# Premična pika

$$x = (-1)^{S} m \cdot b^{e}$$

$$m = c_{0} + c_{1}b^{-1} + c_{2}b^{-2} + \dots + c_{t}b^{-t}$$

S ... predznak

b ... baza, ponavadi 2

m ... vrednost mantise

t ... dolžina mantise

e ... vrednost eksponenta  $L \le e \le U$ 

 $c_i$  ... števke v mejah  $0 < c_i < b-1$ 

Sistem premične pike označimo z P(b, t, L, U).

#### Standard IEEE

Eksponent je zapisan z odmikom:

$$E = e + \text{odmik}$$

Če je E=0, uporabimo **denormiran zapis**:

$$x = (-1)^{S} (c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \dots + c_t b^{-t}) \cdot b^{e+1}$$

Sicer pa **normiran zapis**:

$$x = (-1)^{S} (1 + c_1 b^{-1} + c_2 b^{-2} + \dots + c_t b^{-t}) \cdot b^{e}$$

Če so vsi biti eksponenta 1 in vsi biti mantise 0, je  $x = (-1)^S \infty$ .

Če so vis biti eksponenta 1 in vsi biti mantise niso 0, je x = NaN.

• Single precision b = 2, t = 23, L = -126, U = 127, odmik: 127

predznak 1	exponent 8	mantisa 23

• Double precision b = 2, t = 52, L = -1022, U = 1023, odmik: 1023

predznak 1	exponent 11	mantisa 52

## Zaokroževanje

Naj bo x pozitivno število z neskončnim zapisom

$$x = (c_1b^{-1} + c_2b^{-2} + \dots + c_tb^{-t} + c_{t+1}b^{-t-1}) + \dots b^e$$

Kandidata za približek fl(x) sta:

$$x_{-} = (c_1b^{-1} + c_2b^{-2} + \dots + c_tb^{-t})b^e$$
  
$$x_{+} = (c_1b^{-1} + c_2b^{-2} + \dots + c_tb^{-t} + b^{-t})b^e$$

Vzamemo tistega, ki je bljižje. Če sta enako blizu, izberemo tistega, ki ima zadnjo števko sodo.

#### Osnovna zaokrožitvena napaka

$$u = \frac{1}{2}b^{-t}$$

$$f(x) = x(1+\delta) \quad \text{za} \quad |\delta| \le u$$

$$\frac{|f(x) - x|}{|x|} \le u$$

# Napake pri numeričnem računanju

• Neodstranljiva napaka Namesto x imamo približek  $\bar{x}$ .

$$D_n = f(x) - f(\bar{x})$$

 Napaka metode Namesto funkcije f imamo približek g.

$$D_m = f(\bar{x}) - g(\bar{x})$$

• Zaokrožitvena napaka Pri računanju  $\tilde{y} = f(\bar{x})$  se pri vsaki operaciji se pojavi zaokrožitvena napaka. Namesto  $\tilde{y}$  dobimo  $\hat{y}$ .

$$D_z = \tilde{y} - \hat{y}$$

Celotna napaka je  $D = |D_n| + |D_m| + |D_z|$ .

#### Stopnja občutljivosti

Razmerje velikosti spremembe podatkov in spremembe rezultata.

Naj bo  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  zvezno odvedlijva funkcija in  $\delta x$  majhna motnja.

• Absolutna občutljivost f v točki x:

$$|f(x + \delta x) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\delta x|$$

• Relativna občutliivost f v točki x:

$$\frac{|f(x+\delta x) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |\delta x|}{|f(x)|}$$

#### Obratna in direktna stabilnost

- Direktna stabilnost: za vsak x direktna napaka  $(|f(x) f(x + \Delta x)|)$  majhna (absolutno oz. relativno).
- Obratna stabilnost: za vsak x razlika  $\Delta x$ , ki bi nam dala pravi rezultat majhna.

|direktna napaka| ≤ občutlijvost · |obratna napaka|

#### Nelinearne enačbe

Iščemo ničle funkcije f.

