Uporabne formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Funkcija Γ

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Funkcija B

- $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \qquad \forall p, q > 0$
- $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$
- $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $\frac{1}{2}B(p,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$
- simetričnost: $B(p,q) = B(q,p)$

Aproksimacija

Bernsteinovi polinomi

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_i^n(x) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n}{j}\binom{j}{i} x^j \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_i^n(x) = (1-x) B_i^{n-1}(x) + x B_{i-1}^{n-1}(x)$$

Lastnosti:

$$B_i^n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$$

$$[B_i^n(x)]' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1$$

$$\int B_i^n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(x)$$

$$\int_0^1 B_i^n(x) dx = \frac{1}{n+1}$$

Bernsteinov operator funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

Odvod:

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x)$$

kjer je $\Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)$.

Konvergenca:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Kantorovičev operator integrabilni funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(K_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{n,i} B_i^n(x) \qquad f_{n,i} = (n+1)\int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t) dt$$

Za $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ velja:

$$(B_{n+1}F) = K_n f$$

Konvergenca:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - K_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Element najboljše aproksimacije

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S \subset X$ podprostor.

$s^* \in S$ je *el. najboljše aproksimacije* za $x \in X$, če velja:

$$\|x - s^*\| = \inf_{s\in S} \|x - s\| = \operatorname{dist}(x, S)$$

Prostor X je **strogo normiran**, če $\forall x, y \in X$:

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : \ x = \lambda y$$

Če je X strogo normiran in v $S \subset X$ obstaja e. n. a. za $x \in X$, potem je ta enolično določen.

Prostor X je strogo normiran $\iff$ je zaprta enotska krogla strogo konveksna.

$$M \text{ knv.} \iff \forall x, y \in M, \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda) y \in M$$

$$M \text{ s.k.} \iff \forall x \neq y \in M, \lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda) y \in M^\circ$$

Normiran vektorski prostor X je **enakomerno konveksen**, če $\forall \epsilon > 0 : \ \exists \delta > 0$, da za vsak par elementov $f, g \in X$ z $\|f\| = \|g\| = 1$ velja

$$\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\| > 1 - \delta \implies \|f - g\| < \epsilon$$

Najboljša polinomska enakomerna aproksimacija

Iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije p^* stopnje $\leq n$ za $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

1. Remesov postopek

vhod: f, $[a,b]$, n.
izberi $E_0 = \{x_i \mid a \leq x_0 < \dots < x_n + 1 \leq b\}$
ponavljaj za $k = 0, 1, \dots$
  poisci $p^*_{E_k}$ p.n.e.a. za f na mnozici E_k tako, da resis
    $f(x_i) - p^*_{E_k}(x_i) = (-1)^i m$ za $i = 0, \dots, n+1$
    (spremenljivke so m in koeficienti polinoma $p^*_{E_k}$)
  poisci ekstrem residuala $r_k = f - p^*_{E_k}$
  doloci $u \in [a,b]$, da je $|r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty,[a,b]}$
  ce $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$
    vrni $p^*_{E_k}$
  doloci E_{k+1} tako, da zamenjas nek x_i z u, tako da ohranis alternacijo residuala

2. Remesov postopek Deluje podobno kot 1. le, da množico E_{k+1} določimo na sledeč način:

$$z_0 = a$$

$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{ničle residuala } r(z_i) = 0$$

$$z_{n+1} = b$$

$$u_i = \operatorname*{argmax}_{u \in [z_i, z_{i+1}]} r(u)$$

$$E_{k+1} = \{u_i \mid a \leq u_0 < \dots < u_n \leq b\}$$

Ideja: med z_i in z_{i+1} za $i = 0, \dots, n+1$ poiščemo točko u_i, v kateri residual doseže ekstrem hkrati pa pazimo na alternacijo residuala.

Posplošitev najboljše polinomske enak. aproks.

Posplošeni polinom za sistem funkcij $F = \{f_i | i\}$

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

Haarov pogoj

Množica zveznih funkcij $F = \{f_0, \dots, f_n\}$ na $[a,b]$ zadošča *Haarovemu pogoju*, če je za poljuben izbor $n+1$ paroma različnih točk $(x_i)_i$ posplošena Vandermondova matrika $V_F(x)$ obrnljiva:

$$V_F(x) = \left[f_j(x_i)\right]_{i,j=0}^{n}$$

F zadošča Haarovemu pogoju $\implies$ F je linearno neodvisna.

