Teorija aproksimacije

X ... vekt. prostor katerega el. aproksimiramo $S \subseteq X$... podprostor aproksimantov

 $A: X \to S$... operacijska shema (operator)

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

Neskončna norma

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Numerični približek: na intervalu [a, b] izberemo konkčno mnogo točk $a < x_0 < x_1 < \cdots < x : n < b$.

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)|$$

• Druga norma

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1$.

Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu [a, b] izberemo konkčno mnogo točk $a < x_0 < x_1 < \cdots < x : n < b$.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Bernsteinova aproksimacija

$$B_{i}^{n}(x) = \binom{n}{i} x^{i} (1 - x) \qquad i = 0, \dots, n; x \in [0, 1]$$

$$(B_{n}f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n}) B_{i}^{n}(x) \quad \text{za } [0, 1]$$

$$(B_{n}f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{i}{n}(b - a)\right) B_{i}^{n}\left(\frac{x - a}{b - a}\right) \quad \text{za } [a, b]$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$||f - \hat{f}|| = \min_{s \in S} ||f - s||$$

Aproksimacija po metodi najmanjših potem je p polinom najboljše enak. aproks. za f na [a,b]. kvadratov

Naj boXvektorski prostor nad $\mathbb R$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in normo $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo element najboljše aproksimacije po MNK $f^* \in S$, da $||f - f^*|| = \min_{s \in S} ||f - s||$

 $\mathit{Izrek:}\ f^*$ je el. najboljše aproksimacije po MNK \iff $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$
Grammova matrika G

 ${\cal G}$ je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je G = I in

$$f^* = \sum_{i=1}^n \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\operatorname{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$

Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo **polinom najboljše** enakomerne aproksimacije $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|$$

Izrek: Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da residual r = f - p doseže svojo normo $||r||_{\infty,[a,b]}$ alternirajoče: n+2 tokčah $x_i, a \le x_0 < \cdots < x_{n+1} \le b$

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \qquad \forall i = 0, \dots, n$$

Remesov postopek

Vhodni podatki: funkcija f, interval [a, b], stopnja n, toler-

Izberi množico točk $E_0 = \{x_i, a \le x_0 < \cdots < x_{n+1} \le b\}.$

Minimaks za funkcijo f na E je

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)| = |m|$$

Ponavljaj k = 0, 1, 2, ...:

• Poišči polinom $p_h^* \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) - p_i^*(x_i) = (-1)^i m \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+2$$

• Poišči ekstrem residuala $r_k = f - p_k^*$. To je $u \in [a, b]$,

$$|r_k(u)| = ||r_k||_{\infty,[a,b]}$$

• Če je $|r_k(u)| - |m| < \epsilon$, potem končaj in vrni $p^* = p_k^*$. Sicer pa naredimo zamenjavo točk v množici E_k z utako, da ohranimo alternacijo residuala.

Interpolacija

Podane so vrednosti izbarne funkcije f v n+1 paroma različnih točkah x_i (interpolacijske točke), iščemo neko preprostejšo funkcijo g (interpolacijska funkcija), ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomska interpolacija

 $f \in \mathcal{C}([a,b]), a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$detV = \prod_{0 \le i \le n} (x_i - x_j) \ne 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
 $i = 0, \dots, n$

Velja:

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za \mathbb{P}_n .

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x-x_0)$, $(x-x_0)$ $(x_0)(x-x_1), \ldots$

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \ldots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje $k,\, \mathrm{ki}$ se s funkcijo fujema v točkah x_0, x_1, \ldots, x_k . Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k] f(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$\begin{split} &[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \\ &= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_{i+k} - x_i} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases} \end{split}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

$$f(x) = p(x) + \omega(x) \underbrace{[x_0, \dots, x_n, x]f}_{\substack{f(n+1)(\xi) \\ (n+1)!}} \quad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Napako interpolacije izračunamo kot maksimum

$$\omega(x) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$
 $x, \xi \in [x_0, x_n]$

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Red integracijskega pravila Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

vhodni podatki: $x_0, \ldots, x_n, d_0, \ldots, d_n, x$ $v_n \leftarrow d_n$ $za i = n - 1, \dots, 0$: $v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$

Kako izbrati točke na [a, b]?

