Kriptosistem

$$\mathcal{B} \ldots \text{besedila}$$
$$\mathcal{C} \ldots \text{kriptogrami}$$
$$\mathcal{K} \ldots \text{ključi}$$
$$\mathcal{E} = \{E_k : \mathcal{B} \to \mathcal{C}; k \in \mathcal{K}\} \ldots \text{kodirne f.}$$
$$\mathcal{D} = \{D_k : \mathcal{C} \to \mathcal{B}; k \in \mathcal{K}\} \ldots \text{dekodirne f.}$$

Za vsak $e \in \mathcal{K}$ obstaja $d \in \mathcal{K}$

$$D_d(E_e(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

Vsaka kodrirna funkcija $E_k \in \mathcal{E}$ je injektivna.

Produkt kriptosistemov

Naj bosta $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}', \mathcal{D}')$ in $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}'', \mathcal{D}'')$ kriptosistema za katera je $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_2$.

$$S_1 \times S_2 = (\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mathcal{E}, \mathcal{D})$$

$$E_{(k_1,k_2)}(x) = E''_{k_2}(K'_{k_1}(x))$$
$$D_{(k_1,k_2)}(y) = D'_{k_1}(D''_{k_2}(y))$$

Prevedljivost kriptosistemov

Kripto sistem $\mathcal{S} = (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ je prevedljiv na $\mathcal{S}' = (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}', \mathcal{E}', \mathcal{D}')$, če obstaja $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, da za vsak $k \in \mathcal{K}$ velja:

$$E_k = E'_{f(k)} \qquad D_k = D'_{f(k)}$$

Tedaj pišemo $S \to S'$.
Kriptosistema sta **ekvivalentna**, če velja $S \to S'$ in $S' \to S$.
Tedaj pišemo $S \equiv S'$.

Idempotentnost kriptosistemov

Kriptosistem S je idempotenten, če

$$S \times S \equiv S$$

Klasični kriposistem so vsi idempotentni.

Klasični kriptosistem

Cezarjeva šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{25}$$
$$E_k(x) \equiv x + k \mod 25$$
$$D_k(y) \equiv y - k \mod 25$$

Substitucijska šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathcal{K} = S(\mathbb{Z}_{25})$$

Ključ je permutacija $\pi \in \mathcal{K}$

$$E_k(x) = \pi(x)$$
$$D_k(y) = \pi^{-1}(y)$$

Afina šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}, \quad \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{25}^* \times \mathbb{Z}_{25}$$

Ključ $(a, b) \in \mathcal{K}$

$$K_{(a,b)}(x) = ax + b \mod 25$$
$$D_{(a,b)}(y) = a^{-1}(y - b) \mod 25$$

Vigenerjeva šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{25}^n$$

Ključ $\underline{k} \in \mathcal{K}$

$$K_{\underline{k}}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{k} \mod 25$$
$$D_{\underline{k}}(\underline{y}) = \underline{y} - \underline{k} \mod 25$$

Permutacijska šifra

Simbolov ne nadomeščamo, ampak jih premešamo

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}^n, \quad \mathcal{K} = S_n$$
$$K_\pi(\underline{x}) = \underline{x}_{\pi(1)} + \cdots + \underline{x}_{\pi(n)}$$
$$D_\pi(\underline{x}) = \underline{x}_{\pi^{-1}(1)} + \cdots + \underline{x}_{\pi^{-1}(n)}$$

Hillova šifra

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_{25}^n, \quad \mathcal{K} = \{A \in \mathbb{Z}_{25}^{n \times n} \mid \det(A) \in \mathbb{Z}_{25}^*\}$$

Ključ je matrika $A \in \mathcal{K}$

$$K_A(\underline{x}) = A\underline{x} \mod 25$$
$$D_A(\underline{y}) = A^{-1}\underline{y} \mod 25$$

Bločne šifre

Kripotsistem $(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ je bločna šifra dolžine n, če je $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \Sigma^n$, kjer je Σ končna abeceda.
Vsaka kodirna funkcija je ekvivalentna neki permutaciji Σ^n, njena dekodirna funkcija pa inverzu te permutacije.

Afina bločna šifra

$$\Sigma = \mathbb{Z}_m$$
$$\mathcal{K} = \left\{(A, \underline{b});\ A \in \mathbb{Z}_m^{n \times n}, \det(A) \in \mathbb{Z}_m^*, \underline{b} \in \mathbb{Z}_m^n\right\}$$

$$E_{(A,\underline{b})}(\underline{x}) \equiv A\underline{x} + \underline{b} \mod m$$
$$D_{(A,\underline{b})}(\underline{x}) \equiv A^{-1}\underline{x} - \underline{b} \mod m$$

Iterativne šifre

Sestavlja jih

- **razpored ključev**: Naj bo K ključ. K uporabimo za konstrukcijo krožnih ključev $(K^1, \ldots, K^{N_r})$ temu seznamu pravimo razpored ključev.
- **krožna funkcija**: ima dva argumenta: tekoče stanje in krožni ključ:
  $$w^r = g(w^{r-1}, K^r)$$
  Da je dešifriranje možno mora biti g injektivna za vsak fiksen ključ K; tj. $\exists g^{-1}$:
  $$g^{-1}(g(w, K), K) = w \qquad \forall w, K$$
- **šifriranje skozi N_r podobnih krogov**: Besedilo x vzamemo za začetno stanje w^0:
  $$y = g(g(\ldots g(g(x, K^1), K^2) \ldots, K^{N_r - 1}), K^{N_r})$$
- **dešifriranje**:
  $$x = g^{-1}(\ldots g^{-1}(g^{-1}(y, K^{N_r}), K^{N_r - 1}) \ldots, K^1)$$

