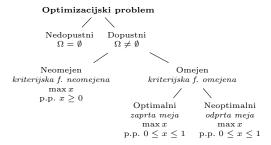
## Optimizacijske naloge

Optimizacijska naloga je  $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf, )$  kjer je:

- Ω množica dopustnih rešitev
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$  kriterijska funkcija

 $x^* \in \Omega$  je optimalna rešitev problema  $(\Omega, f, \max)$ , če velja

$$\forall x \in \Omega : f(x) \le f(x^*)$$



## Linearno programiranje

 $(\Omega, f, \min/\max)$  je linearni porgram, če je  $\Omega$  podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi ( $\leq$ ,  $\geq$ ) in je flinearna

## Standardna oblika linearnega pograma

Linearni porgram je v standardni obliki, če iščemo max in so vsi pogoji neenakosti ≤ in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{array}{lll} \max & c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ \text{p.p.} & a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \dots c_n]^T$$
  $b = [b_1 \dots b_m]^T$   $x = [x_1 \dots x_n]^T$ 

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{max} \quad c^T x \\ \text{p.p.} \quad Ax \le b \\ x \ge 0$$

Vsak linearen program lahko zapišemo v standardni obliki. Vse dele linearnega programa lahko preoblikujemo tako. da bodo v standardni obliki:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \leadsto \max(-f(x)) \\ & f(x) \geq b \leadsto -f(x) \leq -b \\ & f(x) = b \leadsto f(x) \leq b \land f(x) \geq b \\ & x_i \leq 0 \leadsto x_i = -x_i' \\ & x_i \gtrless 0 \leadsto x_i = x_i' - x_i'' \land x_i', x_i'' \geq 0 \end{aligned}$$

#### Konveksne množice

Množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je konveksna, če velja:

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Daljica med poljibnima točkama iz A mora biti vsebovana v

Množica ni konveksna, če

$$\exists x, y \in A \ \exists \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)x + \lambda y \notin A$$

#### Afina kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$
  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ 

#### Konveksna kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \qquad \alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0$$

Afin podprostor ( = zaprt za afine kokmbinacije = premaknjen linearen prostor) je konveksen

Presek konveksnih množic  $A_i, \forall i \in I$  je konveksen. Unija koknveksnih množic pa ni nujno konveksna.

## Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne porgrame z dvema spremenljivkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradienta proti točki, ki je v preseku polporostorov pogojev in čim dlie od izhodišča.

#### Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak  $b_i < 0$ , moramo uporabiti dvofazno simpleksno metodo, sicer nadaljujemo.

Linearni porgram zapišemo v prvi slovar.

1. slovar
$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_{n+m} = b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n$$

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

Vse spremenljivke  $x_1, \ldots, x_{n+m}$  so nenegativne. Spremenljivke na levi so bazne, na desni pa nebazne.

$$x_1,\dots,x_n$$
 ... **prvotne** spremenljivke 
$$x_{n+1},\dots,x_{n+m}$$
 ... **dopolnilne** spremenljivke

Slovar je dopusten, če so vse konstante (čelni brez x) na desni nenegativne.

Če je slovar dopusten, ima bazno dopustno rešitev: vse nebazne spremenljivke so 0 in kriterijska funkcija je tedaj

- Določimo:
  - vstopno spremenljivko: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
  - pivotno vrstico: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem neomejen in končamo.
  - izstopno spremenljivko: bazna spremenljivka v pivotni vrestici
- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenlijivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenlijvka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadnjega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkiciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko spreminjamo glede na omejitve.

#### Dvofazna simpleksna metoda

Če je  $b \not\ge 0$ , uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

#### Prva faza

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti b<sub>i</sub> prištejemo  $x_0$ . Kriterijsko funkcijo pa spremenimo v  $\max -x_0$ 

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n$$

$$w = -x_0$$

Za vstopno spremenljivko izberemo  $x_0$  za pivotno vrstico pa tisto v kateri je  $b_i$  najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo:  $x_0$  ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če w\* < 0, prvotni problem ni dopusten, sicer nadlajujemo z drugo fazo.

#### Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izbrišemo  $x_0$  in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

## Dualnost pri linearnem programiranju

Vsak linearni program P ima dualno obliko P':

### Šibki izrek o dualnosti - ŠID

x dopustna rešitev za P, y dopustna rešitev za  $P' \implies$ 

$$c^T x \leq b^T y$$

xdopustna za  $P,\,y$ dopustna za P' in  $c^Tx=b^Ty\implies$ x optimalna rešitev P, y optimalna rešitev P'

#### Krepki izrek o dualnosti - KID

 $x^*$  optimalna rešitev  $P \implies$ 

optimalna rešitev
$$\boldsymbol{P}'$$
 in  $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*$ 

Linearni program in njegov dual sta lahko:

	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	//KID
neomejen	✓	// <sub>ŠID</sub>	// <sub>ŠID, KID</sub>
optimalen	// <sub>KID</sub>	// <sub>ŠID, KID</sub>	✓

### Dualno dopolnievanie

Naj bo x dopustna za P in y dopustna za P' tedaj je: x optimalna za P in u optimalna za P'  $\iff$ 

$$\forall i = 1, ..., m : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ ali } y_i = 0$$

$$\forall j=1,\ldots,n:$$
  $x_j=0$  all  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i=c$ 

Ekvivalentno: x optimalna za P, v optimalna za  $P' \Leftrightarrow$ 

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i$$
 in

$$x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j$$

#### Uporaba izreka o dualnem dopolnjevanju

Želimo dokazati, da je  $x^*$  optimalna rešitev linearnega programa P.

- 1. Preverimo, da je  $x^*$  dopustna rešitev.
- Če je kakšna neenakost pri pogojih P izpolnjena s strogo neenakostjo, je pripadajoča dualna spremenljivka  $y_i^* = 0$ .
- 3. Če je kaka  $x_i^* > 0$ , je pripadajoča dualna neenakost v p' izpolniena z enakostio:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j$$

- 4. Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri y iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešljiv, x\* ni optimalna).
- 5. Preverimo ali ie dobliena rešitev  $u^*$  dopustna. Če je, sta  $x^*$  in  $y^*$  optimalni.

### Dual splošnega problema

Splošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoji postavljeni z < lahko pa tudi z =. Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z  $x_i > 0$ .

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \leq b_i & \forall i=1,\ldots,m' \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i = b_i & \forall i=m'+1,\ldots,m \\ & x_i \geq 0 & \forall i=1,\ldots,n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_{i} y_{i} \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{i} \leq c_{j} & \forall j = 1, \dots, n' \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{i} = c_{j} & \forall j = n'+1, \dots, n \\ y_{i} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m' \end{array}$$

enakost  $\stackrel{\text{dual}}{\longleftrightarrow}$  poljubna spremenljivka

neenakost  $\stackrel{\text{dual}}{\longleftrightarrow}$  nenegativna spremenljivka

## Dualno dopolnievanie splošnega problema

- x dopustna za P
- y dopustna za P'
- x optimalna za P in y optimalna za  $P' \Leftrightarrow$

$$\forall i=1,\ldots,m: \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0 \qquad \qquad \forall i=1,\ldots,m': \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$
 
$$\forall j=1,\ldots,n: \qquad \qquad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \qquad \qquad \forall j=1,\ldots,n': \qquad \qquad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$$

$$\forall j=1,\ldots,n':$$
  $x_j=0$  ali  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i=0$ 

#### Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Naj bo P linearni program,  $\exists$  neizrojena optimalna rešitev (v zadnjem slovarju so vse konstante > 0). Potem  $\exists \varepsilon > 0$ , da velja

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_i^* \Delta b_i$$

kjer je  $y^*$ optimalna rešitev duala,  $\Delta z^*$ sprememba optimalne vrednosti,  $\Delta b_i$  pa sprememba dense strani pogojev in  $|\Delta b_i|<\varepsilon.$ 

Torej če desni strani pogojev v P prištejemo dovolj majhen  $\Delta b$ , se optimalna vrednost  $z^*$  programa P spremeni za  $\Delta z^* = \Delta b^T y^*$ .

y\*nam tedaj da "tržno ceno" dobrin. Če želimo povečati dobrino  $b_i$ , se nam dobiček poveča za  $b_iy_i^*$ . Torej za enoto dobrine ine smemo plačati več kot $y_i^*$ .

