Oznake

- $\mathbb{N} = \{0, 1, ...\}$ množica naravnih števil
- $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ množica celih števil
- $[n] = \{1, ..., n\}$
- $Y^X = \{f : X \to Y\}$ množica vseh preslikav iz X v Y
- $2^X = P(X) = \{A \subseteq X\}$ množica vseh podmnožic množice X
- $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1; & j = i \\ 0; & j \neq i \end{cases}$ Kroneckerjeva delta

Lastnosti funkcji

- **Injektivnost** (različna elementa se vedno slikata v različno sliko)

$$\forall x, x' \in X : x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

$$\exists f : X \to Y \text{ injekcija} \Rightarrow |X| \leq |Y|$$

- **Surjektivnost** (vsak element Z_f je slika vsaj enega elementa D_f)

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : y = f(x)$$

$$\exists f : X \to Y \text{ surjekcija} \Rightarrow |X| \geq |Y|$$

- **Bijektivnost** (injekcija in surjekcija)

$$\forall y \in Y \; \nexists x \in X : y = f(x)$$

$$\exists f : X \to Y \text{ bijekcija} \Rightarrow |X| = |Y|$$

Dirichletovo načelo

Če n kroglic razporedimo v k škatel in je $n > k$, bosta v vsaj eni škatli vsaj dve kroglici.

$$\exists f : X \to Y \text{ injekcija} \Rightarrow |X| \leq |Y|$$

$$|X| > |Y| \Rightarrow \nexists \text{injekcija } f : X \to Y$$

Posplošeno Dirichletovo načelo

Če n kroglic razporedimo v k škatel in je $n > r \cdot k$, bo v vsaj eni škatli vsaj $r + 1$ kroglic.

Načelo vsote

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$$

Načelo vklučitev in izključitev

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cup B \cup C|$$

Načelo produkta

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Asimptotična enakost

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Eulerjeva funkcija

$$\varphi(n) = |\{k \in [n] : D(n,k) = 1\}| = \text{št. proti } n \text{ tujih števil, ki so} \leq n$$

$$\varphi(p) = p - 1 \qquad p \in \mathbb{P}$$

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k(1 - \frac{1}{p})$$

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Funkcije in urejene izbire

N in K sta množici, kjer je $n = |N|$ in $k = |K|$. K^N je množica vseh funkcij, ki slikajo iz N v K.
(**Variacije s ponavljanjem**) Število poljubnih funkcij, ki slikajo iz N v K je k^n.
(**Variacije brez ponavljanja**) Število injektivnih funkcij, ki slikajo iz N v K je $n^{\underline{k}} = \frac{k!}{(k-n!)}$.

Padajoča potenca

$$k^{\underline{n}} = (k)_n = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot (k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}$$

Naraščujoča potenca

$$k^{\overline{n}} = (k)^n = k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (k+n-1) = \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}$$

Stirlingova formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

Funkcija gama

Funkcija gama je posplošitev fakultete.

$$x > 0 \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

Podmnožice in načrti

Binomski koeficient

Za nožico N in število k je *binomski koeficient* množica vseh podmnožic množice N moči k:

$$\binom{N}{k} = \{A \subseteq N : |A| = k\}$$

Za $n, k \in \mathbb{N}$ je *binomski koeficient*:

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$$

Za binomski koeficient veljajo naslednje enaksti:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{za } k > n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Obstaja tudi *rekurzivna zveza*:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Binomski izrek

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Izbori

Imamo n optevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s ponavljanjem	**brez ponavljanja**
variacije *vrstni red je pomemben*	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije *vrstni red ni pomemben*	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Kompozicije

Kompozicija števila n je l-terica števil λ_i, katerih vsota je n.

$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l); \qquad \lambda_i \in \mathbb{Z},\ \lambda_i > 0$$

$\lambda_1, ..., \lambda_l$	...	členi kompozicije
$l(\lambda) = l$	...	dolžina kompozicije
$\lvert\lambda\rvert = \lambda_1 + ... + \lambda_l$	...	velikost kompozicije

Število n ima 2^{n-1} kompozicij in $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$ kompozicij s k členi.

Šibke kompozicije

Šibke kompozicije se od navadnih razlikujejo po tem, da lahko vsebujejo tudi 0.

$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l); \qquad \lambda_i \in \mathbb{Z},\ \lambda_i \geq 0$$

Število n ima ∞ šibkih kompozicij in $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$ šibkih kompozicij s k členi.