Substitucijsko-permutacijsko omrežje (SPN)

je iterativna bločna šifra kjer je $\Sigma = \{0, 1\}$, $\ell, m \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \Sigma^{\ell m}$

- **substitucije**: $\pi_s \in S(\Sigma^\ell)$
  S-škatla - zamenja ℓ bitov z drugimi biti
- **permutacije**: $\pi_p \in S_{\ell m}$
  P-škatla - zamenja ℓm bitov z drugimi biti

Oznaka za delitev na zloge dolžine ℓ:

$$x = x_1 x_2 \ldots x_m, \quad |x_i| = \ell$$

Kodiranje:

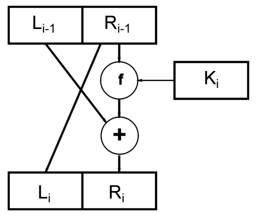
$w^0 = b$
za $r = 1, \ldots, N_r - 1$:
  $u^r = w^{r-1} \oplus K^r$ // primasamo K
  za $i = 1, \ldots, m$:
    $\underline{v}_i^r = \pi_s(\underline{u}_i^r)$ // substitucija zlogov
  $w^r = v^r_{\pi_p(1)}, \ldots, v^r_{\pi_p(\ell m)}$ // permutacija bitov
// zadnji krog
$u^{N_r} = w^{N_r - 1} \oplus K^{N_r}$
za $i = 1, \ldots, m$:
  $\underline{v}_i^{N_r} = \pi_s(\underline{u}_i^{N_r})$
vrni $c = v^{N_r} \oplus K^{N_r + 1}$ // beljenje

Dekodiranje:

$v_r^N = c \oplus K^{N_r + 1}$
za $i = 1, \ldots, m$:
  $\underline{u}_i^{N_r} = \pi_s^{-1}(\underline{v}_i^{N_r})$
za $r = N_r - 1, \ldots, 1$:
  $w^r = u^r \oplus K^{r+1}$
  $v^r = (w^r_{\pi_p^{-1}(1)}, \ldots, w^r_{\pi_p^{-1}(\ell m)})$
  za $i = 1, \ldots, m$:
    $\underline{u}_i^r = \pi_s^{-1}(\underline{v}_i^r)$
$b = u^1 \oplus K^1$

Feistelova šifra

je bločna iterativna šifra dolžine $2t$ za abecedo $\Sigma = \{0, 1\}$. N_r je št. krogov, $K^1, \ldots, K^{N_r}$ razpored ključev, ki ga dobimo iz ključa K in $f_K : \Sigma^t \to \Sigma^t$ je *Feistelova kodirna funkcija.*
En krog kodiranja:



Kodiranje

L_0 = leva polovica b
R_0 = desna polovica b
za $i = 1, \ldots, N_r$:
  $L_i = R_{i-1}$
  $R_i = L_{i-1} \oplus f_{K_i}(R_{i-1})$
$c = R_{N_r} \| L_{N_r}$

DES in AES

TO-DO!

Tokovne šifre

Besedilo b razdelimo na bloke $b = b_1 \ldots b_t \in \mathcal{B}^t$.
Imamo zaporedje (tok) ključev: $z_1, z_2, \cdots \in \mathcal{K}$.
Kodiranje

za $j = 1, \ldots, t$:
  $c_j = E_{z_j}(b_j)$
$c = c_1 c_2 \ldots c_t \in \mathcal{C}^t$

Dekodiranje

za $j = 1, \ldots, t$:
  $b_j = D_{z_j}(c_j)$
$b = b_1 b_2 \ldots c_t \in \mathcal{B}^t$

Aditivne tokovne šifre

Naj bo $(G, +)$ grupa, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K}$ in $z_1, z_2, \ldots$ tok ključev.
Kodiranje

$$E_{z_i}(b_i) = b_i + z_i$$
$$D_{z_i}(c_i) = c_i - z_i$$

Samokodirna šifra

$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_{26}$
Začetni ključ izberemo $z_1 \in \mathbb{Z}_{26}$

$$z_i = b_{i-1} \quad \text{za} \quad i > 1$$

Kodiranje

$$E_{Z_i}(b_i) = b_i + z_i$$

Dekodiranje

$$D_{Z_i}(c_i) = c_i - z_i$$

Vermanova šifra

$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \{0, 1\}^n$, ključ izberemo naključno.
Kodiranje

$$E_k(b) = b \oplus k$$

Dekodiranje

$$D_k(c) = c \oplus k$$

To je pravzaprav Vigenerjeva šifra, le da ima ključ enako dolžino kot besedilo
Uporabimo kratko seme za generiranje dolgega toka psevdonaključnih bitov, ki jih uporabimo za ključ.