## Matrične igre

Igro igrata 2 igralca. Prvi ima n, drugi pa m strategij.

**Plačilna matrika** A ima n vrstici in m stoplcev. Celica v i. vrstici in j, stolpcu predstavlja znesek, ki ga drugi plača prvemu, če prvi izbere strategijo i, drugi pa j. (Če je vrednost negativna, privi plača drugemu.)

Igralca igrata po principu najmanjšega tveganja: izbereta strategijo pri kateri v najslabšem primeru izgubita čim manj.

$$\begin{array}{ll} 1. \ {\rm igralec:} & \max_i \min_j a_{ij} =: M_1 \\ \\ 2. \ {\rm igralec:} & \min\max_i a_{ij} =: M_2 \end{array}$$

$$M_1 \leq M_2$$

 $(i_0,j_0)$  je **sedlo** plačilne matrike A, če je  $a_{i_0j_0}$  najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

$$A \text{ ima sedlo} \iff M_1 = M_2 = a_{i_0 j_0}$$

Če ima A sedlo, je  $i_0$  optimalna strategija za prvega,  $j_0$  pa za drugega igralca. V tem primeru je  $(i_0,j_0)$  Nashevo ravnovesje in nobenemu igralcu se ne splača spremeniti strategije.

#### Mešana strategija

Igralca svoje strategije izbirata nakjučno z verjetnostjo  $x_i$  oziroma  $y_i$ .

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$
  $x_1 \ge 0$   $x_1 + \dots + x_n = 1$   
 $y = (y_1, \dots, y_n)$   $y_1 \ge 0$   $y_1 + \dots + y_m = 1$ 

Matematično upanje je povprečno izplačilo, če bi igralca igrala veliko iger. Vsako celico v plačilni matriki pomnožimo z verjetnostjo, da bo prišlo do tega izida, in vrednosti seštejemo.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_i = x^T A y$$

Če 1. igralec igra z neko mešano strategijo x, je

$$\min_{y} x^{T} A y = \min_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{i}$$

To pomeni, da se 2. igralec lahko na mešano strategijo optimalno brani z neko **čisto strategijo**  $y = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ .

#### Iskanje optimalne strategije

Upoštevajoč, da se na mešano strategijo nasprotnik lahko brani z čisto strategijo, dobimo optimizacijska problema.

1. igralec išče 
$$\max_{x} \min_{y} x^T A y = \max_{x} \min_{j=1,...,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

2. igralec išče 
$$\min_{y} \max_{x} x^{T} A y = \min_{y} \max_{i=1,...,n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{j}$$

Problema zapišemo kot linerana programa.

1. igralec:

max 
$$s$$
 
$$p.p. -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + s \le 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$
 
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$
 
$$x_i \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

2. iaralec:

min 
$$t$$
 p.p. 
$$-\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j + t \ge 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$
 
$$\sum_{j=1}^m y_j = 1$$
 
$$y_j \ge 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Opazimo, da sta si linearna programa dualna. Oba problema sta optimalna in imata enako optimalno vrednost. To je **vrednost/strateško sedlo** igre.

Strategiji  $x^*$  in  $y^*$ sta optimalni  $\iff$ sta dopustni in velja

$$\min_{j} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x_{i}^{*} = \max_{i} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{j}^{*}$$

Igra je **poštena**  $\iff$  ima vrednost 0.

Igra je **simetrična**, če je  $A = -A^T$ . Tedaj ima vrednost 0 in je poštena.

#### Poenostavljanje plačilne matrike

Vektor x dominira x', če je  $\forall i: x_i > x'_i$ .

Če i. vrstica dominira i'. vrstico v plačilni matriki, lahko i'. vrstico odstranimo.

Če j. stolpec dominira j'. stolpec v plačilni matriki, lahko i. stolpec odstranimo.

S tem ne spremenimo optimalne vrednosti.

### Problem razvoza

Imamo usmerjen graf G = (V, E). G je povezan kot neusmerjen graf.

