Optimizacijske naloge

Optimizacijska naloga je $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf,)$ kjer je:

- Ω množica dopustnih rešitev
- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ kriterijska funkcija

$x^* \in \Omega$ je *optimalna* rešitev problema $(\Omega, f, \max)$, če velja
$$\forall x \in \Omega : f(x) \leq f(x^*)$$

Optimizacijski problem

- Nedopustni $\Omega = \emptyset$
- Dopustni $\Omega \neq \emptyset$
  - Neomejen *kriterijska f. neomejena* $\max x$ p.p. $x \geq 0$
  - Omejen *kriterijska f. omejena*
    - Optimalni *zaprta meja* $\max x$ p.p. $0 \leq x \leq 1$
    - Neoptimalni *odprta meja* $\max x$ p.p. $0 \leq x < 1$

Linearno programiranje

$(\Omega, f, \min/\max)$ je linearni porgram, če je Ω podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi $(\leq, \geq)$ in je f linearna.

Standardna oblika linearnega pograma

Linearni porgram je v *standardni* obliki, če iščemo max in so vsi pogoji neenakosti $\leq$ in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{p.p.} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{array}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \ldots c_n]^T \quad b = [b_1 \ldots b_m]^T \quad x = [x_1 \ldots x_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad \begin{array}{ll} \max & c^Tx \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Vsak linearen program lahko zapišemo v standardni obliki.

Vse dele linearnega programa lahko preoblikujemo tako, da bodo v standardni obliki:

$$\min f(x) \rightsquigarrow \max(-f(x))$$
$$f(x) \geq b \rightsquigarrow -f(x) \leq -b$$
$$f(x) = b \rightsquigarrow f(x) \leq b \wedge f(x) \geq b$$
$$x_i \leq 0 \rightsquigarrow x_i = -x_i'$$
$$x_i \gtreqless 0 \rightsquigarrow x_i = x_i' - x_i'' \wedge x_i', x_i'' \geq 0$$

Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne porgrame z dvema spremenljivkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradienta proti točki, ki je v preseku polporostorov pogojev in čim dlje od izhodišča.

Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak $b_i < 0$, moramo uporabiti **dvofazno simpleksno metodo**, sicer nadaljujemo.

Linearni porgram zapišemo v *prvi* slovar.

$$\overbrace{\begin{array}{c} x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} = b_m - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n \\ \hline z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \end{array}}^{\text{1. slovar}}$$

Vse spremenljivke $x_1, \ldots, x_{n+m}$ so nenegativne.

Spremenljivke na levi so **bazne**, na desni pa **nebazne**.

$$\begin{array}{lll} x_1, \ldots, x_n & \ldots & \textbf{prvotne} \text{ spremenljivke} \\ x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} & \ldots & \textbf{dopolnilne} \text{ spremenljivke} \end{array}$$

Slovar je **dopusten**, če so vse konstante (čelni brez x) na desni nenegativne.

Če je slovar dopusten, ima *bazno* dopustno rešitev: vse *nebazne* spremenljivke so 0 in kriterijska funkcija je tedaj $z = 0$.

- Določimo:
  - **vstopno spremenljivko**: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
  - **pivotno vrstico**: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem **neomejen** in končamo.
  - **izstopno spremenljivko**: bazna spremenljivka v pivotni vrestici
- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenljivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenljivka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadnjega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko spreminjamo glede na omejitve.

Dvofazna simpleksna metoda

Če je $b \ngeq 0$, uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

Prva faza

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti b_i prištejemo x_0. Kriterijsko funkcijo pa spremenimo v $\max -x_0$.

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$\begin{array}{c} x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{mn}x_n \\ \hline w = -x_0 \end{array}$$

Za vstopno spremenljivko izberemo x_0 za pivotno vrstico pa tisto v kateri je b_i najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo: x_0 ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če $w* < 0$, prvotni problem ni dopusten, sicer nadlajujemo z drugo fazo.

Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izbrišemo x_0 in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Dualnost pri linearnem programiranju

Vsak linearni program P ima dualno obliko P':

$$\begin{array}{ll} \max & c^Tx \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & b^Ty \\ \text{p.p.} & A^Ty \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

$$P'' = P$$

Šibki izrek o dualnosti - ŠID

x dopustna rešitev za P, y dopustna rešitev za P' $\Longrightarrow$
$$c^Tx \leq b^Ty$$

x dopustna za P, y dopustna za P' in $c^Tx = b^Ty$ $\Longrightarrow$
$$x \text{ optimalna rešitev } P,\ y \text{ optimalna rešitev} P'$$

Krepki izrek o dualnosti - KID

x^* optimalna rešitev P $\Longrightarrow$
$$\text{optimalna rešitev } P' \text{ in } c^Tx^* = b^Ty^*$$

