Uporabne formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Funkcija Γ

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx, \qquad \forall s > 0$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

Funkcija B

- $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \qquad \forall p,q > 0$
- $B(p,q) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$
- $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$
- $\frac{1}{2}B(p,q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$
- simetričnost: $B(p,q) = B(q,p)$

Aproksimacija

Bernsteinovi polinomi

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad i = 0,\dots,n$$

$$B_i^n(x) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n}{j}\binom{j}{i} x^j \qquad i = 0,\dots,n$$

$$B_i^n(x) = (1-x)B_i^{n-1}(x) + xB_{i-1}^{n-1}(x)$$

Lastnosti:

$$B_i^n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$$

$$[B_i^n(x)]' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1$$

$$\int B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(x)$$

$$\int_0^1 B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1}$$

Bernsteinov operator funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

Odvod:

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x)$$

kjer je $\Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)$.

Konvergenca:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Kantorovičev operator integrabilni funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$\big(K_n f\big)(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{n,i} B_i^n(x) \qquad f_{n,i} = (n+1)\int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t)dt$$

Za $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ velja:

$$\big(B_{n+1}F\big) = K_n f$$

Konvergenca:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - K_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Element najboljše aproksimacije

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S \subset X$ podprostor.

$s^* \in S$ je *el. najboljše aproksimacije* za $x \in X$, če velja:

$$\|x - s^*\| = \inf_{s\in S} \|x - s\| = \mathrm{dist}(x, S)$$

Prostor X je **strogo normiran**, če $\forall x,y \in X$:

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \implies \exists\lambda \in \mathbb{R} : \ x = \lambda y$$

Če je X strogo normiran in v $S \subset X$ obstaja e. n. a. za $x \in X$, potem je ta enolično določen.

Prostor X je strogo normiran $\iff$ je zaprta enotska krogla strogo konveksna.

$$M \text{ konveksna} \iff$$
$$\forall x,y \in M, \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda)y \in M$$

$$M \text{ strogo konveksna} \iff$$
$$\forall x \neq y \in M, \lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda)y \in M^\circ$$

Normiran vektorski prostor X je **enakomerno konveksen**, če $\forall \epsilon > 0 : \ \exists\delta > 0$, da za vsak par elementov $f,g \in X$ z $\|f\| = \|g\| = 1$ velja

$$\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\| > 1 - \delta \implies \|f - g\| < \epsilon$$

Najboljša polinomska enakomerna aproksimacija

Iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije p^* stopnje $\leq n$ za $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

1. Remesov postopek

vhod: f, $[a,b]$, n.
izberi $E_0 = \{x_i \mid a \leq x_0 < \cdots < x_n + 1 \leq b\}$
ponavljaj za $k = 0, 1, \dots$
  poisci $p^*_{E_k}$ p.n.e.a. za f na mnozici E_k tako, da resis
    $f(x_i) - p^*_{E_k}(x_i) = (-1)^i m$ za $i = 0,\dots,n+1$
    (spremenljivke so m in koeficienti polinoma $p^*_{E_k}$)
  poisci ekstrem residuala $r_k = f - p^*_{E_k}$
  doloci $u \in [a,b]$, da je $|r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty,[a,b]}$
  ce $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$
    vrni $p^*_{E_k}$
  doloci E_{k+1} tako, da zamenjas nek x_i z u, tako da ohranis alternacijo residuala

2. Remesov postopek Deluje podobno kot 1. le, da množico E_{k+1} določimo na sledeč način:

$$z_0 = a$$
$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{ničle residuala } r(z_i) = 0$$
$$z_{n+1} = b$$

$$u_i = \underset{u\in[z_i,z_{i+1}]}{\operatorname{argmax}} \ r(u)$$

$$E_{k+1} = \{u_i \mid a \leq u_0 < \cdots < u_n \leq b\}$$

Ideja: med z_i in z_{i+1} za $i = 0,\dots,n+1$ poiščemo točko u_i, v kateri residual doseže ekstrem hkrati pa pazimo na alternacijo residuala.

Posplošitev najboljše polinomske enak. aproks.

Posplošeni polinom za sistem funkcij $F = \{f_i | i\}$

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

Haarov pogoj

Množica zveznih funkcij $F = \{f_0,\dots,f_n\}$ na $[a,b]$ zadošča *Haarovemu pogoju*, če je za poljuben izbor $n+1$ paroma različnih točk $(x_i)_i$ posplošena Vandermondova matrika $V_F(x)$ obrnljiva:

$$V_F(x) = \left[f_j(x_i)\right]_{i,j=0}^{n}$$

F zadošča Haarovemu pogoju $\implies$ F je linearno neodvisna.

F ki zadošča Haarovemu pogoju, je **Čebišev sistem funkcij**, če pa zahtevamo Harrov pogoj le za $x_i \in [a,b]$, pa pravimo, da je F **šibki Čebišev sistem funkcij**.

