Teorija aproksimacije

X ... vekt. prostor katerega el. aproksimiramo $S \subseteq X$... podprostor aproksimantov $A: X \to S$... operacijska shema (operator)

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

• Neskončna norma

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Numerični približek: na intervalu [a, b] izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b$.

$$||f||_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)|$$

• Druga norma

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1.$

Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu [a, b] izberemo konkčno mnogo točk $a \le x_0 < x_1 < \dots < x : n \le b.$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$||f - \hat{f}|| = \min_{s \in S} ||f - s||$$

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj boXvektorski prostor nad $\mathbb R$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in normo $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$$S = \operatorname{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo element najboljše aproksimacije po MNK $f^* \in S$, da $||f - f^*|| = \min_{s \in S} ||f - s||$

 $\mathit{Izrek} : f^*$ je el. najboljše aproksimacije po MNK \iff $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^n \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix}
\langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\alpha_1 \\
\vdots \\
\alpha_n
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\langle f, l_1 \rangle \\
\vdots \\
\langle f, l_n \rangle
\end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak Interpolacija sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je G = I in

$$f^* = \sum_{i=1}^n \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\operatorname{proj}_{u}(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_2)$$

$$u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1}(v_3) - \operatorname{proj}_{u_2}(v_3)$$

$$\vdots$$

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{proj}_{u_j}(v_k)$$

Enakomerna aproksimacija zveznih funkcij s polinomi

Za dano funkcijo $f \in \mathcal{C}([a,b])$ iščemo **polinom najboljše** enakomerne aproksimacije $p^* \in \mathbb{P}_n$, za katerega velja

$$\|f - p^*\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_{\infty, [a, b]} = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|$$

Izrek: Naj bo $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Če je polinom $p \in \mathbb{P}_n$ takšen, da residual r=f-p doseže svojo normo $\|r\|_{\infty,[a,b]}$ alternirajoče: n+2 tokčah $x_i, a \le x_0 < \cdots < x_{n+1} \le b$

$$r(x_i)r(x_{i+1}) < 0 \qquad \forall i = 0, \dots, n$$

potem je p polinom najboljše enak. aproks. za f na [a, b].

Remesov postopek

Vhodni podatki: funkcija f,interval $\left[a,b\right],$ stopnja n,toler-

Izberi množico točk $E_0 = \{x_i, a \le x_0 < \dots < x_{n+1} \le b\}.$

 $\mathbf{Minimaks}$ za funkcijo f na E je

$$M_n(f, E) = \min_{p \in \mathbb{P}} \max_{x \in E} |f(x) - p(x)| = |m|$$

Ponavljaj k = 0, 1, 2, ...:

• Poišči polinom $p_{i}^{*} \in \mathbb{P}_{n}$, ki zadošča pogoju:

$$f(x_i) - p_k^* = (-1)^i m \quad \forall i = 0, 1, \dots, n+2$$

• Poišči ekstrem residuala $r_k = f - p_k^*$. To je $u \in [a, b]$,

$$|r_k(u)| = ||r_k||_{\infty, [a,b]}$$

 • Če je $|r_k(u)|-|m|<\epsilon,$ potem končaj in vrni $p^*=p_k^*.$ Sicer pa naredimo zamenjavo točk v množici E_k z utako, da ogranimo alternacijo residuala.

Podane so vrednosti izbarne funkcije f v n+1 paroma različnih točkah x_i (interpolacijske točke), iščemo neko preprostejšo funkcijo q (interpolacijska funkcija), ki zadošča

$$f(x_i) = g(x_i) \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Polinomska interpolacija

 $f \in \mathcal{C}([a,b]), a < x_0 < \cdots < x_n < b$. Iščemo polinom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

ki zadošča pogoju $f(x_i) = p(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$
Vandermondyva matrika V

$$detV = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \ne 0$$

Vidimo, da je polinom p enolično določen

Lagrangeova oblika interpolacijskega polinoma

$$l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
 $i = 0, \dots, n$

$$l_{i,n}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Lema: $l_{i,n}$ so baza za \mathbb{P}_n

Interpolacijski polinom v lagrangeovi obliki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

