Teorija aproksimacije

X	...	vekt. prostor katerega el. aproksimiramo
$S \subseteq X$	...	podprostor aproksimantov
$A : X \to S$	...	operacijska shema (operator)

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

- **Neskončna norma**

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Numerični približek: na intervalu $[a,b]$ izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b$.

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)|$$

- **Druga norma**

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle} \qquad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1$.

Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu $[a,b]$ izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b$.

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$\|f - \hat{f}\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$$

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in normo $\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$$S = \mathrm{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo **element najboljše aproksimacije po MNK** $f^* \in S$, da $\|f - f^*\| = \min_{s\in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff$ $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1,\dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i\rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle l_j, l_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1,l_1\rangle & \dots & \langle l_n,l_1\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1,l_n\rangle & \dots & \langle l_n,l_n\rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f,l_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f,l_n\rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je $G = I$ in

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, l_i\rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, \dots, v_k$, uporabimo postopek:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$

Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo **polinom najboljše enakomerne aproksimacije** $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty,[a,b]} = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)|$$

Izrek: Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da **residual** $r = f - p$ doseže svojo normo $\|r\|_{\infty,[a,b]}$ alternirajoče: $n+2$ tokčah x_i, $a \le x_0 < \dots < x_{n+1} \le b$

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \qquad \forall i = 0,\dots,n$$

potem je p polinom najboljše enak. aproks. za f na $[a,b]$.

Remesov postopek

Vhodni podatki: funkcija f, interval $[a,b]$, stopnja n, toleranca ε

Izberi množico točk $E_0 = \{x_i,\ a \le x_0 < \dots < x_{n+1} \le b\}$.

Minimaks za funkcijo f na E je

$$M_n(f,E) = \min_{p\in\mathbb{P}} \max_{x\in E} |f(x) - p(x)| = |m|$$

Ponavljaj $k = 0, 1, 2, \dots$:

- Poišči polinom $p_k^* \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogoju:
$$f(x_i) - p_k^* = (-1)^i m \qquad \forall i = 0, 1, \dots, n+2$$
- Poišči ekstrem residuala $r_k = f - p_k^*$. To je $u \in [a,b]$, da
$$|r_k(u)| = \|r_k\|_{\infty,[a,b]}$$
- Če je $|r_k(u)| - |m| < \epsilon$, potem končaj in vrni $p^* = p_k^*$. Sicer pa naredimo zamenjavo točk v množici E_k z u tako, da ogranimo alternacijo residuala.

Interpolacija

Podane so vrednosti izbarne funkcije f v $n+1$ paroma različnih točkah x_i (**interpolacijske točke**), iščemo neko preprostejšo funkcijo g (**interpolacijska funkcija**), ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomska interpolacija

$f \in \mathcal{C}([a,b])$, $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermondova matrika } V} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0\le j<i\le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0,\dots,n$$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za $\mathbb{P}_n$.

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x - x_0)$, $(x - x_0)(x - x_1)$, ...

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah $x_0, x_1, \dots, x_k$. Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k]f(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \\ = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1},\dots,x_{i+k}]f - [x_i,\dots,x_{i+k-1}]f}{x_k - x_0} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i]f(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

vhodni podatki: $x_0, \dots, x_n,\ d_0, \dots, d_n,\ x$
$v_n \leftarrow d_n$
za $i = n-1, \dots, 0$:
  $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$

vrni v_0

Kako izbrati točke na $[a,b]$?

- **Ekvidistantne točke**: $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$
- **Izbira pri kateri je dosežen minimum**
- **Čibiševe točke**
$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad i = 0,\dots,n$$

Numerično odvajanje

Kot približek odvoda funkcije f v izbrenem x vzamemo verdnost dovoda interpolacijskega polinoma na točkah $x_0, \dots, x_n$ pri tem x.

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_o, x_n, x]f \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n} \qquad l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Odvajamo

$$f'(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{približek}} + \underbrace{\omega'(x)[x_0, \dots, x_n, x]f + \omega(x)([x_o, \dots, x_n, x]f)'}_{\text{napaka}}$$

Odvod deljene niference:

$$\frac{d}{dx}[x_0, \dots, x_n, x]f = [x_0, \dots, x_n, x, x]f$$

Interpolacijske točke ponavadi izberemo ekvidistntno, za x pa izberemo kar eno izmed interpolacijskih točk (npr. x_k). Potem dobimo:

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \underbrace{\omega'(x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{napaka}}$$

Numerično integriranje

Namesto f integriramo aproksimacijski polinom na izbranih točkah $a \le x_0 < \dots < x_n \le x_n$ (**vozli**).