• Enostavne ničle:

$$f(\alpha) = 0$$
 in  $f'(\alpha) \neq 0$ 

• m-kratne ničle:

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$$

## Občutljivost ničle

Naj bo $\alpha$  m-kratna ničla  $\hat{\alpha}$  približek, da je  $f(\hat{\alpha})=\varepsilon.$ 

Čefrazvijemo v Taylorjevo vrsto okoli $\alpha$  in vzamemo prvihm+1členov dobimo:

$$\varepsilon \doteq \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} (\hat{\alpha} - \alpha)^m \quad |\hat{\alpha} - \alpha| \doteq \sqrt[m]{\frac{\varepsilon \cdot m!}{|f^{(m)}(\alpha)|}}$$

### Bisekcija

 $\textit{vhod}\colon$  funkcija  $f:[a,b]\to\mathbb{R},\; f(a)f(b)<0,$ natancnost $\varepsilon$   $\textit{izhod}\colon$ nicla funkcije f

$$\begin{aligned} & \textit{dokler} \quad |b-a| > \varepsilon \colon \\ & c \leftarrow \frac{a+b}{2} \\ & c \quad \text{sign}(f(c)) = \text{sign}(f(a)) \colon \\ & a \leftarrow c \\ & \textit{sicer} \colon \\ & b \leftarrow c \end{aligned}$$

c je približek ničle  $\alpha$ . Velja

$$|\alpha - c| \le \frac{b - a}{2^m} \le \varepsilon$$

Za natančnost  $\varepsilon$  potrebujemo  $\log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$  korakov.

#### Navadna iteracija

Rešujemo f(x) = 0. Enačbo pretvorimo vx = g(x). Načinov je veliko:

- g(x) = f(x) + x
- $\bullet$  q(x) = cf(x) + x
- g(x) = h(x)f(x) + x kjer je h(x) funkcija, ki nima ničle v  $\alpha$ .

#### Izrek o konvergenci navadne iteracije

Naj bo  $\alpha$  negibna točka za g in naj g na intervalu  $[\alpha - d, \alpha + d]$  (d > 0) zadošča Lipschitzovemu pogoju:

$$\exists m \in [0,1) \ \forall x, y \in I : |g(x) - g(y)| \le m|x - y|$$

tedaj je g skrčitev na I.

Potem za vsak  $x_0 \in I$  zaporedje  $x_{r+1} = g(x_r)$  konvergira k $\alpha$  in velja:

$$|x_r - \alpha| \le \frac{m}{1 - m} |x_r - x_{r-1}|$$

Posledica: Če je g zvezno odvedljiva v  $\alpha$  in velja  $g'(\alpha) < 1$ , obstaja interval I, ki vsebuje  $\alpha$ , da za vsak  $x_0 \in I$  zaporedje konvergira k  $\alpha$ .

- Če je  $|g'(\alpha)| < 1$ , je  $\alpha$  privlačna negibna točka
- Če je  $|g'(\alpha)| > 1$ , je  $\alpha$  odbojna negibna točka

Če je  $\alpha$  odbojna za g, je privlačna za  $g^{-1}$ :  $g(x) = x \implies x = g^{-1}(x)$ 

#### Hitrost konvergence

p>0 je red konvergence, če  $\exists C_1,C_2>0$ , da za vse dovolj pozne člene zaporedja  $x_{r+1}=g(x_r)$  velja:

$$C_1|x_r - \alpha|^p \le |x_{r+1} - \alpha| \le C_2|x_r - \alpha|^p$$

Vsak korak se št. decimalk pomnoži s p.

Naj bo g v okolici  $\alpha$  p-krat zvezno odvedlijva in naj velja  $g(\alpha) = \alpha$ ,  $g'(\alpha) = \cdots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$  in  $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ . Tedaj je red konvergence enak p.

