

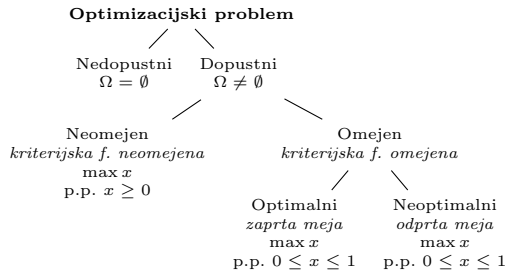
Optimizacijske naloge

Optimizacijska naloga je $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf,)$ kjer je:

- Ω množica dopustnih rešitev
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kriterijska funkcija

$x^* \in \Omega$ je *optimalna* rešitev problema (Ω, f, \max) , če velja

$$\forall x \in \Omega : f(x) \leq f(x^*)$$



Linearno programiranje

$(\Omega, f, \min/\max)$ je linearni porgram, če je Ω podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi (\leq, \geq) in je f linearna.

Standardna oblika linearnega pograma

Linearni porgram je v *standardni* obliki, če iščemo \max in so vsi pogoji neenakosti \leq in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{p.p.} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \dots c_n]^T \quad b = [b_1 \dots b_m]^T \quad x = [x_1 \dots x_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Vsak linearen program lahko zapišemo v standardni obliki.

Vse dele linearnega programa lahko preoblikujemo tako, da bodo v standardni obliki:

$$\begin{array}{ll} \min f(x) \rightsquigarrow \max(-f(x)) \\ f(x) \geq b \rightsquigarrow -f(x) \leq -b \\ f(x) = b \rightsquigarrow f(x) \leq b \wedge f(x) \geq b \\ x_i \leq 0 \rightsquigarrow x_i = -x'_i \\ x_i \geq 0 \rightsquigarrow x_i = x'_i - x''_i \wedge x'_i, x''_i \geq 0 \end{array}$$

Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne porgame z dvema spremenljivkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradienta proti točki, ki je v preseku polporostorov pogojev in čim dlje od izhodišča.

Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak $b_i < 0$, moramo uporabiti **dvofazno simpleksno metodo**, sicer nadaljujemo.

Linearni porgram zapišemo v *prvi* slovar.

$$\begin{array}{c} \overbrace{x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n}^{1. \text{ slovar}} \\ \vdots \\ \hline x_{n+m} = b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n \\ z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \end{array}$$

Vse spremenljivke x_1, \dots, x_{n+m} so nenegativne.

Spremenljivke na levi so **bazne**, na desni pa **nebazne**.

$$\begin{array}{lll} x_1, \dots, x_n & \dots & \text{prvotne spremenljivke} \\ x_{n+1}, \dots, x_{n+m} & \dots & \text{dopolnilne spremenljivke} \end{array}$$

Slovar je **dopusten**, če so vse konstante (čelni brez x) na desni nenegativne.

Če je slovar dopusten, ima *bazno* dopustno rešitev: vse *nebazne* spremenljivke so 0 in kriterijska funkcija je tedaj $z = 0$.

- Določimo:
 - vstopno spremenljivko**: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
 - pivotno vrstico**: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem **neomejen** in končamo.
 - izstopno spremenljivko**: bazna spremenljivka v pivotni vrstici
- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenljivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenljivka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadnjega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko spreminjamo glede na omejitve.

Dvofazna simpleksna metoda

Če je $b \not\geq 0$, uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

Prva faza

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti b_i prištejemo x_0 . Kriterijsko funkcijo pa spremenimo v $\max -x_0$.

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$\begin{array}{c} x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \hline x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n \\ w = -x_0 \end{array}$$

Za vstopno spremenljivko izberemo x_0 za pivotno vrstico pa tisto v kateri je b_i najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo: x_0 ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če $w^* < 0$, prvotni problem ni dopusten, sicer nadlajujemo z drugo fazo.

Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izberimo x_0 in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Dualnost pri linearnem programiranju

Vsak linearni program P ima dualno obliko P' :

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \implies \begin{array}{lll} \min & b^T y & \\ \text{p.p.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$
$$P'' = P$$

Šibki izrek o dualnosti - ŠID

x dopustna rešitev za P , y dopustna rešitev za $P' \implies$

$$c^T x \leq b^T y$$

x dopustna za P , y dopustna za P' in $c^T x = b^T y \implies$

x optimalna rešitev P , y optimalna rešitev P'

Krepki izrek o dualnosti - KID

x^* optimalna rešitev $P \implies$

$$\text{optimalna rešitev } P' \text{ in } c^T x^* = b^T y^*$$

Linearni program in njegov dual sta lahko:

	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	//KID
neomejen	✓	//ŠID	//ŠID, KID
optimalen	//KID	//ŠID, KID	✓

Dualno dopolnjevanje

Naj bo x dopustna za P in y dopustna za P' tedaj je:

x optimalna za P in y optimalna za $P' \iff$

$$\forall i = 1, \dots, m : \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0$$

$$\forall j = 1, \dots, n : \quad x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$$

Ekvivalentno: x optimalna za P , y optimalna za $P' \Leftrightarrow$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i$$

in

$$x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \quad \forall j$$

Uporaba izreka o dualnem dopolnjevanju

Želimo dokazati, da je x^* optimalna rešitev linearnega programa P .