Linearni program in njegov dual sta lahko:

	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	$//_{\text{KID}}$
neomejen	✓	$//_{\text{ŠID}}$	$//_{\text{ŠID, KID}}$
optimalen	$//_{\text{KID}}$	$//_{\text{ŠID, KID}}$	✓

Dualno dopolnjevanje

Naj bo x dopustna za P in y dopustna za P' tedaj je:

x optimalna za P in y optimalna za P' $\iff$

$$\forall i = 1, \ldots, m : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$
$$\forall j = 1, \ldots, n : \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$$

Ekvivalentno: x optimalna za P, y optimalna za P' $\Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i$$

in

$$x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \quad \forall j$$

Uporaba izreka o dualnem dopolnjevanju

Želimo dokazati, da je x^* optimalna rešitev linearnega programa P.

1. Preverimo, da je x^* dopustna rešitev.
2. Če je kakšna neenakost pri pogojih P izpolnjena s strogo neenakostjo, je pripadajoča dualna spremenljivka $y_i^* = 0$.
3. Če je kaka $x_j^* > 0$, je pripadajoča dualna neenakost v p' izpolnjena z enakostjo:
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i = c_j$$
4. Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri y iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešljiv, x^* ni optimalna).
5. Preverimo ali je dobljena rešitev y^* dopustna. Če je, sta x^* in y^* optimalni.

Dual splošnega problema

Splošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoji postavljeni z $\leq$ lahko pa tudi z $=$. Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z $x_j \geq 0$.

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j & \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_i & \forall i = 1, \ldots, m' \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = b_i & \forall i = m' + 1, \ldots, m \\ & x_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_iy_i & \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j & \forall j = 1, \ldots, n' \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j & \forall j = n' + 1, \ldots, n \\ & y_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, m' \end{array}$$

$$\text{enakost} \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} \text{poljubna spremenljivka}$$
$$\text{neenakost} \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} \text{nenegativna spremenljivka}$$

Dualno dopolnjevanje splošnega problema

x dopustna za P
y dopustna za P'
x optimalna za P in y optimalna za P' $\Leftrightarrow$

$$\forall i = 1, \ldots, m' : \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$
$$\forall j = 1, \ldots, n' : \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$$

Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Naj bo P linearni program, $\exists$ neizrojena optimalna rešitev (v zadnjem slovarju so vse konstante > 0). Potem $\exists \varepsilon > 0$, da velja

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \Delta b_i$$

kjer je y^* optimalna rešitev duala, Δz^* sprememba optimalne vrednosti, Δb_i pa sprememba dense strani pogojev in $|\Delta b_i| < \varepsilon$.

Torej če desni strani pogojev v P prištejemo dovolj majhen Δb, se optimalna vrednost z^* programa P spremeni za $\Delta z^* = \Delta b^T y^*$.

$y*$ nam tedaj da "tržno ceno" dobrin. Če želimo povečati dobrino b_i, se nam dobiček poveča za $b_i y_i^*$. Torej za enoto dobrine i ne smemo plačati več kot y_i^*.

Matrične igre

Igro igrata 2 igralca. Prvi ima n, drugi pa m strategij.

Plačilna matrika A ima n vrstic in m stoplcev. Celica v i. vrstici in j. stolpcu predstavlja znesek, ki ga drugi plača prvemu, če prvi izbere strategijo i, drugi pa j. (Če je vrednost negativna, privi plača drugemu.)

Igralca igrata po principu najmanjšega tveganja: izbereta strategijo pri kateri v najslabšem primeru izgubita čim manj.

$$\begin{aligned} &\text{1. igralec:} && \max_i \min_j a_{ij} =: M_1 \\ &\text{2. igralec:} && \min_j \max_i a_{ij} =: M_2 \end{aligned}$$

$$M_1 \leq M_2$$

(i_0, j_0) je **sedlo** plačilne matrike A, če je $a_{i_0 j_0}$ najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

$$A \text{ ima sedlo} \iff M_1 = M_2 = a_{i_0 j_0}$$

Če ima A sedlo, je i_0 optimalna strategija za prvega, j_0 pa za drugega igralca. V tem primeru je (i_0, j_0) *Nashevo ravnovesje* in nobenemu igralcu se ne splača spremeniti strategije.

Mešana strategija

Igralca svoje strategije izbirata nakjučno z verjetnostjo x_i oziroma y_j.

