

Crecimiento y decrecimiento de polígonos mediante paralelas.

Nelson González Jhones

11 de junio de 2007

Dedicatoria

A mi madre.

Agradecimientos

A Pablo por haberme ayudado en toda la carrera.

A Tony por darme la posibilidad de trabajar con él.

A Eduardo por su dedicación.

Resumen

En este trabajo se expone un método sencillo para el ensanchamiento o encogimiento de polígonos en el plano. Se hace un análisis de la complejidad que se presenta en el mismo cuando son localmente tratadas las intersecciones producidas con el aumento de la distancia. Se realizó una sencilla implementación de algoritmo de construcción del esqueleto recto de un polígono simple. Se brinda, además, un algoritmo construye el apropiado conjunto de polígonos resultante de este problema a partir de esta estructura.

Índice general

Introducción	5
1. Una forma de abordar el problema	6
1.1. La idea del Plane-Sweep	8
1.2. ¿Criterios o conjeturas?	10
1.3. Conclusiones y problemas abiertos	12
2. El esqueleto recto	14
2.1. ¿Qué es el esqueleto recto?	14
2.2. Breve comparación con el eje medio o medial axis	16
2.3. Propiedades básicas	17
2.4. Cómputo del esqueleto recto	18
3. Las paralelas	25
3.1. Relación entre las caras del esqueleto y las aristas de la poligonal resultante.	25
3.2. Cómputo del conjunto de polígonos	27
Bibliografía	30

Introducción

El propósito de este trabajo de diploma es dar solución al problema de hacer crecer o decrecer un polígono simple P mediante paralelas, habiendo fijado previamente, una distancia. Esto equivale a la realización de un apropiado proceso de contracción o dilatación de P hasta obtener el apropiado conjunto de polígonos resultante.

En la práctica, se pueden encontrar varias aplicaciones de este problema, como por ejemplo, en el cálculo del techo de un edificio dada la geometría que forman sus paredes en una vista aérea.

En la literatura que comprende el campo de la geometría computacional es conocido un problema similar. Este problema consiste en hacer crecer o decrecer un polígono manteniendo fija una distancia a su frontera. El resultado de esto da lugar a curvas parabólicas en las vecindades de un vértice reflexivo (vértice cuyas aristas incidentes forman un ángulo mayor que π en el interior del polígono). En el resultado del problema tratado en este trabajo, esto no es deseado, por el contrario se especifica mantener un número acotado de segmentos los cuales tienen un correspondiente paralelo en el polígono original.

A lo largo de este trabajo se expondrá una serie de particularidades que trae consigo este problema. Estas ponen en evidencia la complejidad del mismo. Primeramente será abordada una vía directa en pro de lograr su solución. Con esta, no todos los casos fueron resueltos. Esta es la razón por la cual, a pesar de que esta vía se deja propuesta para una futura investigación, el estudio del problema fue dirigido en otra dirección.

En el capítulo 2 es estudiada una estructura poco conocida, el esqueleto recto de un polígono simple. También en este capítulo, se reflejan algunas de las propiedades de esta estructura que justifican el porqué de su uso en el tratamiento del problema presentado. Se brindan, además, los detalles de una sencilla implementación del algoritmo de construcción de esta estructura.

Finalmente es presentado un algoritmo que computa, a partir del esqueleto recto, el adecuado conjunto solución del objetivo trazado.

Capítulo 1

Una forma de abordar el problema

El problema que intentamos resolver consiste en hacer crecer o decrecer un polígono P habiendo fijado, previamente, una distancia d . El resultado de esta operación está dado por un conjunto de poligonales cerradas. Ver Figura 1.1. En lo adelante nos referiremos a este conjunto como poligonal resultante P' .

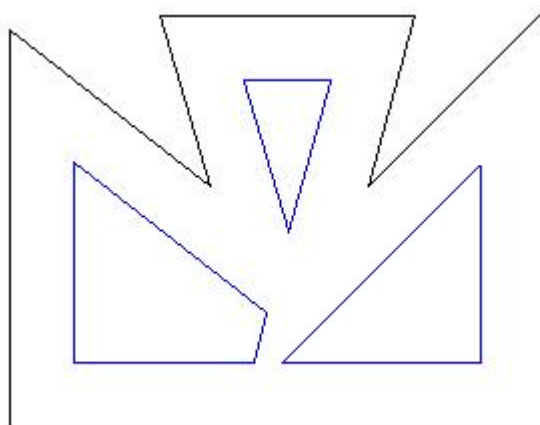


Figura 1.1: Resultado del encogimiento de un polígono mediante paralelas.

