### Optimizacijske naloge

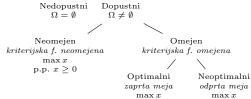
Optimizacijska naloga je  $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf, )$  kjer je:

- Ω množica dopustnih rešitev
- $f: \Omega \to \mathbb{R}$  kriterijska funkcija

 $x^* \in \Omega$  je optimalna rešitev problema  $(\Omega, f, \max)$ , če velja

$$\forall x \in \Omega : f(x) \le f(x^*)$$

# Optimizacijski problem



 $\text{p.p. } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{ p.p. } 0 \leq x \leq 1$ 

### Linearno programiranie

 $(\Omega, f, \min/\max)$  je linearni porgram, če je  $\Omega$  podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi (<, >) in je flinearna.

#### Standardna oblika linearnega pograma

Linearni porgram je v standardni obliki, če iščemo max in so vsi pogoji neenakosti ≤ in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{array}{lll} \max & c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \\ \text{p.p.} & a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ & & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \dots c_n]^T$$
  $b = [b_1 \dots b_m]^T$   $x = [x_1 \dots x_n]^T$ 

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{max} \quad c^T x \\ p.p. \quad Ax \le b \\ x \ge 0$$

Vsak linearen program lahko zapišemo v standardni obliki. Vse dele linearnega programa lahko preoblikujemo tako. da bodo v standardni obliki:

$$\min f(x) \leadsto \max(-f(x))$$

$$f(x) \ge b \leadsto -f(x) \le -b$$

$$f(x) = b \leadsto f(x) \le b \land f(x) \ge b$$

$$x_i \le 0 \leadsto x_i = -x_i'$$

$$x_i \ge 0 \leadsto x_i = x_i' - x_i'' \land x_i', x_i'' \ge 0$$

#### Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne porgrame z dvema spremenlijvkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradienta proti točki, ki je v preseku polporostorov pogojev in čim dlje od izhodišča.

#### Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak  $b_i < 0$ , moramo uporabiti dvofazno simpleksno metodo, sicer nadaljujemo.

Linearni porgram zapišemo v prvi slovar.

Vse spremenljivke  $x_1, \ldots, x_{n+m}$  so nenegativne. Spremenljivke na levi so bazne, na desni pa nebazne.

 $x_1, \ldots, x_n$  ... **prvotne** spremenljivke

$$x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$$
 ... **dopolnilne** spremenljivke

Slovar je dopusten, če so vse konstante (čelni brez x) na desni nenegativne.

Če je slovar dopusten, ima bazno dopustno rešitev: vse nebazne spremenlijske so 0 in kriterijska funkcija je tedaj z = 0

- Določimo:
  - vstopno spremenljivko: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
  - pivotno vrstico: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem neomejen in končamo.
  - izstopno spremenljivko: bazna spremenljivka v pivotni vrestici
- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenljivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenljivka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadniega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkiciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko spreminjamo glede na omejitve.

#### Dvofazna simpleksna metoda

Če je  $b \not \geq 0,$ uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti b<sub>i</sub> prištejemo  $x_0$ . Kriterijsko funkcijo pa spremenimo v  $\max -x_0$ 

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n$$

$$w = -x_0$$

Za vstopno spremenljivko izberemo  $x_0$  za pivotno vrstico pa tisto v kateri je b<sub>i</sub> najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo:  $x_0$  ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če w\* < 0, prvotni problem ni dopusten, sicer nadlajujemo z drugo fazo.

#### Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izbrišemo  $x_0$  in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

### Dualnost pri linearnem programiranju

Vsak linearni program P ima dualno obliko P':

$$\begin{array}{ccccc} \max & c^T x & & & \min & b^T y \\ \text{p.p.} & Ax \leq b & & \Longrightarrow & \text{p.p.} & A^T y \geq c \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0 \end{array}$$

$$P'' = P$$

#### Šibki izrek o dualnosti - ŠID

x dopustna rešitev za P, y dopustna rešitev za  $P' \implies$ 

$$c^T x < b^T y$$

x dopustna za P, y dopustna za P' in  $c^T x = b^T y$ 

x optimalna rešitev P, y optimalna rešitev P'

### Krepki izrek o dualnosti - KID

 $x^*$  optimalna rešitev  $P \implies$ 

optimalna rešitev 
$$P'$$
 in  $c^T x^* = b^T y^*$ 

Linearni program in njegov dual sta lahko:

	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	//kid
neomejen	✓	// <sub>ŠID</sub>	// <sub>ŠID, KID</sub>
optimalen	// <sub>KID</sub>	// <sub>ŠID, KID</sub>	<b>√</b>

#### Dualno dopolnjevanje

Naj bo x dopustna za P in y dopustna za P' tedaj je: x optimalna za P in y optimalna za P'  $\iff$ 

$$\forall i=1,\ldots,m: \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$

$$\forall j=1,\ldots,n:$$
  $x_j=0$  ali  $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i=c_j$ 

Ekvivalentno: x optimalna za P, y optimalna za  $P' \Leftrightarrow$ 

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i$$
 in 
$$x_j > 0 \implies \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = c_j \quad \forall j$$

### Uporaba izreka o dualnem dopolnjevanju

Želimo dokazati, da je x\* optimalna rešitev linearnega programa P.