Newtonova oblika zapisa interpolacijskega polinoma

Za bazo izberemo prestavljene potence: 1, $(x-x_0)$, $(x-x_0)$ $(x_0)(x-x_1), \ldots$

Deljena diferenca $[x_0, x_1, \dots, x_k]f$ je vodilni koeficient interpolacijskega polinoma stopnje k, ki se s funkcijo f ujema v točkah x_0, x_1, \ldots, x_k . Sledi:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + [x_0, x_1, \dots, x_k] f(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Rekurzivna zveza:

$$\begin{split} &[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f = \\ &= \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} & x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+k} \\ \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}]f}{x_k - x_0} & x_i \neq x_{i+k} \end{cases} \end{split}$$

Newtonova oblika zapisa je torej:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \dots, x_i] f(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$$

 $\check{C}e$ želimo, da se polinom n neki toči ujema tudi v k-tem odvodu, to točko k-krat ponovimo.

Računanje vrednosti interpolacijskega polinoma v Newtonovi obliki

$$p(x) = d_0 1 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

vhodni podatki: $x_0, \dots, x_n, \ d_0, \dots, d_n, \ x$ $v_n \leftarrow d_n$

$$za \ i = n - 1, \dots, 0:$$
$$v_i \leftarrow d_i + (x - x_i)v_{i+1}$$

 $vrni v_0$

Kako izbrati točke na [a, b]?

- Ekvidistantne točke: $h = \frac{b-a}{a}$, $x_i = a + ih$
- Izbira pri kateri je dosežen minimum
- Čibiševe točke

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$$
 $i = 0, \dots, n$

Numerično odvajanje

Kot približek odvoda funkcije f v izbrenem x vzamemo Ločimo pravila **zaprtega tipa** pri katerih upoštevamo verdnost dovoda interpolacijskega polinoma na točkah krajišča in **odprtega tipa** pri katerih jih ne. x_0, \ldots, x_n pri tem x.

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, x_n, x]f \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n} \quad l_{i,n}(x) = \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \qquad Rf = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]fdx = -\frac{h}{2}(x_0 - x_0)(x_0 - x_1)[x_0, x_1, x]fdx$$

$$f'(x) = \underbrace{p'(x)}_{\text{približek}} + \underbrace{\omega'(x)[x_0, \dots, x_n, x]f + \omega(x)([x_0, \dots, x_n, x]f)'}_{\text{napaka}}$$

Odvod deljene niference:

$$\frac{d}{dx}[x_0,\ldots,x_n,x]f = [x_0,\ldots,x_n,x,x]f$$

Interpolacijske točke ponavadi izberemo ekvidist
ntno, za \boldsymbol{x} pa izberemo kar eno izmed interpolacijskih točk (npr. x_k).

$$f'(x_k) = p'(x_k) + \underbrace{\omega'(x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{\text{napaka}}$$

Numerično integriranje

Namesto f integriramo aproksimacijski polinom na izbranih točkah $a \le x_0 < \cdots < x_n \le x_n$ (vozli).

$$f(x) = p(x) + \omega(x)[x_0, \dots, x_n, x]f$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$
 $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Kvadraturna formula oz. integracijsko pravilo

$$\underbrace{\int_{a}^{b} f(x)dx}_{Sf} = \underbrace{\int_{a}^{b} p(x)dx}_{Ff} + \underbrace{\int_{a}^{b} \omega(x)[x_{0}, \dots, x_{n}, x]fdx}_{Rf}$$

$$\int_{a}^{b} p(x)dx = \int_{a}^{b} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_{i,n}(x)dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_{a}^{b} l_{i,n}(x)dx}_{\text{ute} \check{z}} = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Red integracijskega pravila

je enak m, če je pravilo točno (Rf = 0) za vse polinome stopnje manjše ali enake m ni pa točno $(Rf \neq 0)$ za polinome višje stopnje kot m.

Dovolj je preveriti bazne polinome.

