Uporabne formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Funkcija I

•
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$
, $\forall s > 0$

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n!$ $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Funkcija B

•
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$
, $\forall p,q > 0$

$$\bullet \ B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$$

•
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

•
$$\frac{1}{2}B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$$

- simetričnost: B(p,q) = B(q,p)

Aproksimacija

Bernsteinovi polinomi

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_i^n(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^j \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_i^n(x) = (1-x) B_i^{n-1}(x) + x B_{i-1}^{n-1}(x)$$

Lastnosti:

$$\begin{split} B_i^n(x) &\geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ B_i^n(x) &= B_{n-i}^n (1-x) \\ [B_i^n(x)]' &= n \left(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x) \right) \\ \sum_{i=0}^n B_i^n(x) &= 1 \\ \int B_i^n(x) dx &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(x) \\ \int_0^1 B_i^n(x) dx &= \frac{1}{n+1} \end{split}$$

Bernsteinov operator funkciji $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

Odvod:

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x)$$

kjer je $\Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)$.

Konvergenca:

$$\lim_{n \to \infty} ||f - B_n f||_{\infty, [0, 1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$$

Kantorovičev operator integrabilni funkciji $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Haarov pogoj priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(K_n f)(x) = \sum_{i=0}^n f_{n,i} B_i^n(x)$$
 $f_{n,i} = (n+1) \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t) dt$

Za $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ velja:

$$(B_{n+1}F) = K_n f$$

Konvergenca:

$$\lim_{n \to \infty} ||f - K_n f||_{\infty, [0, 1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$$

Element najboljše aproksimacije

Naj boXnormiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S\subset X$ podprostor.

 $s^* \in S$ je el. najboljše aproksimacije za $x \in X,$ če velja:

$$||x - s^*|| = \inf_{S} ||x - s|| = \operatorname{dist}(x, S)$$

Prostor X je **strogo normiran**, če $\forall x, y \in X$:

$$\|x+y\|=\|x\|+\|y\| \implies \exists \lambda \in \mathbb{R}: \ x=\lambda y$$

Če je X strogo normiran in v $S\subset X$ obstaja e. n. a. za $x\in X,$ potem je ta enolično določen.

Prostor Xje strogo normiran \iff je zaprta enotska krogla strogo konveksna.

$$\begin{array}{ll} M \text{ knv.} & \Longleftrightarrow \forall x,y \in M, \lambda \in [0,1]: \ \lambda x + (1-\lambda)y \in M \\ M \text{ s.k.} & \Longleftrightarrow \forall x \neq y \in M, \lambda \in (0,1): \lambda x + (1-\lambda)y \in M^{\circ} \end{array}$$

Normiran vektorski prostor X je **enakomerno konveksen**, če $\forall \epsilon>0:\ \exists \delta>0,$ da za vsak par elementov $f,g\in X$ z $\|f\|=\|g\|=1$ velja

$$\left\| \frac{1}{2}(f+g) \right\| > 1 - \delta \implies \|f - g\| < \epsilon$$

Najboljša polinomska enakomerna aproksimacija

Iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije p^* stopnje $\leq n$ za $f \in \mathcal{C}([a,b]).$

1. Remesov postopek

$$\begin{array}{l} \textit{vhod:} \ f, \ [a,b], \ n. \\ \text{izberi} \ E_0 = \{x_i \mid a \leq x_0 < \cdots < x_n + 1 \leq b\} \\ \textit{ponavljaj} \ za \ k = 0, 1, \ldots \\ \text{poisci} \ p_{E_k}^* \ \text{p.n.e.a.} \ za \ f \ \text{na mnozici} \ E_k \ \text{tako, da resis} \\ f(x_i) - p_{E_k}^* (x_i) = (-1)^i m \ \text{za} \ i = 0, \ldots, n+1 \\ \text{(spremenljivke so} \ m \ \text{in koeficienti polinoma} \ p_{E_k}^*) \\ \text{poisci ekstrem residuala} \ r_k = f - p_{E_k}^* \end{aligned}$$

doloci $u \in [a,b]$, da je $|r_k(u)| = ||r_k||_{\infty,[a,b]}$ ce $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$

doloci E_{k+1} tako, da zamenjas nek x_i z u, tako da ohranis alternacijo residuala

2. Remesov postopek Deluje podobno kot 1. le, da množico E_{k+1} določimo na sledeč način:

$$z_0 = a$$

$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \mbox{ničle residuala} \ r(z_i) = 0$$

$$z_{n+1} = b$$

$$u_i = \underset{u \in [z_i, z_{i+1}]}{\operatorname{argmax}} r(u)$$

$$E_{k+1} = \{u_i \mid a \le u_0 < \dots < u_n \le b\}$$

Ideja: med z_i in z_{i+1} za $i=0,\ldots,n+1$ poiščemo točko u_i , v kateri residual doseže ekstrem hkrati pa pazimo na alternacije residuale

Posplošitev najboljše polinomske enak. aproks.

