

Sekantna metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{\frac{f(x_r)-f(x_{r-1})}{x_r-x_{r-1}}}$$

Red convergence: $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.62$

Metoda (f, f', f'')

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)} - \frac{f''(x_r)f^2(x_r)}{2f'^3(x_r)}$$

Red convergence: 3 (pri predpostavkah)

Müllerjeva metoda

Na x_r, x_{r-1}, x_{r-2} napnemo parabolo, ničla parabole je naslednji približek.

$$p(x) = a(x - x_r)^2 + b(x - x_r) + c$$
$$x_{r+1} = x_r - \frac{2c}{b + \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Hallejeva metoda

$$x_{r+1} = x_r - \frac{2f(x_r)f'(x_r)}{2f'(x_r)^2 - f(x)f''(x)}$$

Iskanje ničel polinoma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Durand-Kernerjeva metoda

Naj bodo z_1, \dots, z_n približki za $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$z_i^{(r+1)} = z_i^{(r)} - \frac{p(z_i^{(r)})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (z_i^{(r)} - z_k^{(r)})}$$

Metoda pridružene matrike

$$C_{p_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

Lastne vrednosti (ničle $\det(C - \lambda I)$) matrike C_{p_n} so ravno ničle polinoma p_n .

Vektorske in matrične norme

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ je vektorska norma, če

- $\|x\| \geq 0$ in $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p} \quad \dots \quad p\text{-norma}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \dots \quad \text{max norma}$$

Cauchy-Schwartzova neenakost: $|x^T y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ je matrična norma, če

- $\|A\| \geq 0$ in $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ *submultiplikativnost*

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{k=1}^m \overbrace{|a_{kj}|}^{\|a_j\|_1} \right)$$

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

$$\|A\|_{op} = \max_{\|c\|_v=1} \|Ax\|_v \quad \|\cdot\|_v \text{ vekt. norma}$$

spektralni radij $\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$, kjer so λ lastne vrednosti matrike A .

Matrična norma $\|\cdot\|_m$ je **usklajena** z vektorsko normo $\|\cdot\|_v$, če je

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|_m \|x\|_v$$

Na končno dimenzijskih prostorih so vse norme ekvivalentne

$$\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\beta \implies C_1 \|A\|_\beta \leq \|A\|_\alpha \leq C_2 \|A\|_\beta$$

Za vsako operatorsko normo nad kvadratnimi matrikami velja:

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad \lambda \text{ lastna vrednost matrike } A$$

Reševanje sistemov linearnih enačb

Imamo m enačb in n neznank:

- $m < n$: **nedoločen**, ∞ rešitev
- $m = n$: **kvadraten**, ponavadi 1 rešitev
- $m > n$: **predoločen**, ponavadi 0 rešitev

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im} A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \text{Lin}\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$\text{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

$$\text{rang} A = n - \dim(\text{Ker} A)$$

Če je $m = n$, so naslednje izjave ekvivalentne:

- $\exists A^{-1} : A^{-1} A = I = A^{-1} A$
- $\det(A) \neq 0$
- $\text{rang} A = n$
- $\text{Ker} A = \{0\}$

Lastnosti matrike A :

$$A = A^T \quad \dots \quad \text{simetrična}$$
$$A = A^H \quad \dots \quad \text{hermitska}$$
$$A^T A = I \quad \dots \quad \text{ortogonalna}$$

LU razcep

Matriko A zapišemo kot produkt LU , kjer je L spodnje trikotna z 1 na diagonalni, U pa zgornje trikotna.

Sistem enačb $Ax = b$ potem rešujemo kot:

$$L(Ux) = b \implies Ly = b \implies Ux = y$$

Elementarne eliminacije

Matriko A množimo z elementarnimi matrikami L_k

$$A^{(k)} = L_{k-1} \dots L_1 A$$

$$L_k = I - l_k e_k^T \quad L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$$

$$l_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{a_{k+1,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & \dots & \frac{a_{n,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \end{bmatrix}^T$$

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$L = L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$$

$$U = L_{n-1} \dots L_1 A$$

Za nesingularno matriko $A \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ obstaja enolični LU razcep \iff vse vodilne podmatrike ($A_k = A(1 : k, 1 : k)$) nesingularne.

LU razcep z delnim pivotiranjem

Preden dolčimo L_k zamenjamo k -to in $\text{argmax}_{i=k \dots n} |a_{k,i}^{(k)}|$ -to vrstico matrike A^k .

Občutljivost sistemov linearnih enačb

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \|A\| \quad \text{številco občutljivosti}$$

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = (b + \delta b)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Približno velja $\kappa(A) = 10^e \implies$ relativna napaka rešitve reda 10^{e-16}

Razcep Choleskega

Matrika A je **simetrična pozitivno definitna** (SPD), če je $A = A^T$ in $\forall x \neq 0 : x^T(Ax) > 0$.

