

TEORIJA GRAFOV

Osnovni pojmi

- **graf** G je urejen par $(V(G), E(G))$ množice **vozlišč** (vertex) in **povezav** (edge) med njimi.
- **krajišči povezave** sta *vozlišči* $\{u, v\} \in E(G)$ (krajši zapis $uv = \{u, v\}$)
- **soseščina vozlišča** v v je $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$
- u **sosed** v , če velja $uv \in E(G)$. (u in v sta **sosednji** vozlišči, pišemo $u \sim v$)
- **stopnja vozlišča** v je $\deg_G(v) = |N_G(v)|$
- **maksimalna stopnja vozlišč** $\Delta(G)$
- r -**regularen graf** je tak graf, da imajo vsa vozlišča stopnjo r .
- **izolirano vozlišče** je vozlišče stopnje 0.
- **matrika sosednosti** grafa G z $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ je matrika $A(G) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ za katero velja:

$$A(G)_{i,j} = \begin{cases} 1; & v_i v_j \in E(G) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

- **incidenčna matrika** grafa G z $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ in $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ je matrika $B(G) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ za katero velja:

$$B(G)_{i,j} = \begin{cases} 1; & v_i \in e_j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema o rokovanju

Za vsak graf G velja:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|$$

Posledica: Število vozlišč lihe stopnje v grafu je sodo.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{sode}}(G)} \deg(v)}_{\text{očitno sodo}} + \underbrace{\sum_{v \in V_{\text{lihe}}(G)} \deg(v)}_{\text{mora biti sodo}} = \underbrace{2|E(G)|}_{\text{očitno sodo}}$$

Podgrafi

- Graf H **podgraf** grafa G , če je $V(H) \subseteq E(G)$ in $V(H) \subseteq E(G)$. Pišemo $H \subseteq G$.
- Graf H **vpeti podgraf** grafa G , če se razlikuje samo v množici povezav: $V(H) = V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.
- **inducirani** ali **porojeni** podgraf H grafa G dobimo tako da iz G odstranimo le nekatera vozlišča (in dotične povezave).

Družine grafov

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$$
$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

- **polni grafi** $K_n : V(K_n) = [n] \quad E(K_n) = \{ij \mid i \neq j; i, j \in [n]\}$ (vsa vozlišča so sosednja).
- **pot** $P_n : V(P_n) = \mathbb{Z}_n \quad E(P_n) = \{i(i+1) \mid i \in \{0, \dots, n-1\}\}$
- **cikel** $C_n : V(C_n) = \mathbb{Z}_n \quad E(C_n) = \{i(i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ (\mathbb{Z}_n je grupa: $(n-1) + 1 = 0$)
- **polni dvodelni graf** $K_{m,n}; m, n \geq 1 :$
 $V(k_{m,n}) = \{v_1, \dots, v_m\} \cup \{u_1, \dots, u_n\}$
 $E(k_{m,n}) = \{v_i u_j \mid i \in [m], j \in [n]\}$

- **kocke** $Q_d; d \geq 1 :$
 $V(Q_d) = \left\{ \{0, 1\}^d \right\} = \{(b_1, \dots, b_d) \mid b_i \in \{0, 1\}\} \dots$ *to so vsa binarna števila dložine d*
 $E(Q_d) = \{(b_1, \dots, b_d)(p_1, \dots, p_d) \mid p_1 = b_1, \dots, p_i \neq b_i, \dots, p_d = b_d\}$
... vozlišči sta sosednji, če se razlikujeta le v enem bitu.
 Q_d je d -regularen graf.
- **posplošeni petersonovi grafi** $P_{n,k}; n \geq 3; 2k < n$
 $V(P_{n,k}) = \{v_0, \dots, v_{n-1}\} \cup \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$

$$E(P_{n,k}) = \{v_i v_{i+1} \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v_i u_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{u_i u_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$$

- **Petersenov graf** $P = P_{5,2}$

Razširjene definicije grafov

- dopuščamo **zanke** (povezave iz vozlišča v isto vozlišče)
- dovolimo večkratne povezave
- **digrafi** ali grafi usmerjenih povezav (povezave so urejeni pari, vozlišča imajo lahko različno vhodno in izhodno stopnjo)
- **uteženi grafi** (omrežje) $G = (V(G), E(G))$ skupaj s funkcijo $W_V : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ in/ali $W_E : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$

Poti in cikli

- **sprehod** je zaporedje vozlišč, ki so zaporedno sosednja
- **dolžina sprehoda** je število povezav v sprehodu.
- sprehod je **enostaven**, če so vse povezave različne.
- **pot** v grafu G je sprehod v katerem so vsa vozlišča različna.
- sprehod je **sklenjen**, če $v_0 = v_n$.
- **cikel** v grafu G je sklenjen sprehod, kjer so vsa vozlišča razen prvega in zadnjega različna.
- **notranje disjunktni uv-poti** so take uv -poti, ki imajo skupni le vozlišči u in v

Vozlišči u in v sta v relaciji $u \approx v$, če med njima obstaja uv -pot (sprehod).
 \approx je *ekvivalenčna relacija* in razdeli graf na ekvivalenčne razrede.
Podgrafom, ki jih inducirajo ti ekvivalenčni razredi, rečemo **komponente** grafa.
Število komponent grafa G označimo z $\Omega(G)$

- graf je **povezan**, če ima samo eno komponento.
- **razdalja** $d_G(u, v)$ je dolžina najkrajše uv -poti. Če taka pot ne obstaja je razdalja ∞ .
- **premer grafa** $\text{diam}(G)$ je največja razdalja med vozlišči. (G je povezan $\Leftrightarrow \text{diam}(G) < \infty$)
- **notranji premer** ali **ožina** grafa je dolžina najkrajšega cikla.

