Teorija aproksimacije

X	...	vekt. prostor katerega el. aproksimiramo
$S \subseteq X$	...	podprostor aproksimantov
$A : X \to S$	...	operacijska shema (operator)

Prileganje aproksimanta ocenimo z normo:

- **Neskončna norma**

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Numerični približek: na intervalu $[a,b]$ izberemo konkčno mnogo točk $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x : n \leq b$.

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} = \max_{i=0,\dots,n} |f(x_i)|$$

- **Druga norma**

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Standardni skalarni produkt: $\rho \equiv 1$.

Numerični približek: vzamemo diskretni skalarni produkt. Na intervalu $[a,b]$ izberemo konkčno mnogo točk $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x : n \leq b$.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)\rho(x_i)dx$$

Optimalni aproksimacijski problem

Za $f \in X$ iščemo aproksimant $\hat{f} \in S$, da je

$$\|f - \hat{f}\| = \min_{s \in S} \|f - s\|$$

Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

Naj bo X vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in normo $\| \cdot \|_2 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$

$$S = \mathrm{Lin}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subseteq X$$

Iščemo **element najboljše aproksimacije po MNK** $f^* \in S$, da $\|f - f^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|$

Izrek: f^* je el. najboljše aproksimacije po MNK $\iff$ $f - f^* \perp S \iff f - f^* \perp l_i \quad \forall i = 1, \dots n$

$$f^* = \alpha_1 l_1 + \cdots + \alpha_n l_n$$

Iz zgornjega izreka sledi:

$$\langle f - f^*, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\langle f, l_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle l_j, l_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

V matrični obliki:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle l_1, l_1 \rangle & \dots & \langle l_n, l_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle l_1, l_n \rangle & \dots & \langle l_n, l_n \rangle \end{bmatrix}}_{\text{Grammova matrika } G} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, l_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, l_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je simetrična pozitivno definitna matrika. Numerično tak sistem rešimo z razcepom Choleskega.

Reševanje sistema linearnih enačb se izognemo tako, da bazo za S ortonormiramo. Tedaj je $G = I$ in

$$f^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, l_i \rangle l_i$$

Gram-Schmidtova ortogonalizacija

Definirajmo projekcijo vektorja v na u

$$\mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati* k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, ..., v_k$, uporabimo postopek:

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2)$$
$$u_3 = v_3 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_3) - \mathrm{proj}_{u_2}(v_3)$$
$$\vdots$$
$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{u_j}(v_k)$$