- Preverimo, da je x\* dopustna rešitev.
- 2. Če je kakšna neenakost pri pogojih P izpolnjena s strogo neenakostjo, je pripadajoča dualna spremenljivka  $y_i^* = 0$ .

3. Če je kaka  $x_i^* > 0$ , je pripadajoča dualna neenakost v p' izpolniena z enakostio:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j$$

- 4. Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri y iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešliiv, x\* ni optimalna).
- 5. Preverimo ali je dobljena rešitev  $y^*$  dopustna. Če je, sta  $x^*$  in  $y^*$  optimalni.

### Dual splošnega problema

Splošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoji postavljeni z < lahko pa tudi z =. Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z  $x_i > 0$ .

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \leq b_i & \forall i=1,\ldots,m' \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i = b_i & \forall i=m'+1,\ldots,m \\ & x_i \geq 0 & \forall i=1,\ldots,n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^{m} a_i j y_i \leq c_j & \forall j=1,\ldots,n' \\ \sum_{i=1}^{m} a_i j y_i = c_j & \forall j=n'+1,\ldots,n \\ & y_i \geq 0 & \forall i=1,\ldots,m' \end{array}$$

enakost $\overset{\mathrm{dual}}{\longleftrightarrow}$ poljubna spremenljivka

 $neenakost \xrightarrow{dual} nenegativna spremenljivka$ 

### Dualno dopolnjevanje splošnega problema

x dopustna za P

y dopustna za P'

x optimalna za P in y optimalna za  $P' \Leftrightarrow$ 

$$\forall j=1,\ldots,n: \qquad \qquad x_j=0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i=c_j \qquad \forall i=1,\ldots,m': \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=b_i \quad \text{ali} \quad y_i=0$$

$$\forall j=1,\ldots,n'$$
: 
$$x_j=0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i=c_j$$

#### Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Naj bo P linearni program, ∃ neizrojena optimalna rešitev (v zadnjem slovarju so vse konstante > 0). Potem  $\exists \varepsilon > 0$ , da velia

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_i^* \Delta b_i$$

kjer je  $y^*$  optimalna rešitev duala,  $\Delta z^*$  sprememba optimalne vrednosti,  $\Delta b_i$  pa sprememba dense strani pogojev in  $|\Delta b_i| < \varepsilon$ .

Torej če desni strani pogojev v P prištejemo dovolj majhen  $\Delta b$ , se optimalna vrednost  $z^*$  programa Pspremeni za  $\Delta z^* = \Delta b^T u^*$ .

y\*nam tedaj da "tržno ceno" dobrin. Če želimo povečati dobrino  $b_i$ , se nam dobiček poveča za  $b_i y_i^*$ . Torej za enoto dobrine i ne smemo plačati več kot  $y_i^*$ .

### Matrične igre

Igro igrata 2 igralca. Prvi ima n. drugi pa m strategii.

Plačilna matrika A ima n vrstic in m stoplcev. Celica v i. vrstici in j. stolpcu predstavlja znesek, ki ga drugi plača prvemu, če prvi izbere strategijo i, drugi pa j. (Če je vrednost negativna, privi plača drugemu.)

Igralca igrata po principu najmanjšega tveganja: izbereta strategijo pri kateri v najslabšem primeru izgubita čim mani.

1. igralec: 
$$\max_{i} \min_{j} a_{ij} =: M_1$$

2. igralec: 
$$\min_{i} \max_{i} a_{ij} =: M_2$$

$$M_1 \leq M_2$$

 $(i_0,j_0)$ je **sedlo** plačilne matrike A,če je  $a_{i_0j_0}$  najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

A ima sedlo 
$$\iff M_1 = M_2 = a_{i_0 i_0}$$

Če ima A sedlo, je  $i_0$  optimalna strategija za prvega,  $j_0$ pa za drugega igralca. V tem primeru je  $(i_0, j_0)$  Nashevo ravnovesje in nobenemu igralcu se ne splača spremeniti strategije.