Newton-Cotesova pravila

Vozle izberemo ekvidistantno.

$$h = \frac{b-a}{n}$$
 $x_0 = a$ $x_i = x_0 + ih;$ $i = 0, 1, ..., n$

Trapezno pravilo

$$p(x) + \omega(x)[x_0, x_n, x]f \qquad \omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \qquad \qquad \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + Rf$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_{i,n} \quad l_{i,n}(x) = \prod_{j=0}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad \qquad Rf = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x]fdx = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Simpsonovo pravilo

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + Rf$$
$$Rf = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Ocena napake in Richardsonova ekstrapolacija

Integral računamo s sestavljenim Newton-Cotesovim pramilom. S F_h označimo približek, ki ga dobimo s korakom h. Predpostavimo, da velja:

$$I = F_h + c_0 h^p + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Kjer je c_0 konstanta odvisna samo od h.

Natančnješi (ekstrapoliran) približek:

$$I = \frac{2^{p} F_{h/2} - F_{h}}{2^{p} - 1} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Ocena za napako iz primerjave F_h in $F_{h/2}$:

$$I = F_{h/2} + \underbrace{\frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{ocena napake } F_{h/2}} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$
$$I = F_h + \underbrace{2^p \frac{F_{h/2} - F_h}{2^p - 1}}_{\text{ocena napake } F_h} + \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right)$$

Gaussova pravila

Vozle (\boldsymbol{x}_i) in uteži (A_i) izračunamo tako, da bo pravilo čim

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_{i}f(x_{i}) + Rf$$

Imamo 2(n+1) neznank, ki jih doličimo tako, da bo pravilo

$$\int_{a}^{b} x^{k} dx = \sum_{i=0}^{n} A_{i} x_{i}^{k} \qquad k = 0, 1, \dots, 2n + 1$$

Želimo ločiti enačbe za neznanke uteži od neznank za vozle. Vozle laho izračunamo iz linearnega sistema (n + 1) enačb:

$$\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$$
$$\int_a^b \omega(x) x^k dx = 0 \qquad k = 0, \dots, n$$

 $\mathit{Izrek}:$ za funkcijo $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a,b])$ je napaka Gaussovega pravila reda 2n+1

$$Rf=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b\omega^2(x)dx$$

Integrali v več dimenzijah

Fubinijev izrek:

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

Reševanje diferencialnih enačb

Eksistenčni izrek za začetni probelm: y' = f(x, y), y(a) = y_a . Naj bo f na območju D okrog (a, y_a) zvezna funkcija in Lipschitzova v drugi spremenljivki:

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \le C|y - \tilde{y}|$$

Potem obstaja nek podinterval $[\alpha, \beta]$, ki vsebuje a, na katerem rešitev začetnega probelma DE obstaja in je

Eksplicitna Eulerjeva metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
 $x_{n+1} = x_n + h$

Implicitna Eulerjeva metoda

lahko navadno iteracijo:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$
 $x_{n+1} = x_n + h$

Za izračun y_{n+1} moramo rešiti nelinearno enačbo. Uporabio

$$y_{n+1}^{(r)} = g(y_{n+1}^{(r-1)})$$
 $g(y_{n+1}) = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

Za začetni približek $y_{n+1}^{(0)}$ vzamemo kar y_n .

Trapezno pravilo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

Globalna in lokalna napaka

Globalna napaka v točki x_n :

$$|y(x_n)-y_n|$$

Globalna napaka:

$$\max_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n|$$

Metoda je **reda** r, če velja

$$\max_{0 \le n \le m} |y(x_n) - y_n| = \text{konst.} h^r + \mathcal{O}\left(h^{r+1}\right) = \mathcal{O}\left(h^r\right)$$

Lokalna napaka v točki x_n je razlika med točno rešitvijo v x_n in njenim numeričnim približkom y_n ob predpostavki, da se točna in numerična rešitev ujemata v vseh prejšnjih

$$\tau_n(h) = y(x_n) - y_n$$
 $y(x_k) = y_k; \ \forall k < n$

Pri določanju lokalne napake si pomagamo z razvojem v Taylorjevo vrsto po h okoli x.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x) + \dots$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y +$$

+
$$\frac{1}{2!} \left(f_{xx}(x, y)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x, y)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x, y)\Delta y^2 \right) + \dots$$

Če je red lokalne napake r, je red metode r-1.

