

Sekantna metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{\frac{f(x_r)-f(x_{r-1})}{x_r-x_{r-1}}}$$

Red convergence: $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62$

Metoda (f, f', f'')

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} - \frac{f''(x_r)f^2(x_r)}{2f'^3(x_r)}$$

Red convergence: 3 *(pri predpostavkah)*

Müllerjeva metoda

Na x_r, x_{r-1}, x_{r-2} napnemo parabolo, ničla parabole je naslednji približek.

$$p(x) = a(x - x_r)^2 + b(x - x_r) + c$$
$$x_{r+1} = x_r - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Hallejeva metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{2f(x_r)f'(x_r)}{2f'(x_r)^2 - f(x)f''(x)}$$

Iskanje ničel polinoma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Durand-Kernerjeva metoda

Naj bodo z_1, \dots, z_n približki za $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$z_i^{(r+1)} = z_i^{(r)} - \frac{p(z_i^{(r)})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z_i^{(r)} - z_k^{(r)})}$$

Metoda pridružene matrike

$$C_{p_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti (ničle $\det(C - \lambda I)$) matrike C_{p_n} so ravno ničle polinoma p_n .

Vektorske in matrične norme

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ je vektorska norma, če

- $\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \quad \dots \quad p\text{-norma}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \dots \quad \text{max norma}$$

Cauchy-Schwartzova neenakost: $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ je matrična norma, če

- $\|A\| \geq 0$ in $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ *submultiplikativnost*

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{k=1}^m \overbrace{|a_{kj}|}^{\|a_j\|_1} \right)$$

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

$$\|A\|_{op} = \max_{\|c\|_v=1} \|Ax\|_v \quad \|\cdot\|_v \text{ vekt. norma}$$

spektralni radij $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, kjer so λ lastne vrednosti matrike A .

Matrična norma $\|\cdot\|_m$ je **usklajena** z vektorsko normo $\|\cdot\|_v$, če je

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

Na končno dimenzijskih prostorih so vse norme ekvivalentne

$$\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta \implies C_1 \|A\|_\beta \leq \|A\|_\alpha \leq C_2 \|A\|_\beta$$

Za vsako operatorsko normo nad kvadratnimi matrikami velja:

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad \lambda \text{ lastna vrednost matrike } A$$

Reševanje sistemov linearnih enačb

Imamo m enačb in n neznank:

- $m < n$: **nedoločen**, ∞ rešitev
- $m = n$: **kvadraten**, ponavadi 1 rešitev
- $m > n$: **predoločen**, ponavadi 0 rešitev

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im} A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Lin}\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\text{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

$$\text{rang} A = n - \dim(\text{Ker} A)$$

Če je $m = n$, so naslednje izjave ekvivalentne:

- $\exists A^{-1} : A^{-1} A = I = A^{-1} A$
- $\det(A) \neq 0$
- $\text{rang} A = n$
- $\text{Ker} A = \{0\}$

Lastnosti matrike A :

$$A = A^T \quad \dots \quad \text{simetrična}$$

$$A = A^H \quad \dots \quad \text{hermitska}$$

$$A^T A = I \quad \dots \quad \text{ortogonalna}$$

LU razcep

Matriko A zapišemo kot produkt LU , kjer je L spodnje trikotna z 1 na diagonalni, U pa zgornje trikotna.

Sistem enačb $Ax = b$ potem rešujemo kot:

$$L(Ux) = b \implies Ly = b \implies Ux = y$$

Elementarne eliminacije

Matriko A množimo z elementarnimi matrikami L_k

$$A^{(k)} = L_{k-1} \dots L_1 A$$

$$L_k = I - l_k e_k^T \quad L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

$$l_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \end{bmatrix}^T$$

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$L = L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$$

$$U = L_{n-1} \dots L_1 A$$

Za nesingularno matriko $A \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ obstaja enolični LU razcep \iff vse vodilne podmatrike ($A_k = A(1 : k, 1 : k)$) nesingularne.

LU razcep z delnim pivotiranjem

Preden dolčimo L_k zamenjamo k -to in $\text{argmax}_{i=k \dots n} |a_{k,i}^{(k)}|$ -to vrstico matrike A^k .

Občutljivost sistemov linearnih enačb

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \|A\| \quad \text{številco občutljivosti}$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Približno velja $\kappa(A) = 10^e \implies$ relativna napaka rešitve reda 10^{e-16}

Razcep Choleskega

Matrika A je **simetrična pozitivno definitna** (SPD), če je $A = A^T$ in $\forall x \neq 0 : x^T(Ax) > 0$.

Lastnosti SPD matrik:

- vse vodilne podmatrike ($A(1 : k, 1 : k)$) so SPD

- $A([i_1, \dots, i_k], [i_1, \dots, i_k])$, kjer je $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ je SPD

- A je SPD \iff vse lastne vrednosti pozitivne

- Naj bo C obrnljiva, potem je CAC^T SPD

- Če je A SPD, je $A_{ii} > 0$ in $\max_{i,j} |a_{ij}| = a_{kk}$

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det A \neq 0$ je SPD \iff obstaja nesingularna spodnje trikotna matrika V s pozitivnimi diagonalnimi elementi, da je $A = VV^T$

Algoritem za razcep Cholskega

Prvi stolpec matrike V izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = v_{11} \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}$$

j -ti stolpec izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = v_{j1} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + v_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + v_{jj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}$$

vhod: matrika A z elementi a_{ij}
izhod: matrika V z elementi v_{ij}
za vsak $j = 1 \dots n$:

$$v_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}^2}$$
za vsak $i = j + 1 \dots n$:

$$v_{ij} \leftarrow \frac{1}{v_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{ik} v_{jk} \right)$$
vrni V

Reševanje sistemov nelinearnih enačb

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ rešujemo $F(x) = 0$

Posplošitev navadne iteracije

$$F(x) = 0 \implies G(x) = x$$

$$x^{(r+1)} = G(x^r)$$

Jakobijeva matrika

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Če obstaja odprta množica $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z lastnostmi:

- $x \in \Omega \implies G(x) \in \Omega$
- $x \in \Omega \implies \rho(J_G(x)) \leq q < 1$

potem ima G na Ω natanko eno negibno točko α , ki jo dobimo kot:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x^{(r)} \quad \text{za poljuben } x^{(0)} \in \Omega$$

Newtnova metoda na več dimenzijah

$$G(x) = x - J_F^{-1}(x)F(x)$$

Broydenova metoda

Spremembo Δx izračunamo iz enačbe:

$$B_r \Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$$

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(x)}$$

$$B_{r+1} = B_r + \frac{F(x^{(r)})(\Delta x^{(r)})^T}{(\Delta x^{(r)})^T \Delta x^{(x)}}$$

Za B_0 vzamemo $J_F(x^{(0)})$ ali pa kar I .