A cada segmento de P' le corresponde un único segmento del polígono original P . Esto no ocurre en sentido contrario, no necesariamente a todo segmento de P le corresponde un segmento de P' . Esta relación viene dada de la siguiente manera. Sean los segmentos s y s' tal que $s \in P$ y $s' \in P'$. Si s es el segmento correspondiente de s' , entonces se cumple que s' es paralelo a s y la distancia entre ellos es d .

Geométricamente el resultado de hacer crecer (decrecer) un polígono P mediante paralelas a una distancia d puede ser visto al intentar dibujar P con una pluma de grosor d .

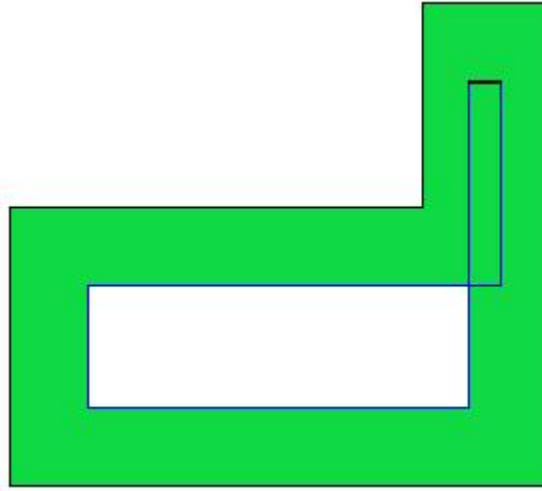


Figura 1.2: Resultado de trazar por sobre la frontera de P una pluma de grosor d .

El proceso de trazar una línea paralela a cada arista de P a distancia d , estableciendo una correspondencia uno a uno, así como el cálculo de las intersecciones con sus aristas adyacentes es simple. El resultado de este proceder consiste en una poligonal cerrada P' que a diferencia de P no tiene que ser simple. Ver Figura 1.3(a).

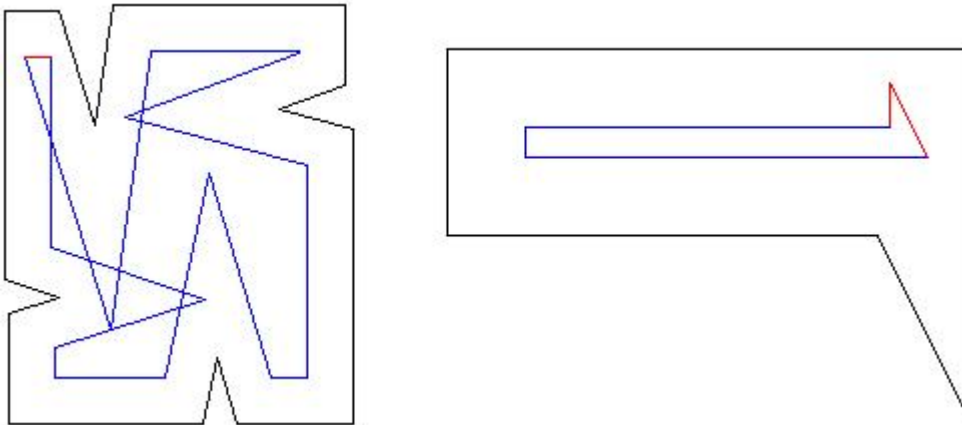


Figura 1.3: (a) P' no es simple y (b) otras consecuencias no deseables.

El aumento de la distancia trae múltiples consecuencias no deseables en el resultado. Una de ellas es que puede cambiar la geometría del polígono resultante con respecto a la del original. Ver Figura 1.3(b).

Este aumento da lugar también a la aparición de regiones en el resultado producto de intersecciones entre segmentos no adyacentes. Estas regiones pudieran ser no deseables. Ver Figura 1.2. En la analogía expuesta, esto se evidencia como el solapamiento del trazo de grazor d por sobre dos segmentos no adyacentes. Ver Figura 1.2.