Posplošeni polinom za sistem funkcij $F=\{f_i|i\}$

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

rov pogoj

Množica zveznih funkcij $F=\{f_0,\ldots,f_n\}$ na [a,b] zadošča Haarovemu pogoju, če je za poljuben izbor n+1 paroma različnih točk $(x_i)_i$ posplošena Vandermondova matrika $V_F(x)$ obrnlijva:

$$V_F(x) = [f_j(x_i)]_{i=0}^n$$

F zadošča Haarovemu pogoju $\Longrightarrow F$ je linearno neodvisna. F ki zadošča Haarovemu pogoju, je **Čebišev sistem funkcij**, če pa zahtevamo Harrov pogoj le za $x_i \in [a,b]$, pa pravimo, da je F **šibki Čebišev sistem funkcij**. Če F zadošča Haarovemu pogoju, lahko za iskanje e. n. a. iz prostora Lin(F) uporabimo **Remesov postopek**.

Polinomi Čebiševa

 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $x \in [-1, 1]$

Rekurzivna zveza:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$
 $n \ge 2$
 $T_0(x) = 1$ $T_1(x) = x$

 T_n ima ničle v cos $\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ za $k=1,\ldots,n$ ekstreme pa doseže v cos $(\frac{k\pi}{n})$ za $k=0,\ldots,n$.

 $p \in \mathbb{P}_{n-1}$, ki na [-1,1] najbolje aproksimira $\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)$ je kar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(x)$.

Polinomi Čebiševa tvorijo Čebišev sistem funkcij.

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj boXvektorski prostor nad $\mathbb R$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|_2=\sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo element najboljše aproksimacije po MNK $f^* \in S,$ da $\|f-f^*\| = \min_{s \in S} \|f-s\|$

 $\textit{Izrek: } f^*$ je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff f-f^* \perp S \iff f-f^* \perp l_i \quad \forall i=1,\dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\begin{split} \langle f - f^*, l_i \rangle &= 0 \quad \forall i \\ \langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j, l_i \rangle &= 0 \quad \forall i \\ \langle f, l_i \rangle &- \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle &= 0 \quad \forall i \end{split}$$

V matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je G=I in

$$f^* = \sum_{i=1}^n \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

 $u_1 = v_1$

$$\operatorname{proj}_{u}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo $orotogonalizirati\ k$ linearno neodvisnih vektorjev $v_1,...,v_k,$ uporabimo postopek:

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{u_2}(v_3)$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{u_j}(v_k)$$

Legendrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right]$$

tvorijo ortogonalno bazo za \mathcal{P}_n s glede na skalarni produkt:

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$$

Tričlenska rekurzivna formula

$$\widetilde{Q}_n = (x - \alpha_n)Q_{n-1} - \beta_n Q_{n-2} \qquad Q_n = \frac{\widetilde{Q}_n}{\beta_{n+1}}$$

$$\alpha_n = \langle xQ_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \qquad \beta_n = \langle \widehat{Q}_{n-1}, \widehat{Q}_{n-1} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

tvori ortonormirane (glede na isti skalarni produkt kot ga uporabljamo pri Legendrovih polinomih) polinome Q_n stopnie n

Interpolacija

Naj boXnormiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S\subset X$ podprostor tako, da

$$S = \operatorname{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

Za dane linearne funkcionale $(\lambda_i:X\to\mathbb{R})_{i=1}^n$ in vrednosti $r=(r_i)_{i=1}^n$ iščemo koeficiente $(\alpha_i)_{i=1}^n$, da bo za interpolant $p=\sum_{i=1}^n\alpha_i\varphi_i$ veljalo

$$\lambda_i p = r_i$$
 $i, j = 1, \dots, n$

pri interpolaciji izbranega elementa $f \in X$ določimo

$$r_i = \lambda_i f$$

Interpolacijski problem je **korekten**, kadar interpolant obstaja in je enolično določen.

 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

Polinomska interpolacija

 $f \in \mathcal{C}([a,b]), \, a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b.$ Iščemo polinom

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

Vandermondova matrika
$$V$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0 \le i \le i \le n} (x_i - x_j) \ne 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
 $i = 0, \dots, n$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za \mathbb{P}_n .

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$(I_n f)(x) = p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_{i,n}(x)$$

 I_n je linearen operator. Je tudi projektorna \mathbb{P}_n $(\forall q \in \mathbb{P}_n : I_nq = q).$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$
$$\omega(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

Nevilleova shema za izračun $p = p_{0,n}$:

$$p_{i,0}(x) = f(x_i)$$

$$p_{i,k}(x) = p_{i,k-1}(x)\frac{x - x_{i+k}}{x_i + x_{i+k}} + p_{i+1,k-1}(x)\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x - x_0)$, $(x - x_0)(x - x_1)$, ...

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah x_0, x_1, \dots, x_k . Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k] f(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f =$$

$$= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

$$f(x) = p(x) + \omega(x) \underbrace{[x_0, \dots, x_n, x] f}_{\substack{f(n+1) \\ (n+1)!}} \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Napaka interpolacije

$$f(x) - p(x) = [x_0, \dots, x_n, x] f\omega(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

za nek $\xi \in [a, b]$.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1 (x - x_0) + d_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Posplošen Hornerjev algoritem:

 $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$

vhodni podatki:
$$x_0, \ldots, x_n, d_0, \ldots, d_n, x$$
 $v_n \leftarrow d_n$
 $z_n i = n - 1$

.