Teorija aproksimacije

X ... vekt. prostor katerega el. aproksimiramo

 $S \subseteq X$... podprostor a proksimantov $A: X \to S$... operacijska shema (operator)

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

• Neskončna norma

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Numerični približek: na intervalu [a,b] izberemo konkčno mnogo točk $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x : n \leq b.$

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)|$$

• Druga norma

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1$.

Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu [a, b] izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b.$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$||f - \hat{f}|| = \min_{s \in S} ||f - s||$$

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj boXvektorski prostor nad $\mathbb R$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in normo $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo element najboljše aproksimacije po MNK $f^* \in S,$ da $\|f - f^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK \iff $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{ \begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix} }_{Grammora \ matrika} \underbrace{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} }_{Grammora \ matrika} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je G=I in

$$r^* = \sum_{i=1}^n \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\operatorname{proj}_{u}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$\begin{split} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{u_j}(v_k) \end{split}$$

Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s poli-

Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

enakomerne aproksimacije
$$p \in \mathbb{F}_n$$
, za katerega velja $\|f-p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x)-p(x)|^{\text{ki zadošča pogoju }} f(x_i) = p(x_i) \text{ za } i = 0,1,\ldots,n.$

 $\mathit{Izrek}:$ Naj bo $f\in\mathcal{C}([a,b]).$ Če je polinom $p\in\mathbb{P}_n$ takšen, da residual r=f-pdoseže svojo normo $\|r\|_{\infty,[a,b]}$ alternirajoče: n+2 tokčah $x_i, a \leq x_0 < \cdots < x_{n+1} \leq b$

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \qquad \forall i = 0, \dots, n$$

potem je p polinom najboljše enak. aproks. za f na [a, b].

Remesov postopek

Vhodni podatki: funkcija f, interval [a, b], stopnja n, toler-

Izberi množico točk $E_0 = \{x_i, a \le x_0 < \cdots < x_{n+1} \le b\}.$

Minimaks za funkcijo f na E je

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)| = |m|$$

Ponavljaj k = 0, 1, 2, ...:

• Poišči polinom $p_k^* \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) - p_k^* = (-1)^i m \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+2$$

• Poišči ekstrem residuala $r_k = f - p_k^*$. To je $u \in [a, b]$,

$$|r_k(u)| = ||r_k||_{\infty,[a,b]}$$

• Če je $|r_k(u)| - |m| < \epsilon$, potem končaj in vrni $p^* = p_k^*$. Sicer pa naredimo zamenjavo točk v množici E_k z utako, da ogranimo alternacijo residuala.

Interpolacija

Podane so vrednosti izbarne funkcije f v n+1 paroma različnih točkah x_i (interpolacijske točke), iščemo neko preprostejšo funkcijo g (interpolacijska funkcija), ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomska interpolacija

 $f \in \mathcal{C}([a,b]), a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermondova matrika } V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0 \le i \le i \le n} (x_i - x_j) \ne 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
 $i = 0, \dots, n$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za \mathbb{P}_n .

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x-x_0)$, $(x-x_0)$ $(x_0)(x-x_1), \ldots$

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah x_0, x_1, \ldots, x_k . Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k] f(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$\begin{split} &[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \\ &= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_k - x_0} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases} \end{split}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

 $\check{C}e$ želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v

$$p(x) = d_0 1 + d_1 (x - x_0) + d_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

vhodni podatki: $x_0, \ldots, x_n, d_0, \ldots, d_n, x$

$$v_n \leftarrow d_n$$

 $za \ i = n - 1, \dots, 0:$
 $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$

 $vrni v_0$

Kako izbrati točke na [a, b]?

- Ekvidistantne točke: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$
- Izbira pri kateri je dosežen minimum

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$
 $i = 0, ..., n$