 $b_v$  . . . poraba-proizvodnja v vozlišču  $v \in V$ 

 $c_e$  . . . cena povezave  $e \in E$ 

 $x_e$  . . . količina razvoza na povezavi  $e \in E$ 

Poraba mora biti enako velika kot proizvodnja.

$$\sum_{v \in V} b_v = 0$$

Rešitev problema je vrednost razvoza za vsako povezavo  $x_{\ell}.$  Da je rešitev dopustna mora veljati

$$\forall e \in E : x_e \ge 0$$

$$\forall v \in V : \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = b_v$$

Kriterijska funkcija je vsota cen, ki jih bomo plačali za razvoz. Seveda jo želimo minimizirati.

$$\sum_{e \in E} c_e x_e = c^T x$$

Za problem razvoza lahko zapišemo linearni program in njegov dual.

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{p.p.} & A^T y \le c \end{array}$$

Kjer je A incidenčna matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_{ve} \end{bmatrix}_{\substack{v \in V \\ e \in E}} \qquad a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}(e) = v \\ -1 & \text{začetek}(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Rešitvix in yoptimalni  $\iff$ 

$$\forall ij \in E:$$
  $x_{ij} = 0 \quad \lor \quad y_j - y_i = c_{ij}$ 

### Simpleksna metoda na omrežjih

- 1. Poiščemo drevesno dopustno rešitev $\boldsymbol{x}$
- Rešimo y<sub>i</sub> + c<sub>ij</sub> = y<sub>j</sub> za ij ∈ T
  Začnemo s poljubnim vozliščem y<sub>1</sub> = 0 iz tega lahko
  izračunamo vrednosti za vsa ostala vozlišča tako, da
  se premikamo iz začetnega vozlišča in če gremo po
  pravi smeri, ceno razvoza povečujemo, sicer pa
  zmavišniemo.

Če je  $y_i+c_{ij}\geq y_j$  za  $\forall ij\in E\setminus T,$  je x optimalna rešitev - končamo.

3. Če je  $y_i + c_{ij} < y_j$  za kak  $ij \in E \setminus T$ , je ij vstopna povezava. Dodamo jo v T in dobimo cikel.

$$t = \min\{x_e : e \text{ obratna}\}\$$

Na premih povezavah cikla x povečamo za t, na obratnih pa pomanjšamo za t. Povezava na kateri je minimum dosežen, je **izstopna povezava** in jo odstranimo iz drevesa. Tako dobimo novo vpeto drevo in se vrnemo na korak 2.

Metoda se lahko zacikla. Ciklanju se izognemo tako, da izberemo koren  $r \in V$  in za izstopno povezavo izberemo najbližjo r.

#### Dvofazna simpleksna metoda na omrežjih

Z njo poiščemo začetno drevesno rešitev oziroma dokažemo, da ne obstaja.

Skonstruiramo pomožen problem tako, da izberemo koren  $r \in V$  in originalnemu porblemu dodamo povezave za  $\forall n \in V$ :

- če je  $b_v \ge 0$ , dodamo umetno povezamo rv (če še ne obstaja), razvoz  $x_{rv} = b_v$ , cena  $c_v = 1$
- če je  $b_v < 0$ , dodamo umetno povezamo vr (če še ne obstaja), razvoz  $x_{rv} = -b_v$ , cena  $c_v = 1$

Cene originalnih povezav nastavimo na 0.

Rešimo pomožen problem razvoza. Če dobimo rešitev s ceno 0 (ne uporablja pomožnih povezav), je originalni problem dopusten in končna drevesna rešitev pomožnega problema je dopustna drevesna rešitev za prvotni problem.

Če je proizvodnja večja kot poraba, problem ni rešljiv, a lahko dodamo **smetišče** z zadostno porabo in ga z brezplačnimi povezavami povežemo z vozlišči s proizvodnjo.

#### Celoštevilske rešitve

Za problem razvoza z  $b_v \in \mathbb{Z}$  velja:

- če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev
- če obstaja optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilska optimalna rešitev

#### Königov izrek o plesnih parih

Dvojno stohastična matrika je matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  za katero velia:

$$a_{ij} \geq 0 \qquad \forall i: \ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \qquad \forall j: \ \sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$$

Permutacijska matrika je matrika  $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$ , ki ima v vsakem stolpcu in vrstici natanko eno 1.

