# Uporabne formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

#### Funkcija $\Gamma$

- $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ ,  $\forall s > 0$
- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n!$   $n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(x)\Gamma(x+1) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

# Funkcija B

• 
$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$
,  $\forall p, q > 0$ 

• 
$$B(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} du$$

• 
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

• 
$$\frac{1}{2}B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1}$$

• simetričnost: B(p,q) = B(q,p)

#### **Aproksimacija**

# Bernsteinovi polinomi

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad i = 0, \dots, n$$
 Prostor  $X$  je **strogo normiran**, če  $\forall x, y \in X$ : 
$$||x+y|| = ||x|| + ||y|| \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$
 
$$B_i^n(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^j \qquad i = 0, \dots, n$$
 Če je  $X$  strogo normiran in v  $S \subset X$  obstaja e. 
$$B_i^n(x) = (1-x)B_i^{n-1}(x) + xB_{i-1}^{n-1}(x) \qquad \text{Za } x \in X, \text{ potem je ta enolično določen.}$$

#### Lastnosti

$$B_{i}^{n}(x) \ge 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$B_{i}^{n}(x) = B_{n-i}^{n}(1 - x)$$

$$[B_{i}^{n}(x)]' = n \left(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_{i}^{n-1}(x)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i}^{n}(x) = 1$$

$$\int B_{i}^{n}(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_{j}^{n+1}(x)$$

$$\int_{0}^{1} B_{i}^{n}(x) dx = \frac{1}{n+1}$$

polinom stopnje  $\leq n$ :

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

Odvod:

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x)$$

kjer je 
$$\Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)$$
.

Konvergenca:

$$\lim_{n \to \infty} ||f - B_n f||_{\infty, [0, 1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$$

Kantorovičev operator integrabilni funkciji f:  $[0,1] \to \mathbb{R}$  priredi polinom stopnje  $\leq n$ :

$$(K_n f)(x) = \sum_{i=0}^n f_{n,i} B_i^n(x)$$
  $f_{n,i} = (n+1) \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t) dt$ 

Za 
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$
 velja:

$$(B_{n+1}F) = K_n f$$

Konvergenca:

$$\lim_{n \to \infty} ||f - K_n f||_{\infty, [0, 1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1])$$

# Element najboljše aproksimacije

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo  $\|\cdot\|$  in  $S \subset X$  podprostor.

 $s^* \in S$  je el. najboljše aproksimacije za  $x \in X$ , če velja:

$$||x - s^*|| = \inf_{s \in S} ||x - s|| = \operatorname{dist}(x, S)$$

$$|x+y|| = ||x|| + ||y|| \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

Če je X strogo normiran in v $S\subset X$  obstaja e. n. a. za  $x \in X$ , potem je ta enolično določen.

Prostor X je strogo normiran  $\iff$  je zaprta enotska krogla strogo konveksna.

$$M$$
 konveksna  $\iff$ 

$$\forall x,y \in M, \lambda \in [0,1]: \ \lambda x + (1-\lambda)y \in M$$

M strogo konveksna  $\iff$ 

$$\forall x \neq y \in M, \lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda)y \in M^{\circ}$$

Normiran vektorski prostor X je enakomerno kon-Bernsteinov operator funkciji  $f:[0,1]\to\mathbb{R}$  priredi veksen, če  $\forall \epsilon>0:\ \exists \delta>0,$  da za vsak par elementov  $f, g \in X \ z \|f\| = \|g\| = 1 \ velja$ 

$$\left\| \frac{1}{2}(f+g) \right\| > 1 - \delta \implies \|f - g\| < \epsilon$$

# Najboljša polinomska enakomerna aproksi- Polinomi Čebiševa

Iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije  $p^*$ stopnje  $\leq n$  za  $f \in \mathcal{C}([a,b])$ .