F ki zadošča Haarovemu pogoju, je **Čebišev sistem funkcij**, če pa zahtevamo Harrov pogoj le za $x_i \in [a,b]$, pa pravimo, da je F **šibki Čebišev sistem funkcij**.

Če F zadošča Haarovemu pogoju, lahko za iskanje e. n. a. iz prostora $\operatorname{Lin}(F)$ uporabimo **Remesov postopek**.

Polinomi Čebiševa

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad x \in [-1, 1]$$

Rekurzivna zveza:

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad n \geq 2$$

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$

T_n ima ničle v $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ za $k = 1, \dots, n$ ekstreme pa doseže v $\cos(\frac{k\pi}{n})$ za $k = 0, \dots, n$.

$p \in \mathbb{P}_{n-1}$, ki na $[-1,1]$ najbolje aproksimira $\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)$ je kar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(x)$.

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Polinomi Čebiševa tvorijo Čebišev sistem funkcij.

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo **element najboljše aproksimacije po MNK** $f^* \in S$, da $\|f - f^*\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff$ $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je $G = I$ in

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\operatorname{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, \dots, v_k$, uporabimo postopek:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{u_2}(v_3)$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{u_j}(v_k)$$

Legendrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n\right]$$

tvorijo ortogonalno bazo za $\mathcal{P}_n$ s glede na skalarni produkt:

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x) h(x) dx$$

Tričlenska rekurzivna formula

$$\widetilde{Q}_n = (x - \alpha_n) Q_{n-1} - \beta_n Q_{n-2} \qquad Q_n = \frac{\widetilde{Q}_n}{\beta_{n+1}}$$

$$\alpha_n = \langle x Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \qquad \beta_n = \langle \widehat{Q}_{n-1}, \widehat{Q}_{n-1} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

tvori ortonormirane (glede na isti skalarni produkt kot ga uporabljamo pri Legendrovih polinomih) polinome Q_n stopnje n.

Interpolacija

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S \subset X$ podprostor tako, da

$$S = \operatorname{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

Za dane linearne funkcionale $(\lambda_i : X \to \mathbb{R})_{i=1}^n$ in vrednosti $r = (r_i)_{i=1}^n$ iščemo koeficiente $(\alpha_i)_{i=1}^n$, da bo za *interpolant* $p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ veljalo

$$\lambda_i p = r_i \qquad i, j = 1, \dots, n$$

pri interpolaciji izbranega elementa $f \in X$ določimo

$$r_i = \lambda_i f$$

Interpolacijski problem je **korekten**, kadar interpolant obstaja in je enolično določen.

Polinomska interpolacija

$f \in \mathcal{C}([a,b])$, $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermondova matrika } V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, \dots, n$$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$(I_n f)(x) = p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

I_n je linearen operator. Je tudi *projektor* na $\mathbb{P}_n$ ($\forall q \in \mathbb{P}_n$: $I_n q = q$).

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Nevilleova shema za izračun $p = p_{0,n}$:

$$p_{i,0}(x) = f(x_i)$$

$$p_{i,k}(x) = p_{i,k-1}(x) \frac{x - x_{i+k}}{x_i + x_{i+k}} + p_{i+1,k-1}(x) \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x - x_0)$, $(x - x_0)(x - x_1)$, …

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \dots, x_k$. Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k] f (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

$$f(x) = p(x) + \omega(x) \underbrace{[x_0, \dots, x_n, x] f}_{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Napaka interpolacije

$$f(x) - p(x) = [x_0, \dots, x_n, x] f \omega(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

za nek $\xi \in [a,b]$.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1 (x - x_0) + d_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Posplošen Hornerjev algoritem:

vhodni podatki: $x_0, \dots, x_n,\ d_0, \dots, d_n,\ x$
$v_n \leftarrow d_n$
za $i = n-1, \dots, 0$:
  $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i) v_{i+1}$

vrni v_0