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x) \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Kvadraturna formula oz. integracijsko pravilo

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{Sf} = \underbrace{\int_a^b p(x)dx}_{Ff} + \underbrace{\int_a^b \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]fdx}_{Rf}$$

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)dx = \\ = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_{i,n}(x)dx}_{\text{utež } A_i} = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Red integracijskega pravila

je enak m, če je pravilo točno ($Rf = 0$) za vse polinome stopnje manjše ali enake m ni pa točno ($Rf \neq 0$) za polinome višje stopnje kot m.

Dovolj je preveriti bazne polinome.

Newton-Cotesova pravila

Vozle izberemo ekvidistantno.

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad x_0 = a \qquad x_i = x_0 + ih; \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Ločimo pravila **zaprtega tipa** pri katerih upoštevamo krajišča in **odprtega tipa** pri katerih jih ne.

Trapezno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf$$

$$Rf = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]fdx = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + Rf$$

$$Rf = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

Integral računamo s sestavljenim Newton-Cotesovim pramilom. S F_h označimo približek, ki ga dobimo s korakom h. Predpostavimo, da velja:

$$I = F_h + c_0 h^p + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Kjer je c_0 konstanta odvisna samo od h.

Natančnješi (ekstrapoliran) približek:

$$I = \frac{2^p F_{h/2} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Ocena za napako iz primerjave F_h in $F_{h/2}$:

$$I = F_{h/2} + \underbrace{\frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{ocena napake } F_{h/2}} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

$$I = F_h + \underbrace{2^p\frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{ocena napake } F_h} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Gaussova pravila

Vozle (x_i) in uteži (A_i) izračunamo tako, da bo pravilo čim višjega reda.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

Imamo $2(n+1)$ neznank, ki jih doličimo tako, da bo pravilo reda $2n+1$:

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n A_i x_i^k \qquad k = 0, 1, \dots, 2n+1$$

Želimo ločiti enačbe za neznanke uteži od neznank za vozle. Vozle laho izračunamo iz linearnega sistema $(n+1)$ enačb:

$$\omega(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$$
$$\int_a^b \omega(x) x^k dx = 0 \qquad k = 0, \dots, n$$

Izrek: za funkcijo $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$ je napaka Gaussovega pravila reda $2n+1$

$$Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega^2(x) dx$$

Integrali v več dimenzijah

Fubinijev izrek:

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy =$$
$$= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

Reševanje diferencialnih enačb

Eksistenčni izrek za začetni probelm: $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_a$. Naj bo f na območju D okrog (a, y_a) zvezna funkcija in Lipschitzova v drugi spremenljivki:

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le C|y - \tilde{y}|$$

Potem obstaja nek podinterval $[\alpha, \beta]$, ki vsebuje a, na katerem rešitev začetnega probelma DE obstaja in je enolična.

Eksplicitna Eulerjeva metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad x_{n+1} = x_n + h$$

Implicitna Eulerjeva metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \qquad x_{n+1} = x_n + h$$

Za izračun y_{n+1} moramo rešiti nelinearno enačbo. Uporabio lahko navadno iteracijo:

$$y_{n+1}^{(r)} = g(y_{n+1}^{(r-1)}) \qquad g(y_{n+1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Za začetni približek $y_{n+1}^{(0)}$ vzamemo kar y_n.

Trapezno pravilo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

Globalna in lokalna napaka

Globalna napaka v točki x_n:

$$|y(x_n) - y_n|$$

Globalna napaka:

$$\max_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n|$$

Metoda je **reda** r, če velja

$$\max_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n| = \text{konst.} h^r + \mathcal{O}\left(h^{r+1}\right) = \mathcal{O}\left(h^r\right)$$

Lokalna napaka v točki x_n je razlika med točno rešitvijo v x_n in njenim numeričnim približkom y_n ob predpostavki, da se točna in numerična rešitev ujemata v vseh prejšnjih korakih:

$$\tau_n(h) = y(x_n) - y_n \qquad y(x_k) = y_k;\ \forall k < n$$

Pri določanju lokalne napake si pomagamo z razvojem v Taylorjevo vrsto po h okoli x.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x) + \dots$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x,y)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x,y)\Delta y^2\right) + \dots$$

Če je red lokalne napake r, je red metode $r - 1$.

Runge Kutta metode

Izračunamo s koeficientov

$$k_i = hf(x_n + \alpha h, y_n + \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j) \qquad i = 1, 2, \dots, s$$
$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \gamma k_i$$

Pri tem so α_i, β_{ij} in γ_i koeficienti, ki so predstavljeni v **Butcherjevi shemi**:

$$\begin{array}{c|ccc}
\alpha_1 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1s} \\
\alpha_2 & \beta_{21} & \dots & \beta_{2s} \\
\vdots & & & \vdots \\
\alpha_s & \beta_{s1} & \dots & \beta_{ss} \\
\hline
 & \gamma_1 & \dots & \gamma_s
\end{array}$$

Veljati mora:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij} \qquad \sum_{i=1}^s \gamma = 1$$

Eulerjeva

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}$$

red: 2

Heunova

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

red: 2

Diag. impl.