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) && x_1 \geq 0 && x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ y &= (y_1, \dots, y_n) && y_1 \geq 0 && y_1 + \cdots + y_m = 1 \end{aligned}$$

Matematično upanje je povprečno izplačilo, če bi igralca igrala veliko iger. Vsako celico v plačilni matriki pomnožimo z verjetnostjo, da bo prišlo do tega izida, in vrednosti seštejemo.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_i = x^T A y$$

Če 1. igralec igra z neko mešano strategijo x, je

$$\min_y x^T A y = \min_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

To pomeni, da se 2. igralec lahko na mešano strategijo optimalno brani z neko **čisto strategijo** $y = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Iskanje optimalne strategije

Upoštevajoč, da se na mešano strategijo nasprotnik lahko brani z čisto strategijo, dobimo optimizacijska problema.

$$\text{1. igralec išče} \quad \max_x \min_y x^T A y = \max_x \min_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

$$\text{2. igralec išče} \quad \min_y \max_x x^T A y = \min_y \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$$

Problema zapišemo kot linerana programa.

1. igralec:

$$\begin{aligned} &\max && s \\ &\text{p.p.} && -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + s \leq 0 && \forall j = 1, \dots, m \\ &&& \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ &&& x_i \geq 0 && \forall i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

2. igralec:

$$\begin{aligned} &\min && t \\ &\text{p.p.} && -\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + t \geq 0 && \forall i = 1, \dots, n \\ &&& \sum_{j=1}^{m} y_j = 1 \\ &&& y_j \geq 0 && \forall j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Opazimo, da sta si linearna programa dualna. Oba problema sta optimalna in imata enako optimalno vrednost. To je **vrednost/strateško sedlo** igre.

Strategiji x^* in y^* sta optimalni $\iff$ sta dopustni in velja

$$\min_j \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x_i^* = \max_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^*$$

Igra je **poštena** $\iff$ ima vrednost 0.

Igra je **simetrična**, če je $A = -A^T$. Tedaj ima vrednost 0 in je poštena.

Poenostavljanje plačilne matrike

Vektor x **dominira** x', če je $\forall i : x_i \geq x_i'$.

Če i. vrstica dominira i'. vrstico v plačilni matriki, lahko i'. vrstico odstranimo.
Če j. stoplec dominira j'. stolpec v plačilni matriki, lahko j. stolpec odstranimo.

S tem ne spremenimo optimalne vrednosti.

Problem razvoza

Imamo usmerjen graf $G = (V, E)$. G je povezan kot neusmerjen graf.

$$\begin{aligned} b_v &\quad \dots \quad \text{poraba}-\text{proizvodnja v vozlišču } v \in V \\ c_e &\quad \dots \quad \text{cena povezave } e \in E \\ x_e &\quad \dots \quad \text{količina razvoza na povezavi } e \in E \end{aligned}$$

Poraba mora biti enako velika kot proizvodnja.

$$\sum_{v \in V} b_v = 0$$

Rešitev problema je vrednost razvoza za vsako povezavo x_e. Da je rešitev dopustna mora veljati

$$\forall e \in E : \ x_e \geq 0$$

$$\forall v \in V : \quad \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = b_v$$

Kriterijska funkcija je vsota cen, ki jih bomo plačali za razvoz. Seveda jo želimo minimizirati.

$$\sum_{e \in E} c_e x_e = c^T x$$

Za problem razvoza lahko zapišemo linearni program in njegov dual.

$$\begin{aligned} &\min && c^T x \\ &\text{p.p.} && Ax = b \\ &&& x \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max && b^T y \\ &\text{p.p.} && A^T y \leq c \end{aligned}$$

Kjer je A incidenčna matrika

$$A = [a_{ve}]_{\substack{v \in V \\ e \in E}} \qquad a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}(e) = v \\ -1 & \text{začetek}(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Rešitvi x in y optimalni $\iff$

$$\forall ij \in E : \qquad x_{ij} = 0 \quad \vee \quad y_j - y_i = c_{ij}$$

Simpleksna metoda na omrežjih

1. Poiščemo drevesno dopustno rešitev x
2. Rešimo $y_i + c_{ij} = y_j$ za $ij \in T$
   Začnemo s poljubnim vozliščem $y_1 = 0$ iz tega lahko izračunamo vrednosti za vsa ostala vozlišča tako, da se premikamo iz začetnega vozlišča in če gremo po pravi smeri, ceno razvoza povečujemo, sicer pa zmanjšujemo
   Če je $y_i + c_{ij} \geq y_j$ za $\forall ij \in E \setminus T$, je x optimalna rešitev - končamo.
3. Če je $y_i + c_{ij} < y_j$ za kak $ij \in E \setminus T$, je ij **vstopna povezava**. Dodamo jo v T in dobimo cikel.

   $$t = \min\{x_e : e \text{ obratna}\}$$

   Na premih povezavah cikla x povečamo za t, na obratnih pa pomanjšamo za t.
   Povezava na kateri je minimum dosežen, je **izstopna povezava** in jo odstranimo iz drevesa.
   Tako dobimo novo vpeto drevo in se vrnemo na korak 2.

