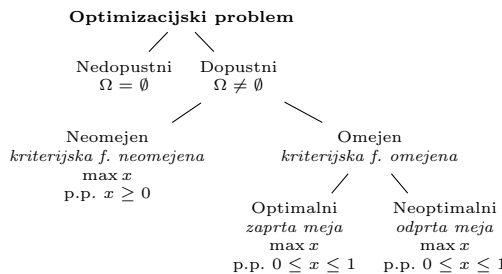


Optimizacijske naloge

Optimizacijska naloga je $(\Omega, f, \max/\min/\sup/\inf,)$ kjer je:

- Ω množica dopustnih rešitev
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kriterijska funkcija

$x^* \in \Omega$ je *optimalna* rešitev problema (Ω, f, \max) , če velja $\forall x \in \Omega: f(x) \leq f(x^*)$



Linearno programiranje

$(\Omega, f, \min/\max)$ je linearni porgram, če je Ω podana z linearnimi enakostmi in neenakostmi (\leq, \geq) in je f linearna.

Standardna oblika linearnega pograma

Linearni porgram je v *standardni* obliki, če iščemo \max in so vsi pogoji neenakosti \leq in so vse spremenljivke nenegativne.

$$\begin{array}{ll} \max & c_1x_1 + \dots + c_nx_n \\ \text{p.p.} & a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{array}$$

To lahko zapišemo v matrični obliki:

$$c = [c_1 \dots c_n]^T \quad b = [b_1 \dots b_m]^T \quad x = [x_1 \dots x_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{p.p.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Vsak linearen program lahko zapišemo v standardni obliki.

Vse dele linearnega programa lahko preoblikujemo tako, da bodo v standardni obliki:

$$\begin{array}{ll} \min f(x) \rightsquigarrow \max(-f(x)) \\ f(x) \geq b \rightsquigarrow -f(x) \leq -b \\ f(x) = b \rightsquigarrow f(x) \leq b \wedge f(x) \geq b \\ x_i \leq 0 \rightsquigarrow x_i = -x'_i \\ x_i \geq 0 \rightsquigarrow x_i = x'_i - x''_i \wedge x'_i, x''_i \geq 0 \end{array}$$

Konveksne množice

Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konveksna*, če velja:

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in [0, 1]: (1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

Daljica med poljubnima točkama iz A mora biti vsebovana v A.

Množica **ni** konveksna, če

$$\exists x, y \in A \quad \exists \lambda \in [0, 1]: (1 - \lambda)x + \lambda y \notin A$$

Afina kombinacija:

$$\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$$

Konveksna kombinacija:

$$\alpha_1x_1 + \dots + \alpha_nx_n$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1 \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 0$$

Afin podprostor (= zaprt za affine kokbinacije = premaknjen linearen prostor) je *konveksen*.

Presek konveksnih množic $A_i, \forall i \in I$ je konveksen.

Unija kokneksnih množic pa ni nujno konveksna.

Grafično reševanje linearnih programov

Za linearne programe z dvema spremenljivkama lahko narišemo območje, ki ga določajo pogoji. Nato izračunamo gradient kriterijske funkcije in premikamo v smeri gradienta proti točki, ki je v preseku polporostorov pogojev in čim dlje od izhodišča.

Simpleksna metoda

Linearni program zapišemo v standardni obliki. Če je kak $b_i < 0$, moramo uporabiti **dvofazno simpleksno metodo**, sicer nadaljujemo.

Linearni porgram zapišemo v *prvi* slovar.

$$\begin{array}{l} \text{1. slovar} \\ \hline x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} = b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n \\ \hline z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \end{array}$$

Vse spremenljivke x_1, \dots, x_{n+m} so nenegativne.

Spremenljivke na levi so **bazne**, na desni pa **nebazne**.

$$\begin{array}{lll} x_1, \dots, x_n & \dots & \text{prvotne spremenljivke} \\ x_{n+1}, \dots, x_{n+m} & \dots & \text{dopolnilne spremenljivke} \end{array}$$

Slovar je **dopusten**, če so vse konstante (čelni brez x) na desni nenegativne.

Če je slovar dopusten, ima *bazno* dopustno rešitev: vse *nebazne* spremenljivke so 0 in kriterijska funkcija je tedaj $z = 0$.

- Določimo:
 - vstopno spremenljivko**: izberem spremenljivko, ki ima v kriterijski funkciji pozitiven koeficient.
 - pivotno vrstico**: enakost, ki povečanje vstopne spremenljivke najbolj omejuje. Če ni omejena, je problem **neomejen** in končamo.
 - izstopno spremenljivko**: bazna spremenljivka v pivotni vrstici

- Iz pivotne vrstice izrazimo vstopno spremenljivko in pivotno vrstico zamenjamo z izražavo (vstopna spremenljivka gre v bazo na levo stran).
- V ostalih vrsticah in kriterijski funkciji vstopno spremenljivko nadomestimo z zgornjo izražavo.
- Dobimo naslednji slovar. Postopek ponavljamo dokler niso vsi koeficienti v kriterijski funkciji negativni ali enaki 0.