#### 1. Remesov postopek

$$\begin{array}{l} \textit{vhod:} \ f, \ [a,b], \ n. \\ \text{izberi} \ E_0 = \{x_i \mid a \leq x_0 < \dots < x_n + 1 \leq b\} \\ \textit{ponavljaj} \ \textit{za} \ k = 0, 1, \dots \\ \text{poisci} \ p_{E_k}^* \ \text{p.n.e.a.} \ \text{za} \ f \ \text{na mnozici} \ E_k \ \text{tako, da resis} \\ f(x_i) - p_{E_k}^* \ (x_i) = (-1)^i m \ \text{za} \ i = 0, \dots, n+1 \\ \text{(spremenljivke so} \ m \ \text{in koeficienti polinoma} \ p_{E_k}^*) \\ \text{poisci ekstrem residuala} \ r_k = f - p_{E_k}^* \\ \text{doloci} \ u \in [a,b], \ \text{da je} \ |r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty,[a,b]} \\ \textit{ce} \ |r_k(u)| - |m| < \varepsilon \\ \textit{vrni} \ p_{E_k}^* \\ \text{doloci} \ E_{k+1} \ \text{tako, da zamenjas nek} \ x_i \ \text{z} \ u, \ \text{tako da ohranis} \ \text{alternacijo} \ \text{residuala} \\ \end{array}$$

# 2. Remesov postopek Deluje podobno kot 1. le, da množico $E_{k+1}$ določimo na sledeč način:

$$z_0 = a$$
 
$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{ničle residuala} \ r(z_i) = 0$$
 
$$z_{n+1} = b$$

$$u_i = \underset{u \in [z_i, z_{i+1}]}{\operatorname{argmax}} r(u)$$

$$E_{k+1} = \{u_i \mid a \le u_0 < \dots < u_n \le b\}$$

*Ideja:* med  $z_i$  in  $z_{i+1}$  za  $i=0,\ldots,n+1$  poiščemo točko  $u_i$ , v kateri residual doseže ekstrem hkrati pa pazimo na alternacijo residuala.

# Posplošitev najboljše polinomske enak. aproks.

Posplošeni polinom za sistem funkcij  $F = \{f_i | i\}$ 

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

# Haarov pogoj

Množica zveznih funkcij  $F = \{f_0, \dots, f_n\}$  na [a, b]zadošča Haarovemu pogoju, če je za poljuben izbor n+1paroma različnih točk  $(x_i)_i$  posplošena Vandermondova matrika  $V_F(x)$  obrnljiva:

$$V_F(x) = \left[ f_j(x_i) \right]_{i,j=0}^n$$

F zadošča Haarovemu pogoju  $\implies F$  je linearno neod-

F ki zadošča Haarovemu pogoju, je **Čebišev sistem funkcij**, če pa zahtevamo Harrov pogoj le za  $x_i \in [a, b]$ , pa pravimo, da je F **šibki Čebišev sistem funkcij**.

 $\check{\mathrm{C}}\mathrm{e}\ F$  zadošča Haarovemu pogoju, lahko za iskanje e. n. a. iz prostora Lin(F) uporabimo **Remesov postopek**.

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$
  $x \in [-1, 1]$ 

Rekurzivna zveza:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$
  $n \ge 2$ 

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$

 $T_n$  ima ničle v  $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$  za  $k=1,\ldots,n$  ekstreme pa doseže v  $\cos(\frac{k\pi}{n})$  za  $k=0,\ldots,n$ .

 $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ , ki na [-1,1] najbolje aproksimira  $\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)$  je kar  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(x)$ .

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
  $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$   
 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$   $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ 

Polinomi Čebiševa tvorijo Čebišev sistem funkcij.

# Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad  $\mathbb{R}$  s skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  in normo  $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ 

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subset X$$

### Iščemo element najboljše aproksimacije po MNK $f^* \in S$ , da $||f - f^*|| = \min_{s \in S} ||f - s||$

 $Izrek: f^*$  je el. najboljše aproksimacije po MNK  $\iff$  $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$ 

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je G = I in

$$f^* = \sum_{i=1}^n \langle f, l_i \rangle l_i$$

# Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\operatorname{proj}_{u}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev  $v_1, ..., v_k$ , uporabimo postopek:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{u_2}(v_3)$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{u_j}(v_k)$$

#### Legendrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ (x^2 - 1)^n \right]$$

tvorijo ortogonalno bazo za  $\mathcal{P}_n$  s glede na skalarni pro-

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$$

#### Tričlenska rekurzivna formula

$$\widetilde{Q}_n = (x - \alpha_n)Q_{n-1} - \beta_n Q_{n-2} \qquad Q_n = \frac{\widetilde{Q}_n}{\beta_{n+1}}$$

$$\alpha_n = \langle xQ_{n-1}, Q_{n-1} \rangle \qquad \beta_n = \langle \widehat{Q}_{n-1}, \widehat{Q}_{n-1} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

tvori ortonormirane (glede na isti skalarni produkt kot ga uporabljamo pri Legendrovih polinomih) polinome  $Q_n$  stopnje n.