Metoda se lahko zacikla. Ciklanju se izognemo tako, da izberemo koren $r \in V$ in za izstopno povezavo izberemo najbližjo r.

Dvofazna simpleksna metoda na omrežjih

Z njo poiščemo začetno drevesno rešitev oziroma dokažemo, da ne obstaja.

Skonstruiramo pomožen problem tako, da izberemo koren $r \in V$ in originalnemu porblemu dodamo povezave za $\forall v \in V$:

- če je $b_v \geq 0$, dodamo umetno povezamo rv (če še ne obstaja), razvoz $x_{rv} = b_v$, cena $c_v = 1$
- če je $b_v < 0$, dodamo umetno povezamo vr (če še ne obstaja), razvoz $x_{rv} = -b_v$, cena $c_v = 1$

Cene originalnih povezav nastavimo na 0.

Rešimo pomožen problem razvoza. Če dobimo rešitev s ceno 0 (ne uporablja pomožnih povezav), je originalni problem dopusten in končna drevesna rešitev pomožnega problema je dopustna drevesna rešitev za prvotni problem.

Če je proizvodnja večja kot poraba, problem ni rešljiv, a lahko dodamo **smetišče** z zadostno porabo in ga z brezplačnimi povezavami povežemo z vozlišči s proizvodnjo.

Celoštevilske rešitve

Za problem razvoza z $b_v \in \mathbb{Z}$ velja:

- če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev
- če obstaja optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilska optimalna rešitev

Königov izrek o plesnih parih

Dvojno stohastična matrika je matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ za katero velja:

$$a_{ij} \geq 0 \qquad \forall i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \qquad \forall j : \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1$$

Permutacijska matrika je matrika $P \in \{0,1\}^{n \times n}$, ki ima v vsakem stolpcu in vrstici natanko eno 1.

Naj bo A dvojno stohastična matrika, potem obstaja premutacijska matrika P, da velja $p_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0$.

Königov izrek o plesnih parih

Naj bo G r-regularen graf, potem obstaja popolno prirejanje.

Problem razvoza z omejitvami

Imamo usmerjen graf $G = (V, E)$. G je povezan kot neusmerjen graf.

$$\begin{aligned} b_v &\in \mathbb{R} && \dots && \text{poraba}-\text{proizvodnja v vozlišču } v \in V \\ c_e &\in \mathbb{R} && \dots && \text{cena povezave } e \in E \\ u_e &\in [0, \infty] && \dots && \text{kapaciteta povezave } e \in E \\ x_e &\in [0, u_e] && \dots && \text{količina razvoza na povezavi } e \in E \end{aligned}$$

Problem razvoza z omejitvami lahko zapišemo kot linearen program:

$$\begin{aligned} &\min && c^T x \\ &\text{p.p.} && Ax = b \\ &&& x \leq u \\ &&& x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_e = 0 &\quad \to \quad \text{prazna povezava} \\ x_e = u_e &\quad \to \quad \text{nasičena povezava} \end{aligned}$$

Dopustna rešitev x je **drevesna dopustna rešitev**, če obstaja vpeto drevo T, da so vse povezave izven drevesa prazne ali nasičena.

Postopek reševanja

- Poiščemo začetno dopustno drevesno rešitev x z drevesom T
- Izračunamo ceno razvoza y za posamezna vozlišča
- Poiščemo vstopno povezavo $ij \notin T$, ki ustreza:
  - prazna: $x_{ij} = 0$, $y_i + c_{ij} < y_j \implies$ $t = \min(\{x_e : e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ prema}\})$ na premih povečamo za t, na obratnih pomanjšamo za t
  - nasičena: $x_{ij} = u_{ij}$, $y_i + c_{ij} > y_j \implies$ $t = \min(\{x_e : e \text{ prema}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ obratna}\})$ na premih pomanjšamo za t, na obratnih povečamo za t

Začetno dopustno drevesno rešitev poiščemo s pomožnim problemom:

Izberemo koren $r \in V$. Za vsako vozlišče v:

- $b_v < 0$ (proizvodnja): Če že obstaja povezava vr z kapaciteto $u_{vr} \geq -b_v$, nastavimo razvoz na tej povezavi na b_v, sicer dodamo povezavo vr z kapaciteto ∞ (dovolimo tudi več povezav med vozlišči).
- $b_v \geq 0$ (poraba): Če že obstaja povezava rv z kapaciteto $u_{rv} \geq b_v$, nastavimo razvoz na tej povezavi na $-b_v$, sicer dodamo povezavo rv z kapaciteto ∞.