Si se lograra diferenciar cuando una región es deseable o no, se tendría una vía de solución al problema ya que los casos, similares al mostrado en la Figura 1.3(b), pueden ser localmente tratados en la construcción de P' . Bastaría con eliminar toda región no deseable y obtener el resto como resultado. A continuación se expondrán algunas ideas analizadas con vistas a lograr dicho objetivo.

1.1. La idea del Plane-Sweep

Para diferenciar las regiones primero tenemos que hallarlas. Como ya se ha visto, las regiones estarán dadas por intersecciones de segmentos en el plano. Por tal motivo se hizo uso de la técnica del plane-sweep siguiendo la idea usada para resolver el problema de determinar las intersecciones de n segmentos en un plano. Sin embargo esto no es suficiente ya que, no sólo es necesario determinar las regiones, sino también clasificarlas.

En el mismo momento en que se identifique una región, esta será clasificada. La base de esto último está sustentada en los siguientes lemas.

Sea C una curva cerrada y orientada en el plano, que divide al plano en k regiones diferentes.

Lema 1.1.1. *Sean r_1 y r_2 dos rayos que van desde los puntos x_1 y x_2 respectivamente, hasta el infinito. Si x_1 y x_2 pertenecen a una misma región determinada por C , entonces la diferencia entre los cortes de izquierda a derecha y los cortes de derecha a izquierda de C con r_1 y r_2 será la misma.*

Demostración. Sea z una curva orientada que pase por los puntos x_1 y x_2 . Supóngase que se realiza dos recorridos sobre z a partir de los puntos x_1 y x_2 en sentidos contrarios. Sean d_1 y i_1 los cortes derecha a izquierda y los cortes de izquierda a derecha respectivamente, de z con C en el recorrido a partir de x_1 . Simétricamente d_2 y i_2 representan los cortes del recorrido a partir de x_2 . Supóngase además, que entre x_1 y x_2 , z no corta a C . Entonces se cumple que $d_1 + i_2 = d_2 + i_1$ ya que C es cerrada y por tanto $d_1 - i_1 = d_2 - i_2$.

En particular, los recorridos a partir de x_1 y x_2 pueden ser rectos y con esto queda terminada la demostración. \square

Es posible establecer un sentido a P' . Supóngase los vértices del polígono P' y sus aristas orientadas en contra de las manecillas del reloj. Así pues, P' puede verse como una poligonal cerrada orientada en el plano.

Téngase una recta vertical r y un entero t , inicialmente con valor cero, asociado a la misma. La recta r se desplazará horizontalmente cubriendo todo el plano y t será modificado de la siguiente manera:

▷ $t := t - 1$ si r corta a P' de izquierda a derecha

▷ $t := t + 1$ si r corta a P' de derecha a izquierda

Asígnesele a cada región el valor de t . Un segmento de P' formará parte de una región deseable si tiene una región adyacente con valor -1 y otra con valor 0 . El **Lema 1.1.1** asegura que, independientemente del camino por el cual se llegue a una región, esta siempre tendrá el mismo valor.

El problema presente es que hay inicialmente regiones de P' inexistente en relación a la comparación geométrica entre P' y P . Ver Figura 1.4. Estas regiones deberían ser eliminadas puesto que no tiene sentido clasificarlas. Además de esto, estas pueden presentar conflicto en la adecuada clasificación de otras regiones ya que podría intersectarlas. De esta forma se originarían nuevas regiones también inexistentes.

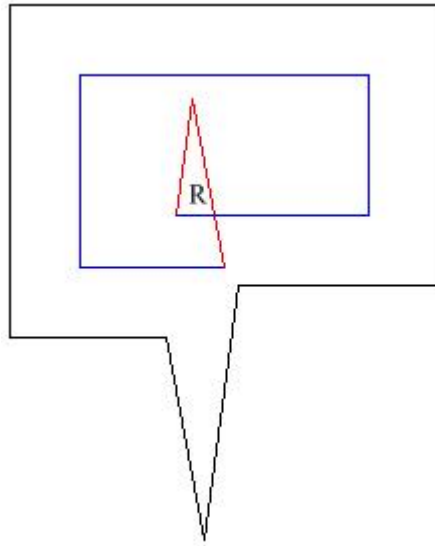


Figura 1.4: R región inexistente y segmentos invertidos representados en rojo

En la próxima sección se analiza una característica común de este tipo de regiones. Dicha característica será utilizada para su previa detección. Se propone, además, una secuencia de criterios para la eliminación apropiada de las mismas.

