



Sekantna metoda

x\_{r+1} = x\_r - \frac{f(x\_r)}{\frac{f(x\_r)-f(x\_{r-1})}{x\_r-x\_{r-1}}}

Red convergence: \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62

Metoda (f, f', f'')

x\_{r+1} = x\_r - \frac{f(x\_r)}{f'(x\_r)} - \frac{f''(x\_r)f^2(x\_r)}{2f'^3(x\_r)}

Red convergence: 3 (pri predpostavkah)

Müllerjeva metoda

Na x\_r, x\_{r-1}, x\_{r-2} napnemo parabolo, ničla parabole je naslednji približek.

p(x) = a(x - x\_r)^2 + b(x - x\_r) + c
x\_{r+1} = x\_r - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}

Hallejeva metoda

x\_{r+1} = x\_r - \frac{2f(x\_r)f'(x\_r)}{2f'(x\_r)^2 - f(x)f''(x)}

Iskanje ničel polinoma

p\_n(x) = a\_n x^n + a\_{n-1} x^{n-1} + \dots + a\_0, \quad a\_n \neq 0

Durand-Kernerjeva metoda

Naj bodo z\_1, \dots, z\_n približki za \alpha\_1, \dots, \alpha\_n.

z\_i^{(r+1)} = z\_i^{(r)} - \frac{p(z\_i^{(r)})}{\prod\_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z\_i^{(r)} - z\_k^{(r)})}

Metoda pridružene matrike

C\_{p\_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a\_0}{a\_n} & -\frac{a\_1}{a\_n} & \dots & -\frac{a\_{n-2}}{a\_n} & -\frac{a\_{n-1}}{a\_n} \end{bmatrix}

Lastne vrednosti (ničle det(C - \lambda I)) matrike C\_{p\_n} so ravno ničle polinoma p\_n.

Vektorske in matrične norme

\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\_+ je vektorska norma, če

- \|x\| \ge 0 in \|x\| = 0 \iff x = 0
- \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}
- \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|

\|x\|\_p = \sqrt[p]{|x\_1|^p + \dots + |x\_n|^p} \quad \dots \quad p\text{-norma}
\|x\|\_\infty = \max\_{1 \le i \le n} |x\_i| \quad \dots \quad \max \text{ norma}

Cauchy-Schwartzova neenakost: |x^T y| \le \|x\|\_2 \|y\|\_2

\| \cdot \| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}\_+ je matrična norma, če

- \|A\| \ge 0 in \|A\| = 0 \iff A = 0
- \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \alpha \in \mathbb{R}
- \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|
- \|AB\| \le \|A\| \|B\| \quad \textit{submultiplikativnost}

\|A\|\_1 = \max\_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|\_1}{\|x\|\_1} = \max\_{1 \le j \le n} \left( \sum\_{k=1}^m \overbrace{|a\_{kj}|}^{\|a\_j\|\_1} \right)

\|A\|\_2 = \max\_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|\_2}{\|x\|\_2} = \sqrt{\rho(A^T A)}

\|A\|\_\infty = \max\_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|\_\infty}{\|x\|\_\infty} = \max\_{1 \le i \le m} \left( \sum\_{k=1}^n |a\_{ik}| \right)

\|A\|\_F = \sqrt{\sum\_{i,j} a\_{ij}^2}

\|A\|\_{op} = \max\_{\|c\|\_v=1} \|Ax\|\_v \quad \| \cdot \|\_v \textit{ vekt. norma}

spektralni radij \rho(A) = \max\{|\lambda\_1|, \dots, |\lambda\_n|\}, kjer so \lambda lastne vrednosti matrike A.

Matrična norma \| \cdot \|\_m je usklajena z vektorsko normo \| \cdot \|\_v, če je

\|Ax\|\_v \le \|A\|\_m \|x\|\_v

Na končno dimenzijskih prostorih so vse norme ekvivalentne

\| \cdot \|\_\alpha, \| \cdot \|\_\beta \implies C\_1 \|A\|\_\beta \le \|A\|\_\alpha \le C\_2 \|A\|\_\beta

Za vsako operatorsko normo nad kvadratnimi matrikami velja:

|\lambda| \le \|A\| \quad \lambda \text{ lastna vrednost matrike A}

Reševanje sistemov linearnih enačb

Imamo m enačb in n neznank:

- m < n: nedoločen, \infty rešitev
- m = n: kvadraten, ponavadi 1 rešitev
- m > n: predoločen, ponavadi 0 rešitev

Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n

\text{Im} A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Lin}\{a\_1, \dots, a\_n\}

\text{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}

\text{rang} A = n - \dim(\text{Ker} A)

Če je m = n, so naslednje izjave ekvivalentne:

- \exists A^{-1} : A^{-1} A = I = A^{-1} A
- \det(A) \neq 0
- \text{rang} A = n
- \text{Ker} A = \{0\}

Lastnosti matrike A:

A = A^T \quad \dots \quad \text{simetrična}

A = A^H \quad \dots \quad \text{hermitska}

A^T A = I \quad \dots \quad \text{ortogonalna}

LU razcep

Matriko A zapišemo kot produkt LU, kjer je L spodnje trikotna z 1 na diagonalni, U pa zgornje trikotna.

Sistem enačb Ax = b potem rešujemo kot:

L(Ux) = b \implies Ly = b \implies Ux = y

Elementarne eliminacije

Matriko A množimo z elementarnimi matrikami L\_k

A^{(k)} = L\_{k-1} \dots L\_1 A

L\_k = I - l\_k e\_k^T \quad L\_k^{-1} = I + l\_k e\_k^T

l\_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{a\_{k+1,k}}{a\_{k,k}} & \dots & \frac{a\_{n,k}}{a\_{k,k}} \end{bmatrix}^T

e\_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T

L = L\_1^{-1} \dots L\_{n-1}^{-1}

U = L\_{n-1} \dots L\_1 A

Za nesingularno matriko A \in \mathbb{R}^{n \times n} obstaja enolični LU razcep \iff vse vodilne podmatrike (A\_k = A(1 : k, 1 : k)) nesingularne.

LU razcep z delnim pivotiranjem

Preden dolčimo L\_k zamenjamo k-to in \arg\max\_{i=k \dots n} |a\_{k,i}^{(k)}| -to vrstico matrike A^k.

Občutljivost sistemov linearnih enačb

\kappa(A) = \|A^{-1}\| \|A\| \quad \text{številco občutljivosti}

(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)

\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)

Približno velja \kappa(A) = 10^e \implies relativna napaka rešitve reda 10^{e-16}

Razcep Choleskega

Matrika A je simetrična pozitivno definitna (SPD), če je A = A^T in \forall x \neq 0 : x^T(Ax) > 0.

Lastnosti SPD matrik:

- vse vodilne podmatrike (A(1 : k, 1 : k)) so SPD

- A([i\_1, \dots, i\_k], [i\_1, \dots, i\_k]), kjer je 1 \le i\_1 < \dots < i\_k \le n je SPD

- A je SPD \iff vse lastne vrednosti pozitivne

- Naj bo C obrnljiva, potem je CAC^T SPD

- Če je A SPD, je A\_{ii} > 0 in \max\_{i,j} |a\_{ij}| = a\_{kk}

Matrika A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det A \neq 0 je SPD \iff obstaja nesingularna spodnje trikotna matrika V s pozitivnimi diagonalnimi elementi, da je A = VV^T

Algoritem za razcep Cholskega

Prvi stolpec matrike  $V$  izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = v_{11} \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}$$

$j$ -ti stolpec izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = v_{j1} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + v_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + v_{jj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}$$

*vhod:* matrika  $A$  z elementi  $a_{ij}$   
*izhod:* matrika  $V$  z elementi  $v_{ij}$   
*za vsak*  $j = 1 \dots n$ :  
$$v_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}^2}$$
  
*za vsak*  $i = j + 1 \dots n$ :  
$$v_{ij} \leftarrow \frac{1}{v_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{ik} v_{jk} \right)$$
  
*vrni*  $V$

Reševanje sistemov nelinearnih enačb

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  rešujemo  $F(x) = 0$

Posplošitev navadne iteracije

$F(x) = 0 \implies G(x) = x$

$$x^{(r+1)} = G(x^r)$$

Jakobijeva matrika

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Če obstaja odprta množica  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  z lastnostmi:

- $x \in \Omega \implies G(x) \in \Omega$
- $x \in \Omega \implies \rho(J_G(x)) \leq q < 1$

potem ima  $G$  na  $\Omega$  natanko eno negibno točko  $\alpha$ , ki jo dobimo kot:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x^{(r)} \quad \text{za poljuben } x^{(0)} \in \Omega$$

Newtnova metoda na več dimenzijah

$$G(x) = x - J_F^{-1}(x)F(x)$$

Broydenova metoda

Spremembo  $\Delta x$  izračunamo iz enačbe:

$$B_r \Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$$

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(x)}$$

$$B_{r+1} = B_r + \frac{F(x^{(r)})(\Delta x^{(r)})^T}{(\Delta x^{(r)})^T \Delta x^{(x)}}$$

Za  $B_0$  vzamemo  $J_F(x^{(0)})$  ali pa kar  $I$ .

Variacijske metode

Ekstremi funkcije  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

Potreben pogoj za ekstrem je  $\nabla G(\alpha) = 0$ .

Karakterizacija s Hessejevo matriko:

$$H_G(\alpha) = \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$$

- $H_G(\alpha)$  poz. definitna  $\implies$  min
- $H_G(\alpha)$  neg. definitna  $\implies$  max
- $H_G(\alpha)$  nedefinitna  $\implies$  ni ekstrema
- $H_G(\alpha)$  semidefinitna  $\implies$  ne vemo

Metoda za iskanje minimuma

Naj bo  $x^{(r)}$  tekoči približek za minimum.

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \lambda_r v_r$$

Izberemo tako smer spusta  $v_r$  in velikost koraka  $\lambda_r$ , da je  $G(x^{(r+1)}) < G(x^{(r)})$ .

$v_r = -\nabla G(x^{(r)})$  ... Metoda najhitrejšega spusta

Za določitev  $\lambda$  gledamo  $g_r(\lambda) = G(x^{(r)} + \lambda v_r)$ :

- Največji spust:*  $\lambda_r$  je rešitev  $g'_r(\lambda) = 0$

- Tangentni spust:*  $\lambda_r = \frac{-g_r(0)}{g'_r(0)}$   
Če je  $g_r(\lambda_r) > g_r(0)$ , razpolavljamo  $\lambda_r$ , dokler ni  $g_r(\lambda_r) < g_r(0)$

Metoda najmanjših kvadratov

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x \gg n$$

Predpostavimo, da je  $A$  polnega ranga. Iščemo rešitev v smislu najmanjših kvadratov:

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

Geometrijsko je  $x^*$  pravokotna projekcija  $b$  na  $\operatorname{Im} A$ :

$$Ax^* - b \perp \operatorname{Im} A \iff \forall i : a_i^T (Ax^* - b) = 0$$

Rešitev lahko dobimo z **normalnim sistemom**:

$$A^T Ax^* = A^T b$$

QR razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m > n \quad \operatorname{rang} A = n$$

Obstaja enoličen razcep  $A = QR$

$Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$  z ortonormiranimi stolpci

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zgornje trikotna s poz. diag. el.

*za vsak*  $k = 1, \dots, n$ :  
 $q_k \leftarrow a_k$   
*za vsak*  $i = 1, \dots, k-1$ :  
ce modificiran nacin:  
 $r_{ik} \leftarrow q_i^T q_k$   
sicer :  
 $r_{ik} \leftarrow q_i^T a_k$   
 $q_k \leftarrow q_k - r_{ik} q_i$   
 $r_{kk} \leftarrow \|q_k\|_2$   
 $q_k \leftarrow \frac{q_k}{r_{kk}}$

Normalni sistem potem lahko rešimo kot:

$$A^T Ax = A^T b \implies Rx = Q^T b$$

Razširjen QR razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m > n \quad \operatorname{rang} A = n$$

$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ortogonalna

$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kvazi zgornje trikotna

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^T(Ax - b)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Rx - Q^T b\|$$

$$\left\| \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{R}} \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{Q^T b} \right\|_2^2 = \|\tilde{R}x - c_1\|_2^2 + \| - c_2 \|_2^2$$

$x^*$  je rešitev  $\tilde{R}x = c_1$ .