- Ekvidistantne točke: $h = \frac{b-a}{a}$, $x_i = a + ih$
- Izbira pri kateri je dosežen minimum
- Čibiševe točke

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$
 $i = 0, \dots, n$ Uteži določimo:

Numerično odvajanje

Kot približek odvoda funkcije f v izbrenem x vzamemo verdnost dovoda interpolacijskega polinoma na točkah x_0, \ldots, x_n pri tem x.

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_n, x]f \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n} \quad l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ i \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf$$

$$f'(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{približek}} + \underbrace{\omega'(x)[x_0, \dots, x_n, x]f + \omega(x)([x_o, \dots, x_n, x]f)'}_{\text{napaka}} \text{ Simpsonovo pravilo}$$

Odvod deliene niference:

$$\frac{d}{dx}[x_0,\ldots,x_n,x]f = [x_0,\ldots,x_n,x,x]f$$

Interpolacijske točke ponavadi izberemo ekvidistnino, za xpa izberemo kar eno izmed interpolacijskih točk (npr. x_k).

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \underbrace{\omega'(x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{napaka}}$$

Numerično integriranje

Namesto f integriramo aproksimacijski polinom na izbranih točkah $a \le x_0 < \dots < x_n \le x_n$ (vozli).

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n}(x)$$
 $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Kvadraturna formula oz. integracijsko pravilo

$$\underbrace{\int_{a}^{b} f(x)dx}_{Sf} = \underbrace{\int_{a}^{b} p(x)dx}_{Ff} + \underbrace{\int_{a}^{b} \omega(x)[x_{0}, \dots, x_{n}, x]fdx}_{Rf}$$

$$\int_{a}^{b} p(x)dx = \int_{a}^{b} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_{a}^{b} l_{i,n}(x)dx}_{\text{utež } A_i} = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

je enak m, če je pravilo točno (Rf = 0) za vse polinome stopnje manjše ali enake m ni pa točno $(Rf \neq 0)$ za polinome višje stopnje kot m.

Dovolj je preveriti bazne polinome.

Newton-Cotesova pravila

Vozle izberemo ekvidistantno

$$h = \frac{b-a}{n}$$
 $x_0 = a$ $x_i = x_0 + ih;$ $i = 0, 1, ..., n$

Ločimo pravila zaprtega tipa pri katerih upoštevamo krajišča in odprtega tipa pri katerih jih ne.

- Z integracijo: $f \approx p \implies \int f \approx \int p$
- Z metodo nedoločenih koeficientov (uteži določimo tako, da je stopnja največja; splača se vzeti $(x-x_0)^k$)

Trapezno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf$$

$$Rf = \int_{-\infty}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x] f dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + Rf$$

$$Rf = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

Integral računamo s sestavljenim Newton-Cotesovim pramilom. S F_h označimo približek, ki ga dobimo s korakom h. Predpostavimo, da velja:

$$I = F_h + c_0 h^p + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Kjer je c_0 konstanta neodvisna od h.

Natančnješi (ekstrapoliran) približek:

$$I = \frac{2^{p} F_{h/2} - F_{h}}{2^{p} - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Ocena za napako iz primerjave F_h in $F_{h/2}$:

$$I = F_{h/2} + \frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$
ocena napake $F_{h/2}$

$$I = F_h + 2^p \frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Gaussova pravila

Vozle (x_i) in uteži (A_i) izračunamo tako, da bo pravilo čim višjega reda.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_{i}f(x_{i}) + Rf$$

Imamo 2(n+1)neznank, ki jih doličimo tako, da bo pravilo reda $2n+1\colon$

$$\int_{a}^{b} x^{k} dx = \sum_{i=0}^{n} A_{i} x_{i}^{k} \qquad k = 0, 1, \dots, 2n + 1$$

Želimo ločiti enačbe za neznanke uteži od neznank
 za vozle. Vozle laho izračunamo iz linearnega sistema (n+1) enačb:

$$\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$$
$$\int_a^b \omega(x) x^k dx = 0 \qquad k = 0, \dots, n$$