1.2. ¿Criterios o conjeturas?

Se entenderá por *segmento invertido* de P' aquel cuyo sentido se encuentra en oposición con su correspondiente en P . Recuérdese que se ha establecido una orientación a los segmentos de P . Ver Figura 1.4.

Un segmento invertido aislado representa un segmento que, a la distancia dada, no debería reflejarse en P' . Ver Figura 1.4. Una secuencia de segmentos invertidos puede generar regiones no deseables. Consecuentemente con la eliminación de los segmentos invertidos son eliminadas las regiones que estos conforman. Se realizó un estudio en búsqueda de un apropiado método para la eliminación de estos segmentos. El método se encuentra basado en los tres criterios siguientes.

Criterio 1.2.1. *Si en el resultado se encuentra una cadena de segmentos invertidos de longitud mayor que dos, entonces son eliminados todos los segmentos de la cadena excepto el primero y último. Se obtiene de esta forma, un par de segmentos invertidos que pudieran o no intersectarse.*

Criterio 1.2.2. *Si tenemos un segmento invertido aislado, significa que, a la distancia dada, ese segmento no debe verse reflejado en el resultado. En consecuencia de esto, es eliminado y es hallada la intersección (si existe) entre los segmentos adyacentes a este. La consecuencia de esta intersección, sobre los mismos, es analizada en ese momento.*

Criterio 1.2.3. *Teniendo un par de segmentos invertidos, no eliminar aquel que luego de la eliminación de su adyacente invertido deje de serlo. En caso de que esto sea imposible eliminamos a ambos, por otra parte en el caso de tener reflexividad no llegamos a contar con un criterio sólido sobre cual de los dos segmentos debiera eliminarse.*

En cualquiera de los criterios anteriores pudiera suceder que la intersección del nuevo par de segmentos adyacentes no invertidos no existiera (los segmentos son paralelos). En este punto es analizada la eliminación de uno o de ambos, simétricamente a la manera en que se procede a la eliminación de segmentos invertidos.

Este proceso no es incremental en la reducción del número de segmentos invertidos. Debido a las nuevas intersecciones que se producen, segmentos que en principio no eran invertidos pudieran llegar a serlo.

Por lo antes expuesto el punto de parada del proceso de decremento del número de segmentos invertidos, no está dado por la eliminación local de un segmento invertido. Este se encuentra en la eliminación global de los segmentos invertidos de la poligonal resultante, puesto que el número de segmentos en ella, es finito.

Luego de la aplicación de los criterios vistos, las regiones inducidas por los segmentos invertidos pasan a eliminarse. Desafortunadamente la eliminación de estos segmentos trae como consecuencia la generación de nuevas regiones en P' . Estas nuevas regiones son inexistentes en el sentido analizado y, a diferencia de las conformadas por segmentos invertidos, cumplen una característica. Esta característica está dada entre un par de segmentos adyacentes que conforman dicha región y se encuentra determinada por lo siguiente: *La posición relativa entre un par de segmentos no invertidos adyacentes en P' difiere a la posición relativa entre sus correspondientes no adyacentes en P .* Ver Figura 1.