Naj bo A dvojno stohastična matrika, potem obstaja premutacijska matrika P, da velja  $p_{ij}>0 \implies a_{ij}>0$ .

### Königov izrek o plesnih parih

Naj bo ${\cal G}$  r-regularen graf, potem obstaja popolno prirejanje.

## Problem razvoza z omejitvami

Imamo usmerjen graf G=(V,E). G je povezan kot neusmerjen graf.

 $b_v \in \mathbb{R} \quad \dots \quad \text{poraba-proizvodnja v vozlišču} \; v \in V$ 

 $c_e \in \mathbb{R}$  ... cena povezave  $e \in E$ 

 $u_e \in [0, \infty]$  ... kapaciteta povezave  $e \in E$ 

 $x_e \in [0, u_e]$  . . . količina razvoza na povezavi  $e \in E$ 

Problem razvoza z omejitvami lahko zapišemo kot linearen program:

$$\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{p.p.} & Ax = b \\
& x \le u \\
& x > 0
\end{array}$$

 $x_e = 0 \rightarrow \text{prazna povezava}$ 

 $x_e = u_e \rightarrow \text{nasičena povezava}$ 

Dopustna rešitev x je drevesna dopustna rešitev, če obstaja vpeto drevo T, da so vse povezave izven drevesa prazne ali nasičena.

#### Postopek reševanja

- Poiščemo začetno dopustno drevesno rešitev x z drevesom T
- ullet Izračunamo ceno razvoza yza posamezna vozlišča
- Poiščemo vstopno povezavo  $ij \notin T$ , ki ustreza:
  - prazna:  $x_{ij} = 0$ ,  $y_i + c_{ij} < y_j \implies t = \min(\{x_e : e \text{ obratna}\} \cup \{u_e x_e : e \text{ prema}\})$ na premih povečamo za t, na obratnih pomanišamo za t
  - nasičena:  $x_{ij} = u_{ij}, \ y_i + c_{ij} > y_j \implies t = \min \left( \{x_e : e \text{ prema} \} \cup \{u_e x_e : e \text{ obratna} \} \right)$ na premih pomanjšamo za t, na obratnih povečamo za t

Začetno dopustno drevesno rešitev poiščemo s pomožnim problemom:

Izberemo koren  $r \in V$ . Za vsako vozlišče v:

- b<sub>v</sub> < 0 (proizvodnja): Če že obstaja povezava vr z kapaciteto u<sub>vr</sub> ≥ −b<sub>v</sub>, nastavimo razvoz na tej povezavi na b<sub>v</sub>, sicer dodamo povezavo vr z kapaciteto ∞ (dovolimo tudi več povezav med vozlišči).
- $b_v \geq 0$  (poraba): Če že obstaja povezava rv z kapaciteto  $u_{rv} \geq b_v$ , nastavimo razvoz na tej povezavi na  $-b_v$ , sicer dodamo povezavo rv z kapaciteto  $\infty$ .

Umetne (dodane) povezav imajo ceno 1, prvotne pa 0. Prvotni problem je dopusten  $\iff$  vrednost pomožnega problema enaka 0.

## Pretoki in prerezi

G = (V, E) ... usmerjen graf

 $s,t\in V$  . . . začetno in končno vozlišče

 $u_e \in [0, \infty)$  . . . kapaciteta povezave

Iščemo pretok  $x_e,$ da veljajo Kirchoffovi zakoni in  $0 \leq x_e \leq u_e.$ 

$$\sum_{\mathrm{konec}(e)=v} x_e = \sum_{\mathrm{za\check{e}tek}(e)=v} x_e \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$$

Radi bi maksimizirali pretok:

$$\sum_{\mathbf{z} \in \mathbf{z} \in \mathbf{k}(e) = s} x_e = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{o} \in \mathbf{c}(e) = t} x_e = v$$

#### Prevedba na problem razvoza

$$b_v = 0 \quad \forall v \in V \qquad c_e = 0 \quad \forall e \in E$$

 $u_{e}$ ostane nespremenjen

Dodamo povezavo ts z kapaciteto  $u_{ts} = \infty$  in ceno  $c_{ts} = -1$ .

