izračun težišča

$$m = \iint_P \rho dP$$

$$x_T = \frac{\iint_P x\rho dP}{m}$$

Krivuljni integral

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ odsekoma $\mathcal{C}^1$, f zvezna funkcija

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\dot\gamma(t)|\,dt$$

Dolžina krivulje je

$$\int_\gamma 1\,ds = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$$

Delo

$$A = \int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$$

$$\int_\alpha^\beta (f_1(x(t),y(t)), f_2(x(t),y(t))) \cdot (\dot x(t), \dot y(t))dt$$

$$r(t) = (x(t), y(t)) \qquad F = (f_1, f_2)$$

Greenova formula

Naj bo D pozitivno orientirano območje.

$$\int_{\partial D} \vec{F}d\vec{r} = \int_D \mathrm{rot}\vec{F}dP$$

$$\mathrm{rot}\vec{F} = f_{2x} - f_{1y}$$

Ploskovni integral

Ploskev podamo parametrično v obliki:

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Ploščina je tedaj:

$$\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u \qquad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v \qquad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Kompleksna analiza

Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ (D odprta podmnožica v $\mathbb{C}$) je odvedljiva v točki $z \in \mathbb{C}$, če obstaja limita:

$$f'(z) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Funkcija f je **holomorfna**, če je odvedljiva $\forall z \in D$.

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

f holomorfna $\Leftrightarrow$ veljajo *Cauchy-Riemanove enečbe*:

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

Laplacov operator:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

Če je $\Delta u = 0$ in $u \in \mathcal{C}^2$ je funkcija u harmonična.

Integral po poti

Pot je pozitovno orientirana, če je območje na levi.
Naj bo $f \in \mathcal{C}(D)$, $D^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to D$ odsekoma zvezna.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$$

Naj bo $D^{\text{odprta}} \subseteq \mathbb{C}$, $\Omega \subset D$ omejeno območje s kosoma gladkim robom, $\overline{\Omega} \subset D$. Če je f holomorfna na D, je

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$$

Cauchiyev izrek

Naj bo $D \subseteq$ enostavno povezano območje, f holomorfna na D in γ sklenjena krivulija v D.

$$f(a)\mathrm{I}(\gamma, a) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$\mathrm{I}(\gamma, a) = 2\pi i \cdot$ št. ovjev γ okoli a

Laurentova vrsta

$$\sum_{n=-\infty}^\infty a_n z^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n}_{\text{glavni del}} + \underbrace{\sum_{n=0}^\infty a_n z^n}_{\text{regularni del}}$$

Če glavni del konvergira na $|z| > R_1$, regularni del pa na $|z| < R_2$, Laurentova vrsta konvergira na kolobarju $A(a, R_1, R_2)$.

Znane Taylorjeve vrste

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^\infty q^n \qquad \textit{okoli } q = 0$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

V splošnem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad \textit{okoli } a$$

Izrek o ostankih

Naj bo f holomorfna na D razen morda v končno točkah $a_1, ..., a_n \in D$

Naj bo $K \subset D$ kompakten, ∂K kosoma gladek in $\partial K \cap \{a_1, ..., a_n\} = \emptyset$

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_j \in K} \mathrm{Res}(f, a_j)$$

$\mathrm{Res}(f,a)$ je koeficient c_{-1} (pri $(z-a)^{-1}$) pri razvoju f v Laurentovo vrsto okoli a.