Dvodelni grafi

Graf G je **dvodelen**, če obstaja razdelitev množice $V(G)$ v množici A in B , tako, da ima vsaka povezava iz $E(G)$ eno krajišče v A in drugo v B .

$$V(G) = A \cup B \quad \text{in} \quad A \cap B = \emptyset$$

Graf je dvodelen \Leftrightarrow ne vsebuje lihih ciklov.

Morfizmi grafov

- **homomorfizem** iz G v H je preslikava $f : V(G) \rightarrow V(H)$, ki ohranja povezave:

$$u \sim_G v \Rightarrow f(u) \sim_H f(v)$$

- **epimorfizem** je funkcija, ki je *surjektivna* na vozliščih in povezavah.
- **monomorfizem** ali **vložitev** je funkcija, ki je *injektivna* na vozliščih (posledično na povezavah).
- Vložitev $f : G \rightarrow H$ je **izometrija**, če ohranja razdalje:
 $\forall u, v \in V(G) : d_H(f(u), f(v)) = d_G(u, v)$

- Če je $f : V(G) \rightarrow V(H)$ bijekcija in sta f in f^{-1} homomorfizma, je f **izomorfizem**.

- Grafa G in H sta **izomorfna** ($G \cong H$), če med njima obstaja izomorfizem. *Izomorfnost grafov pomeni, da se razlikujeta le v poimenovanju vozlišč.*
- **avtomorfizem** je izomorfizem $f : G \rightarrow G$. Množico avtomorfizmov grafa G označimo $\text{Aut}(G)$. Če dodamo še operacijo komponiranja, dobimo grupo avtomorfizmov grafa G .

Operacije na grafih

Komplementarni graf

Komplementarni graf \overline{G} grafa G je graf z $V(\overline{G}) = V(G)$ in

$$uv \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow uv \notin E(G)$$

$$\overline{(\overline{G})} = G$$

$$\text{Aut}(\overline{G}) \cong \text{Aut}(G)$$

Odstranjevanje vozlišč in povezav

Če je $X \subseteq V(G)$, je graf $G - X$ podgraf grafa G **induciran** z vozlišči $V(G) \setminus X$

Če je $F \subseteq E(G)$ potem je $G - F$ upet podgraf z množico povezav $E(G) \setminus F$.

Poljuben podgraf H grafa G lahko zapišemo kot $H = (G - X) - F$.

Skrčitev ali minor

Če je $e \in E(G)$, graf G/e dobimo tako, da identificiramo (združimo) krajišči povezave e , odstranimo zanko in morebitne večkratne povezave. (če delamo z multigraf, pustimo večkratne povezave)

Če je $F \subseteq E(G)$, graf G/F dobimo tako, da zaporedno skrčimo vse povezave iz F .

Graf H je **minor** grafa G , če obstaja $G' \subseteq G$ in $F' \subseteq E(G')$, da je $H \equiv G'/F'$.

Subdivizije povezav

$G^+(e)$ je graf, ki ga dobimo tako, da povezavo e nadomestimo s potjo dolžine 2 (povezavo e *subdividiramo*).

Graf H je **subdivizija** grafa G , če ga lahko dobimo tako, da subdiviziramo povezave v G .

Glajenje povezav

$G^-(u)$ je graf, ki ga dobimo tako, da odstranimo vozlišče u (mora biti stopnje 2) in dodamo povezavo med u -jevimi sosedi.

Kartezični produkt grafov $G\Box H$

$$V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$$

$$E(G\Box H) = \{(g, h)(g', h') \mid \\ (g = g' \wedge hh' \in E(H)) \vee (h = h' \wedge gg' \in E(G))\}$$

Lastnosti

- komutativnost $G\Box H \cong H\Box G$
- enota $G\Box K_1 \cong K_1\Box G \cong G$
- asociativnost $(G_1\Box G_2)\Box G_3 \cong G_1\Box (G_2\Box G_3)$

k -povezanost grafa

- vozišče *v* je **prerezno**, če ima graf $G - v$ več komponent kot G
- povezava *e* je **prerezna** ali **most**, če ima $G - e$ več komponent kot G .
- množica vozišč $S \subseteq V(G)$ je **prerez** grafa G , če je $\Omega(G - S) > \Omega(G)$
- množica povezav $F \subseteq E(G)$ je **povezavni prerez** grafa G , če je $\Omega(G - F) > \Omega(G)$
- Graf G je ***k*-povezan**, če ima vsaj $k + 1$ vozišč in nobena podmnozica z manj kot *k* vozišči ni prerezna.
- povezanost** grafa $\kappa(G)$ je največji *k* za katerega je graf *k*-povezan. *Najmanjše število vozišč, ki jih moramo odstraniti, da graf postane nepovezan*

globalna inačica: Graf G s $k + 1$ vozišči je *k*-povezan \Leftrightarrow za vsak par vozišč obstaja *k* notranjih disjunktnih poti.
lokalna inačica: Če sta *u* in *v* nesosednji vozišči, je maksimalno število notranjih disjunktnih *uv*-poti enako moči minimalne prerezne množice, ki graf razdeli tako, da sta *u* in *v* v različnih komponentah.