Iz zadnjega slovarja razberemo optimalne rešitve: spremenljivke, ki imajo v kriterijski funkciji negativen koeficient imajo vrednost 0, ostale pa lahko spreminjamo glede na omejitve.

Dvofazna simpleksna metoda

Če je $b \not\geq 0$, uporabimo dvofazno simpleksno metodo.

Prva faza

Konstruiramo pomožni problem. V vsaki neenakosti b_i prištejemo x_0 . Kriterijsko funkcijo pa spremenimo v $\max -x_0$.

Iz pomožnega problema zapišemo 1. slovar.

$$\begin{array}{l} x_{n+1} = b_1 + x_0 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} = b_m + x_0 - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n \\ \hline w = -x_0 \end{array}$$

Za vstopno spremenljivko izberemo x_0 za pivotno vrstico pa tisto v kateri je b_i najmanjši. Nato nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Nadaljujemo z navadno simpleksno metodo in upoštevamo pravilo: x_0 ima prednost med kandidati za izstopno spremenljivko.

Če $w^* < 0$, prvotni problem ni dopusten, sicer nadaljujemo z drugo fazo.

Druga faza

Iz zadnjega slovarja pomežnega problem izbrisemo x_0 in kriterijsko funkcijo originalnega programa izrazimo z nebaznimi spremenljivkami. Nadaljujemo z običajno simpleksno metodo.

Dualnost pri linearnem programiranju

Vsak linearni program P ima dualno obliko P' :

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \min \quad b^T y \\ \text{p.p.} & Ax \leq b & \text{p.p.} \quad A^T y \geq c \\ & x \geq 0 & y \geq 0 \end{array} \quad \implies \quad P'' = P$$

Šibki izrek o dualnosti - ŠID

$$x \text{ dopustna rešitev za } P, y \text{ dopustna rešitev za } P' \implies c^T x \leq b^T y$$

$$x \text{ dopustna za } P, y \text{ dopustna za } P' \text{ in } c^T x = b^T y \implies x \text{ optimalna rešitev } P, y \text{ optimalna rešitev } P'$$

Krepki izrek o dualnosti - KID

$$x^* \text{ optimalna rešitev } P \implies \text{optimalna rešitev } P' \text{ in } c^T x^* = b^T y^*$$

Linearni program in njegov dual sta lahko:

	nedopusten	neomejen	optimalen
nedopusten	✓	✓	//KID
neomejen	✓	//ŠID	//ŠID, KID
optimalen	//KID	//ŠID, KID	✓

Dualno dopolnjevanje

Naj bo x dopustna za P in y dopustna za P' tedaj je: x optimalna za P in y optimalna za $P' \iff$

$$\begin{array}{ll} \forall i = 1, \dots, m: & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0 \\ \forall j = 1, \dots, n: & x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \end{array}$$

Ekvivalentno: x optimalna za P , y optimalna za $P' \iff$

$$\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i \implies y_i = 0 \quad \forall i \\ \text{in} \\ x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \quad \forall j \end{array}$$

Uporaba izreka o dualnem dopolnjevanju

Želimo dokazati, da je x^* optimalna rešitev linearnega programa P .

- Preverimo, da je x^* dopustna rešitev.
- Če je kakšna neenakost pri pogojih P izpolnjena s strogo neenakostjo, je pripadajoča dualna spremenljivka $y_i^* = 0$.
- Če je kaka $x_j^* > 0$, je pripadajoča dualna neenakost v P' izpolnjena z enakostjo:

- $\sum_{i=1}^n a_{ij}y_i = c_j$
- Vzamemo enačbe iz 3. koraka in upoštevamo, da so nekateri y iz 2. koraka enaki 0. Rešimo dobljeni sistem (če ni rešljiv, x^* ni optimalna).
- Preverimo ali je dobljena rešitev y^* dopustna. Če je, sta x^* in y^* optimalni.

Dual splošnega problema

Splošna oblika linearnega programa je manj stroga standardna oblika. Dovolimo, da so pogoji postavljeni $z \leq$ lahko pa tudi $z =$. Poleg tega dovolimo, da nekatere spremenljivke niso omejene z $x_j \geq 0$.