#### Standardni redi konvergence

p=1 ... linearna konvergenca p=2 ... kvadratična konvergenca

#### Tangentna (Newtonova) metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{r_r}$$

Red konvergence:

- 2. če je  $\alpha$  enkratna ničla  $f'(\alpha) \neq 0$
- 3, če je  $f'(\alpha) \neq 0$  in  $f''(\alpha) = 0$
- 1, če je  $\alpha$  večkratna ničla  $f'(\alpha) = 0$

#### Sekantna metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{\frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}}$$

Red konvergence:  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62$ 

Metoda (f, f', f'')

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} - \frac{f''(x_r)f^2(x_r)}{2f'^3(x_r)}$$

Red konvergence: 3 (pri predpostavkah)

## Müllerjeva metoda

Na  $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}$  napnemo parabolo, ničla parabole je naslednji približek.

$$p(x) = a(x - x_r)^2 + b(x - x_r) + c$$
  
 $x_{r+1} = x_r - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$ 

### Hallejeva metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{2f(x_r)f'(x_r)}{2f'(x_r)^2 - f(x)f''(x)}$$

# Iskanje ničel polinoma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

## Durand-Kernerjeva metoda

Naj bodo  $z_1, \ldots, z_n$  približki za  $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ .

$$z_i^{(r+1)} = z_i^{(r)} - \frac{p(z_i^{(r)})}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(z_i^{(r)} - z_k^{(r)})}$$

#### Metoda pridužene matrike

$$C_{p_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti (ničle  $\det(C - \lambda I)$ ) matrike  $C_{p_n}$  so ravno ničle polinoma  $p_n$ .

#### Vektorske in matrične norme

 $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$  je vektorska norma, če

- $||x|| \ge 0$  in  $||x|| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \ \alpha \in \mathbb{R}$
- $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

$$||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$
 ... p-norma  $||x||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$  ... max norma

Cauchy-Schwartzova neenakost:  $|x^Ty| \le ||x||_2 ||y||_2$ 

 $\|\cdot\|:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}_+$  je matrična norma, če

- $||A|| \ge 0$  in  $||A|| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \ \alpha \in \mathbb{R}$
- $||A + B|| \le ||A|| + ||B||$
- ||AB|| < ||A|| ||B|| submultiplikativnost

$$\begin{split} \|A\|_1 &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left( \sum_{k=1}^m |a_{kj}| \right) \\ \|A\|_2 &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^T A)} \\ \|A\|_{\infty} &= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right) \\ \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2} \\ \|A\|_{op} &= \max_{\|c\|_v = 1} \|Ax\|_v \qquad \|\cdot\|_v \ vekt. \ norma \end{split}$$

spektralni radij  $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$ , kjer so  $\lambda$  lastne vrednosti matrike A.

Matrična norma  $\|\cdot\|_m$  je **usklajena** z vektorsko normo  $\|\cdot\|_v$ , če je

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

Na končno dimenzijskih prostorih so vse norme ekvivalentne

$$\|\cdot\|_{\alpha}, \|\cdot\|_{\beta} \implies C_1 \|A\|_{\beta} \le \|A\|_{\alpha} \le C_2 \|A\|_{\beta}$$

Za vsako operatorsko normo nad kvadratnimi matrikami velja:

$$|\lambda| \le ||A||$$
  $\lambda$  lastna vrednost matrike A

# Reševanje sistemov linearnih enačb

Imamo m enačb in n neznank:

- m < n: **nedoločen**,  $\infty$  rešitev
- m = n: kvadraten, ponavadi 1 rešitev
- m > n: **predoločen**, ponavadi 0 rešitev

$$Ax = b$$
  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $b \in \mathbb{R}^m$   $x \in \mathbb{R}^n$ 

$$\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \operatorname{Lin}\{a_1, \dots, a_n\}$$
$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$
$$\operatorname{rang} A = n - \operatorname{dim}(\operatorname{Ker} A)$$

Če je m = n, so naslednje izjave ekvivalentne:

- $\exists A^{-1}: A^{-1}A = I = A^{-1}A$
- $det(A) \neq 0$
- $\operatorname{rang} A = n$
- $Ker A = \{0\}$

Lastnosti matrike A:

$$A = A^T$$
 ... simetrična 
$$A = A^H$$
 ... hermitska 
$$A^T A = I$$
 ... ortogonalna

# LU razcep

Matriko A zapišemo kot produkt LU, kjer je L spodnje trikotna z 1 na diagonali, U pa zgornje trikotna.