Drevesa

- gozd** je graf brez ciklov
- drevo** je *povezan* graf brez ciklov
- list** je vozišče stopnje 1

Vsako drevo z vsaj 2 voziščema vsebuje vsaj dva lista.
Za poljuben graf *T* so ekvivalentne naslednje trditve:

- T* je drevo
- za vsak par vozišč obstaja enolična pot
- T* je povezan in vsaka povezava je most
- $|E(T)| = |V(T)| - 1$

Za povezane grafe velja $|E(T)| \geq |V(T)| - 1$

Vpeta drevesa

Vpeto drevo grafa *G* je vpet podgraf, ki je drevo.
Graf je **povezan** \Leftrightarrow vsebuje vpeto drevo.
Število vpetih dreves v grafu *G* označimo $T\tau(G)$.
Če je *e* povezava multighafa *G* je

$$\tau(G) = \underbrace{\tau(G - e)}_{\text{odstranitev}} + \underbrace{\tau(G/e)}_{\text{skrčitev}}$$
$$\tau(G) = \tau(G_1) \cdot \tau(G_2)$$

$G_1, G_2 \subset G$ nimata nobene skupne povezave in le eno skupno vozišče

Laplaceova matrika $L(G)$ multigrafa *G* je kvadratna matrika, katere vrstice in stolpci predstavljajo vozišča.

$$L(G)_{i,j} = \begin{cases} deg(v_i); & i = j \\ -(\text{št. povezav med } v_i \text{ in } v_j); & i \neq j \end{cases}$$

Število vpetih dreves grafa *G* lahko izračunamo z determinanoto matrike $L(G)$, ki ji odstranimo vrstico in stolpec poljubnega vozišča.

Prüferjeva koda

T je drevo z vozišči $1, \dots, n$. Po vrsti odstranjujemo liste z najmanjšo oznako in v kodo postavimo oznako sosedu ravnokar odstranjenega lista.

Eulerjevi grafi

- eulerjev sprehod** je sprehod, ki prehodi vsako povezavo grafa natanko enkrat.
- eulerjev obhod** je sklenjen eulerjev sprehod.
- eulerjev graf** je graf v katerem obstaja eulerjev obhod.
 - Povezan graf je eulerjev \Leftrightarrow vsa njegova vozišča so sode stopnje

Eulerjev obhod poiščemo z **eulerjevim algoritmom**.

- Začnemo v poljubnem vozišču
- Premaknemo se po poljubni povezavi (most izberemo le, če ne gre drugače), ki jo za sabo pobrišemo
- Postopek ponavljamo dokler ne pridemo naokrog

Hamiltonovi grafi

- hamiltonova pot** *P* v grafu *G* je taka, da velja $V(P) = V(G)$ (= vpeta pot)
- hamiltonov cikel** *C* v grafu *G* je tak, da velja $V(C) = V(G)$ (= vpet cikel)
- hamiltonov graf** je graf v katerem obstaja hamiltonov cikel.
 - Če je $S \subseteq G$ in $\Omega(G - S) > |S|$ *G* ni hamiltonov.
 - Naj bo *G* graf z $|V(G)| \geq 3$. Če za vsak par nesosednjih vozišč *u* in *v* grafa *G* velja:

$$deg_G(u) + deg_G(v) \geq |V(G)|$$
je *G* hamiltonov.
 - Naj bo *G* graf z $|V(G)| \geq 3$. Če za vsako vozišče *u* velja

$$deg(u) \geq \frac{|V(G)|}{2}$$

je *G* hamiltonov.

Ravninski grafi

Ranvinski graf, je tak graf, ki ga lahko narišemo tako, da se nobeni povezavi ne sekata. Taki risbi rečemo **ravninska risba grafa**. Rečemo, da je graf **vložen v ravnino**. Če iz ravninske risbe izrežemo vse črte in točke, dobimo nekaj ločenih območji, ki jim pravimo **lica**. Množico lic označimo z $F(G)$. Če graf lahko vložimo v ravnino, ga lahko tudi na sfero.
Dolžina lica $l(f)$ je število povezav, ki jih prehodimo, ko obhodimo lice. Če obhodimo vsa lica v grafu vloženem v ravnino, smo vsako povezavo prehodili dvakrat:

$$\sum_{f \in F(G)} l(f) = 2|E(G)|$$

Ožina grafa $g(G)$ je dolžina najkrajšega cikla. Če graf nima cikla je $g(G) = \infty$
Očitno je $f(G) \geq g(G)$.
Če je *G* povezan ravninski graf vložen v ravnino, velja:

$$2|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f) \geq \sum_{f \in F(G)} g(G) = |F(G)| \cdot g(G)$$

$$|E(G)| \geq \frac{g(G)}{2}|F(G)|$$

Naj bo *G* ravninski graf vložen v ravnino:

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + |\Omega(G)|$$

Če je *G* povezan ravninski graf, ki ni drevo ($g(G) \neq \infty$), \Rightarrow

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Če to ne velja graf ni ravninski, obratno pa ni nujno res. Ker je $g(G) \geq 3$, velja

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$$

Če *G* nima trikotnikov ($g(G) \geq 4$), velja

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$$

Kuratowski izrek: Graf je ravninski \Leftrightarrow ne vsebuje podgrafa izomornega subdiviziji K_5 ali $K_{3,3}$.
Wagnerjev izrek: Graf je ravninski \Leftrightarrow nima minorja izomornega K_5 ali $K_{3,3}$.

Barvanje vozišč

Naj bo *K* množica baru. Tedaj je preslikava $c : V(G) \rightarrow K$ **barvanje grafa** *G*. Barvanje je **dobro**, če velja:

$$\forall u, v \in V(G) \quad : \quad uv \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v)$$

Če je $k = |K|$ govorimo o *k*-barvanju. Najmanjši *k* za katerega obstaja doboro barvanje grafa *G*, imanujemo **kromatično število** grafa *G*; oznaka $\chi(G)$.
Če je $H \subseteq G$ je $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Požrešni algoritem

Barve označimo z \mathbb{N} . Vzamemo poljubni vrstni red vozišč grafa *G*. Po vrsti barvamo tako, da vozišče *v_i* pobarvamo z najmanjšo možno barvo. Obstaja tak vrstni red, da požrešni algoritem porabi le $\chi(G)$ baru.

Če je *G* graf, je $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Če je *G* povezan graf in ni C_{2n+1} ali K_n , je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Za vsak ravninski graf velja $\chi(G) \leq 4$.

Barvanje povezav

Ko barvamo povezave, zahtevamo, da vse povezave s skupnim krajiščem prejmejo različne barve. Najmanjše število baru za barvanje povezav grafa *G* je **kromatični index** grafa; oznaka $\chi'(G)$.
Vse povezave vozišča *v* dobijo različne barve, zato je $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

$$\chi'(G) \in \{ \underbrace{\Delta(G)}_{\text{razred 1}}, \underbrace{\Delta(G) + 1}_{\text{razred 2}} \}$$

K_{2n} je iz razreda 1, K_{2n+1} pa iz razreda 2. Vsi dvodelni grafi so iz rezreda 1.

OSNOVE ALGEBRE

Algebrske struktre

- **grupoid** (M, \cdot) urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo \cdot .
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M \ \forall x \in M : e \cdot x = x \cdot e = x$.
- **grupa** polgrupa v kateri ima vsak element inverz $\forall x \in M \ \exists x^{-1} \in M : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$.

Potence elementov

Naj bo (A, \cdot) polgrupa in $a \in A$. Potem je potenca a^n , $n \in \mathbb{N}$ induktivno definirana z:

$$a^0 = e \qquad \textbf{in} \qquad a^n = a^{n-1} \cdot a$$

Iz definicije sledi:

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Recimo, da je a obrnljiv:

$$\left(a^{-1}\right)^n = \left(a^n\right)^{-1}$$

Množica \mathbb{Z}_m

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$$

Vpeljemo seštevanje $+_m$ po modulu m in množenje \cdot_m po modulu m .

Dobimo grupo $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ in monoid (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) .

Red elementa $x \in \mathbb{Z}_m$ je $\frac{m}{\gcd(m,x)}$

Množica \mathbb{Z}_m^*

To je množica vseh obrnljivih elementov v \mathbb{Z}_m (operacija: množenje).

$$|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$$

Element $x \in \mathbb{Z}_m$ je obrnljiv če se da rešiti *diofantsko enačbo*:

$$xy + km = 1$$

za neznanki y (inverz od x) in k .

Cayleyjeva tabela

Za vsak element množice imamo en stolpec in eno vrstico. V vsakem polju je produkt elementa vrstice in elementa stolpca. (Presek vrstice a in stolpca b je ab)

Red elementa

Naj bo (G, \cdot) grupa. Red elemneta a je najmanjše naravno število $n \in \mathbb{N}$, da velja

$$a^n = e$$

Če je grupa končna, tak eksponent vedno obstaja (red elementa deli moč grupe).

Pri neskončnih grupah pa je red ∞ , če tak n ne obstaja.

Red enote je 1. Enota je tudi edini element grupe, ki ima red 1.

Podgrupe

Naj bo (G, \cdot) grupa. Tedaj je $H \subseteq G$ podgrupa, ko je (H, \cdot) grupa.

Če je H podgrupa G in $H \neq G$ pišemo $H \subset G$ (**prava podgrupa**).

$\{e\}$ je vedno podgrupa G (**trivialna grupa**).