#### Mešana strategija

Igralca svoje strategije izbirata nakjučno z verjetnostjo  $x_i$ oziroma  $y_i$ .

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$
  $x_1 \ge 0$   $x_1 + \dots + x_n = 1$   
 $y = (y_1, \dots, y_n)$   $y_1 \ge 0$   $y_1 + \dots + y_m = 1$ 

Matematično upanje je povprečno izplačilo, če bi igralca igrala veliko iger. Vsako celico v plačilni matriki pomnožimo z verjetnostjo, da bo prišlo do tega izida, in vrednosti seštejemo.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_i = x^T A y$$

Če 1. igralec igra z neko mešano strategijo x, je

$$\min_{y} x^{T} A y = \min_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{i}$$

To pomeni, da se 2. igralec lahko na mešano strategijo optimalno brani z neko čisto strategijo  $y = (0, \ldots, 1, \ldots, 0).$ 

#### Iskanje optimalne strategije

Upoštevajoč, da se na mešano strategijo nasprotnik lahko brani z čisto strategijo, dobimo optimizacijska problema.

1. igralec išče 
$$\max_{x} \min_{y} x^T A y = \max_{x} \min_{j=1,...,m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

2. igralec išče 
$$\min_{y} \max_{x} x^{T} A y = \min_{y} \max_{i=1,...,n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{j}$$

Problema zapišemo kot linerana programa.

1. igralec:

$$\max \quad s$$

$$\text{p.p.} \quad -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i + s \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{ve} \end{bmatrix}_{\substack{v \in V \\ e \in E}} \quad a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}(e) = v \\ -1 & \text{za\"{c}etek}(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\text{Re\'{sitvi} $x$ in $y$ optimalni} \iff \forall ij \in E: \qquad x_{ij} = 0 \quad \forall \quad y_j - y_i = c_{ij}$$

2. igralec:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & t \\ \text{p.p.} & -\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j+t\geq 0 & \forall i=1,\ldots,n \\ & \sum_{j=1}^m y_j=1 \\ & y_j\geq 0 & \forall j=1,\ldots,m \end{array}$$

Opazimo, da sta si linearna programa dualna. Oba problema sta optimalna in imata enako optimalno vrednost. To je vrednost/strateško sedlo igre.

Strategiji  $x^*$  in  $y^*$  sta optimalni  $\iff$  sta dopustni in

$$\min_{j} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x_{i}^{*} = \max_{i} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_{j}^{*}$$

Igra je poštena ⇔ ima vrednost 0.

Igra je **simetrična**, če je  $A = -A^T$ . Tedaj ima vrednost 0 in je poštena.

#### Poenostavljanje plačilne matrike

Vektor x dominira x', če je  $\forall i : x_i > x'_i$ .

Če i. vrstica dominira i'. vrstico v plačilni matriki, lahko i'. vrstico odstranimo.

Če j. stoplec dominira j'. stolpec v plačilni matriki, lahko j. stolpec odstranimo.

S tem ne spremenimo optimalne vrednosti.

#### Problem razvoza

Imamo usmerjen graf G = (V, E). G je povezan kot neusmerjen graf.

 $b_v$  . . . poraba-proizvodnja v vozlišču  $v \in V$ 

 $c_e$  . . . cena povezave  $e \in E$ 

 $x_e$  . . . količina razvoza na povezavi  $e \in E$ 

Poraba mora biti enako velika kot proizvodnja.

$$\sum_{v \in V} b_v = 0$$

Rešitev problema je vrednost razvoza za vsako povezavo x<sub>e</sub>. Da je rešitev dopustna mora veljati

$$\forall e \in E : x_e > 0$$

$$\forall v \in V: \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = b_v$$

Kriterijska funkcija je vsota cen, ki jih bomo plačali za razvoz. Seveda jo želimo minimizirati.

$$\sum_{e \in E} c_e x_e = c^T x$$

Za problem razvoza lahko zapišemo linearni program in

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \max & b^T y \\ \text{p.p.} & Ax = b & p.p. & A^T y \leq c \end{array}$$

Kjer je A incidenčna matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_{ve} \end{bmatrix}_{\substack{v \in V \\ e \in E}} \qquad a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}(e) = v \\ -1 & \text{začetek}(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$ij \in E:$$
  $x_{ij} = 0 \quad \lor \quad y_j - y_i = c_i$ 

#### Simpleksna metoda na omrežiih

- Poiščemo drevesno dopustno rešitev x
- 2. Rešimo  $y_i+c_{ij}=y_j$  za  $ij\in T$ Začnemo s poljubnim vozliščem  $y_1 = 0$  iz tega lahko izračunamo vrednosti za vsa ostala vozlišča tako, da se premikamo iz začetnega vozlišča in če gremo po pravi smeri, ceno razvoza povečujemo, sicer pa zmanjšujemo

Če je  $y_i + c_{ij} \geq y_j$  za  $\forall ij \in E \setminus T$ , je x optimalna rešitev - končamo.