 $\mathit{Izrek}:$ za funkcijo $f\in\mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$ je napaka Gaussovega pravila reda2n+1

$$Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{a}^{b} \omega^{2}(x) dx$$

Integrali v več dimenzijah

Fubinijev izrek:

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

Reševanje diferencialnih enačb

Eksistenčni izrek za začetni probelm: $y'=f(x,y),\ y(a)=y_a.$ Naj bo f na območju D okrog (a,y_a) zvezna funkcija in Lipschitzova v drugi spremenljivki:

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le C|y - \tilde{y}|$$

Potem obstaja nek podinterval $[\alpha,\beta]$, ki vsebuje a, na katerem rešitev začetnega probelma DE obstaja in je enolična.

Eksplicitna Eulerjeva metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
 $x_{n+1} = x_n + h$

Implicitna Eulerjeva metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$
 $x_{n+1} = x_n + h$

Za izračun y_{n+1} moramo rešiti nelinearno enačbo. Uporabio lahko navadno iteracijo:

$$y_{n+1}^{(r)} = g(y_{n+1}^{(r-1)})$$
 $g(y_{n+1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

Za začetni približek $y_{n+1}^{(0)}$ vzamemo kar y_n .

Trapezno pravilo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Globalna in lokalna napaka

Globalna napaka v točki x_n :

$$|y(x_n)-y_n|$$

Globalna napaka:

$$\max_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n|$$

Metoda je **reda** r, če velja

$$\max_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n| = \text{konst.} h^r + \mathcal{O}\left(h^{r+1}\right) = \mathcal{O}\left(h^r\right)$$

Lokalna napaka v točki x_n je razlika med točno rešitvijo v x_n in njenim numeričnim približkom y_n ob predpostavki, da se točna in numerična rešitev ujemata v vseh prejšnjih korakih:

$$\tau_n(h) = y(x_n) - y_n$$
 $y(x_k) = y_k; \ \forall k < n$

Pri določanju lokalne napake si pomagamo z razvojem v Taylorjevo vrsto pohokoli $\boldsymbol{x}.$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x) + \dots$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y +$$

+
$$\frac{1}{2!} \left(f_{xx}(x, y)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x, y)\Delta y^2 \right) + \dots$$

Če je red lokalne napake r, je red metode r-1.

Runge Kutta metode

Izračunamo s koeficientov

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j) \qquad i = 1, 2, \dots, s$$
$$y_{n+1} = y_n + \sum_{j=1}^s \gamma_j k_j$$

Pri tem so $\alpha_i,\ \beta_{ij}$ in γ_i koeficienti, ki so predstavljeni vButcherjevi shemi:

$$\begin{array}{c|ccccc} \alpha_1 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1s} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \dots & \beta_{2s} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_s & \beta_{s1} & \dots & \beta_{ss} \end{array}$$

Veljati mora:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^s \beta_{ij}$$
 $\sum_{i=1}^s \gamma = 1$

	**	D
Eulerjeva	Heunova	Diag. impl.

(0	0	0		0			0	0	0
-	1/2	$\frac{1}{2}$	0		1		_	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		0	1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

red: 2

red: 2

red: 2

4 stopenjska R-K metoda

ed: 4

Sistemi diferencialnih enačb 1. reda

$$y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_d)$$
 $y_1(a) = y_{1,a}$
 \vdots \vdots $y'_d = f_d(x, y_d, \dots, y_d)$ $y_d(a) = y_{d,a}$

Vektorski zapis:

$$Y = \begin{bmatrix} \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \qquad Y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} \qquad F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

$$Y' = F(x, Y)$$
 $Y(a) = Y_a = \begin{bmatrix} y_{1,a} \\ \vdots \\ y_{d,a} \end{bmatrix}$

Vse prej naštete metode lahko direktno uporabimo za reševanje sistemov.