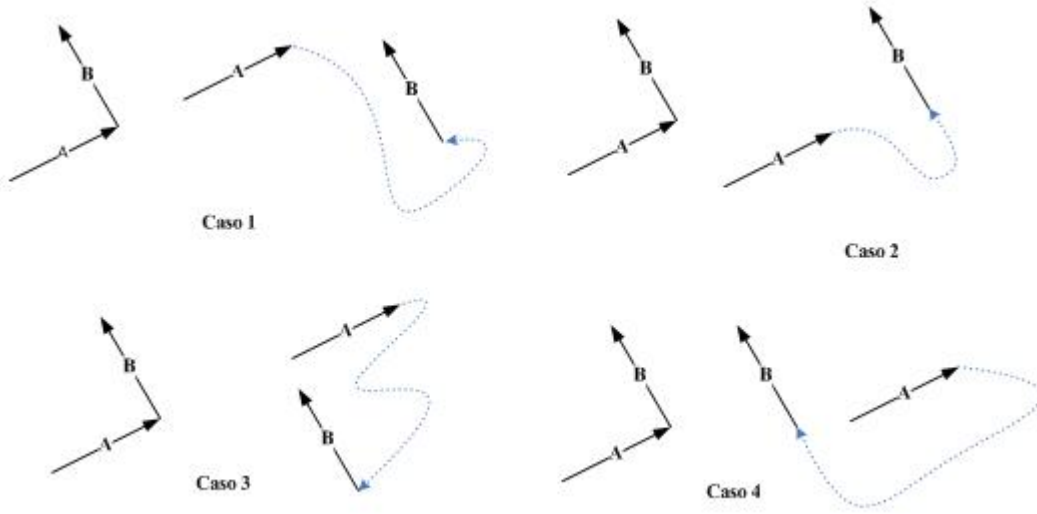


Figura 1.5: En el **Caso 1** B está invertido , en el **Caso 2** ninguno de los dos están invertidos, en el **Caso 3** ambos están invertidos y en el **Caso 4** A está invertido.

Esto formará parte del método por lo que se expone en un cuarto criterio.

Criterio 1.2.4. *Teniendo un par de segmentos s_1 y s_2 consecutivos en P' , que no lo son en P . Si s_1 está a la izquierda (a la derecha) de s_2 en P' y s_1 se encuentra a la derecha (a la izquierda) de s_2 en P entonces s_1 es considerado como invertido por este criterio. Simétricamente es analizada la posición de s_2 respecto a s_1 .*

Luego que de ser calculada una nueva intersección es aplicado este último criterio el cual, a lo sumo, da lugar al análisis de la eliminación de dos segmentos. Esta eliminación es tratada consecuentemente con los tres primeros criterios para segmentos invertidos.

Las regiones no deseables e inexistentes fueron eliminadas por un método basado en estos criterios. En la próxima sección se verán los resultados arrojados por el trabajo realizado en esta dirección.

1.3. Conclusiones y problemas abiertos

El método expuesto es muy eficiente y arroja resultados satisfactorios para distancias pequeñas. Sin embargo, a pesar de la eliminación de las regiones no deseables, en algunos casos el resultado, de acuerdo con la especificación, fue inaceptable. El producto de la eliminación de segmentos localmente trae como consecuencia la eliminación de segmentos que deberían aparecer en la poligonal resultante.

Las regiones o segmentos resultantes de la prolongación de los picos que son cortados completamente por algún segmento de la poligonal original no deberían tener consecuencias luego del corte. Ver Figura 1.6. Una vía para detectar este problema, sería hacer un preprocesamiento con las aristas que forman los picos y las intersecciones, de estos, con la poligonal. Este proceso podría llevarse a cabo usando la técnica del Plane-Sweep para detectar dichas intersecciones. Se ha utilizado la palabra completamente debido a que, si P los hubiera cortado parcialmente, estos deberían continuar con su prolongación, ver Figura 1.7. Este detalle tendría que tenerse en cuenta en la implementación.

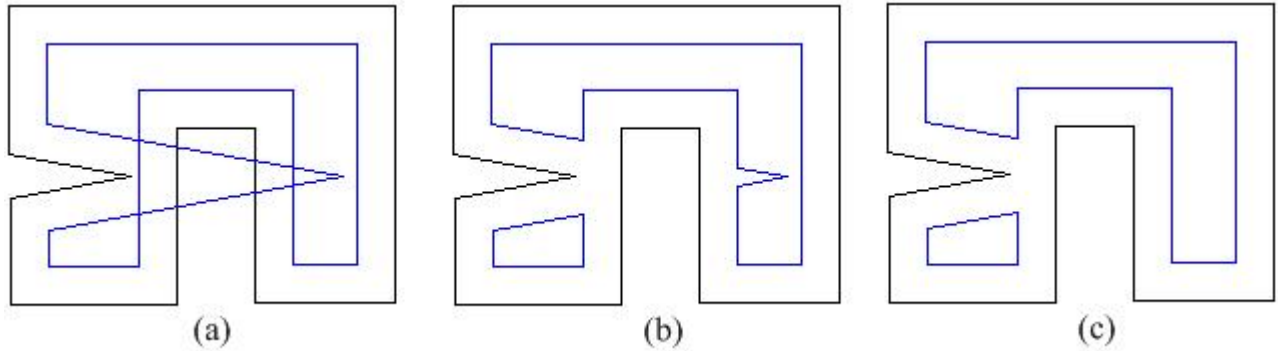


Figura 1.6: (a) Resultado directo de hacer la paralela a cada segmento, (b) resultado de la eliminación de las regiones no deseables y (c) resultado de la especificación.