3. Če je  $y_i + c_{ij} < y_j$  za kak  $ij \in E \setminus T$ , je ij vstopna povezava. Dodamo jo v T in dobimo cikel.

$$t = \min\{x_e : e \text{ obratna}\}\$$

Na premih povezavah cikla x povečamo za t, na obratnih pa pomanjšamo za t. Povezava na kateri je minimum dosežen, je izstopna povezava in jo odstranimo iz drevesa. Tako dobimo novo vpeto drevo in se vrnemo na korak 2

Metoda se lahko zacikla. Ciklanju se izognemo tako, da izberemo koren  $r \in V$  in za izstopno povezavo izberemo najbližjo r.

#### Dvofazna simpleksna metoda na omrežiih

Z njo poiščemo začetno drevesno rešitev oziroma dokažemo, da ne obstaja

Skonstruiramo pomožen problem tako, da izberemo koren  $r \in V$  in originalnemu porblemu dodamo povezave za

- če je  $b_v > 0$ , dodamo umetno povezamo rv (če še ne obstaja), razvoz  $x_{rv} = b_v$ , cena  $c_v = 1$
- če je  $b_v < 0$ , dodamo umetno povezamo vr (če še ne obstaja), razvoz  $x_{rv} = -b_v$ , cena  $c_v = 1$

Cene originalnih povezav nastavimo na 0.

Rešimo pomožen problem razvoza. Če dobimo rešitev s ceno 0 (ne uporablja pomožnih povezav), je originalni problem dopusten in končna drevesna rešitev pomožnega problema je dopustna drevesna rešitev za prvotni problem.

Če je proizvodnja večja kot poraba, problem ni rešljiv, a lahko dodamo smetišče z zadostno porabo in ga z brezplačnimi povezavami povežemo z vozlišči s proizvodnio.

#### Celoštevilske rešitve

Za problem razvoza z  $b_v \in \mathbb{Z}$  velia

- če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev
- če obstaja optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilska optimalna rešitev

#### Königov izrek o plesnih parih

Dvojno stohastična matrika je matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  za

$$a_{ij} \ge 0$$
  $\forall i: \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$   $\forall j: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1$ 

Permutacijska matrika je matrika  $P \in \{0,1\}^{n \times n}$ , ki ima v vsakem stolpcu in vrstici natanko eno 1.

Naj bo A dvojno stohastična matrika, potem obstaja premutacijska matrika P, da velja  $p_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0$ .

#### Königov izrek o plesnih parih

Naj boGr-regularen graf, potem obstaja popolno prirejanje.

### Problem razvoza z omeiitvami

Imamo usmerjen graf G = (V, E). G je povezan kot neusmerjen graf.

 $b_v \in \mathbb{R}$  ... poraba-proizvodnja v vozlišču  $v \in V$  $c_e \in \mathbb{R}$  ... cena povezave  $e \in E$  $u_e \in [0, \infty]$  ... kapaciteta povezave  $e \in E$  $x_e \in [0, u_e]$  ... količina razvoza na povezavi  $e \in E$ 

Problem razvoza z omejitvami lahko zapišemo kot linearen

$$\begin{array}{ll}
\min & c^T x \\
\text{p.p.} & Ax = b \\
& x \le u \\
& x > 0
\end{array}$$

 $x_e = 0 \rightarrow \text{prazna povezava}$ → nasičena povezava

Dopustna rešitev x je drevesna dopustna rešitev, če obstaja vpeto drevo T, da so vse povezave izven drevesa prazne ali nasičena.