Linearna rekurzivna šifra

je sinhrona tokovna šifra, pri kateri je

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = \mathbb{Z}_s$$

zaporedje ključev z linearno rekurzinvo enačbo reda m s konstantnimi koeficienti nad $\mathbb{Z}_s$:

$$z_i = c_1 z_{i-1} + c_2 z_{i-2} + \cdots + c_m z_{i_m} \mod s$$

Zaporedju lahko priredimo polinom:

$$C(x) = 1 + \sum_{i=1}^{m} c_i x^i \mod s$$

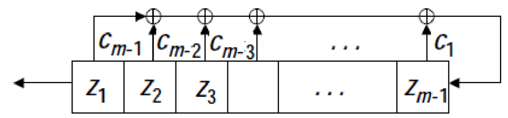
Kodiranje/Dekodiranje:

$$E_{z_i}(x_i) = x_i + z_i \mod s$$
$$D_{z_i}(y_i) = y_i - z_i \mod s$$

Perioda LFSR reda m je največ $2^m - 1$
Red nerazcepnega polinoma $f(x)$ je najmanjši t, da $f(x) | x^t - 1$.
Če ima LFSR nerazcepen karakteristični polinom reda t, potem ima LFSR periodo t.

Pomični register z linearno povratno zanko

V pomičnem registru je na začetku inicializacijski vektor $(z_1 z_2 \ldots z_m)$ (ključ).



Na vsakem koraku izpišemo z_1 register pomaknemo v levo zadnji bit z_m pa izračunamo kot z $c_1, \ldots, c_m$ uteženo vsoto.
Če poznamo $z_0, \ldots, z_{2m-1}$, lahko rešimo sistem:

$$\begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \ldots & z_{m-1} \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m-1} & z_m & \ldots & z_{2m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_m \\ c_{m-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_m \\ z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m-1} \end{bmatrix}$$

Če smo pravilno uganili red m ima sistem enolično rešitev.

Asimetrična kriptografija

RSA

$n = pq$ kjer sta p in q različni veliki praštevili.
$m = \varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
Potem je kriptosistem podan z:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_n$$
$$\mathcal{K} = \{n\} \times \mathbb{Z}_m^*$$
$$E_{(n,e)}(x) \equiv x^e \mod n$$
$$E_{(n,d)}(y) \equiv y^d \mod n$$

e mora biti tuj m
Kodirnemu ključu (n, e) pripada dekodirni ključ (n, d), kjer je $d = e^{-1} \in \mathbb{Z}_m^*$

Problem diskretnega logaritma

Naj bo G multiplikativna grupa. Za dana $\alpha, \beta \in G$, kjer je red elementa α enak n, je treba poiskati takšen $x \in \{0, \ldots, n - 1\}$, da je

$$\alpha^x = \beta$$

Številu x rečemo diskretni logaritem elementa β z osnovo α.

Shanksov algoritem (veliki korak - mali korak)

vhod: G grupa, $\alpha, \beta \in G$, $n = \text{red}(\alpha)$
izhod: $x = \log_\alpha \beta$
$m = \lceil \sqrt{n} \rceil$
za $j = 0, \ldots, m - 1$:
  $(j, \alpha^{m-j}) \to L_1$
uredi L_1 po drugi komponenti
za $i = 0, \ldots, m - 1$:
  $(i, \beta\alpha^{-i}) \to L_2$
uredi L_2 po drugi komponenti
poisci $(j, y) \in L_1$ in $(i, y) \in L_2$
$x = (mj + i)$
vrni x

Diffie-Hellmanova izmenjava ključev

- Alenka in Bojan se dogovorita za veliko praštevilo p in $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$, ki ima velik red n.
- Alenka si izbere naključno število $a \in \{1, \ldots, n - 1\}$, izračuna $A = \alpha^a \mod p$ in pošlje A Bojanu.
- Bojan si izbere naključno število $b \in \{1, \ldots, n - 1\}$, izračuna $B = \alpha^b \mod p$ in pošlje B Alenki.
- Alenka in bojan vsak zase izračunata skupni tajni ključ $K = \alpha^{ab} = A^b = B^a$

Varnost temelji na težavnosti diskretnega logaritma.
Zaradi možnosti napada srednjega moža je pri izmenjavi ključev nujna avtentikacija!

ElGamalov kriptosistem

- Alenka in Bojan izmenjata tajni ključ k z Diffie-Hellmanovo shemo
- Alenka želi poslati sporočilo x. Izračuna kriptogram $y = k \cdot x \mod p$ in ga pošlje Bojanu.
- Bojan izračuna $x = k^{-1} \cdot y \mod p$

Formalna definicija:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathbb{Z}_p^*$$
$$\mathcal{K} = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_p^*$$
$$E_{(a,B)}(x) \equiv B^a \cdot x \mod p$$
$$D_{(b,A)}(y) \equiv A^{p-b-1} \cdot y \mod p$$

Naj bo $B = \alpha^b \bmod p$ in $A = \alpha^a \bmod p$. Potem kodirnemu ključu (a, B) ustreza dekodirni ključ (b, A).

Zgoščevalne funkcije

Zgoščevalna funkcija besedilu poljubne dolžine kratek izvleček.
Želene lastnosti:

- **Naključnost**: Če se dve sporočili razlikujeta na enem samem mestu morata povzetka izgledati kot neodvisno izbrani naključni števili.
- **Odpornost praslik**: za poljuben izvleček z je računsko nemogoče poiskati sporočilo x, ja je $h(x) = z$. Oz. zgoščevalna funkcija je **enosmerna**.
- **Odpornost drugih praslik**: za dano sporočilo x je nemogoče najti drugo sporočilo x', ki ima enak izvleček.
- **Odpornost na trke**: računsko je nemogoče poiskati dve različni sporočili x in x' z enakim povzetkom.