Program v splošni obliki izgleda takole:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{p.p.} & \sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m' \\ & \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i = b_i \quad \forall i = m' + 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n' \end{array}$$

Njegov dual pa je:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{p.p.} & \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} y_i \leq c_j \quad \forall j = 1, \dots, n' \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \forall j = n' + 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{enakost} \xleftrightarrow{\text{dual}} \text{poljubna spremenljivka} \\ \text{neenakost} \xleftrightarrow{\text{dual}} \text{nenegativna spremenljivka} \end{array}$$

Dualno dopolnjevanje splošnega problema

x dopustna za P
 y dopustna za P'
 x optimalna za P in y optimalna za $P' \iff$

$$\begin{array}{ll} \forall i = 1, \dots, m': & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad \text{ali} \quad y_i = 0 \\ \forall j = 1, \dots, n': & x_j = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \end{array}$$

Umetne (dodane) povezav imajo ceno 1, prvotne pa 0.
Prvotni problem je dopusten \iff vrednost pomožnega problema enaka 0.

Pretoki in prerezi

$G = (V, E)$... usmerjen graf
 $s, t \in V$... začetno in končno vozlišče
 $u_e \in [0, \infty)$... kapaciteta povezave

Iščemo pretok x_e , da veljajo Kirchoffovi zakoni in $0 \leq x_e \leq u_e$.

$$\sum_{\text{konec}(e)=v} x_e = \sum_{\text{začetek}(e)=v} x_e \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

Radi bi *maksimizirali* pretok:

$$\sum_{\text{začetek}(e)=s} x_e = \sum_{\text{konec}(e)=t} x_e = v$$

Prevedba na problem razvoza

$$b_v = 0 \quad \forall v \in V \qquad c_e = 0 \quad \forall e \in E$$

u_e ostane nespremenjen

Dodamo povezavo ts z kapaciteto $u_{ts} = \infty$ in ceno $c_{ts} = -1$.

Povečujoča pot

Zaporedje $s = v_0, v_1, \dots, v_k = t$, da $\forall i = 1, \dots, k$ velja:

$$v_{i-1}v_i \in E, \quad x_{v_{i-1}v_i} < u_{v_{i-1}v_i} \\ \text{ali} \\ v_iv_{i-1} \in E, \quad x_{v_{i-1}v_i} > 0$$

Pretok na premih povezavah povečujoče poti povečamo za ε na obratnih pa pomanjšamo.

$$\varepsilon = \min\{x_e \; : \; e \text{ obratna}\} \cup \{u_e - x_e \; : \; e \text{ prema}\}$$

Prerez

Podmnožica $C \subseteq V$ je prerez, če velja $s \in C$ in $t \notin C$. Kapaciteta prereza je:

$$\sum_{\substack{i \in C \\ j \notin C}} u_{ij} \in [0, \infty)$$

Prostornina pretoka \leq kapaciteta prereza.

Če je prostornina pretoka = kapaciteti prerza, je pretok maksimalen in prerez minimalen.

Za problem pretoka velja natanko eno:

- neomejen*: kapaciteta vsakega prereza je ∞
- optimalen*: \exists prerez katerega kapaciteta je enaka maksimalnemu pretoku

Prirejanja in pokritja

Naj bo $G = (V, E)$ graf.

$M \subseteq E$ je **prirejanje**, če $\forall e, f \in M, e \neq f \implies e \cap f = \emptyset$
 $P \subseteq V$ je **pokritje**, če $\forall e \in E \exists v \in P : v \in E$

$\mu(G)$ = velikost največjega prirejanja
 $\tau(G)$ = velikost najmanjšega pokritja

M prirejanje, P pokritje $\implies |M| \leq |P|$

Če je $|M| = |P|$, je M največje prirejanje in P najmanjše pokritje in $\mu(G) = \tau(G) = |M| = |P|$.

V splošnem velja le $\mu(G) \leq \tau(G)$, za dvodelne grafe pa $\mu(G) = \tau(G)$.

$e \in E$ je **vezana**, če $e \in M$, sicer pa je **prosta**
 $v \in V$ je **vezano**, če $\exists e \in M : v \in e$, sicer pa je **prosto**

Alternirajoča pot je pot na kateri se izmenjujejo proste in vezane povezave.

Povečujoča pot je alternirajoča pot, ki se začen in konča v prostem vozlišču.

Če na povečujoči poti zamenjamo proste in vezane povezave, dobimo za 1 večje prirejanje.

M je največje prirejanje \iff ne obstaja povečujoča pot.

Madžarska metoda

$G = (V, E)$ dvodelni graf, $V = X \cup Y$, M prirejanje

$S = \{\text{prosta vozlišča v } X\} \quad T = \emptyset$

Vsak korak:

$$S' = S \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{vozlišča v } X, \text{ do katerih lahko iz } T \\ \text{pridemo po vezanih povezavah} \end{array} \right\}$$

$$T' = T \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{vozlišča v } Y, \text{ do katerih lahko iz } S \\ \text{pridemo po prostih povezavah} \end{array} \right\}$$

Če T vsebuje prosto vozlišče, imamo povečujočo pot, ki jo uporabimo za povečanje prirejanja.