#### Postopek reševanja

- Poiščemo začetno dopustno drevesno rešitev x z drevesom T
- Izračunamo ceno razvoza y za posamezna vozlišča
- Poiščemo vstopno povezavo ii ∉ T, ki ustreza:

- prazna:  $x_{ij} = 0$ ,  $y_i + c_{ij} < y_j \Longrightarrow$  $\min (\{x_e : e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e : e \text{ prema}\})$ na premih povečamo za t, na obratnih pomanišamo za t

- nasičena:  $x_{ij} = u_{ij}, y_i + c_{ij} > y_j \implies$  $\min \left( \left\{ x_e : e \text{ prema} \right\} \cup \left\{ u_e - x_e : e \text{ obratna} \right\} \right)$ na premih pomanjšamo za t, na obratnih povečamo za t

Začetno dopustno drevesno rešitev poiščemo s pomožnim problemom:

Izberemo koren  $r \in V$ . Za vsako vozlišče v:

- $\bullet \ b_v < 0$  (proizvodnja): Če že obstaja povezava vr z kapaciteto  $u_{vr} \ge -b_v$ , nastavimo razvoz na tej povezavi na  $b_v$ , sicer dodamo povezavo vr z kapaciteto ∞ (dovolimo tudi več povezav med vozlišči).
- $b_v \geq 0$  (poraba): Če že obstaja povezava rv z kapaciteto  $u_{rv} \geq b_v$ , nastavimo razvoz na tej povezavi na  $-b_v$ , sicer dodamo povezavo rv z kapaciteto  $\infty$ .

Umetne (dodane) povezav imajo ceno 1, prvotne pa 0. Prvotni problem je dopusten ⇔ vrednost pomožnega problema enaka 0.

### Pretoki in prerezi

G=(V,E) ... usmerjen graf $s,t\in V \quad \dots \quad \text{začetno in končno vozlišče}$   $u_e\in[0,\infty)$  ... kapaciteta povezave

Iščemo pretok $x_e,$ da veljajo Kirchoffovi zakoni in  $0 \leq x_e \leq u_e.$ 

$$\sum_{\mathrm{konec}(e)=v} x_e = \sum_{\mathrm{za\check{c}etek}(e)=v} x_e \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$$

Radi bi maksimizirali pretok:

$$\sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=t} x_e = v$$

#### Prevedba na problem razvoza

$$b_v = 0 \quad \forall v \in V \qquad c_e = 0 \quad \forall e \in E$$

 $u_e$  ostane nespremenjen

Dodamo povezavo ts z kapaciteto  $u_{ts} = \infty$  in ceno  $c_{ts} = -1$ .

#### Povečujoča pot

Zaporedje  $s=v_0,v_1,\ldots,v_k=t,$ da  $\forall i=1,\ldots,k$ velja:

$$\begin{aligned} v_{i-1}v_i \in E, \ x_{v_{i-1}v_i} < u_{v_{i-1}v_i} \\ \text{ali} \\ v_iv_{i-1} \in E, \ x_{v_{i-1}v_i} > 0 \end{aligned}$$

Pretok na premih povezavah povečujoče poti povečamo za  $\varepsilon$  na obratnih pa pomanjšamo.

$$\varepsilon = \min\{x_e \ : \ e \ \text{obratna}\} \cup \{u_e - x_e \ : \ e \ \text{prema}\}$$

#### Prerez

Podmnožica  $C\subseteq V$ je prerez, če velja  $s\in C$  in  $t\notin C.$  Kapaciteta prereza je:

$$\sum_{\substack{i \in C \\ j \notin C}} u_{ij} \in [0, \infty)$$

Prostornina pretoka < kapaciteta prereza.

Če je prostornina pretoka = kapaciteti prerza, je pretok maksimalen in prerez minimalen.

Za problem pretoka velja natanko eno:

- $\bullet \;\; neomejen:$ kapaciteta vsakega prereza je $\infty$
- optimalen: ∃ prerez katerega kapaciteta je enaka maksimalnemu pretoku

### Prirejanja in pokritja

Naj bo G = (V, E) graf.

 $M\subseteq E$  je **prirejanje**, če  $\forall e,f\in M,e\neq f\implies e\cap f=\emptyset$   $P\subseteq V$  je **pokritje**, če  $\forall e\in E\ \exists v\in P:\ v\in E$ 

 $\mu(G)$  = velikost največjega prirejanja

 $\tau(G)$  = velikost najmanjšega pokritja

M prirejanje, P pokritje  $\Longrightarrow |M| < |P|$ 

Če je |M|=|P|, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje in  $\mu(G)=\tau(G)=|M|=|P|$ .

V splošnem velja le  $\mu(G) \leq \tau(G)$ , za dvodelne grafe pa  $\mu(G) = \tau(G)$ .

 $e \in E$  je **vezana**, če  $e \in M$ , sicer pa je **prosta**  $v \in V$  je **vezano**, če  $\exists e \in M : v \in e$ , sicer pa je **prosto** 

**Alternirajoča pot** je pot na kateri se izmenjujejo proste in vezane povezave.

 ${\bf Povečujoča}$  pot je alternirajoča pot, ki se začen in konča v prostem vozlišču.