Trk je par različnih sporočil z enakim povzetkom.

Tipična zgoščevalna funkcija

- **Komprsijska funkcija**: $f : \{0, 1\}^{r+n} \to \{0, 1\}^n$
- **Zgoščevalna funkcija**: $h : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^n$

Zgoščevalna funkcija iterativno kliče kompresijsko funkcijo.

$H_0 = IV$
za $i = 1, \ldots, t$:
  $H_i = f(H_{i-1} \| x_i)$
$h(x) = H_t$

Tukaj je IV začetno stanje, x_i pa so bloki besedila.
Na konec besedila dodano nekaj bitov, ki popisujejo dolžino besedila in toliko ničel, da se besedilo lahko razdeli na enako velike bloke.
Če je kompresijska funkcija odporna na trke, je tudi zgoščevalna funkcija odporna na trke.

Digitalni podpisi

Formalno je **sistem na digitalno podpisovanje** peterka $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{S}, \mathcal{V})$, kjer je

- $\mathcal{B}$ končna množica sporočil
- $\mathcal{A}$ končna množica podpisov
- $\mathcal{K}$ končna množica ključev
- za vsak ključ $K \in \mathcal{K}$ obstaja algoritem za podpisovanje in preverjanje podpisa

$$\text{sig}_K \in S, \qquad \text{sig}_K : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$
$$\text{ver}_K \in S, \qquad \text{ver}_K : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \to \{\text{true}, \text{false}\}$$

Algoritem za podpisovanje je znan le podpisniku.

Podpisovanje z algoritmom RSA

Naj bosta p, q praštevili in $n = pq$. Naj bo (n, d) zasebni in (n, e) javni ključ. Potem za $K = (n, e, d)$ definiramo:

$$\text{sig}_K(x) = x^d \mod n$$
$$\text{ver}_K(x, y) = (\text{true} \iff x = y^e \mod n)$$

ElGamalov sistem za digitalno podpisovanje

Generiranje ključa

Naj bo p takšno praštevilo, ja je v $\mathbb{Z}$ težko izračunati diskretni logaritem in $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ primitivni element.
Potem je $\mathcal{B} = \mathbb{Z}_p^*$, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_{p-1}$ in $\mathcal{K} = \{(p, \alpha, a, \beta) : \beta \equiv \alpha^a \mod p\}$.
Število a je zasebno. Števila p, α in β pa so javna.

Podpisovanje

Podpisnik s ključem $K = (p, \alpha, a, \beta)$ izbere naključno skriteo število $k \in \mathbb{Z}_{p-1}^*$ in določi

$$\text{sig}_K(x, k) = (\gamma, \delta)$$

kjer je

$$\gamma \equiv \alpha^k \mod p$$
$$\delta \equiv (x - a\gamma)k^{-1} \mod p$$

Preverjanje podpisa

Za to potrebujemo p, α in β, ki so javni:

$$\text{ver}_K(x, \gamma, \delta) = \left(\text{true} \iff \beta^\gamma \gamma^\delta \equiv_p \alpha^x\right)$$

Digital Signature Standard (DSA)

Generiranje ključa

- Izberi 160-bitno praštevilo q
- Izberi 1024-bitno praštevilo p, da $q|(p-1)$
- Izberi element $h \in \mathbb{Z}_p^*$ in izračunaj $\alpha = h^{(p-1)/q} \mod p$; ponavljaj dokler $\alpha \neq 1$. (α je generator natanko določen ciklične grupe red q v $\mathbb{Z}_p^*$)
- Izberi naključno naravno število $a < q$
- Izračunaj $\beta = \alpha^a \mod p$
- Janvi ključ osebe A je (p, q, α, β), zasebni pa a.

Opomba: red α, β, γ je enak q.

Podpisovanje

- Izberi naključno naravno število k, ki je manjše od q.
- Izračunaj $\gamma = \left(\alpha^k \mod p\right) \mod q$
- Izračunaj $k^{-1} \mod q$.
- Izračunaj $\delta = k^{-1}(h(x) + a\gamma) \mod q$, kjer je $h(x)$ povzetek sporočila x, dobljen z zgoščevalno funkcijo SHA-1.
- Če je $\gamma = 0$ ali $\delta = 0$, začni ponovno.
- Podpis sporočila je (γ, δ).

Preverjanje podpisa

- Priskirbi si overjeno kopijo javnega kjluča (p, q, α, β) podpisnika
- Izračunaj $w = \delta^{-1} \mod q$ in $h(x)$
- Izračunaj $e_1 = h(x)w \mod q$ in $e_2 = \gamma w \mod q$
- Izračunaj $v = (\alpha^{e_1}\beta^{e_2} \mod p) \mod q$
- Sprejmi podpis, če je $v = \gamma$

Uporaba bločnih šifer

Elektronska kodna knjiga (ECB)

Naivni način uporabe bločnih šifer. Z istim ključem kodiramo zaporedoma bolk po blok.

$$c_i = E_k(b_i)$$
$$b_i = D_k(c_i)$$

Veriženje kodnih blokov (CBC)

Izberemo inicializacijski vektor IV dolžine n.