Diferencialne enačbe višjega reda

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$

$$y(a) = y_{a,0} \qquad y'(a) = y_{a,1} \qquad y'(p-1) = y_{a,p-1}$$

Problem prevedemo na sistem diferencialnih enačb 1. reda. Uvedemo nove neznane funkcije $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$:

 $z_{p-2}(a)$

 $a_{a,p-2}$

Veččelenske metode

Pri izračunu približkov $y_n=y(x_n)$ uporabimo k vrednosti: $y_{n-1},y_{n-2},\dots,y_{n-k}.$

Splošna linearna k-členska metoda:

$$y_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i \underbrace{f(x_{n-i}, y_{n-i})}_{f_{n-i}}$$

Pri tem so α_i in β_i prosti koeficienti. Če je $\beta_0=0$, je metoda eksplicitna, sicer pa implicitna.

Prvih k vrednosti y_0,y_1,\ldots,y_{k-1} moramo izračunti s kako od enočlenskih metod (njen red mora bit vsaj toliko, kot red k-členske metode).

Adamsove metode

Enačbo y'=f(x,y) integriramo na intervalu $[x_{n-1},x_n]$, funkcijo f(x,y(x)) pa nadomestimo z interpolacijskim polinomom na točkah $x_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_{n-1}$ (eksplicitna) ali $x_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_n$ (implicitna).

Eksplicitne: k = 2, 3, 4 (po vrsti), red = 2, 3, 4:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{3}{2}f_{n-1} - \frac{1}{2}f_{n-2}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{23}{12}f_{n-1} - \frac{4}{3}f_{n-2} + \frac{5}{12}f_{n-3}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{55}{24}f_{n-1} - \frac{59}{24}f_{n-2} + \frac{37}{24}f_{n-3} - \frac{9}{24}f_{n-4}\right)$$

Implicitne: k = 2, 3, 4 (po vrsti), red = 3, 4, 5:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{5}{12}f_n + \frac{8}{12}f_{n-1} - \frac{1}{12}f_{n-2}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{9}{24}f_n + \frac{19}{24}f_{n-1} - \frac{5}{24}f_{n-2} + \frac{1}{24}f_{n-3}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{25}{220}f_n + \frac{646}{720}f_{n-1} - \frac{264}{720}f_{n-2} + \frac{106}{720}f_{n-3} - \frac{19}{720}f_{n-4}\right)$$

Milneove metode

Ideja za izpeljavo: DE y'=f(x,y) integriramo na $[x_{n-k},x_n]$, integral pa aproksimiramo z Newton-Cotesovimi pravili.

Odprta pravila \rightarrow eksplicitne metode Zaprta pravila \rightarrow implicitne metode Primer eksplicitne metode: k = 3, red = 4:

$$y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3})$$

Primer implicitne metode: k = 2, red = 4:

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

BDF metode

To so implicitne metode. Odvod v enačbi $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ aproksimiramo z diferencami.

Primeri (red je enak k):

$$y_n = \frac{4}{3}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}hf_n$$

$$y_n = \frac{18}{11}y_{n-1} - \frac{9}{11}y_{n-2} + \frac{2}{11}y_{n-3} + \frac{6}{11}hf_n$$

$$y_n = \frac{48}{11}y_{n-1} - \frac{36}{25}y_{n-2} + \frac{16}{25}y_{n-3} - q\frac{3}{25}y_{n-3} + \frac{12}{25}hf_n$$

Numerično računanje lastnih vrednosti

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \qquad \qquad x \in \mathbb{C}^n \qquad \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

 $Ax = \lambda x \implies x$ je desni lastni vektor λ pa pripadajoča lastna vrednost $y^H A = \lambda y^H = \overline{\lambda} y \implies y$ je levi lastni vektor λ pa pripadajoča lastna vrednost

Matriko A se da **diagonalizirati**, če obstaja nesingularna matrika X in diagonalna matrika $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, da velia

$$A = X\Lambda X^{-1}$$
 oz. $AX = XA$

$$X = \underbrace{[x_1, \dots, x_n]}_{\text{stolpci}} \qquad Ax_i = X \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i x_i$$

Matriki A in B sta podobni, če obstaja nesingularna matrika S, da velja $B=SAS^{-1}$. Podobne matrike imajo iste lastne vrednosti.