#### Interpolacija

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo  $\|\cdot\|$  in  $S \subset X$  podprostor tako, da

$$S = \operatorname{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$$

Za dane linearne funkcionale  $(\lambda_i: X \to \mathbb{R})_{i=1}^n$  in vrednosti  $r = (r_i)_{i=1}^n$  iščemo koeficiente  $(\alpha_i)_{i=1}^n$ , da bo za  $interpolant \ p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i \text{ veljalo}$ 

$$\lambda_i p = r_i \qquad i, j = 1, \dots, n$$

pri interpolaciji izbranega elementa  $f \in X$  določimo

$$r_i = \lambda_i f$$

Interpolacijski problem je korekten, kadar interpolant obstaja in je enolično določen.

#### Polinomska interpolacija

$$f \in \mathcal{C}([a,b]), \ a \le x_0 < \dots < x_n \le b$$
. Iščemo polinom 
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju  $f(x_i) = p(x_i)$  za  $i = 0, 1, \dots, n$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermondova matrika } V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \ne 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
  $i = 0, \dots, n$ 

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema:  $l_{i,n}$  so baza za  $\mathbb{P}_n$ 

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$(I_n f)(x) = p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_{i,n}(x)$$

 $I_n$  je linearen operator. Je tudi projektor na  $\mathbb{P}_n$  ( $\forall q \in$  $\mathbb{P}_n: I_n q = q).$ 

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Nevilleova shema za izračun  $p = p_{0,n}$ :

$$p_{i,0}(x) = f(x_i)$$

$$p_{i,k}(x) = p_{i,k-1}(x)\frac{x - x_{i+k}}{x_i + x_{i+k}} + p_{i+1,k-1}(x)\frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i}$$

#### Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1,  $(x - x_0)$ ,  $(x-x_0)(x-x_1), \ldots$ 

**Deljena diferenca**  $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$  je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah  $x_0, x_1, \ldots, x_k$ . Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k] f(x-x_0) \dots (x-x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$\begin{split} &[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \\ &= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases} \end{split}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

odvodu, to točko k-krat ponovimo.

$$f(x) = p(x) + \omega(x) \underbrace{[x_0, \dots, x_n, x] f}_{\substack{f(n+1) \\ (n+1)!}} \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Napaka interpolacije

$$f(x) - p(x) = [x_0, \dots, x_n, x] f\omega(x) = \omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

za nek  $\xi \in [a, b]$ .

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Zvevne odsekoma linearne funkcije Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Posplošen Hornerjev algoritem:

vhodni podatki:  $x_0, \ldots, x_n, d_0, \ldots, d_n, x$  $za_i i = n - 1, \dots, 0$ :  $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$ 

 $vrni v_0$ 

#### Odsekoma polinomska interpolacija

Interval [a,b] razdelimo na n podintervalov  $[x_i,x_{i+1})$ glede na stične točke  $x = (x_i)_{i=0}^n$  kjer velja

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Na vsakem podintervalu bo odsekoma polinomska funkcija enaka nekemu polinomu stopnje k.