- Preverimo, da je x^* dopustna rešitev.
- Če je kakšna neenakost pri pogojih P izpolnjena s strogo neenakostjo, je pripadajoča dualna spremenljivka $y_i^* = 0$.

- Če je kaka $x_j^* > 0$, je pripadajoča dualna neenakost v P' izpolnjena z enakostjo:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i = c_j$$

- Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri y iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešljiv, x^* ni optimalna).
- Preverimo ali je dobljena rešitev y^* dopustna. Če je, sta x^* in y^* optimalni.

Dual splošnega problema

Splošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoji postavljeni $z \leq$ lahko pa tudi $z =$. Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z $x_j \geq 0$.

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j & \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m' \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i = b_i & \forall i = m' + 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i & \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j & \forall j = 1, \dots, n' \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j & \forall j = n' + 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, m' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{enakost} \xleftrightarrow{\text{dual}} \text{poljubna spremenljivka} \\ \text{neenakost} \xleftrightarrow{\text{dual}} \text{nenegativna spremenljivka} \end{array}$$

Dualno dopolnjevanje splošnega problema

x dopustna za P
 y dopustna za P'
 x optimalna za P in y optimalna za $P' \Leftrightarrow$

$$\begin{array}{lll} \forall i = 1, \dots, m' : & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i & \text{ali} \quad y_i = 0 \\ \forall j = 1, \dots, n' : & x_j = 0 & \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \end{array}$$

Ekonomski pomen dualnih spremenljivk

Naj bo P linearni program, \exists neizrojena optimalna rešitev (v zadnjem slovarju so vse konstante > 0). Potem $\exists \varepsilon > 0$, da velja

$$\Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_i^* \Delta b_i$$

kjer je y^* optimalna rešitev duala, Δz^* sprememba optimalne vrednosti, Δb_i pa sprememba dense strani pogojev in $|\Delta b_i| < \varepsilon$.

Torej če desni strani pogojev v P prištejemo dovolj majhen Δb , se optimalna vrednost z^* programa P spremeni za $\Delta z^* = \Delta b^T y^*$.

y^* nam tedaj da "tržno ceno" dobrin. Če želimo povečati dobrino b_i , se nam dobiček poveča za $b_i y_i^*$. Torej za enoto dobrine i ne smemo plačati več kot y_i^* .

Matrične igre

Igro igrata 2 igralca. Prvi ima n , drugi pa m strategij.

Plačilna matrika A ima n vrstic in m stolpcev. Celica v i . vrstici in j . stolpcu predstavlja znesek, ki ga drugi plača prvemu, če prvi izbere strategijo i , drugi pa j . (Če je vrednost negativna, privi plača drugemu.)

Igralca igrata po principu najmanjšega tveganja: izbereta strategijo pri kateri v najslabšem primeru izgubita čim manj.

1. igralec:	$\max_i \min_j a_{ij} =: M_1$
2. igralec:	$\min_j \max_i a_{ij} =: M_2$
$M_1 \leq M_2$	

(i_0, j_0) je **sedlo** plačilne matrike A , če je $a_{i_0 j_0}$ najmanjši v svoji vrstici in največji v svojem stolpcu.

A ima sedlo	⟺	$M_1 = M_2 = a_{i_0 j_0}$
---------------	-----------------------------	---------------------------

Če ima A sedlo, je i_0 optimalna strategija za prvega, j_0 pa za drugega igralca. V tem primeru je (i_0, j_0) *Nashevo ravnovesje* in nobenemu igralcu se ne splača spremeniti strategije.

Mešana strategija

Igralca svoje strategije izbirata naključno z verjetnostjo x_i oziroma y_j .

$x = (x_1, \dots, x_n)$	$x_1 \geq 0$	$x_1 + \dots + x_n = 1$
$y = (y_1, \dots, y_n)$	$y_1 \geq 0$	$y_1 + \dots + y_m = 1$

Matematično upanje je povprečno izplačilo, če bi igralca igrala veliko iger. Vsako celico v plačilni matriki pomnožimo z verjetnostjo, da bo prišlo do tega izida, in vrednosti seštejemo.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) x_i = x^T A y$$

Če 1. igralec igra z neko mešano strategijo x , je

$$\min_y x^T A y = \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$$

To pomeni, da se 2. igralec lahko na mešano strategijo optimalno brani z neko **čisto strategijo** $y = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Iskanje optimalne strategije

Upoštevajoč, da se na mešano strategijo nasprotnik lahko brani z čisto strategijo, dobimo optimizacijska problema.