Načelo vključitev in izključitev

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup ... \cup A_n| &= |A_1| + ... + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... - |A_1 \cap A_n| - ... - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + ... \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 \leq ... \leq j_i \leq n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_i}| \\
\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| &= \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|-1} |A_S| \ ; \qquad A_S = \bigcap_{i \in S} A_i \\
\left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i^C \right| &= \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |A_S|
\end{aligned}$$

Načrti

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_b\}$ je načrt s parametri (v, k, λ), če velja:

- $B_1, ..., B_b \subseteq X$
- $|X| = v$

- $|B_1| = ... = |B_b| = k$
- Za $\forall i \in X$ je $i \in B_j$ za λ različnih j-jev

Načrt lahko prikažemo s tabelo kljukic v kateri stolpci predstavljajo bloke vrstice pa elemente množice X.

	$B \in \mathcal{B}$
$x \in X$	$\begin{cases} \checkmark ; x \in B \\ 0 ; x \notin B \end{cases}$

V vsakem stolpcu je k kljukic.
V vsaki vrstici je λ kljukic.

$$b \cdot k = v \cdot \lambda \Rightarrow k \mid v \cdot \lambda$$

$$b \leq \binom{v}{k} \qquad \frac{v \cdot \lambda}{k} \leq \binom{v}{k}$$

$$\lambda \leq \frac{k}{v} \frac{v!}{k!(v-k)!} = \frac{(v-1)!}{(k-1)!(v-k)!} = \binom{v-1}{k-1}$$

Načrt s pareametri (v, K, λ) obstaja $\Leftrightarrow$

$$k \mid v \cdot \lambda \;, \qquad \lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$$

t-načrti

$\mathcal{B}$ je t-načrt s parametri (v, k, λ_t), če

- $B_i \subseteq X$
- $|X| = v$
- $|B_i| = k$
- $\forall S \subseteq X, |S| = t$ velja $S \subseteq B_i$ za natanko λ_t indeksov i.

Če je $\mathcal{B}$ t-načrt s parametri (v, k, λ_t), je tudi $(t-1)$-načrt s parametri (v, k, λ_{t-1}) kjer je

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1}$$

Če je $\mathcal{B}$ t-načrt s parametri (v, K, λ_t), potem je $\mathcal{B}$ tudi s-načrt s parametri (v, K, λ_s) kjre je $1 \leq s \leq t$ in

$$\lambda_s = \lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1} \cdot \frac{v-t+2}{k-t+2} \cdot ... \cdot \frac{v-s}{k-s}$$

Permutacije, razdelitve in razčlenitve

Stirlingova števila 1. vrste

Permutacijo lahko zapišemo kot produkt disjunktnih ciklov.
$c(n,k)$ ... število premutacij v S_n s k cikli

$$c(n,n)=1 \qquad c(n,n-1)=\binom{n}{2} \qquad c(n,1)=(n-1)! \qquad c(n,0)=\delta_{n\,0}$$

Za *Stirlingova števila 1. vrste* ni enostavne formule imamo pa rekurzivno zvezo:

$$c(n,k)=c(n-1,k-1)+(n-1)\,c(n-1,k)$$

Vseh premutacij v S_n je

$$\sum_k c(n,k)=n!$$

Izrek:

$$\sum_k c(n,k)x^k=x^{\overline{n}}$$

Stirlingova števila 2. vrste

$\mathcal{B}=B_1,...,B_k$ je razdelitev *(razbitje, praticija)* množice X, če velja:

- $B_i \neq \emptyset$
- $B_i \cap B_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^k B_i = X$

$S(n,k)$ ... število razdelitev $[n]$ s k bloki.

$$S(n,n)=1 \qquad S(n,n-1)=\binom{n}{2} \qquad S(n,1)=1 \qquad S(n,0)=\delta_{n\,0}$$

$$S(n,k)=0 \quad \text{za } k>n \text{ ali } k<0$$

Število surjekcij iz $[n]$ v $[k]$ je enako $k!S(n,k)$. Po načelu vključitev in izključitev je število surjekcij iz $[n]$ v $[k]$ enako:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$$

Torej je

$$S(n,k)=\frac{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n}{k!}$$

Za *Stirlingova števila 2. vrste* velja tudi rekurzivna zveza:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\,S(n-1,k)$$

Izrek:

$$\sum_k S(n,k)x^{\underline{k}}=x^n$$

$S(n,k)$ je enako številu ekvivalenčnih relacij z k ekvivalenčnimi razredi na $[n]$