Naj bo (G, \cdot) grupa in $\emptyset \neq H \subseteq G$. Tedaj je

$$(H, \cdot) \subseteq (G, \cdot) \Leftrightarrow \forall x, y \in H : x^{-1}y \in H$$

Naj bo (G, \cdot) *končna* grupa in $\emptyset \neq H \subseteq G$. Tedaj je

$$(H, \cdot) \subseteq (G, \cdot) \Leftrightarrow \cdot \text{ je notranja operacija}$$

Ciklična podgrupa

Naj bo (G, \cdot) grupa in $a \in G$. Potem je $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$

$$(\langle a \rangle, \cdot) \subseteq (G, \cdot)$$

Podgrupa $(\langle a \rangle, \cdot)$ je **ciklična** podgrupa v G generirana z a .

Če je G grupa ina $a \in G$ tak element, da je $\langle a \rangle = G$, je G **ciklična grupa**, element a pa **generator** grupe G .

Če ima $a \in G$ neskončen red, so vse potence a paroma različni elementi grupe G .

Če ima $a \in G$ končen red, velja

$$\forall i, j \in \mathbb{Z} : a^i = a^j \Leftrightarrow n|(i-j)]$$

$$a^n = e \ \wedge \ a^k = e \Rightarrow n|k$$

Naj bo $G = \langle a \rangle$ ciklična grupa reda n . Potem je

$$G = \langle a^k \rangle \Leftrightarrow \gcd(n, k) = 1$$

in

$$|\langle a \rangle| = n$$

Če je v $\langle \rangle$ več elemnetov, je to množica vseh njihovih potenc in produktov teh potenc.

$$\langle a, b \rangle = \{xy \text{ in } yx : x \in \langle a \rangle; y \in \langle b \rangle\}$$

Center grupe

Naj bo (G, \cdot) grupa. Potem je **center** grupe $Z(G)$ podmnožica elementov, ki komutirajo z vsemi elementi v G :

$$Z(G) = \{a \in G : ax = xa \ \forall x \in G\}$$

Center grupe G je tudi podgrupa G :

$$(Z(G), \cdot) \subseteq (G, \cdot)$$

Permutacijske grupe

- **Permutacija** množice A je bijektivna funkcija $\pi : A \rightarrow A$.
- **Permutacijska grupa** na množici A je množica premutaciji množice A , ki tvorijo grupo za komponiranje funkciji.
- **Simetrična grupa** S_n je permutacijska grupa na $[n]$, ki vsebuje vse permutacije množice $[n]$ ($|S_n| = n!$).
- Red permutacije je *lcm*(dolžine disjunktnih ciklov).
- Disjunktni cikli permutacij komutirajo.
- Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt transpozicij.
- Če je število transpozicij sodo je permutacija soda, drugače je liha.
- **Alternirajoča grupa** A_n je grupa vseh sodih permutaciji množice $[n]$

$$A_n \subseteq S_n$$

$$\forall n > 1 : |A_n| = \frac{n!}{2}$$

Izomorfizmi grup

Naj bosta (G, \cdot) in $(H, *)$ grupi. Preslikava $\alpha : G \rightarrow H$ je

homomorfizem, če velja:

$$\forall a, b \in G : \alpha(a \cdot b) = \alpha(a) * \alpha(b)$$

Če je α še bijektivna, je **izomorfizem**.

Če je $G = H$, je α **avtomorfizem**.

Grupi sta **izomorfni**, če med njima obstaja izomorfizem. Pišemo $G \approx H$.

Cayleyev izrek: Vsaka grupa je izomorfna neki permutacijski grupi.

Izomorfizem grup pomeni, da imamo *isti* grupi, le da sta definirani na različna načina.

Grupi G in H z izpmorfizmom $\alpha : G \rightarrow H$ imata lastnosti:

- α preslika enoto G v enoto H .

- $\forall a \in G, n \in \mathbb{Z} : \alpha(a^n) = (\alpha(a))^n$

- $\forall a, b \in G : a \text{ in } b \text{ komutirata} \Leftrightarrow \alpha(a) \text{ in } \alpha(b) \text{ komutirata}$

- G je abelova $\Leftrightarrow H$ je abelova

- G je ciklična $\Leftrightarrow H$ je ciklična

- $K \subseteq G \Rightarrow \alpha(K) \subseteq H$

\vdots

Odseki grupe

Naj bo G grupa in $H \subseteq G$ ter $a \in G$.

$$aH = \{ah : h \in H\} \ \dots \textbf{levi odsek} \text{ grupe } G \text{ po podgrupi } H$$

$$Ha = \{ha : h \in H\} \ \dots \textbf{desni odsek} \text{ grupe } G \text{ po podgrupi } H$$

Lastnosti odseka:

- $a \in aH$

- $aH = H \Leftrightarrow a \in H$

- bodisi velja $aH = bH$ bodisi $aH \cap bH = \emptyset$

- $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$

- $|aH| = |bH|$

- $aH = Ha \Leftrightarrow H = aHa^{-1}$

- $aH \subseteq \Leftrightarrow a \in H$

Lagrange: Če je G končna grupa in $H \subseteq G$, potem $|H|$ deli $|G|$.