En el próximo capítulo es analizada una solución indirecta del problema haciendo uso de una estructura auxiliar. Esta estructura permite realizar, de forma discreta, el crecimiento o decrecimiento de un polígono. Esta operación se llevará a cabo hasta que ocurra la primera intersección (entre segmentos no adyacentes) para entonces resolver el problema en esta situación y continuar recursivamente el proceso hasta alcanzar la distancia requerida. Esta vía de solución permite identificar si un segmento del polígono original tendrá o no un correspondiente en la poligonal resultante.

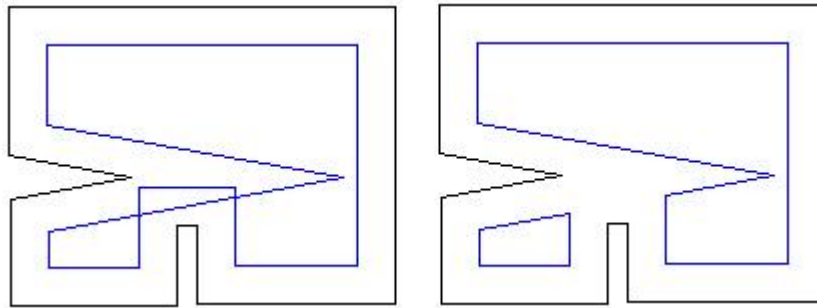


Figura 1.7: Corte parcial con el polígono original

Capítulo 2

El esqueleto recto

Un grafo plano de líneas rectas G , sobre n puntos en el plano Euclidiano, es un conjunto de segmentos que no se cortan cubriendo todos puntos del plano. Un esqueleto de G es una partición del plano en regiones de forma tal, que, cada región refleja, de manera apropiada, la forma geométrica de G .

Entre los ejemplos más conocidos y ampliamente usados de esquetos se encuentra el diagrama de Voronoi de G o, si G es un polígono simple, el eje medio o medial axis de G . Estos esqueletos quedan definidos por todos los puntos del plano (polígono en el caso del eje medio) que tienen más de un elemento en G más cercano. Es posible encontrar numerosas aplicaciones de esqueletos tanto dentro como fuera del campo de la ciencia de la computación, por ejemplo en biología, geografía, reconocimiento de patrones, robótica y gráficos por computadora.

2.1. ¿Qué es el esqueleto recto?

En 1995 Aichholzer y Aurenhammer introducen un nuevo tipo de esqueleto para polígonos simples en el plano, el esqueleto recto. Este se encuentra definido por el rastro que dejan los vértices del polígono inicial cuando este se ve encogido o ensanchado, moviéndose de cada una de sus aristas a una misma velocidad. Ver Figura 2.1(a).

Sea P un polígono simple y $S(P)$ el esqueleto recto correspondiente a P . Cada arco de $S(P)$, estará formado por un segmento de la bisectriz definida por un par de aristas de P . $S(P)$ queda definido por la unión de los segmentos de bisectrices trazados a partir de los vértices de P en el momento en que este es encogido o ensanchado. Los nodos de $S(P)$ serán inducidos por el patrón de intersecciones entre las aristas de P al ser trasladadas en el sentido en que P sea dilatado. $S(P)$ representa una estructura única definiendo una partición poligonal de P .