Umetne (dodane) povezav imajo ceno 1, prvotne pa 0. Prvotni problem je dopusten $\iff$ vrednost pomožnega problema enaka 0.

Pretoki in prerezi

$$\begin{aligned} G = (V, E) &\quad \ldots \quad \text{usmerjen graf} \\ s, t \in V &\quad \ldots \quad \text{začetno in končno vozlišče} \\ u_e \in [0, \infty) &\quad \ldots \quad \text{kapaciteta povezave} \end{aligned}$$

Iščemo pretok x_e, da veljajo Kirchoffovi zakoni in $0 \leq x_e \leq u_e$.

$$\sum_{\text{konec}(e)=v} x_e = \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

Radi bi *maksimizirali* pretok:

$$\sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=t} x_e = v$$

Prevedba na problem razvoza

$$b_v = 0 \quad \forall v \in V \qquad\qquad c_e = 0 \quad \forall e \in E$$

u_e ostane nespremenjen

Dodamo povezavo ts z kapaciteto $u_{ts} = \infty$ in ceno $c_{ts} = -1$.

Povečujoča pot

Zaporedje $s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t$, da $\forall i = 1, \ldots, k$ velja:

$$v_{i-1}v_i \in E,\ x_{v_{i-1}v_i} < u_{v_{i-1}v_i}$$

ali

$$v_i v_{i-1} \in E,\ x_{v_{i-1}v_i} > 0$$

Pretok na premih povezavah povečujoče poti povečamo za ε na obratnih pa pomanjšamo.

$$\varepsilon = \min\{x_e \ : \ e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e \ : \ e \text{ prema}\}$$

Prerez

Podmnožica $C \subseteq V$ je prerez, če velja $s \in C$ in $t \notin C$. Kapaciteta prereza je:

$$\sum_{\substack{i \in C \\ j \notin C}} u_{ij} \in [0, \infty)$$

Prostornina pretoka $\leq$ kapaciteta prereza.

Če je prostornina pretoka = kapaciteti prerza, je pretok maksimalen in prerez minimalen.

Za problem pretoka velja natanko eno:

- *neomejen*: kapaciteta vsakega prereza je ∞
- *optimalen*: $\exists$ prerez katerega kapaciteta je enaka maksimalnemu pretoku

Prirejanja in pokritja

Naj bo $G = (V, E)$ graf.

$M \subseteq E$ je **prirejanje**, če $\forall e, f \in M, e \neq f \implies e \cap f = \emptyset$
$P \subseteq V$ je **pokritje**, če $\forall e \in E\ \exists v \in P : \ v \in E$

$\mu(G)$ = velikost največjega prirejanja
$\tau(G)$ = velikost najmanjšega pokritja

M prirejanje, P pokritje $\implies |M| \leq |P|$

Če je $|M| = |P|$, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje in $\mu(G) = \tau(G) = |M| = |P|$.

Prirejanje je **maksimalno**, če ni vsebovano v nobenem večjem prirejanju.

V splošnem velja le $\mu(G) \leq \tau(G)$, za dvodelne grafe pa $\mu(G) = \tau(G)$.

$e \in E$ je **vezana**, če $e \in M$, sicer pa je **prosta**
$v \in V$ je **vezano**, če $\exists e \in M : \ v \in e$, sicer pa je **prosto**

Alternirajoča pot je pot na kateri se izmenjujejo proste in vezane povezave.

Povečujoča pot je alternirajoča pot, ki se začen in konča v prostem vozlišču.

Če na povečujoči poti zamenjamo proste in vezane povezave, dobimo za 1 večje prirejanje.

M je največje prirejanje $\iff$ ne obstaja povečujoča pot.

Madžarska metoda

$G = (V, E)$ dvodelni graf, $V = X \cup Y$, M prirejanje

$S = \{\text{prosta vozlišča v } X\} \quad T = \emptyset$

Vsak korak:

$$S' = S \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{vozlišča v } X\text{, do katerih lahko iz } T \\ \text{pridemo po vezanih povezavah} \end{array} \right\}$$

$$T' = T \cup \left\{ \begin{array}{c} \text{vozlišča v } Y\text{, do katerih lahko iz } S \\ \text{pridemo po prostih povezavah} \end{array} \right\}$$

Če T vsebuje prosto vozlišče, imamo povečujočo pot, ki jo uporabimo za povečanje prirejanja.

Sicer pa pridemo do koraka kjer je $T' = T$ in $S' = S$. V tem primeru je M največje prirejanje.

Hallov izrek

$G = (V, E)$ dvodelni graf, $V = X \cup Y$

$\exists$ popolno prirejanje iz X v $Y \iff \forall A \subseteq X : \ |A| \leq |N(A)|$

Madžarska metoda z utežmi

Imamo plon graf $K_{n,n}$; povezava med x_i in y_j ima utež c_{ij}

$$c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Popolno prirejanje je podano z $\pi \in S_n$: $x_i \sim y_{\pi(i)}$.