Če je a_j pol stopnje n funkcije f, je

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

Pogoste kompleksne formule

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$z = x + iy \qquad \overline{z} = x - iy \qquad \mathrm{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\text{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\text{ch}(x)$
$\text{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\text{sh}(x)$
$\text{th}(x)=\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$	$\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$
$\text{cth}(x)=\frac{1}{\text{th}(x)}$	$-\frac{1}{\text{sh}^2(x)}$
$\text{arsh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\text{arch}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arth}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Pravila za odvajanje

funkcija	*odvod*
$f(x)\pm g(x)$	$f'(x)\pm g'(x)$
$f(x)\cdot g(x)$	$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x))\cdot g'(x)$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Integracijske metode

Uvedba nove spremenljivke

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{x=g(t)} \int f(g(t))g'(t)dt$$

$$u=g(x) \implies du=g'(x)dx \implies dx=\frac{du}{g'(x)}$$

Perpartes

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x)-\int v(x)\,u'(x)\,dx$$

Integral racionalne funkcije

Z deljenjem zapišemo racionalno funkcijo $R(x)$ v obliki $p(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$, kejr je r nižje stopnje od q.
Polinom q rezcepimo na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje.
Funkcijo $\frac{p(x)}{q(x)}$ zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov:

$$\frac{1}{(x-a)^k} \rightsquigarrow \frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{1}{(x^2+bx+c)^l} \rightsquigarrow \frac{B_1+C_1x}{(x^2+bx+c)}+...+\frac{B_l+C_lx}{(x^2+bx+c)^l}$$

Parcialne ulomke posamično integriremo (*imenovalec mora biti nerazcepen!*):

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a\omega}\arctan\left(\frac{2ax+b}{2a\omega}\right);\ \omega=\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\int\frac{px+q}{\underbrace{ax^2+bx+c}_{t}}dx=\frac{p}{2a}\ln|t|+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t}$$

$$\int\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}dx=\frac{p}{2a}\frac{t^{1-n}}{1-n}+\left(q-\frac{pb}{2a}\right)\int\frac{dx}{t^n}$$

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\frac{1}{a^n\omega^n}I_n$$

$$I_n=\int\frac{dx}{(t^2+1)^n} \qquad I_1=\arctan t$$

$$I_n=I_{n-1}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)+\frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}}$$

Integrali trigonometričnih funkcij

Integrale z trigonometričnimi funkcijami z univerzalno trigonometrično substitucijo prevedemo na integral racionalne funkcije.

$$\tan\frac{x}{2}=t \qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2} \qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

Uporabni integrali

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+ln(x+\sqrt{1+x^2}))$$

$$\int\sin^2(x)dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)$$

$$\int\cos^2(x)dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

Integral iracionalne funkcije

Integrale tipa $\int\frac{p(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ rešujemo na naslednji način:

- Če je p konstanten, integral (z dopolnitvijo do ■ in s substitucijo) prevedemo na enega izmed:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C; \quad a>0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C; \quad a>0$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C; \quad a>0$$

- Če je p poljuben polinom, uporabimo nastavek:

$\int\frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$
$\widetilde{p}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\int\frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

C je konstanta, $\widetilde{p}$ pa polinom, ki ima stopnjo 1 manjšo kot p. Koeficiente polinoma $\widetilde{p}$ in konstanto C dobimo z odvajanjem zgornje enačbe.

Diferencialne enačbe

Ločljive spremenljivke

$$g(y)y'=f(x)$$

Upoštevamo, da je $y'=\frac{dy}{dx}$. Enačbo pomnožimop z dx in integriramo obe strani enačbe.

Homogena diferencialna enačba

$$y'=f(\frac{y}{x})$$

Uvedemo novo spremenlivko $v(x)=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv\Rightarrow$ $y'=xv'+v$, vstavimo v začetno enačbo in dobimo

$$xv'v=f(x) \ \Rightarrow\ \frac{v'}{f(v)-v}=\frac{1}{x}$$

Linearna diferencialna enačba

$$p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

Najprej rešimo *homogeni del* $(r(x)=0)$

$$py'+qy=0 \ \Rightarrow\ y=De^{P(x)};\ P(x)=-\int\frac{q}{p}dx$$

D postane funkcija odvisna od x (*variacija konstante*).
Zgornjo enačbo odvajoamo in dobimo y'.

$$y'=D'e^P-\frac{q}{p}De^P$$

y in y' vstavimo v prvotno enačbo in iz nje izrazimo D', D dobimo z integriranjem.