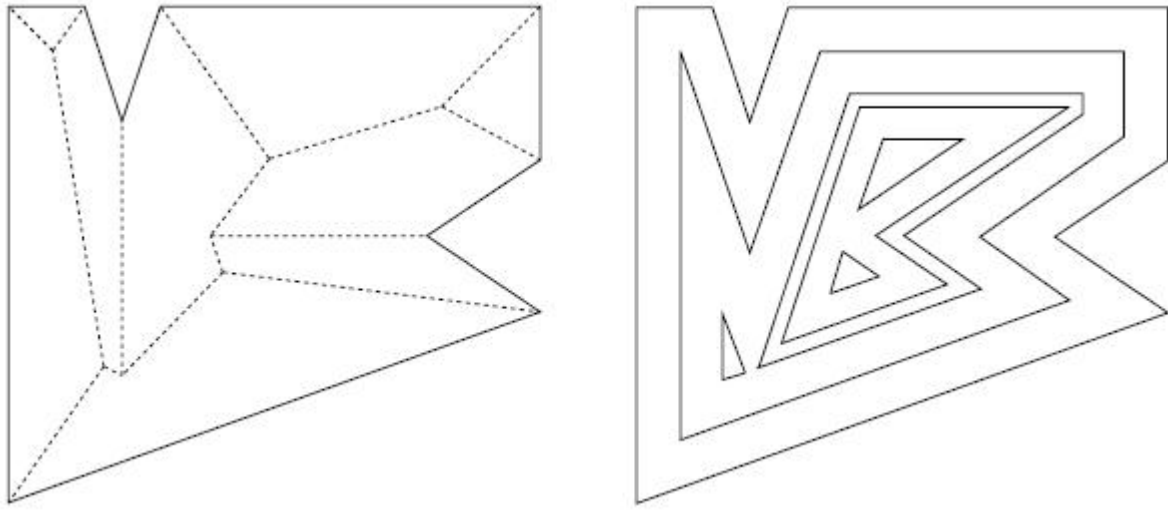


Figura 2.1: (a) Esqueleto recto y (b) jerarquía de polígonos.

El proceso de dilatación o contracción da lugar a una jerarquía de polígonos anidados.

Imagine que la frontera de P es propagada hacia el interior de P , de forma paralela y a la misma velocidad para todas sus aristas. Durante este proceso la longitud de una arista puede crecer o decrecer. Cada vértice de P se mueve a lo largo de la bisectriz formada por sus aristas incidentes. Esta situación continúa mientras que la frontera de P no sufra topológicamente ningún cambio. Existen dos posibles tipos de cambio.

- (1) *Evento de arista*: La longitud de una arista se reduce a cero, la arista se desvanece. Si sus aristas vecinas aún tienen longitud positiva, en este momento, pasan a ser vecinas.
- (2) *Evento de división*: Una arista es dividida, un vértice reflexivo¹ se mueve hacia esta arista dividiendo el polígono entero. Nuevas adyacencias se producen entre la arista que es dividida y cada una de las aristas incidentes en el vértice reflexivo.

Después de cada tipo de evento se generán uno o dos nuevos polígonos que son encogidos recursivamente si su área es mayor que cero. Es posible que ciertos eventos ocurran simultáneamente aún cuando P esté en posición general², por ejemplo, tres eventos de aristas dan lugar a la reducción de un triángulo en un punto.

¹Vértice reflexivo de un polígono: vértice cuyas aristas incidentes forman un ángulo mayor que π en el interior del polígono. Vértice convexo: vértice que no es reflexivo.

²Un polígono no está en posición general si tres de sus vértices están alineados o cuatro se encuentran en una misma circunferencia.

Así pues, supóngase que se quiera dilatar o contraer un polígono P a una distancia d . Es posible dilatar o contraer P una distancia $\delta < d$, tal que δ represente el momento en que ocurra el primer evento. Este evento estará asociado a la primera intersección de las aristas de P al ser desplazadas en el sentido en el que P esté siendo dilatado. En este momento, el evento es tratado dando como resultado uno o dos nuevos polígonos que serán recursivamente ensanchados (o encogidos según el caso) una distancia $d - \delta$. Esta forma de proceder da como resultado el particular tratamiento de cada una de las intersecciones que se produzcan, con el aumento de la distancia, entre las aristas de la poligonal resultante.

2.2. Breve comparación con el eje medio o medial axis

En general, el esqueleto recto difiere del bien conocido medial axis. El medial axis de un polígono P consiste en todos los puntos del interior de P que no tienen un único punto más cercano en la frontera de P .

Si P es un polígono convexo ambas estructuras son idénticas. En caso contrario, el medial axis refleja, en concordancia con el lugar geométrico que equidista de una línea y un punto, curvas parabólicas en las vecindades de los vértices reflexivos de P . Ver Figura 2.2. En oposición a esto, el esqueleto recto está sólo compuesto por segmentos de línea recta lo cual resulta útil cuando las secciones parabólicas necesitan ser evitadas.