Bellova števila

$B(n)\ldots$ število vseh razdelitve $[n]$

$$B(n)=\sum_{k}S(n,k)$$

Rekurzivna zveza:

$$B(n+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(k)$$

$B(n)$ je enako številu ekvivalenčnih relacij na $[n]$

Lahova števila

$L(n,k)\ldots$ število razdelitev $[n]$ na k med seboj linearno urejenih blokov Rekurzivna zveza:

$$L(n,k)=L(n-1,k-1)+(n-1+k)\,L(n-1,k)$$

Izrek:

$$\sum_{k}L(n,k)x^{\underline{k}}=x^{\overline{n}}$$

Formula za *Lahova števila*:

$$L(n,k)=\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$$

Multinomski koeficient

$$\binom{n}{n_1,...,n_k}=\frac{n!}{n_1!\cdot...\cdot n_k!}$$

$n_1+...n_k$ mora biti enako n

Multinomski izrek

$$(x_1+...+x_k)^n=\sum_{\underbrace{(n_1,...,n_k)}_{\text{šibka kompozicija } n}}\binom{n}{n_1,...,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$$

Razčlenitev

$\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_l),\ \lambda_1\geq...\geq\lambda_l>0,\ \lambda_i\in\mathbb{N}$ je razčlenitev števila $n=\lambda_1+...\lambda_l$

- $\lambda_1,...m\lambda_l$ so *členi*
- $\lambda_1+...+\lambda_l=|\lambda|$ je velikost λ
- $l=l(\lambda)$ dolžina

Razčlenitev lahko grafično predstavimo z **Ferrersovim diagramom**:
V i. vrstico narišemo λ_i pikic. Naprimer $(4, 3, 3, 1, 1, 1)$ je razčlenitev 13.

$$\begin{array}{cccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & & & \\
\bullet & & & \\
\bullet & & &
\end{array}$$

Konjugirana razčlenitev λ' ali λ^C
Dobimo jo tako, da diagram transponiramo.
Naprimer $433111' = 6331$:

$$\begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & \\
\bullet & & & & &
\end{array}$$

$$\lambda'_i = |\{j : \lambda_j \geq i\}| = \max\{j : \lambda_j \geq i\}$$

$$|\lambda'| = |\lambda| \qquad l(\lambda') = \lambda_1 \qquad \lambda'_1 = l(\lambda) \qquad \lambda'' = \lambda$$

$p(n) \ldots$ število razčlenitev n
$p_k(n) \ldots$ število razčlenitev n s k členi
$\overline{p_k}(n) \ldots$ število razčlenitev n z največ k členi

Rekurzivne zveze:

$$p_k(n) = \overline{p_n}(n-k)$$

$$p_k(n) = p_{n-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

$$\overline{p_k}(n) = p_k(n) + \overline{p_{k-1}}(n) = \overline{p_{k-1}}(n) + \overline{p_k}(n-k)$$

Eulerjev petkotniški izrek

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right)\right)$$

Dvanajstera pot

Imamo n kroglic in k škatel. Na koliko načinov lahko damo kroglice v škatle. To je analogija za preslikave.

kroglice	škatle	**vse preslikave**	**injekcije**	**surjekcije**
ločimo	ločimo	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!\,S(n,k)$
ne ločimo	ločimo	$\binom{n+k-1}{k-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
ločimo	ne ločimo	$\sum_{i=0}^{k} S(n,i)$	$\begin{cases} 1; & k \geq n \\ 0; & k < n \end{cases}$	$S(n,k)$
ne ločimo	ne ločimo	$\overline{p_k}(n)$	$\begin{cases} 1; & k \geq n \\ 0; & k < n \end{cases}$	$p_k(n)$

Rodovne funkcije

Kako lahko predstavimo zaporedje:

1. **Z eksplicitno formulo:**

$$a_n = 2^n \qquad b_n = n! \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

2. **Z rekurzivno formulo:**

$$a_n = F(a_0, a_1, ..., a_{n-1}, n) \qquad \text{in začetni členi } a_i$$

$$\begin{array}{lll} a_n = 2a_{n-1} & b_n = n(b_{n-1}) & F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ a_0 = 1 & b_0 = 1 & F_0 = F_1 = 1 \end{array}$$

3. **S približkom oziroma asimptotično formulo**

$$b_n \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad F_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

4. **Z rodovno funkcijo**