Runge Kutta metode

Izračunamo s koeficientov

$$k_i = hf(x_n + \alpha h, y_n + \sum_{j=1}^s \beta_{ij} k_j) \qquad i = 1, 2, \dots, s$$
$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s \gamma k_i$$

Pri tem so $\alpha_i,\;\beta_{ij}$ in γ_i koeficienti, ki so predstavljeni v Butcherjevi shemi:

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha_1 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1s} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \dots & \beta_{2s} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_s & \beta_{s1} & \dots & \beta_{ss} \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ &$$

Veljati mora:

$$\alpha_i = \sum_{i=1}^s \beta_{ij} \qquad \sum_{i=1}^s \gamma = 1$$

Eulerieva

Heunova

Diag. impl.

red: 2

red: 2

red: 2

4 stopenjska R-K metoda

red: 4

Sistemi diferencialnih enačb 1. reda

$$y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_d)$$
 $y_1(a) = y_1$
 \vdots \vdots $y'_d = f_d(x, y_d, \dots, y_d)$ $y_d(a) = y_d$

Vektorski zapis:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \qquad Y : [a, b] \to \mathbb{R}^d$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix} \qquad F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \to$$

$$Y' = F(x, Y)$$
 $Y(a) = Y_a = \begin{bmatrix} y_{1,a} \\ \vdots \\ y_{d,a} \end{bmatrix}$

Vse prej naštete metode lahko direktno uporabimo za reševanje sistemov.

Diferencialne enačbe višjega reda

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$

$$y(a) = y_{a,0} \qquad y'(a) = y_{a,1} \qquad y'(p-1) = y_{a,p-1}$$

Problem prevedemo na sistem diferencialnih enačb 1. reda. Uvedemo nove neznane funkcije $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$:

$$z_{2} = z'_{1} = y''$$

$$\vdots$$

$$z_{p-1} = z'_{p-2} = y^{p-1}$$

$$z'_{p-1} = y^{(p)} = f(x, y, z_{1}, \dots, z_{p-1})$$

$$\begin{bmatrix} z_{1} \\ z_{2} \\ \vdots \\ z_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1} \\ z_{2} \\ \vdots \\ z_{p-1} \\ f(x, y, z_{1}, \dots, z_{p-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(a) \\ z_{1}(a) \\ \vdots \\ z_{p-2}(a) \\ z_{p-1}(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{a,0} \\ a_{a,1} \\ \vdots \\ a_{a,p-2} \\ a_{a,p-1} \end{bmatrix}$$

Več čelenske metode

Pri izračunu približkov $y_n = y(x_n)$ uporabimo k vrednosti: $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_{n-k}.$

Splošna linearna k-členska metoda:

$$y_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i \underbrace{f(x_{n-i}, y_{n-i})}_{f_{n-i}}$$

Pri tem so $@a_i$ in β_i prosti koeficienti. Če je $\beta_0=0$, je Numerično računanje lastnih vrednosti metoda eksplicitna, sicer pa implicitna.

Prvih k vrednosti y_0, y_1, \dots, y_{k-1} moramo izračunti s kako od enočlenskih metod (njen red mora bit vsaj toliko, kot red k-členske metode).

Adamsove metode

Enačbo y' = f(x,y) integriramo na intervalu $[x_{n-1}, x_n]$, funkcijo f(x,y(x)) pa nadomestimo z interpolacijskim polinomom na točkah $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_{n-1}$ (eksplicitna) ali $x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n$ (implicitna).