#### Povečujoča pot

Zaporedje 
$$s=v_0,v_1,\ldots,v_k=t,$$
da  $\forall i=1,\ldots,k$ velja: 
$$v_{i-1}v_i\in E,\ x_{v_{i-1}v_i}< u_{v_{i-1}v_i}$$

$$v_i v_{i-1} \in E, \ x_{v_{i-1} v_i} > 0$$

Pretok na premih povezavah povečujoče poti povečamo za  $\varepsilon$  na obratnih pa pomanjšamo.

$$\varepsilon = \min\{x_e : e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ prema}\}\$$

### Prerez

Podmnožica  $C \subseteq V$  je prerez, če velja  $s \in C$  in  $t \notin C$ . Kapaciteta prereza je:

$$\sum_{\substack{i \in C \\ i \notin C}} u_{ij} \in [0, \infty)$$

Prostornina pretoka ≤ kapaciteta prereza.

Če je prostornina pretoka = kapaciteti prerza, je pretok maksimalen in prerez minimalen.

Za problem pretoka velja natanko eno:

- $\bullet \;\; neomejen:$  kapaciteta vsakega prereza je  $\infty$
- optimalen: ∃ prerez katerega kapaciteta je enaka maksimalnemu pretoku

## Prirejanja in pokritja

Naj bo G = (V, E) graf.

 $M \subseteq E$  je **prirejanje**, če  $\forall e, f \in M, e \neq f \implies e \cap f = \emptyset$  $P \subset V$  je **pokritje**, če  $\forall e \in E \ \exists v \in P : v \in E$ 

 $\mu(G)$  = velikost največjega prirejanja

 $\tau(G)=$ velikost najmanjšega pokritja

M prirejanje, P pokritje  $\Longrightarrow |M| \le |P|$ 

Če je |M|=|P|, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje in  $\mu(G)=\tau(G)=|M|=|P|$ .

V splošnem velja le  $\mu(G) \leq \tau(G)$ , za dvodelne grafe pa  $\mu(G) = \tau(G)$ .

 $e \in E$  je **vezana**, če  $e \in M$ , sicer pa je **prosta**  $v \in V$  je **vezano**, če  $\exists e \in M: v \in e$ , sicer pa je **prosto** 

Alternirajoča pot je pot na kateri se izmenjujejo proste in vezane povezave.

Povečujoča pot je alternirajoča pot, ki se začen in konča v prostem vozlišču.

Če na povečujoči poti zamenjamo proste in vezane povezave, dobimo za 1 večje prirejanje.

Mje največje prirejanje  $\iff$  ne obstaja povečujoča pot.

#### Madžarska metoda

G=(V,E)dvodelni graf,  $V=X\cup Y,\,M$  prirejanje  $S=\{\text{prosta vozlišča v }X\} \qquad T=\emptyset$ 

Vsak korak:

$$S' = S \cup \left\{ \substack{\text{vozlišča v } X, \text{ do katerih lahko iz } T \\ \text{pridemo po vezanih povezavah}} \right\}$$

$$T' = T \cup \left\{ \begin{smallmatrix} \text{vozlišča v } Y, \text{ do katerih lahko iz } S \\ \text{pridemo po prostih povezavah} \end{smallmatrix} \right\}$$

Če T vsebuje prosto vozlišče, imamo povečujočo pot, ki jo uporabimo za povečanje prirejanja.

Sicer pa pridemo do koraka kjer je T'=T in S'=S. V tem primeru je M največje prirejanje.

#### Hallov izrek

G = (V, E)dvodelni graf,  $V = X \cup Y$ 

 $\exists$  popolno prirejanje iz X v  $Y \iff \forall A \subseteq X : |A| < |N(A)|$ 

### Madžarska metoda z utežmi

Imamo plon graf  $K_{n,n}$ ; povezava med  $x_i$  in  $y_j$  ima utež  $c_{ij}$ 

$$c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Popolno prirejanje je podano z  $\pi \in S_n$ :  $x_i \sim y_{\pi(i)}$ .