Če F zadošča Haarovemu pogoju, lahko za iskanje e. n. a. iz prostora $\mathrm{Lin}(F)$ uporabimo **Remesov postopek**.

Polinomi Čebiševa

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad x \in [-1,1]$$

Rekurzivna zveza:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad n \geq 2$$

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$

T_n ima ničle v $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ za $k = 1,\dots,n$ ekstreme pa doseže v $\cos(\frac{k\pi}{n})$ za $k = 0,\dots,n$.

$p \in \mathbb{P}_{n-1}$, ki na $[-1,1]$ najbolje aproksimira $\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)$ je kar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(x)$.

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

Polinomi Čebiševa tvorijo Čebišev sistem funkcij.

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$$S = \mathrm{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo **element najboljše aproksimacije po MNK** $f^* \in S$, da $\|f - f^*\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff$ $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1,\dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle l_j, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1\rangle & \dots & \langle l_n, l_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n\rangle & \dots & \langle l_n, l_n\rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n\rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je $G = I$ in

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, l_i\rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, \dots, v_k$, uporabimo postopek:

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2)$$
$$u_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3)$$
$$\vdots$$
$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_k)$$

Legendrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$$

tvorijo ortogonalno bazo za $\mathcal{P}_n$ s glede na skalarni produkt:

$$\langle g, h\rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$$

Tričlenska rekurzivna formula

$$Q_{-1} = 0 \qquad Q_0 = \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\|1\|_2}$$

$$\widetilde{Q}_n = (x - \alpha_n)Q_{n-1} - \beta_n Q_{n-2} \qquad Q_n = \frac{\widetilde{Q}_n}{\beta_{n+1}}$$

$$\alpha_n = \langle xQ_{n-1}, Q_{n-1}\rangle \qquad \beta_n = \langle \widehat{Q}_{n-1}, \widehat{Q}_{n-1}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

tvori ortonormirane (glede na isti skalarni produkt kot ga uporabljamo pri Legendrovih polinomih) polinome Q_n stopnje n.

Interpolacija

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S \subset X$ podprostor tako, da

$$S = \mathrm{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

Za dane linearne funkcionale $(\lambda_i : X \to \mathbb{R})_{i=1}^n$ in vrednosti $r = (r_i)_{i=1}^n$ iščemo koeficiente $(\alpha_i)_{i=1}^n$, da bo za *interpolant* $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$ veljalo

$$\lambda_i p = r_i \qquad i,j = 1,\dots,n$$

pri interpolaciji izbranega elementa $f \in X$ določimo

$$r_i = \lambda_i f$$

Interpolacijski problem je **korekten**, kadar interpolant obstaja in je enolično določen.

Polinomska interpolacija

$f \in \mathcal{C}([a,b])$, $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermondova matrika } V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0\leq j<i\leq n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i=0,\dots,n$$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$(I_nf)(x)=p(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_{i,n}(x)$$

I_n je linearen operator. Je tudi *projektor* na $\mathbb{P}_n$ ($\forall q\in\mathbb{P}_n : I_nq=q$).

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

$$\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Nevilleova shema za izračun $p=p_{0,n}$:

$$p_{i,0}(x)=f(x_i)$$
$$p_{i,k}(x)=p_{i,k-1}(x)\frac{x-x_{i+k}}{x_i+x_{i+k}}+p_{i+1,k-1}(x)\frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i}$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x-x_0)$, $(x-x_0)(x-x_1)$, ...

Deljena diferenca $[x_0,x_1,\dots,x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0,x_1,\dots,x_k$. Sledi:

$p_k(x)=p_{k-1}(x)+[x_0,x_1,\dots,x_k]f(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$

Rekurzivna zveza:

$$[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]f = \begin{cases}\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i=x_{i+1}=\dots=x_{i+k}\\ \frac{[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]f-[x_i,\dots,x_{i+k-1}]f}{x_{i+k}-x_i} & x_i\neq x_{i+k}\end{cases}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}[x_0,\dots,x_i]f\cdot(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki točki ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

$$f(x)=p(x)+\omega(x)\underbrace{[x_0,\dots,x_n,x]f}_{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} \qquad \omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Napaka interpolacije

$$f(x)-p(x)=[x_0,\dots,x_n,x]f\omega(x)=\omega(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

za nek $\xi\in[a,b]$.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x)=d_01+d_1(x-x_0)+d_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots$$

Posplošen Hornerjev algoritem:

vhodni podatki: $x_0,\dots,x_n,\ d_0,\dots,d_n,\ x$
$v_n\leftarrow d_n$
za $i=n-1,\dots,0$:
    $v_i\leftarrow d_i+(x-x_i)v_{i+1}$

vrni v_0

Odsekoma polinomska interpolacija

Interval $[a,b]$ razdelimo na n podintervalov $[x_i,x_{i+1})$ glede na *stične točke* $\underline{x}=(x_i)_{i=0}^n$ kjer velja

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

Na vsakem podintervalu bo odsekoma polinomska funkcija enaka nekemu polinomu stopnje k.