Iščemo prirejanje z najmanjšo utežjo:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{n} c_{i\pi(i)}$$

Interpretacija: Razporeditev n opravi n ljudem.

Madžarska metoda - postopek

1. Od vsake vrstice odštejemo njen minimum.
   Od vsakega stolpca odštejemo njegov minimum. *V vsaki vrstici in stoplpcu je vsaj ena ničla*
2. Pokrijemo vse ničle v matriki pokrijemo z manj kot n vrsticami in stolpci.

   $$\varepsilon := \text{najmanjše nepokrito polje} > 0$$

   - $2\times$ pokritim poljem prištejemo ε
   - nepokritim pa odštejemo ε
3. Če ne najdemo takih vrstic in stolpcev, lahko najdemo n ničel v različnih vrsticah in stolpcih. To nam daje minimalno popolno prirejanje.

Iskanje najkrajše poti

Pregled v širino (BFS) $O(|V| + |E|)$

vhod: neutezen, neusmerjen graf G, zacetno vozlisce r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
$Q \leftarrow r$
$d(r) \leftarrow 0$
$\pi(r) \leftarrow$ NULL
obiskan$(r) \leftarrow$ NE
za vsak $v \in V \setminus \{r\}$:
  $d(v) \leftarrow \infty$
  $\pi(v) \leftarrow$ NULL
  obiskan$(v) \leftarrow$ NE
dokler $Q \neq \emptyset$:
  $v \in Q$
  $Q \leftarrow Q \setminus v$
  obiskan$(v) \leftarrow$ JA
  za vsak $u \in N(v)$:
    ce obiskan(u) = NE:
      $d(u) \leftarrow d(v) + 1$
      $\pi(u) = v$
      $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$
vrni d, π

Dijkstrov algoritem

vhod: usmerjen, utezen ($w_e \geq 0$) graf $G = (V, E)$, koren r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
$d(r) \leftarrow 0$
$\pi(r) \leftarrow$ NULL
za vsak $v \in V \setminus \{r\}$:
  $d(v) \leftarrow \infty$
  $\pi(v) \leftarrow$ NULL
$Q \leftarrow V$
dokler $Q \neq \emptyset$:
  $v \leftarrow$ element Q z min d
  $Q \leftarrow Q \setminus v$
  ce $d(v) = \infty$:
    koncamo
  sicer :
    za vsak $u \in N(v) \cap Q$:
      ce $d(u) > d(v) + w_{vu}$:
        $d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$
        $\pi(u) \leftarrow v$
vrni d, π

Aciklični graf

vhod: utezen, usmerjen graf $G = (V, E)$ brez ciklov
izhod: toposloska urejenost φ
za vsak $v \in V$:
  st$(v) \leftarrow \deg^{+}(v)$
  $i \leftarrow 1$
dokler $\exists v \in V$: st$(v) = 0$:
  $\varphi(v) \leftarrow i$
  za vse $vu \in E$:
    st$(u) \leftarrow$ st$(u) - 1$
  $i \leftarrow i + 1$
ce $i \leq |V|$:
  vrni FALSE
sicer :
  vrni φ

vhod: toposloska urejenost φ, koren r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
$d(r) \leftarrow 0$
$\pi(r) \leftarrow$ NULL
za vsak $v \in V \setminus \{r\}$:
  $d(v) \leftarrow \infty$
  $\pi(v) \leftarrow$ NULL
$i \leftarrow \varphi(r)$
za vsak $j \in \{i, i+1, \ldots, |V|\}$:
  $v \leftarrow \varphi^{-1}(j)$
  za vsak $vu \in E$:
    ce $d(u) = d(v) + w_{ue}$:
      $d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$
      $\pi(u) \leftarrow v$
vrni d, π

Bellman-Ford

Floyd-Warshellov algoritem

Konveksna optimizacija

Afine množice

Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$ je **afina**, če velja:

$$\forall x, y \in A\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Premica med dvema poljibnima točkama iz A mora biti vsebovana v A.
Afina kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$$

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- A je afina
- vsaka afina kombinacija vektorjev iz A je v A
- $A = V + a = \{v + a \mid v \in V\}$
  za nek $V \in \mathbb{R}^n$ linearen podprostor in $a \in \mathbb{R}^n$

Konveksne množice

Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konveksna**, če velja:

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)x + \lambda y \in A$$

Daljica med dvema poljibnima točkama iz A mora biti vsebovana v A.
Množica **ni** konveksna, če

$$\exists x, y \in A \ \exists \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)x + \lambda y \notin A$$

Naj bo $\Omega^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $g_i : \Omega \to \mathbb{R}$ konv. fun.
Tedaj je $D = \{x \in \Omega \mid g_i(x) \le 0 \ \forall i\}$ **konveksna**.