Število različnih levih (desnih) *odsekov* po H je $\frac{|G|}{|H|}$ ((index podgurpe)).

Red elementa končne grupe deli moč grupe.

Grupa praštevilske moči je *ciklična*.

Če je G končna grupa je $a^{|G|} = e$.

Mali Fermantov izrek: $\forall a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P} : a^p \bmod p = a \bmod p$.

Podgrupe edinke

Podgrupa $H \subseteq G$ je **edinka** ($H \triangleleft G$), če velja:

$$\forall a \in G : aH = Ha$$

ekvivalnten pogoj:

$$\forall a \in G : aHa^{-1} = H$$

Če sta $\{e\} \triangleleft G$ in $H \triangleleft G$ edini edinki v G , je G **enostavna grupa**.

Odseki po podgrupi edinki tvorijo grupo. Naj bo G grupa in $H \subseteq G$:

$$G/H = \{aH : a \in G\} \ \dots \textbf{faktorska grupa} \text{ grupe } G$$

Vpeljimo operacijo v G/H :

$$(aH)(bH) = abH$$

Če je $H \triangleleft G$, je G/H grupa.

Če je G grupa in $G/Z(G)$ ciklična grupa, je G abelova.

Kolobarji

Kolobar je množica *R* skupaj z dvema operacijama (oznaka: +, ·) tako, da velja:

- (*R*, +) je abelova grupa
- ∀*a*, *b* ∈ *R* : *ab* ∈ *R* (zaprtost)
- ∀*a*, *b*, *c* ∈ *R* : (*ab*)*c* = *a*(*bc*) (asociativnost)
- ∀*a*, *b*, *c* ∈ *R* : *a*(*b* + *c*) = *ab* + *ac* (distrubutivnost)
- ∀*a*, *b*, *c* ∈ *R* : (*a* + *b*)*c* = *ac* + *bc* (distrubutivnost)

Kolobar je **komutativven**, če ∀*a*, *b* ∈ *R* : *ab* = *ba*. Kolobar je **kolobar z enoto**, če ∃1 ∀*a* ∈ *R* : *a* ∈ *R* : 1*a* = *a*1 = *a* element 1 je **enota kolobarja**.

Če sta *R* in *S* kolobarja, je njuna **direktna vsota** *R* ⊕ *S* kartezični produkt *R* × *S* opremljena z operacijama

(*r*, *s*) + (*r*', *s*') = (*r* + *r*', *s* + *s*') in (*r*, *s*)(*r*', *s*') = (*rr*', *ss*')

Direktna vsota kolobarjev je tudi kolobar.

Direktna vsota komutativnih kolobarjev je komutativen kolobar.

Direktna vsota kolobarjev z enoto je kolobar z enoto.

Lastnosti kolobarjev

- Enota 0 kolobarja za seštevanje je enolična.
- Če ima *R* enoto 1 za množenje, je enolična.
- Za kolobar *R* in *a*, *b* ∈ *R* velja:
 - 0*a* = *a*0 = 0
 - (−*a*)*b* = *a*(−*b*) = −(*ab*)
 - (−*a*)(−*b*) = *ab*
 - Če ima *R* enoto 1, (−1)*a* = −(1*a*) = −*a*

Podkolobarji

Naj bo *R* kolobar in *S* ⊆ *R*. Če je *S* kolobar za isti operaciji kot *R*, je *S* **podkolobar** kolobarja *R*.

Ekvivalentna definicija: *S* je podkolobar *R* natanko tedaj, ko:

- 0 ∈ *S*
- ∀*a*, *b* ∈ *S* : *a* − *b* ∈ *S*
- ∀*a*, *b* ∈ *S* : *ab* ∈ *S*

Center kolobarja

Center kolobarja *R* je

{*x* ∈ *R* : *ax* = *xa* ∀*a* ∈ *R*}

Center kolobarja *R* je tudi njegov podkolobar.

Delitelji niča in celi kolobarji

Naj bo *R* komutativen koloboar. Tedaj je *a* ∈ *R*, *a* ≠ 0 **delitelj nič**a, če

∃*b* ∈ *R*, *b* ≠ 0 : *ab* = 0

Cel kolobar je komutativen kolobar z enoto (1 ≠ 0), ki nima deliteljev nič

Pravilo krajšanja: Če je *R* cel kolobar, potem velja

ab = *ac*, *a* ≠ 0 ⇒ *b* = *c*.

Polja in obsegi

Komutaiteven obseg z enoto (1 ≠ 0) je **polje**, če je vsak element različen od 0 obrnljiv.

Polju, ki pa ni komutativno, pravimo **obseg**.

Polje je cel kolobar (obratno pa ni nujno).

Če je *R* končen cel kolobar, je *R* polje.