V notranjih stičnih točkah predpišemo *stopnjo gladkosti* $\underline{\nu}=(\nu_i)_{i=1}^{n-1}$. Zahtevamo, da se v stični točki x_i levi in desni odsek ujemata v prvih ν_i-1 odvodih.

Prostor odsekoma polinomskih funkcij označimo z

$$P_{k,\underline{x},\underline{\nu}}=\Big\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f|_{(x_i,x_{i+1})}\in\mathbb{P}_k,\ \lim_{x\uparrow x_i}f^{(l)}(x)=\lim_{x\downarrow x_i}f^{(l)}(x),\ \forall i=1,\dots,n-1\ \forall l=0,\dots,\nu_i-1\Big\}$$

$$\dim P_{k,\underline{x},\underline{\nu}}=n(k+1)-\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i$$

Zaporedje *vozlov* definiramo zaporedje stičnih točk, s kratnostjo $r_i=k+1-\nu_i$ (v robnih stičnih točkah je $r_i=k+1$).

$$\underline{t}=(\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{r_0=k+1},\dots,\underbrace{x_i,\dots,x_i}_{r_i=k+1-\nu_i},\dots,\underbrace{x_n,\dots,x_n}_{r_n=k+1})=(t_i)_{i=1}^{N}$$

Poseben primer:

V stičnih točkah zahtevamo zveznost v $k-1$ odvodih: $\nu_i=k$ in $r_i=1$ za $i=1,\dots,n-1$.

$$S_{k,\underline{x}}=\Big\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\ f|_{(x_i,x_{i+1})}\in\mathbb{P}_k\Big\}\cap\mathcal{C}^{k-1}([a,b])$$

$$\dim S_{k,\underline{x}}=n+k$$

Zvevne odsekoma linearne funkcije

Funkcije $H_0,\dots,H_n$ so baza za $S_{1,\underline{x}}$

$$H_i(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i)\\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x\in[x_i,x_{i+1})\\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

Interpolacija v prostoru $S_{1,\underline{x}}$ interpolira vrednosti v stičnih točkah

$$I_{1,\underline{x}}:\mathcal{C}([a,b])\to S_{1,\underline{x}}$$
$$f\mapsto I_{1,\underline{x}}f=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)H_i$$

Za $f\in\mathcal{C}^2([a,b])$ velja ($\Delta x=\max_i\Delta x_i$):

$$\|f-I_{1,\underline{x}}f\|_{\infty,[a,b]}\le\frac{(\Delta x)^2}{8}\|f''\|_{\infty,[a,b]}$$

$$\|I_{1,\underline{x}}\|_\infty=\sup_{f\neq0}\frac{\|I_{1,\underline{x}}f\|_\infty}{\|f\|_\infty}\le1$$

$$\|f-I_{1,\underline{x}}f\|_\infty \le(1+\|I_{1,\underline{x}}\|_\infty)\mathrm{dist}(f,S_{1,\underline{x}})=2\mathrm{dist}(f,S_{1,\underline{x}})$$

Aproksimacija v $S_{1,\underline{x}}$ po MNK

$$\langle g,h\rangle=\int_a^b g(x)h(x)dx$$

$$L_{1,\underline{x}}:\mathcal{C}([a,b])\to S_{1,\underline{x}}$$
$$f\mapsto L_{1,\underline{x}}f=\sum_{i=0}^{n}\alpha_iH_i$$

Koeficiente $\underline{\alpha}=(\alpha)_{i=0}^n$ dobimo iz sistema enačb

$$\underbrace{\left[\langle H_i,H_j\rangle\right]_{i,j=0}^{n}}_{\text{Grammova matrika } G}\ \underline{\alpha}=\left[\langle f,H_i\rangle\right]_{i=0}^{n}$$

G je tridiagonalna matrika.

Velja $\|L_{1,\underline{x}}\|_\infty\le3$.

$$\|f-L_{1,\underline{x}}\|_\infty\le4\mathrm{dist}(f,S_{1,\underline{x}})$$
$$\|f-L_{1,\underline{x}}\|_\infty\le4\|f\|_\infty$$

Interpolacijski kubični zlepki

Označimo zožitev zlepka na interval $[x_i,x_{i+1}]$ s $p_i\in\mathbb{P}_3$.

Želimo $p_i(x_i)=f(x_i)$ in $p_i(x_{i+1})=f(x_{i+1})$ kjer je f izbrana funkcija, ki jo interpoliramo.

Označimo $p_i'(x_i)=s_i$ in $p_i'(x_{i+1})=s_{i+1}$.