- igralec išče $\max_x \min_y x^T A y = \max_x \min_{j=1, \dots, m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$
- igralec išče $\min_y \max x^T A y = \min_y \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$

Problema zapišemo kot linerana programa.

- igralec*:

max	s
p.p.	$-\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i + s \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$
	$\sum_{i=1}^n x_i = 1$
	$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

- igralec*:

min	t
p.p.	$-\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j + t \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
	$\sum_{j=1}^m y_j = 1$
	$y_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$

Opazimo, da sta si linearna programa dualna. Oba problema sta optimalna in imata enako optimalno vrednost. To je **vrednost/strateško sedlo** igre.

Strategiji x^* in y^* sta optimalni ⟺ sta dopustni in velja

$$\min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^* = \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^*$$

Igra je **poštena** ⟺ ima vrednost 0.

Igra je **simetrična**, če je $A = -A^T$. Tedaj ima vrednost 0 in je poštena.

Poenostavljanje plačilne matrike

Vektor x **dominira** x' , če je $\forall i : x_i \geq x'_i$.

Če i . vrstica dominira i' . vrstico v plačilni matriki, lahko i' . vrstico odstranimo. Če j . stoplec dominira j' . stolpec v plačilni matriki, lahko j . stolpec odstranimo.

S tem ne spremenimo optimalne vrednosti.

Problem razvoza

Imamo usmerjen graf $G = (V, E)$. G je povezan kot neusmerjen graf.

b_v	\dots	poraba—proizvodnja v vozlišču $v \in V$
c_e	\dots	cena povezave $e \in E$
x_e	\dots	količina razvoza na povezavi $e \in E$

Poraba mora biti enako velika kot proizvodnja.

$$\sum_{v \in V} b_v = 0$$

Rešitev problema je vrednost razvoza za vsako povezavo x_e . Da je rešitev dopustna mora veljati

$$\forall e \in E : \; x_e \geq 0$$

$$\forall v \in V : \; \sum_{\text{konec}(e)=v} x_e - \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e = b_v$$

Kriterijska funkcija je vsota cen, ki jih bomo plačali za razvoz. Seveda jo želimo minimizirati.

$$\sum_{e \in E} c_e x_e = c^T x$$

Za problem razvoza lahko zapišemo linearni program in njegov dual.

$$\begin{array}{llll} \min & c^T x & \max & b^T y \\ \text{p.p.} & Ax = b & \text{p.p.} & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & \end{array}$$

Kjer je A incidenčna matrika

$$A = \left[a_{ve} \right]_{\substack{v \in V \\ e \in E}} \qquad a_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{konec}(e) = v \\ -1 & \text{začetek}(e) = v \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Rešitvi } x \text{ in } y \text{ optimalni} & \iff & & \\ & & \forall ij \in E : & x_{ij} = 0 \quad \vee \quad y_j - y_i = c_{ij} \end{array}$$

Simpleksna metoda na omrežjih

- Poiščemo drevesno dopustno rešitev x
- Rešimo $y_i + c_{ij} = y_j$ za $ij \in T$
Začnemo s poljubnim vozliščem $y_1 = 0$ *iz tega lahko izračunamo vrednosti za vsa ostala vozlišča tako, da se premikamo iz začetnega vozlišča in če gremo po pravi smerti, ceno razvoza povečujemo, sicer pa zmanjšujemo*
Če je $y_i + c_{ij} \geq y_j$ za $\forall ij \in E \setminus T$, je x optimalna rešitev - končamo.
- Če je $y_i + c_{ij} < y_j$ za kak $ij \in E \setminus T$, je ij **vstopna povezava**. Dodamo jo v T in dobimo cikel.

$$t = \min \{ x_e : e \text{ obratna} \}$$

Na premih povezavah cikla x povečamo za t , na obratnih pa pomanjšamo za t . Povezava na kateri je minimum dosežen, je **izstopna povezava** in jo odstranimo iz drevesa. Tako dobimo novo vpeto drevo in se vrnemo na korak 2.

Metoda se lahko zacikla. Ciklanju se izognemo tako, da izberemo koren $r \in V$ in za izstopno povezavo izberemo najbližjo r .

Dvofazna simpleksna metoda na omrežjih

Z njo poiščemo začetno drevesno rešitev oziroma dokažemo, da ne obstaja.