Sistem enačb Ax = b potem rešujemo kot:

$$L(Ux) = b \implies Ly = b \implies Ux = y$$

## Elementarne eliminacije

Matriko A množimo z elementarnimi matrikami  $L_k$ 

$$A^{(k)} = L_{k-1} \dots L_1 A$$

$$L_k = I - l_k e_k^T \qquad L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

$$l_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \end{bmatrix}^T$$

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$L = L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$$

$$U = L_{n-1} \dots L_1 A$$

Za nesingularno matriko  $A \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  obstaja enolični LU razcep  $\iff$  vse vodilne podmatrike  $(A_k = A(1:k,1:k))$  nesingularne.

### LU razcep z delnim pivotiranjem

Preden dolčimo  $L_k$  zamenjamo k-to in  $\underset{i-k}{\operatorname{argmax}}|a_{k,i}^{(k)}|$ -to vrstico matrike  $A^k$ .

#### Občutlivost sistemov linearnih enačb

$$\kappa(A) = ||A^{-1}|| ||A||$$
 število občutlivosti

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Približno velja  $\kappa(A)=10^e \implies$  relativna napaka rešitve reda $10^{e-16}$ 

# Razcep Choleskega

Matrika A je simetrična pozitivno definitna (SPD), če je  $A = A^T$  in  $\forall x \neq 0 : x^T(Ax) > 0$ .

Lastnosti SPD matrik:

- vse vodilne podmatrike (A(1:k,1:k)) so SPD
- $A([i_1,\ldots,i_k],[i_1,\ldots,i_k])$ , kjer je 1  $\leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$  je SPD
- $\bullet \ A$  je SPD  $\iff$  vse lastne vrednosti pozitivne
- Naj bo C obrnljiva, potem je  $CAC^T$  SPD
- Če je A SPD, je  $A_{ii} > 0$  in  $\max_{i,j} |a_{ij}| = a_{kk}$

Matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , det  $A \neq 0$  je SPD  $\iff$  obstaja nesingularna spodnje trikotna matrika V s pozitivnimi diagonalnimi elementi, da je  $A = VV^T$ 

### Algoritem za razcep Cholskega

Prvi stolpec matrike V izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = v_{11} \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}$$

j-ti stolpec izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = v_{j1} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + v_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \dots + v_{jj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ v_{jj} \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_{jj} &\leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} v_{jk}^2} \\ za \ vsak \ i = j+1 \dots n : \\ v_{ij} &\leftarrow \frac{1}{v_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} v_{ik} v_{jk}\right) \end{aligned}$$

#### vrni \

# Reševanje sistemov nelinearnih enačb

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, F = (f_1, \dots, f_n)^T, x = (x_1, \dots, x_n)^T$$
 rešujemo  $F(x) = 0$ 

## Posplošitev navadne iteracije

$$F(x) = 0 \implies G(x) = x$$
  
$$x^{(r+1)} = G(x^r)$$

#### Jakobijeva matrika

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Če obstaja odprta množica  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  z lastnostmi:

$$\bullet \ x \in \Omega \implies G(x) \in \Omega$$

$$\bullet \ x \in \Omega \implies \rho(J_G(x)) \le q < 1$$

potem ima Gna  $\Omega$ natanko eno negibno točko  $\alpha,$ ki jo dobimo kot:

$$\lim_{r \to \infty} x^{(r)} \quad \text{za poljuben } x^{(0)} \in \Omega$$

## Newtnova metoda na več dimenzijah

$$G(x) = x - J_F^{-1}(x)F(x)$$

### Broydenova metoda

Spremembo  $\Delta x$  izračunamo iz enačbe:

$$B_r \Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$$

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(x)}$$

$$B_{r+1} = B_r + \frac{F(x^{(r)})(\Delta x^{(r)})^T}{(\Delta x^{(r)})^T \Delta x^{(x)}}$$

Za  $B_0$  vzamemo  $J_F(x^{(0)})$  ali pa kar I.