Z Newtnovo obliko interpolacijskega polinoma dobimo:

$$p_i(x)=f(x_i)+s_i(x-x_i)+\frac{[x_i,x_{i+1}]f-s_i}{\Delta x_i}(x-x_i)^2+$$
$$+\frac{s_{i+1}+s_{i+1}+2[x_i,x_{i+1}]f}{(\Delta x_i)^2}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})$$

za $i=0,\dots,n-1$.

Če za s_i vzamemo kar vrednosti odvoda f v stičnih točkah, dobimo **Hermitov kubični zlepek**.

$$H_{3,\underline{x}}:\mathcal{C}^1([a,b])\to S^1_{3,\underline{x}}$$
$$f\mapsto H_{3,\underline{x}}f \qquad H_{3,\underline{x}}f|_{[x_i,x_{i+1}]}=p_i$$

Za $f\in\mathcal{C}^4([a,b])$ velja

$$\|f-H_{3,\underline{x}}f\|_\infty\le\frac{1}{384}(\Delta x)^4\|f^{(4)}\|_\infty=O((\Delta x)^4)$$

Če s_i izberemo tako, da velja $p_i''(x_{i+1})=p_{i+1}''(x_{i+1})$ za $i=0,\dots,n-2$ in $s_0=f'(x_0)$ in $s_n=f'(x_n)$, dobimo **poln kubični zlepek**.

$$I_{3,\underline{x}}:\mathcal{C}^1([a,b])\to S_{3,\underline{x}}$$
$$f\mapsto I_{3,\underline{x}}f \qquad I_{3,\underline{x}}f|_{[x_i,x_{i+1}]}=p_i$$

Rešimo sistem enačb za s_i:

$$\frac{1}{\Delta x_{i-1}}s_{i-1}+2\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}}+\frac{1}{\Delta x_i}\right)s_i+\frac{1}{\Delta x_i}s_{i+1}=$$
$$=3\left(\frac{[x_{i-1},x_i]f}{\Delta x_{i-1}}+\frac{[x_i,x_{i+1}]f}{\Delta x_i}\right)$$

kjer gre $i=1,\dots,n-1$.

Za $f\in\mathcal{C}^2([a,b])$ velja

$$\|f-I_{3,\underline{x}}f\|_\infty\le\frac{1}{2}(\Delta x)^2\|f''\|_\infty=O((\Delta x)^2)$$

Za $f\in\mathcal{C}^4([a,b])$ velja

$$\|f-I_{3,\underline{x}}f\|_\infty\le\frac{1}{16}(\Delta x)^4\|f^{(4)}\|_\infty=O((\Delta x)^4)$$

B-zlepki

$$B_{i,k}(x)=(t_{i+k+1}-t_i)[t_i,t_{i+1},\dots,t_{i+k+1}](\cdot-x)^k_+$$

$$(t-x)^k_+=max(0,(t-x)^k) \qquad (t-x)^0_+=\begin{cases}0 & t-x\le0\\ 1 & \text{sicer}\end{cases}$$

$B_{i,k}$ tvorijo bazo za $P_{k,\underline{x},\underline{\nu}}$.

B-zlepke lahko izrazimo z rekurzivno formulo:

$$\omega_{i,k}(x)=\begin{cases}\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} & t_i\neq t_{i+k}\\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

$$B_{i,0}(x)=\begin{cases}1 & x_i\le x<x_{i+1}\\ 0 & \text{sicer}\end{cases}$$

$$B_{i,k}(x)=\omega_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x)+(1-\omega_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x)$$

Za nosilec B-zlepka velja supp$B_{i,k}\subseteq[t_i,t_{i+k+1}]$

$B_{i,k}$ je ne negativen na $[t_i,t_{i+k+1}]$ in strogo pozitiven na (t_i,t_{i+k+1}).

B-zlepki nad zaporedjem vozlov $\underline{t}$ tvorijo razčlenitev enote na intervalu $I_{k,\underline{t}}=[t_{k+1},t_{N-k}]$:

$$\sum_{i=0}^{N-k-1}B_{i,k}=1$$

De Boorov algoritem

vhod: $\underline{t}$, $\underline{\alpha}=(\alpha_i)_{i=1}^{N-k-1}$, $x\in I_{k,\underline{t}}$
doloci indeks j tako, da bo $x\in[t_j,t_{j+1})$
za $i=j-k,\dots,j$:
    $\alpha_i^{[0]}\leftarrow\alpha_i$
za $l=1,\dots,k$:
    za $i=j-k+l,\dots,j$:
        $\alpha_i^{[l]}\leftarrow\alpha_{i-1}^{[l-1]}(1-\omega_{i,k-l+1}(x))+\alpha_i^{[l-1]}\omega_{i,k-l+1}(x)$
vrni $\alpha_j^{[k]}$