Skonstruiramo pomožen problem tako, da izberemo koren $r \in V$ in originalnemu problemu dodamo povezave za $\forall v \in V$:

- če je $b_v \geq 0$, dodamo umetno povezavo rv (če še ne obstaja), razvoz $x_{rv} = b_v$, cena $c_v = 1$
- če je $b_v < 0$, dodamo umetno povezavo vr (če še ne obstaja), razvoz $x_{rv} = -b_v$, cena $c_v = 1$

Cene originalnih povezav nastavimo na 0.

Rešimo pomožen problem razvoza. Če dobimo rešitev s ceno 0 (ne uporabljamo pomožnih povezav), je originalni problem dopusten in končna drevesna rešitev pomožnega problema je dopustna drevesna rešitev za prvotni problem.

Če je proizvodnja večja kot poraba, problem ni rešljiv, a lahko dodamo **smetišče** z zadostno porabo in ga z brezplačnimi povezavami povežemo z vozlišči s proizvodnjo.

Celoštevilske rešitve

Za problem razvoza z $b_v \in \mathbb{Z}$ velja:

- če obstaja dopustna rešitev, obstaja tudi celoštevilska dopustna rešitev
- če obstaja optimalna rešitev, obstaja tudi celoštevilska optimalna rešitev

Königov izrek o plesnih parih

Dvojno stohastična matrika je matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ za katero velja:

$$a_{ij} \geq 0 \qquad \forall i : \; \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \qquad \forall j : \; \sum_{i=1}^m a_{ij} = 1$$

Permutacijska matrika je matrika $P \in \{0, 1\}^{n \times n}$, ki ima v vsakem stolpcu in vrstici natanko eno 1.

Naj bo A dvojno stohastična matrika, potem obstaja premutacijska matrika P , da velja $p_{ij} > 0 \implies a_{ij} > 0$.

Königov izrek o plesnih parih

Naj bo G r -regularen graf, potem obstaja popolno prirejanje.

Problem razvoza z omejitvami

Imamo usmerjen graf $G = (V, E)$. G je povezan kot neusmerjen graf.

$b_v \in \mathbb{R}$	\dots	poraba—proizvodnja v vozlišču $v \in V$
$c_e \in \mathbb{R}$	\dots	cena povezave $e \in E$
$u_e \in [0, \infty]$	\dots	kapaciteta povezave $e \in E$
$x_e \in [0, u_e]$	\dots	količina razvoza na povezavi $e \in E$

Problem razvoza z omejitvami lahko zapišemo kot linearen program:

$$\begin{array}{llll} \min & c^T x & & \\ \text{p.p.} & Ax = b & & \\ & x \leq u & & \\ & x \geq 0 & & \end{array}$$

$x_e = 0$	\rightarrow	prazna povezava
$x_e = u_e$	\rightarrow	nasičena povezava

Dopustna rešitev x je **drevesna dopustna rešitev**, če obstaja vpeto drevo T , da so vse povezave izven drevesa prazne ali nasičena.

Postopek reševanja

- Poiščemo začetno dopustno drevesno rešitev x z drevesom T
- Izračunamo ceno razvoza y za posamezna vozlišča
- Poiščemo vstopno povezavo $ij \notin T$, ki ustreza:

- prazna: $x_{ij} = 0, y_i + c_{ij} < y_j \implies t = \min(\{x_e : e \text{ obratna} \} \cup \{u_e - x_e : e \text{ prema} \})$ na premih povečamo za t , na obratnih pomanjšamo za t
- nasičena: $x_{ij} = u_{ij}, y_i + c_{ij} > y_j \implies t = \min(\{x_e : e \text{ prema} \} \cup \{u_e - x_e : e \text{ obratna} \})$ na premih pomanjšamo za t , na obratnih povečamo za t

Začetno dopustno drevesno rešitev poiščemo s pomožnim problemom:

Izberemo koren $r \in V$. Za vsako vozlišče v :

- $b_v < 0$ (proizvodnja): Če že obstaja povezava vr z kapaciteto $u_{rv} \geq -b_v$, nastavimo razvoz na tej povezavi na b_v , sicer dodamo povezavo vr z kapaciteto ∞ (dovolimo tudi več povezav med vozlišči).
- $b_v \geq 0$ (poraba): Če že obstaja povezava rv z kapaciteto $u_{rv} \geq b_v$, nastavimo razvoz na tej povezavi na $-b_v$, sicer dodamo povezavo rv z kapaciteto ∞ .

Umetne (dodane) povezav imajo ceno 1, prvotne pa 0. Prvotni problem je dopusten ⟺ vrednost pomožnega problema enaka 0.

$$A \subseteq A^{**}$$

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z} \end{array}$$