Konveksna kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$
$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \qquad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \ge 0$$

Afin podprostor (= zaprt za afine kokmbinacije = premaknjen linearen prostor) je *konveksen.*

Presek konveksnih množic $A_i, \forall i \in I$ je konveksen.

Unija koknveksnih množic pa ni nujno konveksna.

A konveksna $\iff$ poljubna konveksna kombinacija vektorjev iz A v A.

Konveksna ogrinjača:

$$\text{Conv}(A) = \mathcal{C}(A) = \bigcap_{\substack{K \text{ konv.} \\ A \subseteq K}} K$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ x_i \in A \right\}$$

- $A \subseteq \text{Conv}(A)$
- $\text{Conv}(A)$ je konveksna
- A konveksna $\implies$ $\text{Conv}(A) = A$
- $A \subseteq B$, B konveksna $\implies$ $\text{Conv}(A) \subseteq B$
- $\text{Conv}(A) = \{$konveksna kombinacija vektorjev iz $A\}$

Ekstremna točka: $a \in A^{\text{konv}}$ je ekstremna, če

$$\forall x, y \in A,\ x, y \ne a : \ \nexists \lambda \in [0,1] : \ a = (1-\lambda)x + \lambda y$$

Točka ni ekstremna, če laži v notranjosti kake daljice med točkama iz A.

Ekstremne točke vedno ležijo na robu. Robne toče pa niso nujno ekstremne.

Konveksni stožci

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksni stožec, če

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda, \mu \ge 0 : \ \lambda x + \mu y \in A$$

Konveksni stožec, je konveksna množica, ni pa nujno obratno.

Vsak linearni podprostor je konveksen stožec.

Konveksni stožec napet na $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$:

$$S(a_1, \ldots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \ge 0\}$$

Dualni stožec množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$A^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T a \ge 0 \ \forall a \in A \right\}$$

V A^* so vektorji, ki z vsemi vektorji iz A tvorijo ostri kot.

$$A \subseteq A^{**}$$

Farkaševa lema

Geometrijska oblika:

$$S^{**}(a_1, \ldots, a_n) = S(a_1, \ldots, a_n)$$

Algebraična oblika:

Prva varianta:

$$\exists x \ge 0 : \ Ax = b \iff \forall y : \ A^T y \ge 0 \implies b^T y \ge 0$$
$$b \in S(a_1, \ldots, a_n) \iff b \in S^{**}(a_1, \ldots, a_n)$$

Druga varianta:

$$\exists x \ge 0 : \ Ax \le b \iff \forall y \ge 0 : \ A^T y \ge 0 \implies b^T y \ge 0$$

Konveksne funkcije

Naj bo $K^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$; funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ je konveksna, če

$$\forall x, y \in K \ \forall \lambda \in [0,1] :$$
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Funkcija je konveksna, če je definirana na konveksnem območju in graf vedno leži pod zveznico dveh točk na grafu.

Če zgoraj velja stroga neenakost, je funkcija **strogo konveksna**.

f strogo konveksna $\iff$ $H_f > 0$.

Če ima strogo konveksna funkcija maksimum, je v *ekstremni točki.*

Konkavne funkcije

Naj bo $K^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$; funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ je konkavna, če

$$\forall x, y \in K \ \forall \lambda \in [0,1] :$$
$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \ge (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

Če je f konveksna, je $-f$ konkavna.

Funkcija f je **afina** $\iff$ konveksna in konkavna

- $f : K \to \mathbb{R}$, $c \ge 0$, f konveksna $\implies$ $c \cdot f$ konveksna
- $f, g : K \to \mathbb{R}$, f, g konveksni $\implies$ $f + g$ konveksna
- $g : K \to \mathbb{R}^n$ afina $\implies$ $g(K)$ konveksna
  $f : g(K) \to \mathbb{R}$ konveksna $\implies$ $f \circ g$ konveksna
- $g : K \to \mathbb{R}$, $f : \text{Conv}(g(K)) \to \mathbb{R}$, f, g konveksni
  f naraščujoča $\implies$ $f \circ g$ konveksna

Konveksne funkcije in optimizacija

Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : A \to \mathbb{R}$.

- f ima v $x \in A$ **globalni maksimum**, če
  $$\forall x' \in A : \ f(x) \ge f(x')$$
- f ima v $x \in A$ **lokalni maksimum**, če
  $$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x' \in A \cap K_\varepsilon(x) : \ f(x) \ge f(x')$$

Če je x lokalni minimum konveksne funkcije, je tudi globalni minimum.

