Teorija aproksimacije

$$\begin{aligned} X &\quad \dots \quad \text{vekt. prostor katerega el. aproksimiramo} \\ S \subseteq X &\quad \dots \quad \text{podprostor aproksimantov} \\ A : X \to S &\quad \dots \quad \text{operacijska shema (operator)} \end{aligned}$$

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

- **Neskončna norma**

  $$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

  Numerični približek: na intervalu $[a, b]$ izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b$.

  $$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)|$$

- **Druga norma**

  $$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} \qquad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

  Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1$.

  Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu $[a, b]$ izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b$.

  $$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$\|f - \hat{f}\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$$

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$$S = \mathrm{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo **element najboljše aproksimacije po MNK** $f^* \in S$, da $\|f - f^*\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff$ $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle l_j, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1\rangle & \dots & \langle l_n, l_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n\rangle & \dots & \langle l_n, l_n\rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n\rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je $G = I$ in

$$f^* = \sum_{j=1}^{n} \langle f, l_i\rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$

Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a, b])$ iščemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije** $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$$

Izrek: Naj bo $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da **residual** $r = f - p$ doseže svojo normo $\|r\|_{\infty,[a,b]}$ alternirajoče: $n + 2$ tokčah x_i, $a \le x_0 < \dots < x_{n+1} \le b$

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \qquad \forall i = 0, \dots, n$$

potem je p polinom najboljše enak. aproks. za f na $[a, b]$.

Remesov postopek

Vhodni podatki: funkcija f, interval $[a, b]$, stopnja n, toleranca ε

Izberi množico točk $E_0 = \{x_i, \ a \le x_0 < \dots < x_{n+1} \le b\}$.

Minimaks za funkcijo f na E je

$$M_n(f, E) = \min_{p\in\mathbb{P}} \max_{x\in E} |f(x) - p(x)| = |m|$$

Ponavljaj $k = 0, 1, 2, \dots$:

- Poišči polinom $p^*_k \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogoju:

  $$f(x_i) - p^*_k = (-1)^i m \qquad \forall i = 0, 1, \dots, n + 2$$

- Poišči ekstrem residuala $r_k = f - p^*_k$. To je $u \in [a, b]$, da

  $$|r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty,[a,b]}$$

- Če je $|r_k(u)| - |m| < \epsilon$, potem končaj in vrni $p^* = p^*_k$. Sicer pa naredimo zamenjavo točk v množici E_k z u tako, da ogranimo alternacijo residuala.

Interpolacija

Podane so vrednosti izbarne funkcije f v $n + 1$ paroma različnih točkah x_i (**interpolacijske točke**), iščemo neko preprostejšo funkcijo g (**interpolacijska funkcija**), ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomska interpolacija

$f \in \mathcal{C}([a, b])$, $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermondova matrika } V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j) \ne 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, \dots, n$$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x - x_0)$, $(x - x_0)(x - x_1)$, ...

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \dots, x_k$. Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k]f(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f =$$

$$= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]f - [x_i,\dots,x_{i+k-1}]f}{x_k - x_0} & x_i \ne x_{i+k} \end{cases}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i]f(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

vhodni podatki: $x_0, \dots, x_n, \ d_0, \dots, d_n, \ x$
$v_n \leftarrow d_n$
za $i = n - 1, \dots, 0$:
  $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$

vrni v_0

Kako izbrati točke na $[a, b]$?

- **Ekvidistantne točke**: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$
- **Izbira pri kateri je dosežen minimum**
- **Čibiševe točke**

$$x_i = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} \cos\left(\frac{2i + 1}{2n + 2}\pi\right) \qquad i = 0, \dots, n$$

Numerično odvajanje

Kot približek odvoda funkcije f v izbrenem x vzamemo verdnost dovoda interpolacijskega polinoma na točkah $x_0, \dots, x_n$ pri tem x.

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_o, x_n, x]f \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n} \qquad l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Odvajamo

$$f'(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{približek}} + \underbrace{\omega'(x)[x_0, \dots, x_n, x]f + \omega(x)([x_o, \dots, x_n, x]f)'}_{\text{napaka}}$$

Odvod deljene niference:

$$\frac{d}{dx}[x_0, \dots, x_n, x]f = [x_0, \dots, x_n, x, x]f$$

Interpolacijske točke ponavadi izberemo ekvidistntno, za x pa izberemo kar eno izmed interpolacijskih točk (npr. x_k). Potem dobimo:

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \underbrace{\omega'(x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}}_{\text{napaka}}$$