V notranjih stičnih točkah predpišemo stopnjo glad $kosti \ \underline{\nu} = (\nu_i)_{i=1}^{n-1}$ . Zahtevamo, da se v stični točki  $x_i$ levi in desni odsek ujemata v prvih  $\nu_i - 1$  odvodih

Prostor odsekoma polinomskih funkcij označimo z

$$P_{k,\underline{x},\underline{\nu}} = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \right.$$

$$f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \mathbb{P}_k, \lim_{x \uparrow x_i} f^{(l)}(x) = \lim_{x \downarrow x_i} f^{(l)}(x),$$

$$\forall i = 1, \dots, n-1 \ \forall l = 0, \dots, \nu_i - 1 \right\}$$

$$\dim P_{k,\underline{x},\underline{\nu}} = n(k+1) - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem Zaporedje vozlov definiramo zaporedje stičnih točk, s kratnostjo  $r_i = k + 1 - \nu_i$  (v robnih stičnih točkah je

$$\underline{t} = (\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{r_0 = k+1}, \dots, \underbrace{x_i, \dots, x_i}_{r_i = k+1 - \nu_i}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{r_n = k+1}) = (t_i)_{i=1}^N$$

Poseben primer:

V stičnih točkah zahtevamo zveznost v k-1 odvodih:  $\nu_i = k \text{ in } r_i = 1 \text{ za } i = 1, \dots, n-1.$ 

$$S_{k,\underline{x}} = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \mathbb{P}_k \right\} \cap \mathcal{C}^{k-1}([a,b])$$

$$\dim S_{k,x} = n + k$$

Funkcije  $H_0, \ldots, H_n$  so baza za  $S_{1,x}$ 

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Interpolacija v prostoru  $S_{1,x}$  interpolira vrednosti v stičnih točkah

$$I_{1,\underline{x}}: \mathcal{C}([a,b]) \to S_{1,\underline{x}}$$
 
$$f \mapsto I_{1,\underline{x}}f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)H_i$$

Za  $f \in C^2([a, b])$  velja  $(\Delta x = \max_i \Delta x_i)$ :

$$||f - I_{1,\underline{x}}f||_{\infty,[a,b]} \le \frac{(\Delta x)^2}{8} ||f''||_{\infty,[a,b]}$$

$$||I_{1,\underline{x}}||_{\infty} = \sup_{f \neq 0} \frac{||I_{1,\underline{x}}f||_{\infty}}{||f||_{\infty}} \le 1$$

$$||f - I_{1,\underline{x}}f||_{\infty}$$
  
  $\leq (1 + ||I_{1,\underline{x}}||_{\infty}) \operatorname{dist}(f, S_{1,\underline{x}}) = 2 \operatorname{dist}(f, S_{1,\underline{x}})$ 

Aproksimacija v  $S_{1,\underline{x}}$  po MNK

$$\langle g, h \rangle = \int_{a}^{b} g(x)h(x)dx$$

$$L_{1,\underline{x}}:\mathcal{C}([a,b])\to S_{1,\underline{x}}$$
 
$$f\mapsto L_{1,\underline{x}}f=\sum_{i=0}^n\alpha_iH_i$$

Koeficiente  $\underline{\alpha} = (\alpha)_{i=0}^n$  dobimo iz sistema enačb

$$\left[ \langle H_i, H_j \rangle \right]_{i,j=0}^n \underline{\alpha} = \left[ \langle f, H_i \rangle \right]_{i=0}^n$$
 Grammova matrika  $G$ 

G ie tridiagonalna matrika.

Velja  $||L_{1,x}||_{\infty} \leq 3$ .

$$||f - L_{1,\underline{x}}||_{\infty} \le 4 \operatorname{dist}(f, S_{1,\underline{x}})$$
$$||f - L_{1,\underline{x}}||_{\infty} \le 4||f||_{\infty}$$

# Interpolacijski kubični zlepki

Označimo zožitev zlepka na interval  $[x_i, x_{i+1}]$  s  $p_i \in \mathbb{P}_3$ .

Želimo  $p_i(x_i) = f(x_i)$  in  $p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$  kjer je fizbrana funkcija, ki jo interpoliramo.

Označimo  $p'_i(x_i) = s_i$  in  $p'_i(x_{i+1}) = s_{i+1}$ .