Kodiranje

```
c_0 = IV
za j = 1, . . . , m:
    c_j = E_e(b_j ⊕ c_{j−1})
c = c_1 . . . c_m
```

Dekodiraje

```
c_0 = IV
za j = 1, . . . , m:
    b_j = D_e(c_j) ⊕ c_{j−1}
b = b_1 . . . b_m
```

Napaka na bloku c_j vpliva le na b_j in b_{j+1}

Način s števcem (CM)

Izberemo števec *ctr* dolžine n. Besedilo razdelimo na bloke dolžine n: $b = b_1 \dots b_m$.

Kodiranje

```
za j = 1, . . . , m:
    l_j = ctr + j − 1  mod 2^n
    c_j = b_j ⊕ E_e(l_j)
c = c_1 . . . c_m
```

Dekodiranje

```
za j = 1, . . . , m:
    l_j = ctr + j − 1  mod 2^n
    b_j = c_j ⊕ E_e(l_j)
b = b_1 . . . b_m
```

Napadi na kriptosisteme

Pasivni napadi

- **Napad za golim kriptogramom**: nasprotnik pozna enega ali več kriptogramov.
- **Napad z znanim besedilom**: nasprotnik pozna enega ali več parov (besedilo, kriptogram).
- **Napad z izbranim besedilom**: nasprotnik ima začasen dostop do kodirnega postopka. Generira pare (b, c) za izbrana besedila b. *V primeru kriptosistemov z javnimi ključi tak napad štejemo za paseiven.*

Aktivni napadi

- **Napd z izbranim kriptogramom**: nasprotnik za izbrane kriptograme lahko zahteva ustrezna besedila. Kasneje dobi kriptogram c, ki ga želi dekodirat.
- **Prilagodljivi napad z izbranim kriptogramom**: nasprotnik skuša dešifirati c med tem lahko za izbrane kriptograme lahko zahteva ustrezna besedila.

Stopnje varnosti

- **Brezpogojna varnost**: tudi če ima napadalec neomejene računske vire, samo iz kriptograma na izve nobene informacije o besedilu (razen dolžine)
- **Semantična varnost**: napadalec s polinomsko omejenimi viri samo iz kriptograma z nezanemarljivo verjetnostjo ne izve nobene informacije o besedilu (razen dolžine).
- **Polinomska varnost**: napadalec s polinomsko omejenimi viri z nezanemarljivo verjetnostjo ne more ločiti med kriptogramoma danih besedil iste dolžine.

Za pasivnega napadalca sta semantična in polinomska varnost ekvivalentni.

Sistemi s popolno tajnostjo (LPT)

Simetrični kriptosistem $\mathcal{S} = (\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ opremimo z verjetnostno porazdelitvijo na množici $\mathcal{B} \times \mathcal{K}$

B	...	slučajna sprem. z zalogo vrednosti $\mathcal{B}$
K	...	slučajna sprem. z zalogo vrednosti $\mathcal{K}$
C	...	slučajna sprem. z zalogo vrednosti $\mathcal{C}$

C je določena z B in K
Predpostavimo, da st B in K neodvisni:

$$P(B = b \cap K = k) = P(B = b)P(K = k)$$

za vsak $b \in \mathbb{B}$ in vsak $c \in \mathcal{C}$ velja še:

$$P(B = b) > 0 \quad \text{oziroma} \quad P(C = c) > 0$$

Potem ima kriptosistem S **lastnost popolne tajnosti** natanko tedaj, ko

$$\forall b \in \mathcal{B}, c \in \mathcal{C}: \ P(B = b|C = c) = P(B = b)$$

Vrednost C za dana $b \in \mathcal{B}$ in $k \in \mathcal{K}$ je:

$$c = E_k(b)$$

Verjetnost dogodka $(C = c)$ dobimo iz formule za popolno verjetnost:

$$P(C = c) = \sum_{b \in \mathcal{B}} P(C = c|B = v)P(B = b)$$

$$P(C = c|B = b) = \sum_{k \in \mathcal{K}:\ E_k(b) = c} P(K = k)$$

Verjetnostne formule

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Trditev: Če ima kriptosistem lastnost popolne tajnosti, za vsak $b \in \mathcal{B}$ in $c \in \mathcal{C}$ obstajaj $k \in \mathcal{K}$, da velja $E_k(b) = c$. In $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}| \leq |\mathcal{K}|$
Izrek (Shannon): Naj velja $|\mathcal{B}| = |\mathcal{C}| = |\mathcal{K}|$. Potem ima kriptosistem S lastnost popolne tajnosti natanko tedaj, ko

- za vsak $b \in \mathcal{B}$ in vsak $c \in \mathcal{C}$ obstaja en $k \in \mathcal{K}$, da je $E_k(b) = c$
- slučajna spremnljivka K je enakomerno porazdeljena.