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- ℤ**n* je cel kolobar
- ℤ**n* je polje
- n* je praštevilo

Podpolja

Če je *F* polje, je *K* ⊆ *F* podpolje v *F* natoanko tedaj, ko:

- 1 ∈ *K*
- ∀*a*, *b* ∈ *K* : *a* − *b* ∈ *K*
- ∀*a*, *b* ∈ *K*, *b* ≠ 0 : *ab*^{−1} ∈ *K*

Karakteristika kolobarja

Če je *R* kolobar, *a* ∈ *R* in *n* ∈ ℕ, pišemo

n
a
=
\underbrace{a
+
a
+
…
+
a

n
-
krat

}

{\displaystyle na=\underbrace {a+a+\ldots +a} _{n-krat}}

Karakteristika kolobarja *R* je najmanjši *n* ∈ ℕ, tako da velja

∀*a* ∈ *R* : *na* = 0

Če tak *n* ne obstaja je karakteristika enaka 0. *Oznaka*: char*R*

Naj bo *R* kolobar ze enoto. Tedaj velja:

- Če je red 1 v grupi (*R*, +) enak *n* < ∞, je char*R* = *n*.
- Če pa ima 1 v grupi (*R*, +) neskončen red, je char*R* = 0.

Če je *R* cel kolobar, je char*R* ∈ 0 ∪ ℙ.

Ideali

imajo pri kolobarjih podobno vlogo kot podgrupe edinke pri grupah.

Podkolobar *I* kolobarja *R* je **ideal**, če

∀*i* ∈ *I*; ∀*r* ∈ *R* : *ir* ∈ *I* ∨ *ri* ∈ *I*

Če je *R* kolobar in *I* ⊆ *R*, je *I* ideal natanko tedaj, ko velja:

- 0 ∈ *I*
- ∀*i*, *j* ∈ *I* : *i* − *j* ∈ *I*
- ∀*i* ∈ *I*; ∀*r* ∈ *R* : *ir* ∈ *I* ∨ *ri* ∈ *I*

Če je *R* kolobar z enoto in ideal *I* vsebuje obrnljiv element, je *I* = *R*. Če je *F* polje, sta njegova edina ideala *F* in {0}.

Naj bosta *I* in *J* ideala v kolobarju *R*. Definirajmo operaciji:

- I* + *J* = {*i* + *j* : *i* ∈ *I*, *j* ∈ *J*}
- I* *J* = {*i*₁*j*₁ + ... + *i*_{*n*}*j*_{*n*} : *i*_{*k*} ∈ *I*, *j*_{*k*} ∈ *J*, *n* ∈ ℕ}

Če sta *I* in *J* ideala v *R*, potem je

- I* + *J* ideala v *R*
- I* *J* ideala v *R*

Naj bo *I* ideal kolobarja *R*. Tedaj je množica levih odsekov

R/*I* = {*a* + *I* : *a* ∈ *R*}

skupaj z operacijama

(*a* + *I*) + (*b* + *I*) = *a* + *b* + *I*

(*a* + *I*)(*b* + *I*) = *ab* + *I*

faktorski kolobar.

Kolobarji polinomov

Naj bo *R* komutativen kolobar. Tedaj je

R
[
x
]
=
{

a

n

x

n

+
…
+

a

1

x
+

a

0

:

a

i

∈
R
,
n
∈

N

0

}

{\displaystyle R[x]=\{a_{n}x^{n}+\ldots +a_{1}x+a_{0} : a_{i}\in R,n\in \mathbb {N} _{0}\}}

kolobar polinomov nad *R*.

Stopnja polinoma *f*(*x*) ∈ *R*[*x*] je *m*, če *a*_{*m*} ≠ 0 in *a*_{*i*} = 0 za vse *i* > *m*. *a*_{*m*} je tedaj **vodilni koeficient**, *a*_{*m*}*x*^{*m*} pa **vodilni člen**.

Ničelni polinom 0 nima niti stopnje, niti vodilnega člena ali koeficienta.

Konstantni polinom *f*(*x*) = *a*₀ je bodisi ničelni, bodisi ima stopnjo 0.

Množenje in seštevanje polinomov je definirano:

f
(
x
)
=

a

n

x

n

+
…
+

a

0

{\displaystyle f(x)=a_{n}x^{n}+\ldots +a_{0}}

g
(
x
)
=

b

n

x

n

+
…
+

b

0

{\displaystyle g(x)=b_{n}x^{n}+\ldots +b_{0}}

f
(
x
)
+
g
(
x
)
=
(

a

n

+

b

n

)

x

n

+
…
+
(

a

1

+

b

1

)
x
+
(

a

0

+

b

0

)

{\displaystyle f(x)+g(x)=(a_{n}+b_{n})x^{n}+\ldots +(a_{1}+b_{1})x+(a_{0}+b_{0})}

f
(
x
)
g
(
x
)
=

c

n
+
n

x

n
+
n

+
…
+

c

1

x
+

c

0

{\displaystyle f(x)g(x)=c_{n+n}x^{n+n}+\ldots +c_{1}x+c_{0}}

- Če je *R* komutaitven kolobar, je tudi *R*[*x*] komutativen kolobar.

- Če je *R* cel kolobar, je tudi *R*[*x*] cel kolobar.

- Naj bo *R*[*x*] cel kolobar in *f*(*x*), *g*(*x*) ∈ *R*[*x*] neničelna polinoma stopenj *n* in *m*.
 - deg(*f*(*x*) + *g*(*x*)) ≤ *max*{*n*, *m*} (ali pa je *f*(*x*) + *g*(*x*) = 0)
 - deg(*f*(*x*)*g*(*x*)) = *n* + *m*.