Eksplicitne: k = 2, 3, 4 (po vrsti), red = 2, 3, 4:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{3}{2}f_{n-1} - \frac{1}{2}f_{n-2}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{23}{12}f_{n-1} - \frac{4}{3}f_{n-2} + \frac{5}{12}f_{n-3}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{55}{24}f_{n-1} - \frac{59}{24}f_{n-2} + \frac{37}{24}f_{n-3} - \frac{9}{24}f_{n-4}\right)$$

Implicitne: k = 2, 3, 4 (po vrsti), red = 3, 4, 5:

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{5}{12}f_n + \frac{8}{12}f_{n-1} - \frac{1}{12}f_{n-2}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{9}{24}f_n + \frac{19}{24}f_{n-1} - \frac{5}{24}f_{n-2} + \frac{1}{24}f_{n-3}\right)$$

$$y_n = y_{n-1} + h\left(\frac{251}{720}f_n + \frac{646}{720}f_{n-1} - \frac{264}{720}f_{n-2} + \frac{106}{720}f_{n-3} - \frac{19}{720}f_{n-4}\right)$$

Milneove metode

Ideja za izpeljavo: DE y' = f(x, y) integriramo na $\left[x_{n-k},x_{n}\right]$, integral pa aproksimiramo z Newton-Cotesovimi

Odprta pravila \rightarrow eksplicitne metode Zaprta pravila \rightarrow implicit
ne metode

Primer eksplicitne metode: k = 3, red = 4:

$$y_n = y_{n-4} + \frac{4h}{3}(2f_{n-1} - f_{n-2} + 2f_{n-3})$$

Primer implicitne metode: k = 2, red = 4:

$$y_n = y_{n-2} + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2})$$

BDF metode

To so implicitne metode. Odvod v enačbi $y'(x_n) =$ $f(x_n, y(x_n))$ aproksimiramo z diferencami.

Primeri (red je enak k):

$$y_n = \frac{4}{3}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} + \frac{2}{3}hf_n$$

$$y_n = \frac{18}{11}y_{n-1} - \frac{9}{11}y_{n-2} + \frac{2}{11}y_{n-3} + \frac{6}{11}hf_n$$

$$y_n = \frac{48}{11}y_{n-1} - \frac{36}{25}y_{n-2} + \frac{16}{25}y_{n-3} - q\frac{3}{25}y_{n-3} + \frac{12}{25}hf_n$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \qquad \qquad x \in \mathbb{C}^n \qquad \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

 $Ax = \lambda x \implies x$ je desni lastni vektor λ pa pripadajoča lastna vrednost $y^H A = \lambda y^H = \overline{\lambda} y \implies y$ je levi lastni vektor λ pa pripadajoča lastna vrednost

Matriko A se da **diagonalizirati**, če obstaja nesingularna matrika X in diagonalna matrika $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, da

$$A = X\Lambda X^{-1}$$
 oz. $AX = XA$

$$X = \underbrace{[x_1, \dots, x_n]}_{\text{stolpci}} \qquad Ax_i = X \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} = \lambda_i x_i$$

Matriki A in B sta podobni, če obstaja nesingularna matrika S, da velja $B = SAS^{-1}$. Podobne matrike imajo iste lastne vrednosti.

Lastne vrednosti lahko (neučinkovito) izračunamo kot ničle karakterističnega polinoma

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Schurova forma

Za vsako matriko $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ obstaja unitarna matrika $U (U^H U = I = U U^H)$ in zgornje trikotna matrika T(Schurova forma), da velja

$$A = UTU^H$$

 Če pa je A realna matrika, obstaja orotgonalna matrika Q in kvazi (na diagonali dopuščamo 2 × 2 bloke) zgornje trikotna matrika R, da velia

$$A = QRQ^T$$

Potenčna metoda

Za dano matriko A iščemo dominantno (po absolutni vrednosti največjo) lastno vrednost in pripadajoč lastni vektor.

Če imamo lastni vektor x, lahko pripadajočo lastno vrednost izrazimo z Ravleighovim kvocientom:

$$\lambda = \frac{x^T A x}{\|x\|^2}$$

vhod: matrika A, zacetni prblizek z_0 , $||z_0|| = 1$, toleranca e

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= 0 \\ & \boldsymbol{ponavljaj:} \\ & y_{k+1} \leftarrow Az_k \\ & \rho_k \leftarrow z_k^T y_k \\ & z_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|} \\ & k \leftarrow k + 1 \\ & \boldsymbol{dokler} \left(\|y_{k+1} - \rho_k z_k\| > \epsilon \right) \text{ in } \left(k \leq \text{max_korakov} \right) \\ & \boldsymbol{vrni} \ z_k, \rho_k \end{aligned}$$