Če na povečujoči poti zamenjamo proste in vezane povezave, dobimo za 1 večje prirejanje.

Mje največje prirejanje  $\iff$  ne obstaja povečujoča pot.

#### Madžarska metoda

G=(V,E)dvodelni graf,  $V=X\cup Y,\,M$  prirejanje  $S=\{\text{prosta vozlišča v }X\} \qquad T=\emptyset$ 

Vsak korak:

$$S' = S \cup \left\{ egin{array}{ll} \operatorname{vozlišča} & v \; X, \; \operatorname{do \; katerih \; lahko \; iz} \; T \\ \operatorname{pridemo \; po \; vezanih \; povezavah} \end{array} \right\}$$
  $T' = T \cup \left\{ egin{array}{ll} \operatorname{vozlišča} & v \; Y, \; \operatorname{do \; katerih \; lahko \; iz} \; S \\ \operatorname{pridemo \; po \; prostih \; povezavah} \end{array} \right\}$ 

Če T vsebuje prosto vozlišče, imamo povečujočo pot, ki jo uporabimo za povečanje prirejanja.

Sicer pa pridemo do koraka kjer je T' = T in S' = S. V tem primeru je M največje prirejanje.

#### Hallov izrek

G = (V, E)dvodelni graf,  $V = X \cup Y$ 

 $\exists$  popolno prirejanje iz X v  $Y \iff \forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$ 

#### Madžarska metoda z utežmi

Imamo plon graf  $K_{n,n}$ ; povezava med  $x_i$  in  $y_j$  ima utež  $c_{ij}$ 

$$c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Popolno prirejanje je podano z  $\pi \in S_n$ :  $x_i \sim y_{\pi(i)}$ .

Iščemo prirejanje z najmanjšo utežjo:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)}$$

Interpretacija: Razporeditev n opravi n ljudem.

#### Madžarska metoda - postopek

- 1. Od vsake vrstice odštejemo njen minimum. Od vsakega stolpca odštejemo njegov minimum. V vsaki vrstici in stoplpcu je vsaj ena ničla
- 2. Pokrijemo vse ničle v matriki pokrijemo z manj kot n vrsticami in stolpci.

$$\varepsilon:=$$
najmanjše nepokrito polje $>0$ 

- 2× pokritim poljem prištejemo  $\varepsilon$
- $\bullet$  nepokritim pa odštejemo  $\varepsilon$
- 3. Če ne najdemo takih vrstic in stolpcev, lahko najdemo n ničel v različnih vrsticah in stolpcih. To nam daje minimalno popolno prirejanje.

## Iskanje najkrajše poti

 $obiskan(v) \leftarrow JA$ 

Pregled v širino (BFS) O(|V| + |E|)

 $\begin{array}{ll} \textit{whod} \colon \text{neutezen, neusmerjen graf } G, \text{ zacetno vozlisce } r \\ \textit{izhod} \colon \text{razdalje med vozliscem } r \text{ in ostalimi} \\ Q \leftarrow r \\ d(r) \leftarrow 0 \\ \pi(r) \leftarrow \text{NULL} \\ \text{obiskan}(r) \leftarrow \text{NE} \\ \textit{za vosk } v \in V \setminus \{r\} \colon \\ d(v) \leftarrow \infty \\ \pi(v) \leftarrow \text{NULL} \\ \text{obiskan}(v) \leftarrow \text{NE} \\ \textit{dokler } Q \neq \emptyset \colon \\ v \in Q \\ Q \leftarrow Q \setminus v \end{array}$ 

$$za \ vsak \ u \in N(v)$$
:
 $ce \ \text{obiskan}(u) = \text{NE}$ :
 $d(u) \leftarrow d(v) + 1$ 
 $\pi(u) = v$ 
 $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$ 

#### Dijkstrov algoritem

```
\mathit{vhod}: usmerjen, utezen (w_e \ge 0) graf G = (V, E), koren r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
d(r) \leftarrow 0
\pi(r) \leftarrow \text{NULL}
za vsak v \in V \setminus \{r\}:
     d(v) \leftarrow \infty
     \pi(v) \leftarrow \text{NULL}
Q \leftarrow \dot{V}
dokler Q \neq \emptyset:
     v \leftarrow \text{element } Q \neq \min d
     Q \leftarrow Q \setminus v
     ce \ d(v) = \infty:
          koncamo
           za\ vsak\ u\in N(v)\cap Q:
                 ce d(u) > d(v) + w_{vu}:
                       d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}
                       \pi(u) \leftarrow v
```