Teorija števil

Eulerjeva funkcija

Eulerjeva funkcija nam pove koliko je obrnlivih elementov v $\mathbb{Z}_m$.

$$|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$$

Za $n \in \mathbb{N}$ s paraštevilskim razcepom $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ velja:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_m^{\alpha_m}) = n \prod_{p_k \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Euljerjev izrek:
Naj bo G končna grupa. Potem red elementa $a \in G$ deli red grupe G.

$$\gcd(a, m) = 1 \Leftrightarrow a^{\varphi(m)} \equiv_m 1; a \in \mathbb{Z}_m^*$$
$$a, m \in \mathbb{N} \land \gcd(a, m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$$
$$a^{\varphi(m)} = 1 \text{ v } \mathbb{Z}_m^*$$

Mali Fermatov izrek: če je $m \in \mathbb{P}$ ($\varphi(m) = m - 1$) in $\gcd(a, m) = 1$, potem:

$$a^{m-1} \equiv_m 1$$

Fermantov test praštevilskosti

p praštevilo $\implies a^{p-1} \equiv_p 1$
Če želimo preveriti ali je p praštevilo, zgornjo trditev preizkusimo za nekaj naključnih a-jev.

Miller-Rabinov test

Če je n praštevilo mora veljati:
Naključno število a je tuje n.
Če zapišemo $n - 1 = 2^s d$, kjer je d liho število, velja eno izmed:

- $a^d \equiv_n 1$
- $\exists r \in 0, 1, \ldots, s-1$, da je $a^{2^r d} \equiv_n -1$

Verjetnost (napake), da zgornje velja za sestavljeno število je največ $\frac{1}{4}$.

Linearne diofantske enačbe

Diofantska enačba $ax + by = c$ ima rešitev $\Leftrightarrow gcd(a, b)|c$.
Če ima eno rešitev $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ ima neskončno množico rešitev:

$$\{(x_k, y_k) : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$x_k = x_0 - k\frac{b}{\text{gcd(a, b)}}$$
$$y_k = y_0 + k\frac{a}{\text{gcd(a, b)}}$$

Razširjen evklidov algoritem

```
vhod: (a, b)
(r_0, x_0, y_0) = (a, 1, 0)
(r_1, x_1, y_1) = (b, 0, 1)
i = 1

dokler r_i ≠ 0:
    i = i+1
    k_i = r_{i−2}//r_{i−1}
    (r_i, x_i, y_i) = (r_{i−2}, x_{i−2}, y_{i−2}) − k_i(r_{i−1}, x_{i−1}, y_{i−1})
konec zanke
vrni: (r_{i−1}, x_{i−1}, y_{i−1})
```

Naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$. Tedaj trojica (d, x, y), ki jo vrne razširjen evklidov algoritem z vhodnim podatkomk (a, b), zadošča:

$$ax + by = d \text{ in } d = \gcd(a, b)$$

Grupe

- **grupoid** $(M, \cdot)$ urejen par z neprazno množico M in zaprto opreacijo $\cdot$.
- **polgrupa** grupoid z asociativno operacijo $\forall x, y, z \in M : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- **monoid** polgrupa z enoto $\exists e \in M\ \forall x \in M : e \cdot x = x \cdot e = x$.
- **grupa** polgrupa v kateri ima vsak element inverz $\forall x \in M\ \exists x^{-1} \in M : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
- **abelova grupa** grupa s komutativno operacijo $\forall x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$.

Množica $\mathbb{Z}_m$

$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, ..., m - 1\}$
Vpeljemo seštevanje $+_m$ po modulu m in množenje $\cdot_m$ po modulu m. Dobimo grupo $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ in monoid $(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)$.
Red elementa $x \in \mathbb{Z}_m$ je $\frac{m}{\gcd(m,x)}$

Množica $\mathbb{Z}_m^*$

To je množica vseh obrnljivih elementov v $\mathbb{Z}_m$ (operacija: množenje).

$$|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$$

Element $x \in \mathbb{Z}_m$ je obrnljiv če se da rešiti *diofantsko enačbo*:

$$xy + km = 1$$

za neznanki y (inverz od x) in k.

Cayleyjeva tabela

Za vsak element množice imamo en stolpec in eno vrstico. V vsakem polju je produkt elementa vrstice in elementa stolpca. (Presek vrstice a in stolpca b je ab)

Red elementa

Naj bo $(G, \cdot)$ grupa. Red elemneta a je najmanjše naravno število $n \in \mathbb{N}$, da velja

$$a^n = e$$

oznaka: $\#a$

Red grupe

je število elementov G, oznaka $|G|$.

Ciklična grupa

Grupa je ciklična, če vsebuje a reda $|G|$:

$$G = \left\{a, a^2, a^3, \ldots, a^{|G|} = e\right\}$$

$$\text{red}_{\mathbb{Z}_p^*}(\alpha^i) = \text{red}_{\mathbb{Z}_p^*}(i) = \frac{p-1}{\gcd(i, p-1)}$$

x je generator grupe $\mathbb{Z}_p^* \iff \#x = p - 1$
x je generator grupe $\mathbb{Z}_p^* \iff x^{\frac{p-1}{p_i}} \neq 1 \mod p$, za vsak i, jer je $p - 1 = p_1^{k_1} \ldots p_l^{k_l}$.

Končni obsegi

$(K, +, \cdot)$ je obseg, če je

- $(K, +)$ abelova grupa
- $(K^*, \cdot)$ grupa ($K^* = K \setminus \{0\}$)
- velja distributivnost:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$
$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Obseg je **komutativen**, če je $(K^*, \cdot)$ komutativna.

Praštevilski obsegi

Če je p praštevilo, je $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ končen obseg.