Sicer pa pridemo do koraka kjer je $T' = T$ in $S' = S$. V tem primeru je M največje prirejanje.

Hallov izrek

$G = (V, E)$ dvodelni graf, $V = X \cup Y$

\exists popolno prirejanje iz X v $Y \iff \forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$

Madžarska metoda z utežmi

Imamo plon graf $K_{n,n}$; povezava med x_i in y_j ima utež

$$c_{ij} \\ c = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Popolno prirejanje je podano z $\pi \in S_n$: $x_i \sim y_{\pi(i)}$.

Iščemo prirejanje z najmanjšo utežjo:

$$\min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n c_{i\pi(i)}$$

Interpretacija: Razporeditev n opravi n ljudem.

Madžarska metoda - postopek

- Od vsake vrstice odštejemo njen minimum.
Od vsakega stolpca odštejemo njegov minimum. *V vsaki vrstici in stolpcu je vsaj ena ničla*
- Pokrijemo vse ničle v matriki pokrijemo z manj kot n vrsticami in stolpci.

$\varepsilon :=$ najmanjše nepokrito polje > 0

- $2 \times$ pokritim poljem prištejemo ε
- nepokritim pa odštejemo ε

- Če ne najdemo takih vrstic in stolpcev, lahko najdemo n ničel v različnih vrsticah in stolpcih. To nam daje minimalno popolno prirejanje.

Iskanje najkrajše poti

Pregled v širino (BFS) $O(|V| + |E|)$

vhod: neutezen, neusmerjen graf G , zacetno vozlisce r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
 $Q \leftarrow r$
 $d(r) \leftarrow 0$
 $\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$
obiskan(r) \leftarrow NE
za *vsak* $v \in V \setminus \{r\}$:
 $d(v) \leftarrow \infty$
 $\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$
 obiskan(v) \leftarrow NE
dokter $Q \neq \emptyset$:
 $v \in Q$
 $Q \leftarrow Q \setminus v$
 obiskan(v) \leftarrow JA
 za *vsak* $u \in N(v)$:
 ce obiskan(u) = NE:
 $d(u) \leftarrow d(v) + 1$
 $\pi(u) = v$
 $Q \leftarrow Q \cup \{u\}$

vrni d, π

Dijkstrov algoritem

vhod: usmerjen, utezen ($w_e \geq 0$) graf $G = (V, E)$, koren r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
 $d(r) \leftarrow 0$
 $\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$
za *vsak* $v \in V \setminus \{r\}$:
 $d(v) \leftarrow \infty$
 $\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$

$Q \leftarrow V$
dokter $Q \neq \emptyset$:
 $v \leftarrow \text{element } Q \text{ z min } d$
 $Q \leftarrow Q \setminus v$
 ce $d(v) = \infty$:
 koncamo
 sicer :
 za *vsak* $u \in N(v) \cap Q$:
 ce $d(u) > d(v) + w_{vu}$:
 $d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$
 $\pi(u) \leftarrow v$

vrni d, π

Aciklični graf

vhod: utezen, usmerjen graf $G = (V, E)$ brez ciklov
izhod: topoloska urejenost φ

za *vsak* $v \in V$:
 $st(v) \leftarrow \text{deg}^+(v)$
 $i \leftarrow 1$
dokter $\exists v \in V : st(v) = 0$:
 $\varphi(v) \leftarrow i$
 za *vse* $vu \in E$:
 $st(u) \leftarrow st(u) - 1$
 $i \leftarrow i + 1$
ce $i \leq |V|$:
 vrni FALSE
sicer :
 vrni φ

vhod: topoloska urejenost φ , koren r
izhod: razdalje med vozliscem r in ostalimi
 $d(r) \leftarrow 0$
 $\pi(r) \leftarrow \text{NULL}$
za *vsak* $v \in V \setminus \{r\}$:
 $d(v) \leftarrow \infty$
 $\pi(v) \leftarrow \text{NULL}$
 $i \leftarrow \varphi(r)$
za *vsak* $j \in \{i, i + 1, \dots, |V|\}$:
 $v \leftarrow \varphi^{-1}(j)$
 za *vsak* $vu \in E$:
 ce $d(u) = d(v) + w_{ue}$:
 $d(u) \leftarrow d(v) + w_{vu}$
 $\pi(u) \leftarrow v$

vrni d, π

Bellman-Ford

Floyd-Warshellov algoritem

Konveksna optimizacija

Konveksne funkcije in optimizacija

Konveksne funkcije in vezani ekstreми

Celoštevilski linearni programi