Bernoullijeva diferencialna enačba

$$p(x)y'+q(x)y=r(x)^\alpha$$

Če je $\alpha=0$, je enačba linearna. Če je $\alpha=1$ ima ločljive spremenljivke. Sicer, enačbo prevedemo na linearno.
Enačbo delimo z y^α in uvedemo novo funkcijo $z=y^{1-\alpha}$ $\Rightarrow z'=(1-\alpha)y'y^{-\alpha}$. Dobimo linearno enačbo:

$$\frac{1}{1-\alpha}pz'+qz=r$$

Eksaktne diferencialne enačbe

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad \text{ali} \quad P+Qy'=0$$

Naj bo rešitev enačbe $u(x,y)=C$.
Če je $P_y=Q_x$, obstaja funckcija u, da je $\nabla u=(P,Q)\Rightarrow$ $u_x=P,\ u_y=Q$.
Izračunamo u tako da u_x integriramo po x (namesto konstante prištejemo funkcijo $f(y)$). Nato pravkar izračunani u odvajamo po y in ga enačimo z $u_y=Q$. Izrazimo f' in z integriranjem dobimo f.
Če $P_y\neq Q_x$, obstaja integrajoči množitelj μ, da je $(\mu P)_y=(\mu Q)_x$

Homegena linearna dif. enačba 2. reda

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

Naj bo $y_1(x)$ dana rešitev enačbe. Drugo linearno neodvisno rešitev $y_2(x)$ dobimo kot rešitev

$$y_1y_2'-y_1'y_2=W(x) \quad W(x)=e^{-\int p(x)dx}$$

Nehomogena linearna dif. enačba 2. reda

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

Naj bosta y_1,y_2 linearno neodvisni rešitvi homegene enačbe $(r(x)=0)$. Partikularno rešitev dobimo z nastavkom:

$$y_p=C_1(x)y1+c_2(x)y_2$$

kjer funkciji C_1,C_2 zadoščata

$$C_1'y_1+C_2'y_2=0 \qquad C_1'y_1'+C_2'y_2'=r(x)$$

Linearna dif. enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti

$$y''+py'+qy=r(x)$$

Kjer sta $p,r\in\mathbb{R}$.
Najprej rešimo homogeni del. V zgornjo enačbo vstavimo $y=e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

- Če je $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, je splošna rešitev oblike

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

- Če je $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, je splošna rešitev oblike

$$\lambda_1=a+bi \qquad \lambda_2=a-bi$$

$$y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin ax$$

Linearna dif. enačba 2. reda s konstantnimi koeficienti in posebno vrsto nehomogenosti

$$y''+py'+qy=P(x)e^{\lambda x}$$

kjer so $p,q,\lambda\in\mathbb{R}$, $P(x)$ pa polinom.
Partikularno rešitev določimo z nastavkom

$$y_p=Q(x)x^ke^{\lambda x}$$

Kjer je $Q(x)$ polinom iste stopnje kot P, k pa pove večkratnost ničle karakterističnega polinoma.

Sistemi linearnih diferencialnih enačb

$$\dot{x}=Ax$$

Kjer je A 2×2 matrika.

- Če se A da diagonalizirati, oziroma ima dva linearno neodvisna lastna vektorja $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ in lastni vrednosti λ_1,λ_2.

$$x(t)=C_1e^{\lambda_1t}\overrightarrow{e_1}+C_2e^{\lambda_2t}\overrightarrow{e_2}$$

- Če se A ne da diagonalizirati, oziroma ima samo en lastni vektor $\overrightarrow{e}$, potem izračunamo $\overrightarrow{k}$ kot rešitev $(A-\lambda I)\overrightarrow{k}=\overrightarrow{e}$

$$x(t)=C_1e^{\lambda t}\overrightarrow{e}+C_2e^{\lambda t}(\overrightarrow{k}+t\overrightarrow{e})$$