#### Aciklični graf

 $\mathit{vhod}$ : utezen, usmerjen graf G = (V, E) brez ciklov izhod: topoloska urejenost  $\varphi$  $za\ vsak\ v\in V$ :  $st(v) \leftarrow deg^+(v)$ dokler  $\exists v \in V : st(v) = 0$ :  $\varphi(v) \leftarrow i$ za vse  $vu \in E$ :  $\operatorname{st}(u) \leftarrow \operatorname{st}(u) - 1$  $i \leftarrow i + 1$  $ce \ i \leq |V|$ : vrni FALSE sicer : vhod: topoloska urejenost  $\varphi$ , koren rizhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi  $d(r) \leftarrow 0$  $\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$ za vsak  $v \in V \setminus \{r\}$ :  $d(v) \leftarrow \infty$  $\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$ 

### Bellman-Ford

 $v \leftarrow \varphi^{-1}(j)$ 

 $za \ vsak \ vu \in E$ :

 $i \leftarrow \varphi(r)$ 

vrni d m

#### Floyd-Warshellov algoritem

 $ce \ d(u) = d(v) + w_{ue}$ :

 $\pi(u) \leftarrow v$ 

 $d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$ 

 $za \ vsak \ j \in \{i, i+1, ..., |V|\}:$ 

## Konveksna optimizacija

#### Afine množice

Množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$  je **afina**, če velja:

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Premica med dvema poljibnima točkama iz A mora biti vsebovana v A.

#### Afina kombinacija:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$
  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ 

Naslednie trditve so ekvivalentne:

- A je afina
- $\bullet\,$ vsaka afina kombinacija vektorjev iz Aje vA
- $A = V + a = \{v + a \mid v \in V\}$ za nek  $V \in \mathbb{R}^n$  linearen podprostor in  $a \in \mathbb{R}^n$

#### Konveksne množice

Množica  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je **konveksna**, če velia:

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Daljica med dvema poljibnima točkama iz A mora biti usebovana v A

Množica ni konveksna, če

$$\exists x,y \in A \ \exists \lambda \in [0,1] : (1-\lambda)x + \lambda y \not \in A$$

#### Konveksna kombinacija:

$$\begin{aligned} &\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\\ &\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1 & &\alpha_1+\cdots+\alpha_n\geq 0 \end{aligned}$$

 $A fin\ podprostor\ (= {\tt zaprt}\ {\tt za}\ a fine\ kokmbinacije = {\tt premaknjen}\ linearen\ prostor)\ je\ konveksen.$ 

Presek konveksnih množic  $A_i, \forall i \in I$  je konveksen.

Unija koknveksnih množic pa ni nujno konveksna.

Akonveksna  $\iff$ poljubna konveksna kombinacija vektorjev iz AvA.

#### Konveksna ogrinjača:

$$Conv(A) = \varphi(A) = \bigcap_{\substack{K \text{ konv.} \\ A \subseteq K}} K$$

- $A \subset \operatorname{Conv}(A)$
- Conv(A) je konveksna
- $A \text{ konveksna} \implies \text{Conv}(A) = A$
- $A \subseteq B$ , B konveksna  $\implies$  Conv $(A) \subseteq B$
- Conv(A) = {konveksna kombinacija vektorjev iz A}

Ekstremna točka:  $a \in A^{\text{konv}}$  je ekstremna, če

$$\forall x, y \in A, \ x, y \neq a : \ \nexists \lambda \in [0, 1] : \ a = (1 - \lambda)x + \lambda y$$

Točka ni ekstremna, če laži v notranjosti kake daljice med točkama iz A.

Ekstremne točke vedno ležijo na robu. Robne toče pa niso nujno ekstremne.

### Konveksni stožci

 $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je konveksni stožec, če

$$\forall x, y \in A \ \forall \lambda, \mu > 0 : \ \lambda x + \mu y \in A$$

Konveksni stožec, je konveksna množica, ni pa nujno obratno.

Vsak linearni podprostor je konveksen stožec.

Konveksni stožec napet na  $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ :

$$S(a_1,\ldots,a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_n \ge 0\}$$

**Dualni stožec** množice  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$A^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T a \ge 0 \ \forall a \in A \right\}$$

V A\* so vektorji, ki z vsemi vektorji iz A tvorijo ostri kot.

$$A \subset A^{**}$$

#### Farkaševa lema

Geometriiska oblika:

$$S^{**}(a_1,\ldots,a_n) = S(a_1,\ldots,a_n)$$

### Algebraična oblika:

Prva varianta

$$\exists x \ge 0: \ Ax = b \iff \forall y: \ A^T y \ge 0 \implies b^T y \ge 0$$
$$b \in S(a_1, \dots, a_n) \iff b \in S^{**}(a_1, \dots, a_n)$$