# Variacijske metode

Ekstremi funkcije  $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ :

Potreben pogoj za ekstrem je  $\nabla G(\alpha) = 0$ .

Karakterizacija s Hessejevo matriko:

$$H_G(\alpha) = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^n$$

- $H_G(\alpha)$  poz. definitna  $\Longrightarrow$  min
- $H_G(\alpha)$  neg. definitna  $\implies$  max
- $H_G(\alpha)$  nedefinitna  $\implies$  ni ekstrema
- $H_G(\alpha)$  semidefinitna  $\implies$  ne vemo

# Metoda za iskanje minimuma

Naj bo  $x^{(r)}$  tekoči približek za minimum.

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \lambda_r v_r$$

Izberemo tako smer spusta  $v_r$ in velikost koraka  $\lambda_r,$ da je  $G(x^{(r+1)}) < G(x^{(r)}).$ 

 $v_r = -\nabla G(x^{(r)})$  ... Metoda najhitrejšega spusta

Za določitev  $\lambda$  gledamo  $g_r(\lambda) = G(x^{(r)} + \lambda v_r)$ :

- Največji spust:  $\lambda_r$  je rešitev  $g'_r(\lambda) = 0$
- Tangentni spust:  $\lambda_r = \frac{-g_r(0)}{g_r'(0)}$ Če je  $g_r(\lambda_r) > g_r(0)$ , razpolavljamo  $\lambda_r$ , dokler ni  $g_r(\lambda_r) < g_r(0)$

# Metoda najmanjših kvadratov

$$Ax = b$$
  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $b \in \mathbb{R}^m$   $x \in \mathbb{R}^n$   $x \gg n$ 

Predpostavimo, da je A polnega ranga. Iščemo rešitev v smislu najmanjših kvadratov:

$$x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} ||Ax - b||_2$$

Geometrijsko je  $x^*$  pravokotna projekcija b na ImA:

$$Ax^* - b \perp \text{Im}A \iff \forall i: \ a_i^T (Ax^* - b) = 0$$

Rešitev lahko dobimo z **normalnim sistemom**:

$$A^T A x^* = A^T b$$

## QR razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
  $m > n$  rang $A = n$ 

Obstaja enoličen razcep A = QR

 $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  z ortonormiranimi stolpci  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zgornje trikotna s poz. diag. el.

$$\begin{aligned} & \textit{za} & \textit{vsak} \; k = 1, \dots, n; \\ & q_k \leftarrow a_k \\ & \textit{za} & \textit{vsak} \; i = 1, \dots, k-1; \\ & \textit{ce} & \textit{modificiran nacin:} \\ & & r_{ik} \leftarrow q_i^T q_k \\ & \textit{sicer:} \\ & & r_{ik} \leftarrow q_i^T a_k \\ & q_k \leftarrow q_k - r_{ik} q_i \\ & r_{kk} \leftarrow \|q_k\|_2 \\ & q_k \leftarrow \frac{q_k}{r_{t,k}} \end{aligned}$$

Normalni sistem potem lahko rešimo kot:

$$A^T A x = A^T b \implies R x = Q^T b$$

# Razširjen QR razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m > n \quad \text{rang} A = n$$

 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ortogonalna  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kvazi zgornje trikotna

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^T(Ax - b)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Rx - Q^Tb\|$$

$$\left\| \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{Q^T b} \right\|_{2}^{2} = \|\tilde{R}x - c_1\|_{2}^{2} + \| - c_2\|_{2}^{2}$$

 $x^*$  je rešitev  $\tilde{R}x = c_1$ .