Givensove rotacije

Matriko  $A$  množimo z rotacijskimi matrikami  $R_{ik}^T$

$$\underbrace{R_{n,m}^T \cdots R_{n,n+1}^T}_{\text{n. stolpec}} \cdots \underbrace{R_{2m}^T \cdots R_{23}^T}_{\text{2. stolpec}} \underbrace{R_{1m}^T \cdots R_{12}^T}_{\text{1. stolpec}} A = R$$

$$Q = R_{12} \dots R_{n,m}$$

Naj bo  $x = (x_1, \dots, x_m)^T$  enak stolpcu, ki ga želimo popraviti.

$$r = \sqrt{x_i^2 + x_k^2} \quad c = \frac{x_i}{r} \quad s = \frac{x_k}{r}$$

Prvi  $c$  je na presečišču  $i$ . vrstice in stolpca, drugi pa na presečišču  $k$ . vrstice in stolpca.

$$R_{i,k}^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_{i,k}^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad \tilde{R}_{i,k}^T \begin{bmatrix} x_i \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Householderjeva zrcaljenja**

$$P_n \dots P_1 A = R \qquad Q = P_1 \dots P_n$$

Iščemo ortogonalno matriko  $P$ , ki stolpec  $a_i$  preslika v vektor, ki ima samo prvi element neničeln.

Najprej določimo smer zrcaljenja:

$$w = \begin{bmatrix} \text{sign}(a_{1i})\|a_i\| + a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \qquad P_i = I - \frac{2}{w^T w} (w w^T)$$

$$P_i a_i = a_i - \frac{2}{w^T w} w (w^T a_i)$$

Postopek za izračun  $Ax = b$ :

- Začnemo z  $A^{(0)} := A$  in  $b^{(0)} := b$
- Določimo smer zrcaljenja  $w$  glede na prvi stolpec matrike  $A^{(i)}$
- Izračunamo  $A^{(i+1)} := PA(2:,2:)$  in  $b^{(i+1)} := Pb(2:)$
- $R$  dobimo tako, da matrike  $A^{(i)}$  prekrijemo tako, da manjše prepišejo večje.
- $Q^T b$  dobima tako, da vektorje  $b^{(i)}$  brekrijemo tako, da manjši prepišejo večje.
- Rešimo  $Rx = Q^T b$ .

Lastnosti matrike  $P$

- $P = P^T$
- $P$  je ortogonalna
- $w$  je lastni vektor z lastno vrednostjo  $-1$

**Singularni razcep**

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m \geq n \qquad A = U \Sigma V^T$$

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ortogonalna
- $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalna
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kvazi diagonalna

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad \forall i$$

Postopek:

- $A^T A$  (simetrična pozitivno semidefinitna)
- lastne vrednosti  $A^T A$  označimo tako, da je  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
- singularne vrednosti  $A$  zložimo na diagonalo  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
- izračunamo lastne vektorje  $A^T A$ , jih normiramo in zložimo v  $V = [v_1 \dots v_n]$

- prvih  $n$  stolpcev  $U$  dobimo kot  $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ , ostale določimo tako, da so pravokotni na že izračunane.  $U = [u_1 \dots u_n]$

**Reševanje najmanjših kvadratov s SVD**

Če je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = n$ , potem je minimum  $\|Ax - b\|$  dosežen pri

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

**Psevdoinverz**

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ , če je  $\text{rang}(A) = n$ , je psevdoinverz:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

če je  $\text{rang}(A) = m$ , pa je psevdoinverz

$$A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$$

Matrika  $X$  je psevdoinverz matrike  $A$ , če velja:

- $A X A = A$
- $X A X = X$
- $(A X)^T = A X$
- $(X A)^T = X A$

Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ ,  $\text{rang}(A) = r \leq n$  in  $A = U \Sigma V^T$ . Potem je psevdoinverz matrike  $A$ :

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

**Reševanje najmanjših kvadratov s psevdoinverzom**

$$x = A^+ b$$

**Gram-Schmidtova ortogonalizacija**

Definirajmo projekcijo vektorja  $v$  na  $u$

$$\text{proj}_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

Če želimo *orotogonalizirati*  $k$  linearno neodvisnih vektorjev  $v_1, \dots, v_k$ , uporabimo postopek:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}(v_2) \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}(v_3) - \text{proj}_{u_2}(v_3) \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \text{proj}_{u_j}(v_k) \end{aligned}$$