Z Newtnovo obliko interpolacijskega polinoma dobimo:

$$p_i(x) = f(x_i) + s_i(x - x_i) + \frac{[x_i, x_{i+1}]f - s_i}{\Delta x_i} (x - x_i)^2 + \frac{s_{i+1} + s_{i+1} + 2[x_i, x_{i+1}]f}{(\Delta x_i)^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})$$

Če za  $s_i$  vzamemo kar vrednosti odvoda f v stičnih točkah, dobimo Hermitov kubični zlepek.

$$H_{3,\underline{x}}: \mathcal{C}^1([a,b]) \to S^1_{3,\underline{x}}$$
  
 $f \mapsto H_{3,\underline{x}}f \quad H_{3,\underline{x}}f|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i$ 

Za  $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$  velja

$$||f - H_{3,\underline{x}}f||_{\infty} \le \frac{1}{384} (\Delta x)^4 ||f^{(4)}||_{\infty} = O((\Delta x)^4)$$

Če  $s_i$  izberemo tako, da velja  $p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1})$  za i = 0, ..., n - 2 in  $s_0 = f'(x_0)$  in  $s_n = f'(x_n)$ , dobimo poln kubični zlepek.

$$I_{3,\underline{x}}: \mathcal{C}^1([a,b]) \to S_{3,\underline{x}}$$
  
 $f \mapsto I_{3,\underline{x}}f \quad I_{3,\underline{x}}f|_{[x_i,x_{i+1}]} = p_i$ 

Rešimo sistem enačb za  $s_i$ :

$$\begin{split} \frac{1}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1} + 2 \left( \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) s_i + \frac{1}{\Delta x_i} s_{i+1} &= \\ &= 3 \left( \frac{[x_{i-1}, x_i] f}{\Delta x_{i-1}} + \frac{[x_i, x_{i+1}] f}{\Delta x_i} \right) \end{split}$$

kjer gre  $i = 1, \ldots, n-1$ .

Za  $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$  velja

$$||f - I_{3,\underline{x}}f||_{\infty} \le \frac{1}{2}(\Delta x)^2 ||f''||_{\infty} = O((\Delta x)^2)$$

Za  $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$  velja

$$||f - I_{3,\underline{x}}f||_{\infty} \le \frac{1}{16}(\Delta x)^4 ||f^{(4)}||_{\infty} = O((\Delta x)^4)$$

### B-zlepki

$$B_{i,k}(x) = (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}](\cdot - x)_+^k$$

$$(t-x)_{+}^{k} = max(0, (t-x)^{k})$$
  $(t-x)_{+}^{0} = \begin{cases} 0 & t-x \le 0\\ 1 & \text{sicer} \end{cases}$ 

 $B_{i,k}$  tvorijo bazo za  $P_{k,x,\nu}$ .

B-zlepke lahko izrazimo z rekurzivno formulo:

$$\omega_{i,k}(x) = \begin{cases} \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} & t_i \neq t_{i+k} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(x) = \omega_{i,k}(x)B_{i,k-1}(x) + (1 - \omega_{i+1,k}(x))B_{i+1,k-1}(x)$$

Za nosilec B-zlepka velja supp $B_{i,k} \subseteq [t_i, t_{i+k+1}]$ 

 $B_{i,k}$  je ne negativen na  $[t_i, t_{i+k+1}]$  in strogo pozitiven na  $(t_i, t_{i+k+1})$ .

B-zlepki nad zaporedjem vozlov t tvorijo razčlenitev enote na intervalu  $I_{k,t} = [t_{k+1}, t_{N-k}]$ :

$$\sum_{i=0}^{N-k-1} B_{i,k} = 1$$

#### De Boorov algoritem

Rešimo sistem enačb za 
$$s_i$$
: 
$$\frac{1}{\Delta x_{i-1}} s_{i-1} + 2 \left( \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) s_i + \frac{1}{\Delta x_i} s_{i+1} = \begin{cases} vhod: \underline{t}, \underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^{N-k-1}, x \in I_{k,\underline{t}} \\ \text{doloci indeks } j \text{ tako, da bo } x \in [t_j, t_{j+1}) \\ za i = j - k, \dots, j : \\ \alpha_i^{[0]} \leftarrow \alpha_i \\ za l = 1, \dots, k : \\ za i = j - k + l, \dots, j : \\ za i = j - k + l, \dots, j : \\ \alpha_i^{[l]} \leftarrow \alpha_{i-1}^{[l-1]} (1 - \omega_{i,k-l+1}(x)) + \alpha_i^{[l-1]} \omega_{i,k-l+1}(x) \\ vrni \alpha_j^{[l]} \end{cases}$$