Uporabne formule

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Aproksimacija

Bernsteinovi polinomi

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_i^n(x) = \sum_{j=i}^{n} (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} x^j \qquad i = 0, \dots, n$$

$$B_i^n(x) = (1-x) B_i^{n-1}(x) + x B_{i-1}^{n-1}(x)$$

Lastnosti:

$$B_i^n(x) > 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

$$B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$$

$$[B_i^n(x)]' = n\left(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x)\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(x) = 1$$

$$\int B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} B_j^{n+1}(x)$$

$$\int_0^1 B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1}$$

Bernsteinov operator funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

Odvod:

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x)$$

kjer je $\Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)$.

Konvergenca:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - B_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Kantorovičev operator integrabilni funkciji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ priredi polinom stopnje $\leq n$:

$$(K_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f_{n,i} B_i^n(x) \qquad f_{n,i} = (n+1) \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t)dt$$

Za $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ velja:

$$(B_{n+1}F) = K_n f$$

Konvergenca:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - K_n f\|_{\infty,[0,1]} = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}([0,1])$$

Element najboljše aproksimacije

Naj bo X normiran vektorski prostor z normo $\|\cdot\|$ in $S \subset X$ podprostor.

$s^* \in S$ je *el. najboljše aproksimacije* za $x \in X$, če velja:

$$\|x - s^*\| = \inf_{s\in S} \|x - s\| = \mathrm{dist}(x, S)$$

Prostor X je **strogo normiran**, če $\forall x, y \in X$:

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : \ x = \lambda y$$

Če je X strogo normiran in v $S \subset X$ obstaja e. n. a. za $x \in X$, potem je ta enolično določen.

Prostor X je strogo normiran $\iff$ je zaprta enotska krogla strogo konveksna.

$$M \text{ knv.} \iff \forall x, y \in M, \lambda \in [0,1] : \ \lambda x + (1-\lambda)y \in M$$

$$M \text{ s.k.} \iff \forall x \neq y \in M, \lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda)y \in M^\circ$$

Najboljša polinomska enakomerna aproksimacija

Iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije p^* stopnje $\leq n$ za $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

1. Remesov postopek

vhod: f, $[a,b]$, n.
izberi $E_0 = \{x_i \mid a \leq x_0 < \dots < x_n + 1 \leq b\}$
ponavljaj za $k = 0, 1, \dots$
  poisci $p^*_{E_k}$ p.n.e.a. za f na mnozici E_k tako, da resis
    $f(x_i) - p^*_{E_k}(x_i) = (-1)^i m$ za $i = 0, \dots, n+1$
    (spremenljivke so m in koeficienti polinoma $p^*_{E_k}$)
  poisci ekstrem residuala $r_k = f - p^*_{E_k}$
  doloci $u \in [a,b]$, da je $|r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty,[a,b]}$
  ce $|r_k(u)| - |m| < \varepsilon$
    vrni $p^*_{E_k}$
  doloci E_{k+1} tako, da zamenjas nek x_i z u, tako da ohranis alternacijo residuala

2. Remesov postopek Deluje podobno kot 1. le, da množico E_{k+1} določimo na sledeč način:

$$z_0 = a$$

$$z_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad \text{ničle residuala } r(z_i) = 0$$

$$z_{n+1} = b$$

$$u_i = \operatorname*{argmax}_{u\in[z_i, z_{i+1}]} r(u)$$

$$E_{k+1} = \{u_i \mid a \leq u_0 < \dots < u_n \leq b\}$$

Ideja: med z_i in z_{i+1} za $i = 0, \dots, n+1$ poiščemo točko u_i, v kateri residual doseže ekstrem hkrati pa pazimo na alternacijo residuala.

Posplošitev najboljše polinomske enak. aproks.

Posplošeni polinom za sistem funkcij $F = \{f_i | i\}$

$$p = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$$

Haarov pogoj

Množica zveznih funkcij $F = \{f_0, \dots, f_n\}$ na $[a,b]$ zadošča *Haarovemu pogoju*, če je za poljuben izbor $n+1$ paroma različnih točk $(x_i)_i$ posplošena Vandermondova matrika $V_F(x)$ obrnljiva:

$$V_F(x) = [f_j(x_i)]_{i,j=0}^{n}$$

F zadošča Haarovemu pogoju $\implies$ F je linearno neodvisna.

F ki zadošča Haarovemu pogoju, je **Čebišev sistem funkcij**, če pa zahtevamo Harrov pogoj le za $x_i \in [a,b]$, pa pravimo, da je F **šibki Čebišev sistem funkcij**.

Če F zadošča Haarovemu pogoju, lahko za iskanje e. n. a. iz prostora $\mathrm{Lin}(F)$ uporabimo **Remesov postopek**.

Polinomi Čebiševa

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad x \in [-1,1]$$

Rekurzivna zveza:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad n \geq 2$$

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$

T_n ima ničle v $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ za $k = 1, \dots, n$ ekstreme pa doseže v $\cos(\frac{k\pi}{n})$ za $k = 0, \dots, n$.

$p \in \mathbb{P}_{n-1}$, ki na $[-1,1]$ najbolje aproksimira $\sum_{i=0}^{n} a_i T_i(x)$ je kar $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(x)$.

Polinomi Čebiševa tvorijo Čebišev sistem funkcij.

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$$S = \mathrm{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo **element najboljše aproksimacije po MNK** $f^* \in S$, da $\|f - f^*\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff$ $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je $G = I$ in

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, \dots, v_k$, uporabimo postopek:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3)$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_k)$$

Legendrovi polinomi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n\right]$$

tvorijo ortogonalno bazo za $\mathcal{P}_n$ s standardnim skalarnim produktom.