

Sekantna metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{\frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}}}$$

Red konvergence: $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62$

Metoda (f, f', f'')

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} - \frac{f''(x_r)f^2(x_r)}{2f'^3(x_r)}$$

Red konvergence: 3 (*pri predpostavkah*)

Müllerjeva metoda

Na $x_r, \ x_{r-1}, \ x_{r-2}$ napnemo parabolo, ničla parabole je naslednji približek.

$$p(x) = a(x - x_r)^2 + b(x - x_r) + c$$
$$x_{r+1} = x_r - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Hallejeva metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{2f(x_r)f'(x_r)}{2f'(x_r)^2 - f(x)f''(x)}$$

Iskanje ničel polinoma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Durand-Kernerjeva metoda

Naj bodo z_1, \dots, z_n približki za $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$z_i^{(r+1)} = z_i^{(r)} - \frac{p(z_i^{(r)})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z_i^{(r)} - z_k^{(r)})}$$

Metoda pridružene matrike

$$C_{p_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti (ničle $\det(C - \lambda I)$) matrike C_{p_n} so ravno ničle polinoma p_n .

Reševanje sistemov linearnih enačb

Imamo m enačb in n neznank:

- $m < n$: **nedoločen**, ∞ rešitev
- $m = n$: **kvadraten**, ponavadi 1 rešitev
- $m > n$: **predoločen**, ponavadi 0 rešitev

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im}A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Lin}\{a_1, \dots, a_n\}$$
$$\text{Ker}A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

$$\text{rang}A = n - \dim(\text{Ker}A)$$

Če je $m = n$, so naslednje izjave ekvivalentne:

- $\exists A^{-1} : A^{-1}A = I = A^{-1}A$
- $\det(A) \neq 0$

- $\text{rang}A = n$

- $\text{Ker}A = \{0\}$

Lastnosti matrike A:

$$A = A^T \quad \dots \quad \text{simetrična}$$
$$A = A^H \quad \dots \quad \text{hermitska}$$
$$A^T A = I \quad \dots \quad \text{ortogonalna}$$

Vektorske in matrične norme

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ je vektorska norma, če

- $\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \quad \dots \quad p\text{-norma}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \dots \quad \text{max norma}$$

Cauchy-Schwartzova neenakost: $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ je matrična norma, če

- $\|A\| \geq 0$ in $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ *submultiplikativnost*

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \overbrace{\left(\sum_{k=1}^m |a_{kj}| \right)}^{\|a_j\|_1}$$

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

$$\|A\|_{op} = \max_{\|c\|_v=1} \|Ax\|_v \qquad \|\cdot\|_v \text{ vekt. norma}$$

spektralni radij $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, kjer so λ lastne vrednosti matrike A .

Matrična norma $\|\cdot\|_m$ je **usklajena** z vektorsko normo $\|\cdot\|_v$, če je

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

Na končno dimenzijskih prostorih so vse norme ekvivalentne

$$\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta \implies C_1 \|A\|_\beta \leq \|A\|_\alpha \leq C_2 \|A\|_\beta$$

Za vsako operatorsko normo nad kvadratnimi matrikami velja:

$$|\lambda| \leq \|A\| \qquad \lambda \text{ lastna vrednost matrike } A$$