Iščemo prirejanje z najmanjšo utežjo:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)}$$

Interpretacija: Razporeditev n opravi n ljudem

### Madžarska metoda - postopek

- Od vsake vrstice odštejemo njen minimum. Od vsakega stolpca odštejemo njegov minimum. V vsaki vrstici in stoplpcu je vsaj ena ničla
- Pokrijemo vse ničle v matriki pokrijemo z manj kot n vrsticami in stolpci.

$$\varepsilon := \text{najmanjše nepokrito polje} > 0$$

- 2× pokritim poljem prištejemo ε
- $\bullet$  nepokritim pa odštejemo  $\varepsilon$
- Če ne najdemo takih vrstic in stolpcev, lahko najdemo n ničel v različnih vrsticah in stolpcih. To nam daje minimalno popolno prirejanje.

## Iskanje najkrajše poti

Pregled v širino (BFS) O(|V| + |E|)

```
vhod: neutezen, neusmerjen graf G, zacetno vozlisce r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
d(r) \leftarrow 0
\pi(r) \leftarrow \text{NULL}
obiskan(r) \leftarrow NE
za \ vsak \ v \in V \setminus \{r\}:
     d(v) \leftarrow \infty
     \pi(v) \leftarrow \text{NULL}
     obiskan(v) \leftarrow NE
dokler Q \neq \emptyset:
     v \in Q
     Q \leftarrow Q \setminus v
     obiskan(v) \leftarrow JA
     za \ vsak \ u \in N(v):
           ce \text{ obiskan}(u) = NE:
                 \pi(u) = v
                 Q \leftarrow Q \cup \{u\}
```

#### Dijkstrov algoritem

```
\begin{array}{ll} \textit{vhod}\colon \text{usmerjen, utezen } (w_e \geq 0) \text{ graf } G = (V,E), \text{ koren } r\\ \textit{ishod}\colon \text{razdalje med vozliscem } r \text{ in ostalimi}\\ d(r) \leftarrow 0\\ \pi(r) \leftarrow \text{NULL}\\ \textit{za} \ \textit{vsak} \ v \in V \setminus \{r\}:\\ d(v) \leftarrow \infty\\ \pi(v) \leftarrow \text{NULL} \end{array}
```

```
\begin{array}{l} Q \leftarrow V \\ \textit{dokler} \ Q \neq \emptyset \colon \\ v \leftarrow \text{element} \ Q \ z \ \text{min} \ d \\ Q \leftarrow Q \setminus v \\ ce \ d(v) = \infty \colon \\ \textit{koncamo} \\ \textit{sicer} \colon \\ \textit{za} \ \textit{vsak} \ u \in N(v) \cap Q \colon \\ \textit{ce} \ d(u) > d(v) + w_v u \colon \\ d(u) \leftarrow d(v) + w_v u \\ \pi(u) \leftarrow v \end{array}
```

#### Aciklični graf

```
vhod: utezen, usmerien graf G = (V, E) brez ciklov
izhod: topoloska urejenost φ
za \ vsak \ v \in V:
     \operatorname{st}(v) \leftarrow \operatorname{deg}^+(v)
     i \leftarrow 1
dokler \exists v \in V : st(v) = 0:
     \varphi(v) \leftarrow i
      za vse vu \in E:
          \operatorname{st}(u) \leftarrow \operatorname{st}(u) - 1
     i \leftarrow i + 1
ce \ i \leq |V|:
     vrni FALSE
sicer :
      vrni o
vhod: topoloska urejenost \varphi, koren r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
\pi(r) \leftarrow \text{NULL}
za vsak v \in V \setminus \{r\}:
     d(v) \leftarrow \infty
     \pi(v) \leftarrow \text{NULL}
i \leftarrow \varphi(r)
za \ vsak \ j \in \{i, i+1, ..., |V|\}:
     v \leftarrow \varphi^{-1}(j)
      za vsak vu \in E:
           ce \ d(u) = d(v) + wue:
                 d(u) \leftarrow d(v) + wvu
                 \pi(u) \leftarrow v
vrni d. \pi
```

### Bellman-Ford

Floyd-Warshellov algoritem

# Konveksna optimizacija

Konveksne funkcije in optimizacija Konveksne funkcije in vezani ekstremi Celoštevilski linearni programi