## Givensove rotacije

Matriko A množimo z rotacijskimi matrikami  $R_{ik}^T$ 

$$\underbrace{R_{n,m}^T \dots R_{n,n+1}^T}_{\text{n. stolpec}} \dots \underbrace{R_{2m}^T \dots R_{23}^T}_{2. \text{ stolpec}} \underbrace{R_{1m}^T \dots R_{12}^T}_{1. \text{ stolpec}} A = R$$

$$Q = R_{12} \dots R_{n,m}$$

Naj bo  $x=(x_1,\ldots,x_m)^T$  enak stolpcu, ki ga želimo popraviti.

$$r = \sqrt{x_i^2 + x_k^2}$$
  $c = \frac{x_i}{r}$   $s = \frac{x_k}{r}$ 

Prvi c je na presečišču i. vrstice in stolpca, drugi pa na presečišču k. vrstice in stolpca.

$$R_{i,k}^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_{i,k}^T = egin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \qquad \tilde{R}_{i,k}^T egin{bmatrix} x_i \\ x_k \end{bmatrix} = egin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### Householderieva zrcalienia

$$P_n \dots P_1 A = R$$
  $Q = P_1 \dots P_n$ 

Iščemo ortogonalno matriko P, ki stolpec  $a_i$  preslika v vektor, ki ima samo prvi element neničeln.

Najprej določimo smer zrcaljenja:

$$w = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(a_{1i}) \|a_i\| + a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} P_i = I - \frac{2}{w^T w} (ww^T)$$
•  $P = P^T$ 
•  $P$  je ortogonalna
•  $w$  je lastni vektor z lastno vrednostjo  $-1$ 
Singularni razcep

$$P_i a_i = a_i - \frac{2}{w^T w} w(w^T a_i)$$

Postopek za izračun Ax = b:

- Začnemo z  $A^{(0)} := A$  in  $b^{(0)} := b$
- $\bullet$  Določimo smer zrcaljenja w glede na prvi stolpec matrike  $A^{(i)}$
- Izračunamo  $A^{(i+1)} := PA(2:,2:)$  in  $b^{(i+1)} :=$
- R dobimo tako, da matrike  $A^{(i)}$  prekrijemo tako, da maniše prepišejo večje.

- $Q^T b$  dobima tako, da vektorie  $b^{(i)}$  brekrijemo tako, da majnjši prepišejo večje.
- Rešimo  $Rx = Q^T b$ .

Lastnosti matrike P

- $\bullet$   $P = P^T$

# Singularni razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m \ge n \qquad A = U \Sigma V^T$$

 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ortogonalna  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalna  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kvazi diagonalna

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad \forall i$$

Postopek:

- $A^T A$  (simetrična pozitivno semidefinitna)
- $\bullet$  lastne vrednosti  $A^TA$  označimo tako, da je  $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$
- singularne vrednosti A zložimo na diagonalo  $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$
- $\bullet$  izračunamo lastne vektorje  $A^TA$ , jih normiramo in zložimo v  $V = [v_1 \dots v_n]$
- prvih n stolpcev U dobimo kot  $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ , ostale določimo tako, da so pravokotni na že izračunane.  $U = [u_1 \dots u_n]$

### Reševanje najmaniših kvadratov s SVD

Če je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , rang(A) = n, potem je minimum ||Ax - b|| dosežen pri

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

## Psevdoinverz

 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \ge n$ , če je rang(A) = n, je psevdoin-

$$A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$$

če je  $\operatorname{rang}(A) = m$ , pa je psevdojnyerz

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$$

Matrika X je psevdoinverz matrike A, če velja:

- $\bullet$  AXA = A
- XAX = X
- $\bullet$   $(AX)^T = AX$
- $(XA)^T = XA$

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , rang $(A) = r \leq n$  in  $A = V \Sigma U^T$ . Potem je psevdoinverz matrike A:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma^{+} = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$S = \operatorname{diag}(\sigma_{1}, \dots, \sigma_{r})$$

Reševanje najmanjših kvadratov s psevdoinverzom

$$x = A^+b$$