Lastnosti SPD matrik:

- vse vodilne podmatrike ($A(1 : k, 1 : k)$) so SPD
- $A([i_1, \dots, i_k], [i_1, \dots, i_k])$, kjer je $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ je SPD
- A je SPD \iff vse lastne vrednosti pozitivne
- Naj bo C obrnljiva, potem je CAC^T SPD
- Če je A SPD, je $A_{ii} > 0$ in $\max_{i,j} |a_{ij}| = a_{kk}$

Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det A \neq 0$ je SPD \iff obstaja nesingularna spodnje trikotna matrika V s pozitivnimi diagonalnimi elementi, da je $A = VV^T$

Algoritem za razcep Cholskega

Prvi stolpec matrike V izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = v_{11} \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}$$

j -ti stolpec izračunamo:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = v_{j1} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + v_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ v_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + v_{jj} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{nj} \end{bmatrix}$$

vhod: matrika A z elementi a_{ij}

izhod: matrika V z elementi v_{ij}

za vsak $j = 1 \dots n$:

$$v_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{jk}^2}$$

za vsak $i = j + 1 \dots n$:

$$v_{ij} \leftarrow \frac{1}{v_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} v_{ik} v_{jk} \right)$$

vrni V

Reševanje sistemov nelinearnih enačb

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ rešujemo $F(x) = 0$

Posplošitev navadne iteracije

$F(x) = 0 \implies G(x) = x$

$$x^{(r+1)} = G(x^r)$$

Jakobijeva matrika

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Če obstaja odprta množica $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z lastnostmi:

- $x \in \Omega \implies G(x) \in \Omega$
- $x \in \Omega \implies \rho(J_G(x)) \leq q < 1$

potem ima G na Ω natanko eno negibno točko α , ki jo dobimo kot:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x^{(r)} \quad \text{za poljuben } x^{(0)} \in \Omega$$

Newtnova metoda na več dimenzijah

$$G(x) = x - J_F^{-1}(x)F(x)$$

Broydenova metoda

Spremembo Δx izračunamo iz enačbe:

$$B_r \Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$$

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(x)}$$

$$B_{r+1} = B_r + \frac{F(x^{(r)})(\Delta x^{(r)})^T}{(\Delta x^{(r)})^T \Delta x^{(x)}}$$

Za B_0 vzamemo $J_F(x^{(0)})$ ali pa kar I .

Variacijske metode

Ekstremi funkcije $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

Potreben pogoj za ekstrem je $\nabla G(\alpha) = 0$.

Karakterizacija s Hessejevo matriko:

$$H_G(\alpha) = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$$

- $H_G(\alpha)$ poz. definitna \implies min
- $H_G(\alpha)$ neg. definitna \implies max
- $H_G(\alpha)$ nedefinitna \implies ni ekstrema
- $H_G(\alpha)$ semidefinitna \implies ne vemo

Metoda za iskanje minimuma

Naj bo $x^{(r)}$ tekoči približek za minimum.

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \lambda_r v_r$$

Izberemo tako smer spusta v_r in velikost koraka λ_r , da je $G(x^{(r+1)}) < G(x^{(r)})$.

$v_r = -\nabla G(x^{(r)})$... Metoda najhitrejšega spusta

Za določitev λ gledamo $g_r(\lambda) = G(x^{(r)} + \lambda v_r)$:

- Največji spust*: λ_r je rešitev $g'_r(\lambda) = 0$

- Tangentni spust*: $\lambda_r = \frac{-g_r(0)}{g'_r(0)}$
Če je $g_r(\lambda_r) > g_r(0)$, razpolavljamo λ_r , dokler ni $g_r(\lambda_r) < g_r(0)$

Metoda najmanjših kvadratov

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x \gg n$$

Predpostavimo, da je A polnega ranga. Iščemo rešitev v smislu najmanjših kvadratov:

$$x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

Geometrijsko je x^* pravokotna projekcija b na $\operatorname{Im} A$:

$$Ax^* - b \perp \operatorname{Im} A \iff \forall i : a_i^T (Ax^* - b) = 0$$

Rešitev lahko dobimo z **normalnim sistemom**:

$$A^T A x^* = A^T b$$

QR razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m > n \quad \operatorname{rang} A = n$$

Obstaja enoličen razcep $A = QR$

$Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ z ortonormiranimi stolpci

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornje trikotna s poz. diag. el.

za vsak $k = 1, \dots, n$:

$q_k \leftarrow a_k$
za vsak $i = 1, \dots, k-1$:

ce modificiran nacin:

$$r_{ik} \leftarrow q_i^T q_k$$

sicer :

$$r_{ik} \leftarrow q_i^T a_k$$

$$q_k \leftarrow q_k - r_{ik} q_i$$

$$r_{kk} \leftarrow \|q_k\|_2$$

$$q_k \leftarrow \frac{q_k}{r_{kk}}$$

Normalni sistem potem lahko rešimo kot:

$$A^T A x = A^T b \implies R x = Q^T b$$

Razširjen QR razcep

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m > n \quad \operatorname{rang} A = n$$

$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalna

$R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kvazi zgornje trikotna

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^T(Ax - b)\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Rx - Q^T b\|$$

$$\left\| \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{R}} \begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{Q^T b} \right\|_2^2 = \|\tilde{R}x - c_1\|_2^2 + \| -c_2 \|_2^2$$

x^* je rešitev $\tilde{R}x = c_1$.

Givensove rotacije

Matriko A množimo z rotacijskimi matrikami R_{ik}^T

$$\underbrace{R_{n,m}^T \cdots R_{n,n+1}^T}_{\text{n. stolpec}} \cdots \underbrace{R_{2m}^T \cdots R_{23}^T}_{\text{2. stolpec}} \underbrace{R_{1m}^T \cdots R_{12}^T}_{\text{1. stolpec}} A = R$$

$$Q = R_{12} \dots R_{n,m}$$

Naj bo $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ enak stolpcu, ki ga želimo popraviti.

$$r = \sqrt{x_i^2 + x_k^2} \quad c = \frac{x_i}{r} \quad s = \frac{x_k}{r}$$

Prvi c je na presečišču i . vrstice in stolpca, drugi pa na presečišču k . vrstice in stolpca.

$$R_{i,k}^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}_{i,k}^T = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \quad \tilde{R}_{i,k}^T \begin{bmatrix} x_i \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$$

Householderjeva zrcaljenja

$P_n \dots P_1 A = R \qquad Q = P_1 \dots P_n$

Iščemo ortogonalno matriko P , ki stolpec a_i preslika v vektor, ki ima samo prvi element neničeln.

Najprej določimo smer zrcaljenja:

$$w = \begin{bmatrix} \text{sign}(a_{1i})\|a_i\| + a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \qquad P_i = I - \frac{2}{w^T w} (w w^T)$$

$$P_i a_i = a_i - \frac{2}{w^T w} w (w^T a_i)$$

Postopek za izračun $Ax = b$:

- Začnemo z $A^{(0)} := A$ in $b^{(0)} := b$
- Določimo smer zrcaljenja w glede na prvi stolpec matrike $A^{(i)}$
- Izračunamo $A^{(i+1)} := PA(2:,2:)$ in $b^{(i+1)} := Pb(2:)$
- R dobimo tako, da matrike $A^{(i)}$ prekrijemo tako, da manjše prepisejo večje.

- $Q^T b$ dobima tako, da vektorje $b^{(i)}$ brekrijemo tako, da manjši prepisejo večje.
- Rešimo $Rx = Q^T b$.

Lastnosti matrike P

- $P = P^T$
- P je ortogonalna
- w je lastni vektor z lastno vrednostjo -1

Singularni razcep

$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad m \geq n \qquad A = U \Sigma V^T$

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalna
- $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalna
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kvazi diagonalna

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \quad \forall i$$

Postopek:

- $A^T A$ (simetrična pozitivno semidefinitna)
- lastne vrednosti $A^T A$ označimo tako, da je $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$
- singularne vrednosti A zložimo na diagonalo $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$
- izračunamo lastne vektorje $A^T A$, jih normiramo in zložimo v $V = [v_1 \dots v_n]$
- prvih n stolpcev U dobimo kot $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, ostale določimo tako, da so pravokotni na že izračunane. $U = [u_1 \dots u_n]$

Reševanje najmanjših kvadratov s SVD

Če je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) = n$, potem je minimum $\|Ax - b\|$ dosežen pri

$$x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i$$

Psevdoinverz

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, če je $\text{rang}(A) = n$, je psevdoinverz:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

če je $\text{rang}(A) = m$, pa je psevdoinverz

$$A^+ = A^T (A A^T)^{-1}$$

Matrika X je psevdoinverz matrike A , če velja:

- $A X A = A$
- $X A X = X$
- $(A X)^T = A X$
- $(X A)^T = X A$

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, $\text{rang}(A) = r \leq n$ in $A = V \Sigma U^T$. Potem je psevdoinverz matrike A :

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

Reševanje najmanjših kvadratov s psevdoinverzom

$$x = A^+ b$$