 $Druga\ varianta:$ 

$$\exists x \geq 0: \ Ax \leq b \iff \forall y \geq 0: \ A^T y \geq 0 \implies b^T y \geq 0$$

#### Konveksne funkcije

Naj bo $K^{\mathrm{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n;$ funkcija  $f:K \to \mathbb{R}$ je konveksna, če

$$\forall x, y \in K \ \forall \lambda \in [0, 1]$$
:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \le (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Funkcija je konveksna, če je definirana na konveksnem območju in graf vedno leži pod zveznico dveh točk na grafu. Če zgoraj velja stroga neenakost, je funkcija **strogo** konveksna.

f strogo konveksna  $\iff H_f > 0$ .

 $\check{\mathbf{C}}\mathbf{e}$ ima strogo konveksna funkcija maksimum, je v $ekstremni\ točki.$ 

#### Konkavne funkcije

Naj bo  $K^{\text{konv}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ; funkcija  $f: K \to \mathbb{R}$  je konkavna, če

$$\forall x, y \in K \ \forall \lambda \in [0, 1]$$
:

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \ge (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Če je f konveksna, je -f konkavna.

Funkcija f je **afina**  $\iff$  konveksna in konkavna

- $f: K \to \mathbb{R}, c \ge 0, f$  konveksna  $\implies c \cdot f$  konveksna
- $f, g: K \to \mathbb{R}, f, g$  konveksni  $\Longrightarrow f + g$  konveksna
- $g:K\to\mathbb{R}^n$  afina  $\Longrightarrow g(K)$  konveksna  $f:g(K)\to\mathbb{R}$  konveksna  $\Longrightarrow f\circ g$  konveksna
- $g: K \to \mathbb{R}, f: \operatorname{Conv}(g(K)) \to \mathbb{R}, f, g$  konveksni f naraščujoča  $\Longrightarrow f \circ g$  konveksna

### Konveksne funkcije in optimizacija

Naj bo $A\subseteq\mathbb{R}^n$  in  $f:A\to\mathbb{R}.$ 

- f ima v  $x \in A$  globalni maksimum, če  $\forall x' \in A: f(x) > f(x')$
- f ima v  $x \in A$  lokalni maksimum, če

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall x' \in A \cap K_{\varepsilon}(x) : \ f(x) \ge f(x')$$

Če je *x* lokalni minimum konveksne funkcije, je tudi globalni minimum.

#### Preverjanje konveksnosti funkcije

#### S prvim odvodom

 $f: K^{\text{konv, odp}} \to \mathbb{R}$  odvedlijva

$$f$$
 konveksna  $\iff f(y) \ge f(x) + (\nabla f(x))^T (y - x)$ 

#### Z drugim odvodom

 $f:\Omega^{\text{odp}}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva Hessejeva matrika:

$$H_f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^n$$

f konveksna  $\iff H_f \ge 0$ 

$$f:\Omega\to\mathbb{R}$$
konveksna  $\iff h_{x,y}:I_{x,y}\to\mathbb{R},$   
 $h_{x,y}(\lambda)=f(x+\lambda y),$ konveksna za $\forall x\in\mathbb{R}\;\forall y\in\mathbb{R}^n$   
 $I_{x,y}=\{\lambda\in\mathbb{R}:x+\lambda y\in\Omega\}$ 

**Lastne vrednosti** matrike A so ničle karakterističnega polinoma  $det(A - \lambda I)$ .

**Lastni podprostor** vrednosti  $\lambda$  je  $Ker(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ .

 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ je **diagonalizabilna**, če ima nlinearno neodvisnih lastnih vektorjev. Tedaj je  $A=PDP^{-1},$  kjer je D diagonalna z lastnimi vrednostmi na diagonali, P pa obrnljiva z lastnimi vektorji v stolpcih.

Če je A simetrična  $(A^T=A)$ , so vse lastne vrednosti realne in A je diagonalizabilna v ortonormirani bazi (lastni vektorji različnih lastnih vrednosti so  $\bot$ ).

Matrika A je pozitivno semidefinitna (A > 0)

$$\iff$$
vse lastne vrednosti  $\lambda \geq 0$ 

$$\iff x^T A x = \sum_{i,j=1}^n \ge 0$$

$$\iff$$
 vse podteterminante  $\geq 0$ 

Matrika 
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
 je  $A \ge 0 \iff ac - b^2 \ge 0$  in  $a \ge 0$ 

### Konveksne funkcije in vezani ekstremi

### Celoštevilski linearni programi