Galoisovi obsegi

$$\text{GF}(p) \cong \mathbb{Z}_p \qquad p \in \mathbb{P}$$
$$\text{GF}(p^n) \cong \mathbb{Z}_p[x]/(u)$$

- $u \in \mathbb{Z}_p[x]$ je nerazcepen polinom stopnje n
- elementi $\text{GF}(p^n)$ so ostanki polinomov iz $\mathbb{Z}_p$ pri deljenju z polinomom u
- seštevanje je enako kot seštevanje v $\mathbb{Z}_p[x]$
- produkt izračunamo v $\mathbb{Z}_p[x]$ nato pa vzamemo ostanek pri deljenju z u

Množica neničelnih/obrnljivih elementov $(GF(p^n)^*, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_{p^n-1}, \cdot)$ je vedno izomorfna neki ciklični grupi. Generatorjem te grupe rečemo **primitivni elementi** Galoisovega obsega.

Kitajski izrek o ostankih

Naj bodo $n_1, \ldots, n_k$ paroma tuja.

$$x \equiv a_1 \mod n_1$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_k \mod n_k$$

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$$

Vse rešitve zgornjega sistema so kongurentne po modulu N.

$$N_i = \frac{N}{n_i} \qquad M_i = \text{ inverz } N_i \text{ po modulu } n_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i M_i N_i \mod N$$

Kod $\mathcal{C}$ nad abecedo Σ je končna podmnožica Σ^*, $\mathcal{C} \subset \Sigma^*$

Dekodiranje

- **Kodiranje** je preslikava $f : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$
- Po prenosu po komunikacijskem kanalu prejmemo besedo y.
- Če $y \notin \mathcal{C}$, ji po nekeem pravilu priredimo besedo $x\prime \in \mathcal{C}$. Pravimo, da besedo **dekodiramo**.

Bločni kodi

Kod $\mathcal{C}$ nad abecedo Σ je **bločni kod dolžine** n, če imajo vse kodne besede dolžino n.

Hammingova razdalja med besedama x in y je definirana kot

$$d(x, y) = |\{i; x_i \neq y_i\}|$$

Teža besede x $(t(x))$ je definirana kot število neničelnih mest v besedi.

$$d = d(\mathcal{C}) = \min\{d(x, y); x, y \in \mathcal{C}, x \neq y\}$$

d imenujemo **razmaknjenost** koda.

Kod $\mathcal{C}$ je (n, M, d)-kod, če

- ima bločno dolžino n,
- št. kodnih besed je M,
- razmaknjenost je d.

Pravilo najmanjše napake

Maksimiziramo

$$P[x \text{ oddana}|y \text{ sprejeta}]$$

.

$$P[x|y] = \frac{P[y|x] \cdot P[x]}{P[y]} = \frac{P[y|x] \cdot P[x]}{\sum_{c \in \mathcal{C}} P[y|c] \cdot P[c]}$$

Pravilo največje verjetnosti

Maksimiziramo

$$P[y \text{ sprejeta}|x \text{ oddana}]$$

Če so vse kodne besede enako verjetne, sta PNN in PNV enaki.

Pravilo najbližjega soseda

$y \in \Sigma^n$ dekodiramo v tisto besedo $x \in \mathcal{C}$, pri kateri je $d(x, y)$ najmanjša.

Če je $p < 1/2$, dajeta PNN in PNS enak rezultat.

Napaka

$y = x + e$, kjer je $e \in \Sigma^n$ **napaka**.

- Kod **odkrije** s napak, če $x + e \notin \mathcal{C}$ za vse $x \in \mathcal{C}$ in vse e, za katere je $1 \leq t(e) \leq s$
- Kod **popravi** s napak, če

  $$d(x + e, x) < d(x + e, x\prime)$$

  za vse $x, x\prime \in \mathcal{C}$ in vse $e \in \Sigma^n$, za katere je $t(e) \leq s$.

Linearni kodi

Kod je **linearen**, če je vektorski podprostor Σ^n.

$$c_1, c_2 \in \mathcal{C}, a, b \in \Sigma \Rightarrow ac_bc_2 \in \mathcal{C}$$

k je dimenzija koda.

$$M = q^k$$

$[n, k, d]$-kod nad $GF(q)$ je linearen (n, q^k, d)-kod.

$$d = \min_{x \in \mathcal{C}, x \neq 0} t(x)$$

Generatorske matrike G koda $\mathcal{C}$ je matrika velikosti $k \times n$. Njene vrstice so kodne besede, ki sestavljajo baso kode.

Kodiranje

$$c = s \times G$$

$\mathcal{C}^\perp = \{x \in \Sigma^n; cx^T = 0 \forall c \in \mathcal{C}\}$ je **dualni kod** koda $\mathcal{C}$.

Generatorsko matriko koda $\mathcal{C}^\perp$ imenujemo **nadzorna matrika** koda $\mathcal{C}$

$$G \in GF(q)^{k \times n}, H \in GF(q)^{(n-k) \times n}$$

$$\text{rang}(G) = k, \text{rang}(H) = n - k$$

potem velja: G je generatorska in H nadzorna matrika nekega linearnega koda $\Leftrightarrow G \times H^T = 0$.