Preverjanje konveksnosti funkcije

S prvim odvodom

$f : K^{\text{konv, odp}} \to \mathbb{R}$ odvedljiva

$$f \text{ konveksna} \iff f(y) \ge f(x) + (\nabla f(x))^T (y - x)$$

Z drugim odvodom

$f : \Omega^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva

Hessejeva matrika:

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^{n}$$

f konveksna $\iff$ $H_f \ge 0$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ konveksna $\iff$ $h_{x,y} : I_{x,y} \to \mathbb{R}$,
$h_{x,y}(\lambda) = f(x + \lambda y)$, konveksna za $\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}^n$
$I_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda y \in \Omega\}$

Lastne vrednosti matrike A so ničle karakterističnega polinoma $det(A - \lambda I)$.

Lastni podprostor vrednosti λ je $\text{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **diagonalizabilna**, če ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Tedaj je $A = PDP^{-1}$, kjer je D diagonalna z lastnimi vrednostmi na diagonali, P pa obrnljiva z lastnimi vektorji v stolpcih.

Če je A **simetrična** ($A^T = A$), so vse lastne vrednosti realne in A je diagonalizabilna v ortonormirani bazi (lastni vektorji različnih lastnih vrednosti so $\perp$).

Matrika A je **pozitivno semidefinitna** ($A \ge 0$)
$\iff$ vse lastne vrednosti $\lambda \ge 0$
$\iff$ $x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ge 0$
$\iff$ vse glavne poddeterminante≥ 0
Glavne poddeterminante dobimo tako, da izbiršemo nekatere vrstice in stolpce z enakimi indeksi.

Matrika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je $A \ge 0 \iff ac - b^2 \ge 0$ in $a \ge 0$

Konveksne funkcije in vezani ekstremi

$\Omega \subseteq \mathbb{R}$ odprta
$f, g_1, \ldots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljive
$D = \{x \in \Omega : g_i(x) \le 0 \ \forall i = 1, \ldots, m\}$

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{p.p.} & x \in \Omega^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n \\ & g_1(x) \le 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) \le 0 \end{array}$$

Karush–Kuhn–Tuckerjevi pogoji

Lagrangeeva funkcija

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

$x^* \in \Omega$ zadošča pogojem KKT, če $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \ge 0$, da velja:

$$\begin{array}{ll} L_{x_i}(x^*) = 0 & \forall i = 1, \ldots, n \\ \lambda_j g_j(x^*) = 0 & \forall j = 1, \ldots, m \\ g_j(x^*) \le 0 & \forall j = 1, \ldots, m \end{array}$$

V splošnem KKT pogoji niso ne potrebni ne zadostni za globalni/lokalni ekstrem.

Potrebnost pogojev KKT optimalnost:
Če ima f v točki $x^* \in D$ lokalni min na D in so vezi v x^* regularne, točka x^* zadošča pogojem KKT.

Zadostni pogoji za regularnost vezi:
Če velja vsaj en od pogojev so vezi v x^* regularne.

- $g_1, \ldots, g_m$ afine
- Ω konveksna, $f, g_1, \ldots, g_m$ konveksne in notranjost $D^\circ \ne \emptyset$
- vse množice vektorjev $\{\nabla g_i(x^*) \mid g_i(x^*) = 0\}$ linearno neodvisne

Zadostnost pogojev KKT za optimalnost:
Ω odprta, konveksna množica, $f, g_1, \ldots, g_m : \Omega \to \mathbb{R}$ konveksne in odvedljive
Če x^* ustreza KKT pogojem, je globalni minimum.

Za konveksni problem z $D^\circ \ne \emptyset$ so KKT pogoji $\iff$ x^* globalni minimum.

Celoštevilski linearni programi

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \le b \\ & x \ge 0 \\ & x \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Če želimo, da je $\delta = 1$ natanko tedaj ko je $x > 0$, dodamo pogoj:

$$\frac{x}{M} \ge \delta \ge Mx \qquad \delta \in \{0, 1\}$$

Kjer je M neko dovoj veliko število, da je vedno $\frac{x}{M} \le 1$.

Za $\delta_i \in \{0, 1\}$ se logični izrazi lahko pretvorijo v pogoje:

$$\begin{array}{ll} \delta_1 = 1 \vee \delta_2 = 1 \rightsquigarrow & \delta_1 + \delta_2 \ge 1 \\ \delta_1 = 1 \wedge \delta_2 = 1 \rightsquigarrow & \delta_1 \ge 1,\ \delta_2 \ge 1 \\ \delta_1 = 1 \implies \delta_2 = 1 \rightsquigarrow & 1 - \delta_1 + \delta_2 \ge 1,\ \delta_2 \ge \delta_1 \end{array}$$