Izrek o deljenju polinomov: Naj bo *F* polje in

f(*x*), *g*(*x*) ∈ *F*[*x*]; *g*(*x*) ≠ 0, potem obstajata enolična polinoma

q(*x*), *r*(*x*) ∈ *F*[*x*], da velja

f
(
x
)
=
g
(
x
)
⋅
\underbrace{q
(
x
)

količnik

}
+
\underbrace{r
(
x
)

ostanek

}

{\displaystyle f(x)=g(x)\cdot \underbrace {q(x)} _{količnik}+\underbrace {r(x)} _{ostanek}}

Kjer je bodisi *r*(*x*) = 0, bodisi deg(*r*(*x*)) < deg(*g*(*x*)).

Ničle polinomov in nerazcepni polinomi

Naj bo *F* polje. Tedaj je *f*(*x*) ∈ *F*[*x*] **nerazcepen polinom**, če

∀*f*(*x*), *g*(*x*) ∈ *F*[*x*] : *f*(*x*) = *g*(*x*)*h*(*x*) ⇒ *g*(*x*) ∈ *F* ∨ *h*(*x*) ∈ *F*

sicer, je *f*(*x*) **razcepen polinom**.

Naj bo *f*(*x*) ∈ *F*[*x*] in *b* ∈ *F*. Tedaj lahko izračunamo *f*(*x*) v *b*:

f(*b*) = *a*_{*n*}*b*^{*n*} + ... + *a*₀.

Naj bo *F* polje, *f*(*x*) ∈ *F*[*x*] in *a* ∈ *F*. Potem obstaja *q*(*x*) ∈ *F*[*x*], da

f(*x*) = (*x* − *a*)*q*(*x*) + *f*(*a*)

Naj bo *F* polje in *f*(*x*) ∈ *F*. Če je *a* ∈ *F* in velja *f*(*a*) = 0, je *a* **ničla polinoma**.

a je ničla *f*(*x*) ⇔ (*x* − *a*)|*f*(*x*)

- Če ima *f*(*x*) ničlo, je razcepen (ni pa nujno obratno).
- Naj bo *F* polje in *f*(*x*) ∈ *F*[*x*]; deg(*f*(*x*)) ∈ {2, 3}. Potem je *f*(*x*) nerazcepen natanko tedaj, ko nima ničle.
- Neničeln polinom stopnje *n* ima največ *n* ničel iz *F*.

Euljerjeva funkcija

Euljerjeva funkcija nam pove koliko je obrnlivih elementov v *ℤ*_{*m*}. Za *n* ∈ ℕ s paraštevilskim razcepom *n* = *p*₁^{α₁} · ... · *p*_{*m*}^{α_{*m*}} velja:

ϕ
(
n
)
=
ϕ
(

p

1

α
1

)
⋅
…
⋅
ϕ
(

p

m

α
m

)
=
n

∏

p

k

∈

P

⎡
1
−

1

p

k

⎣

{\displaystyle \phi (n)=\phi (p_{1}^{\alpha _{1}})\cdot \ldots \cdot \phi (p_{m}^{\alpha _{m}})=n\prod _{p_{k}\in \mathbb {P} }\left(1-{\frac {1}{p_{k}}}\right)}

Linearne diofantske enačbe

Diofantska enačba *ax* + *by* = *c* ima rešitev ⇔ gcd(*a*, *b*)|*c*.

Če ima eno rešitev (*x*₀, *y*₀) ∈ ℤ² ima neskončno množico rešitev:

{(*x*_{*k*}, *y*_{*k*}) : *k* ∈ ℤ}

x

k

=

x

0

−
k

gcd
(
a
,
b
)

{\displaystyle x_{k}=x_{0}-k{\frac {b}{\gcd(a,b)}}}

y

k

=

y

0

+
k

gcd
(
a
,
b
)

{\displaystyle y_{k}=y_{0}+k{\frac {a}{\gcd(a,b)}}}

Razširjen evklidov algoritem

vhod: (*a*, *b*)
(*r*₀ , *x*₀ , *y*₀) = (*a* , 1 , 0)
(*r*₁ , *x*₁ , *y*₁) = (*b* , 0 , 1)
i = 1

dokler *r*_{*i*} ≠ 0:
i = *i*+1
*k*_{*i*} = *r*_{*i*−2}/*r*_{*i*−1}
(*r*_{*i*}, *x*_{*i*}, *y*_{*i*}) = (*r*_{*i*−2}, *x*_{*i*−2}, *y*_{*i*−2}) − *k*_{*i*}(*r*_{*i*−1}, *x*_{*i*−1}, *y*_{*i*−1})
konec zanke
vrni: (*r*_{*i*−1}, *x*_{*i*−1}, *y*_{*i*−1})

Naj bosta *a*, *b* ∈ ℤ. Tedaj trojica (*d*, *x*, *y*), ki jo vrne razširjen evklidov algoritem z vhodnim podatkomk (*a*, *b*), zadošča:

ax + *by* = *d* in *d* = gcd(*a*, *b*)