Sindrom

$$y = x + e$$

Hy^T imenujemo **sindrom** besede y.

$$Hy^T = He^T$$

Dekodiranje

- Izračunaj $\sigma = Hy^T$
- V tabeli T poišči e: $He^T = \sigma$ (če ga ni, zahtevaj ponoven prenos besede)
- Vrni $x = y - e$

Razmaknjenost

Naj bo $\mathcal{C}$ linearen kod nad abecedo $GF(q)$ z ndzorno matriko H. Potem velja:

$d(\mathcal{C}) \geq d \Leftrightarrow$ vsaka množica $d - 1$ stolpcev matrike H je linearno neodvisna nad $GF(q)$

$d(\mathcal{C}) = \max\{d;$ vsakih $d - 1$ stolpcev H je linearno neodvisnih$\}$

Koda sta **ekvivalentna**, če lahko iz enega dobimo drugega z zaporedjem transormacij **kodne matrike**

- premutacije stolpcev
- premutacije simbolov v izbranem stolpcu
- permutacije vrstic

$$\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$$

Za vsak $[n, k, d]$-kod obstaja ekvivalenten kod z generatorsko matriko v standardni obliki

$$[I_k|A]$$

Meje za kode

$$A_q(n, d) = \max\{M; \exists (n, M, d) \text{ kod nad } GF(q)\}$$

$$A_q(n, 1) = q^n$$

$$A_2(n, 2) = 2^{n-1}$$

$$|K(x, r)| = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} (q - 1)^k$$

Hamingova zgornja meja

$$A_q(n, d) \leq \frac{q^n}{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (q - 1)^k}$$

Če kod dosega Hammingovo mejo, je **popoln**.

Gilbert-Varshamova spodnja meja

$$A_q(n, d) \geq \frac{q^n}{\sum_{k=0}^{d-1} \binom{n}{k} (q - 1)^k}$$

Hammingov kod reda r

$[n, k, d]$-kod dolžine $n = \frac{q^r - q}{q - 1}$ in dimenzije $k = n - r$.

Singletonova meja

Naj bo $\mathcal{C}$ (n, M, d)-kod nad $GF(q)$. Potem je $M \leq q^{n-d+1}$.

Za linearni $[n, k, d]$-kod je $d \leq n - k + 1$.

Linearni $[n, k, d]$-kod lahko popravi največ $\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ napak.

Ciklični kodi

Besedo $\hat{x} = x_n x_1 \cdots x_{n-1}$ imenujemo **ciklični pomik** besede x.

Linearen kod je **cikličen**, če velja

$$x \in \mathcal{C} \Rightarrow \hat{x} \in \mathcal{C}$$

Besedo $x = x_1 \cdots x_n$ identificiramo s polinomom $x(t) = x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \in GF(q)[t]/(t^n - 1)$. Besedi $\hat{x}$ ustreza polinom $t \cdot x(t)(\mod t^n - 1)$.

Naj bo $\mathcal{C}$ cikličen kod in $g(t)$ neničeln polinom minimalne stopnje v $\mathcal{C}$. Potem velja:

- $\mathcal{C} = \langle g(t) \rangle = \{g(t) \cdot a(t) \mod t^n - 1; a(t) \in GF(q)[t]\}$ (ideal, ki ga generira $g(t)$)
- $g(t) | t^n - 1$
- $\dim \mathcal{C} = k = n - \deg(g)$ in $B = \{g(t), tg(t), \cdots, t^{k-1}g(t)\}$ je baza $\mathcal{C}$.

Ciklični kodi dolžine n nad $GF(q)$ ustrezajo deliteljem polinoma $t^n - 1$.

Če $\mathcal{C} = \langle g(t) \rangle$, imenujemo g **generatorski polinom** koda $\mathcal{C}$.

$$G = \begin{bmatrix} g(t) \\ tg(t) \\ \vdots \\ t^{k-1}g(t) \end{bmatrix}$$

je generatorska matrika za $\mathcal{C}$.

$$t^{n-k+i} = q_i(t)g(t) + r_i(t)$$

Potem velja:

$$t^{n-k+i} - r_i(t) = q_i(t)g(t) \in \mathcal{C}$$

$$G\prime = \begin{bmatrix} -r_0(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -r_1(t) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -r_{k-1}(t) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

je potem generatorska matrika za $\mathcal{C}$.

Kodiranje

$$t^{n-k}s(t) = q(t)g(t) + r(t) \Rightarrow x(t) = t^{n-k} * s(t) - r(t) \in \mathcal{C}$$

Reed-Solomonovi kodi

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in GF(q), \alpha_i \neq 0, \alpha_i \neq \alpha_j$$

$$\Rightarrow g(t) = (t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_p) | t^{q-1} - 1$$

$g(t)$ generira linearen cikličen kod dolžine $n = q - 1$ nad $GF(q)$ dimenzije $n - p$.

Naj bo $n = 2^r - 1, \delta \in \{2, \ldots, n\}$, β primitiven element $GF(2^r)$. **Reed-Solomonov kod** $RS(n, k)$ je cikličen linearen kod dolžine n in dimenzije $k = n - \delta + 1$ nad $GF(2^r)$, generiran s polinomom $g(t) = (t - \beta)(t - \beta^2) \cdots (t - \beta^{\delta-1})$

Naj bo $\mathcal{C}$ Reed-Solomonov kod dolžine $n = 2^r - 1$ in dimenzije k. Potem je $d(\mathcal{C}) = n - k + 1$.

To pomeni, da Reed-Solomonov kod doseže Singletonovo mejo – popravi največje število napak glede na št. simbolov, ki jih dodamo sporočilu.