Lastne vrednosti lahko (neučinkovito) izračunamo kot ničle karakterističnega polinoma

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Schurova forma

Za vsako matriko $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ obstaja unitarna matrika U ($U^HU=I=UU^H$) in zgornje trikotna matrika T ($Schurova\ forma$), da velja

$$A = UTU^H$$

Če pa je Arealna matrika, obstaja orotgonalna matrika Qin kvazi (na diagonali dopuščamo 2×2 bloke) zgornje trikotna matrika R, da velja

$$A = QRQ^T$$

Potenčna metoda

Za dano matriko A iščemo **dominantno** (po absolutni vrednosti največjo) lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor.

Če imamo lastni vektor x, lahko pripadajočo lastno vrednost izrazimo z **Rayleighovim kvocientom**:

$$\lambda = \frac{x + Ax}{\|x\|^2}$$

vhod:matrika A, zacetni pr
blizek $z_0,\,\|z_0\|=1,$ toleranca ϵ

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= 0 \\ & \boldsymbol{ponavljaj:} \\ & y_{k+1} \leftarrow Az_k \\ & \rho_k \leftarrow z_k^T y_k \\ & z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \\ & k \leftarrow k+1 \\ & \boldsymbol{dokler}\left(\|y_{k+1} - \rho_k z_k\| > \epsilon\right) \text{ in } (k \leq \text{max_korakov}) \\ & \boldsymbol{vrni} \ z_k, \rho_k \end{aligned}$$

Inverzna iteracija

Iz danega približka za lastno vrednost bomo izračunali točno (boljši približek) lastno vrednost in pripadajoči lastni vektor. Naj bo σ približek za lastno verdnost λ_i matrike A. Zahtevamo, da je σ bližje λ_i , kot kateri koli drugi lastni vrednosti:

$$|\lambda_i - \sigma| < |\lambda_j - \sigma| \quad \forall j \neq i$$

Naj velja $A = X\Lambda X^{-1}$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Matriki A in $(A-\sigma I)^{-1}$ imata enake lastne vektorje. Če je (λ_i,x_i) lastni par matrike A, je $(\frac{1}{\lambda_i-\sigma},x_j)$ lastni par matrike $(A-\sigma I)^{-1}$. Ker je $\frac{1}{|\lambda_i-\sigma|}>\frac{1}{|\lambda_j-\sigma|}$ za $\forall j\neq i$, je x_i dominanten lastni vektor matrike $(A-\sigma I)^{-1}$ in ga lahko dobimo s potenčno metodo.

 $\begin{array}{l} \textit{vhod}: \text{ priblizek } \textit{za} \text{ lastno vrednost } \sigma \\ \text{izberi normiran vektor } z_0 \\ \textit{ponavljaj } k = 0, 1, 2, \ldots \\ y_{k+1} \leftarrow \text{resi sistem } (A - \sigma I) y_{k+1} = z_k \\ z_{k+1} \leftarrow \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \\ \end{array}$

 $vrni \ z_k$

Zaporedje z_k konvergira proti lastnemu vektorju, ki ima lastno vrednost najbližje $\sigma.$

QR iteracija

Metoda za izračun vseh lastnih vrednosti poljubne (nesimetrične) matrike.

Naj za lastne vrednosti matrike A velja $|\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n| \ge 0$. Potem zaporedje matrike $(A_k)_k$, ki ga tvori QR iteracija, konvergira proti zgornje trikotni matirki iz Schurevega razcepa.

Postopek lahko izboljšamo z redukcije A na zgornje Hessenbergovo obliko.

Matrika A je **zgornje Hessenbergova**, če je $a_{ij}=0$ za $i\geq j+2.$

Gershgorinov izrek

lastne vrednosti matrike $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ležijo v uniji Gershgorinovih krogov:

$$K_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \ j \ne i}}^n |a_{ij}| \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

Če unija krogov razpade na več nepovezanih komponent, je v vsaki komponenti ravno toliko lastnih vrednosti kolikor krogov jo sestavlia.