Teorija aproksimacije

X ... vekt. prostor katerega el. aproksimiramo

 $S \subseteq X$... podprostor aproksimantov $A: X \to S$... operacijska shema (operator)

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

• Neskončna norma

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Numerični približek: na intervalu [a, b] izberemo konkčno mnogo točk $a < x_0 < x_1 < \cdots < x : n < b$.

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0}^{n} |f(x_i)|$$

• Druga norma

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1$.

Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu [a,b] izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b.$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$||f - \hat{f}|| = \min_{s \in S} ||f - s||$$

Aproksimacija po metodi najmanjših Izberi množico točk $E_0 = \{x_i, a \le x_0 < \cdots < x_{n+1} \le b\}$. kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb R$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in normo $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo element najboljše aproksimacije po MNK $f^* \in S$, da $||f - f^*|| = \min_{s \in S} ||f - s||$

 $Izrek: f^*$ je el. najboljše aproksimacije po MNK \iff $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je G = I in

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\operatorname{proj}_{u}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo $orotogonalizirati\ k$ linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$

Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo polinom najboljše enakomerne aproksimacije $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$||f-p^*||_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} ||f-p||_{\infty,[a,b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x)-p(x)| \text{v točkah } x_0, x_1, \dots, x_k. \text{ Sledi:}$$

Izrek: Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da residual r = f - p doseže svojo normo $||r||_{\infty,[a,b]}$ alternirajoče: n + 2 tokčah $x_i, a \le x_0 < \cdots < x_{n+1} \le b$

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \qquad \forall i = 0, \dots, n$$

potem je p polinom najboljše enak. aproks. za f na [a, b].

Remesov postopek

Vhodni podatki: funkcija f, interval [a, b], stopnja n, toler-

 $\mathbf{Minimaks}$ za funkcijo f na E je

$$M_n(f, E) = \min_{x \in E} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)| = |m|$$

Ponavljaj k = 0, 1, 2, ...:

• Poišči polinom $p_k^* \in \mathbb{P}_n$, ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) - p_k^* = (-1)^i m \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+2$$

• Poišči ekstrem residuala $r_k = f - p_k^*$. To je $u \in [a, b]$,

$$|r_k(u)| = ||r_k||_{\infty,[a,b]}$$

• Če je $|r_k(u)| - |m| < \epsilon$, potem končaj in vrni $p^* = p_k^*$. Sicer pa naredimo zamenjavo točk v množici E_k z utako, da ogranimo alternacijo residuala.

Interpolacija

Podane so vrednosti izbarne funkcije f v n+1 paroma različnih točkah x_i (interpolacijske točke), iščemo neko preprostejšo funkcijo q (interpolacijska funkcija), ki zadošča

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomska interpolacija

$$f \in \mathcal{C}([a,b]), \ a \le x_0 < \dots < x_n \le b.$$
 Iščemo polinom
$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za i = 0, 1, ..., n.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

 $detV = \prod (x_i - x_j) \neq 0$

Vidimo, da je polinom p enolično določen.

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ i \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
 $i = 0, \dots, n$

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za \mathbb{P}_n

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x - x_0)$, $(x - x_0)$

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k,ki se s funkcijo fujema

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k]f(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$\begin{split} &[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \\ &= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_k - x_0} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases} \end{split}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

Če želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1 (x - x_0) + d_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

vhodni podatki: $x_0, \ldots, x_n, d_0, \ldots, d_n, x$

$$za i = n - 1, \dots, 0:$$

$$v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$$

Kako izbrati točke na [a, b]?

- Ekvidistantne točke: $h = \frac{b-a}{a}$, $x_i = a + ih$
- Izbira pri kateri je dosežen minimum
- ▲ Čibiševe točke

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$
 $i = 0, ..., n$

Numerično odvajanje

Kot približek odvoda funkcije f v izbrenem x vzamemo verdnost dovoda interpolacijskega polinoma na točkah x_0, \ldots, x_n pri tem x.

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_o, x_n, x]f \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$
$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n} \quad l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ i \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Odvajamo

$$f'(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{približek}} + \underbrace{\omega'(x)[x_0, \dots, x_n, x]f + \omega(x)([x_o, \dots, x_n, x]f)'}_{\text{napaka}} \\ \text{Integral računamo s sestavljenim Newton-Cotesovim pramilom. S } F_h \text{ označimo približek, ki ga dobimo s korakom}$$

Odvod deljene niference:

$$\frac{d}{dx}[x_0,\ldots,x_n,x]f = [x_0,\ldots,x_n,x,x]f$$

Interpolacijske točke ponavadi izberemo ekvidist
ntno, za \boldsymbol{x} pa izberemo kar eno izmed interpolacijskih točk (npr. x_k).

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \underbrace{\omega'(x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{napaka}}$$

Numerično integriranje

Namesto f integriramo aproksimacijski polinom na izbranih točkah $a \le x_0 < \cdots < x_n \le x_n$ (vozli).

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n}(x)$$
 $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Kvadraturna formula oz. integracijsko pravilo

$$\underbrace{\int_{a}^{b} f(x)dx}_{Sf} = \underbrace{\int_{a}^{b} p(x)dx}_{Ff} + \underbrace{\int_{a}^{b} \omega(x)[x_{0}, \dots, x_{n}, x]fdx}_{Rf}$$

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i)l_{i,n}(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + Rf$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i)\underbrace{\int_a^b l_{i,n}(x)dx}_{\text{utež } A_i} = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \qquad \text{Imamo } 2(n+1) \text{ neznank, ki jih doličimo tako, da bo pravilo reda } 2n+1:$$

Red integracijskega pravila

je enak m, če je pravilo točno (Rf = 0) za vse polinome stopnje manjše ali enake m ni pa točno $(Rf \neq 0)$ za polinome višie stopnie kot m

Dovolj je preveriti bazne polinome.

Newton-Cotesova pravila

Vozle izberemo ekvidistantno.

$$h = \frac{b-a}{n}$$
 $x_0 = a$ $x_i = x_0 + ih;$ $i = 0, 1, ..., n$

Ločimo pravila zaprtega tipa pri katerih upoštevamo krajišča in odprtega tipa pri katerih jih ne.

Trapezno pravilo

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf$$

$$Rf = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]fdx = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + Rf$$

$$Rf = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

h. Predpostavimo, da velja:

$$I = F_h + c_0 h^p + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Kjer je c_0 konstanta odvisna samo od h.

Natančnješi (ekstrapoliran) približek:

$$I = \frac{2^{p} F_{h/2} - F_{h}}{2^{p} - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Ocena za napako iz primerjave F_h in $F_{h/2}$:

$$I = F_{h/2} + \frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$
ocena napake $F_{h/2}$

$$I = F_h + 2^p \frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Gaussova pravila

Vozle (x_i) in uteži (A_i) izračunamo tako, da bo pravilo čim

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_{i}f(x_{i}) + Rf$$

$$\int_{a}^{b} x^{k} dx = \sum_{i=0}^{n} A_{i} x_{i}^{k} \qquad k = 0, 1, \dots, 2n + 1$$

Želimo ločiti enačbe za neznanke uteži od neznank za vozle Vozle laho izračunamo iz linearnega sistema (n+1) enačb:

$$\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$$
$$\int_a^b \omega(x) x^k dx = 0 \qquad k = 0, \dots, n$$

Izrek: za funkcijo $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$ je napaka Gaussovega pravila reda 2n+1

$$Rf = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-b}^{b} \omega^{2}(x) dx$$

Integrali v več dimenzijah

Fubinijev izrek:

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_a^b dx \int_a^d f(x,y)dy = \int_a^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$