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

red: 2

4 stopenjska R-K metoda

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

red: 4

Sistemi diferencialnih enačb 1. reda

$$\begin{array}{ll}
y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_d) & y_1(a) = y_{1,a} \\
\vdots & \vdots \\
y_d' = f_d(x, y_d, \dots, y_d) & y_d(a) = y_{d,a}
\end{array}$$

Vektorski zapis:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \qquad Y : [a,b] \to \mathbb{R}^d$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} \qquad F : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

$$Y' = F(x, Y) \qquad Y(a) = Y_a = \begin{bmatrix} y_{1,a} \\ \vdots \\ y_{d,a} \end{bmatrix}$$

Vse prej naštete metode lahko direktno uporabimo za reševanje sistemov.

Diferencialne enačbe višjega reda

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$
$$y(a) = y_{a,0} \qquad y'(a) = y_{a,1} \qquad y'(p-1) = y_{a,p-1}$$

Problem prevedemo na sistem diferencialnih enačb 1. reda. Uvedemo nove neznane funkcije $z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$:

$$z_1 = y'$$
$$z_2 = z_1' = y''$$
$$\vdots$$
$$z_{p-1} = z_{p-2}' = y^{p-1}$$
$$z_{p-1}' = y^{(p)} = f(x, y, z_1, \dots, z_{p-1})$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{p-2} \\ z_{p-1} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{p-1} \\ f(x, y, z_1, \dots, z_{p-1}) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y(a) \\ z_1(a) \\ \vdots \\ z_{p-2}(a) \\ z_{p-1}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{a,0} \\ a_{a,1} \\ \vdots \\ a_{a,p-2} \\ a_{a,p-1} \end{bmatrix}$$

Več čelenske metode

Pri izračunu približkov $y_n = y(x_n)$ uporabimo k vrednosti: $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-k}$.

Splošna linearna k-členska metoda:

$$y_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i \underbrace{f(x_{n-i}, y_{n-i})}_{f_{n-i}}$$

Pri tem so @a_i in β_i prosti koeficienti. Če je $\beta_0 = 0$, je metoda eksplicitna, sicer pa implicitna.

Prvih k vrednosti $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ moramo izračunti s kako od enočlenskih metod (njen red mora bit vsaj toliko, kot red k-členske metode).

Adamsove metode

Enačbo $y' = f(x,y)$ integriramo na intervalu $[x_{n-1}, x_n]$, funkcijo $f(x, y(x))$ pa nadomestimo z interpolacijskim polinomom na točkah $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_{n-1}$ (eksplicitna) ali $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n$ (implicitna).

Eksplicitne: $k = 2, 3, 4$ (po vrsti), red $= 2, 3, 4$:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{3}{2}f_{n-1} - \frac{1}{2}f_{n-2}\right)$$
$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{23}{12}f_{n-1} - \frac{4}{3}f_{n-2} + \frac{5}{12}f_{n-3}\right)$$
$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{55}{24}f_{n-1} - \frac{59}{24}f_{n-2} + \frac{37}{24}f_{n-3} - \frac{9}{24}f_{n-4}\right)$$

Implicitne: $k = 2, 3, 4$ (po vrsti), red $= 3, 4, 5$:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{5}{12}f_n + \frac{8}{12}f_{n-1} - \frac{1}{12}f_{n-2}\right)$$
$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{9}{24}f_n + \frac{19}{24}f_{n-1} - \frac{5}{24}f_{n-2} + \frac{1}{24}f_{n-3}\right)$$
$$y_n = y_{n-1} + h(\tfrac{251}{720}f_n + \tfrac{646}{720}f_{n-1} - \tfrac{264}{720}f_{n-2} + \tfrac{106}{720}f_{n-3} - \tfrac{19}{720}f_{n-4})$$

Milneove metode

Ideja za izpeljavo: DE $y' = f(x,y)$ integriramo na $[x_{n-k}, x_n]$, integral pa aproksimiramo z Newton-Cotesovimi pravili.

Odprta pravila → eksplicitne metode
Zaprta pravila → implicitne metode

Primer eksplicitne metode: $k = 3$, red $= 4$:

$$y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3})$$

Primer implicitne metode: $k = 2$, red $= 4$:

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

BDF metode

To so implicitne metode. Odvod v enačbi $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ aproksimiramo z diferencami.

Primeri (red je enak k):

$$y_n = \frac{4}{3}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}hf_n$$
$$y_n = \frac{18}{11}y_{n-1} - \frac{9}{11}y_{n-2} + \frac{2}{11}y_{n-3} + \frac{6}{11}hf_n$$
$$y_n = \frac{48}{11}y_{n-1} - \frac{36}{25}y_{n-2} + \frac{16}{25}y_{n-3} - q\frac{3}{25}y_{n-3} + \frac{12}{25}hf_n$$