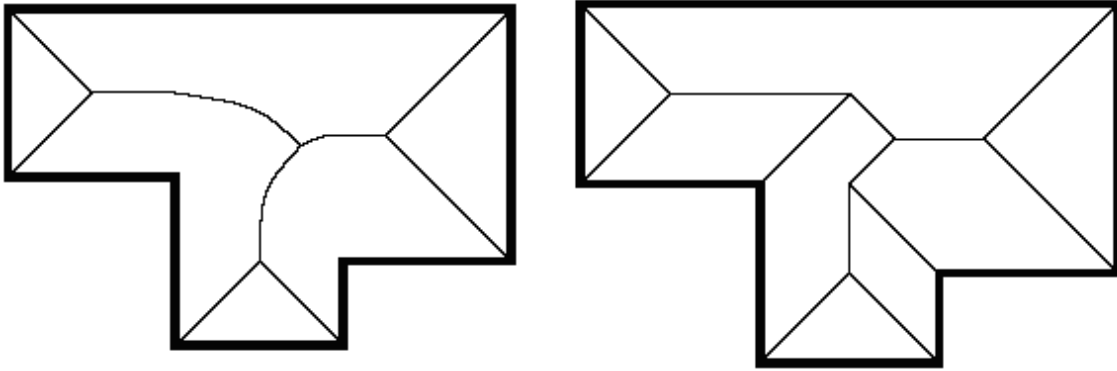


Figura 2.2: (a) Medial axis vs (b) esqueleto recto.

La estructura arbórea del esqueleto recto implica que, si P es un polígono no convexo, $S(P)$ tiene menor tamaño combinatorial que el medial axis de P . Aunque los dos representan un árbol, este último tiene que distinguir entre partes rectas de arcos y curvas. Más explícitamente, si P tiene r vértices reflexivos entonces $S(P)$ tiene $2n - 3$ arcos mientras que el eje medio de P da lugar a $2n + r - 3$ arcos de los cuales r son curvas parabólicas.

El medial axis, como caso particular del diagrama de Voronoi, está determinado sobre un modelo de distancia. El esqueleto recto no es definido usando una función de distancia, por el contrario esté se encuentra determinado por un apropiado proceso de encogimiento del polígono. El esqueleto recto puede ser útil en aplicaciones del medial axis como, por ejemplo, en el reconocimiento de formas [5].

2.3. Propiedades básicas

En esta sección mencionaremos algunas de las propiedades elementales del esqueleto recto, $S(P)$. Con el propósito de distinguirlos de los elementos de P , a los cuales se les llamará vértices y aristas, denótese por nodos y arcos los elementos de $S(P)$ que no forman parte de P . Cada arista e de P recorre una cierta área a la cual se le denominará, en concordancia con la literatura, cara de e .

Los nodos de $S(P)$ pueden tener un grado mayor que tres. Por lo general, esto tiene lugar cuando algunos eventos ocurren simultáneamente. Se puede citar, por ejemplo, el caso en el que se esté reduciendo un polígono regular. En ausencia de esta situación, se cumple que $S(P)$ da lugar a $n - 2$ nodos y $2n - 3$ arcos exactamente, como se demuestra en el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *$S(P)$ es un árbol y consiste en exactamente n caras conectadas, $n - 2$ nodos y $2n - 3$ arcos.*

Demostración. La construcción de una cara $f(e)$ comienza en su arista, e , de P . $f(e)$ no puede ser dividida aún cuando e parezca serlo. La construcción de $f(e)$ está completa cuando (cada parte de) e ha sido reducida a cero. Como e no puede reaparecer otra vez, $f(e)$ es conexa, y $S(P)$ es acíclico. Lo que significa que $S(P)$ es un árbol con n vértices de P como hojas y tiene $n - 2$ nodos y $2n - 3$ arcos. \square

Dos tipos de arcos de $S(P)$ se pueden distinguir. Cada arco viene dado por un segmento de la recta bisectriz de dos aristas e y e' de P o, más precisamente, de las líneas $l(e)$ y $l(e')$ que soportan estas aristas. Nótese que la intersección de las líneas $l(e)$ y $l(e')$ determina dos ángulos y por consiguiente dos bisectrices. La bisectriz relevante será singularizada de la siguiente manera. Cada línea $l(e)$ define un semiplano $h(e)$ que contiene a P , es decir, $h(e)$ es el semiplano en el que se encuentra el interior de P respecto a la arista e . Una de las bisectrices intersecta la cuña $h(e) \cap h(e')$ mientras que la otra la evita. Llámese a esta, *bisectriz* de las aristas e y e' e ignórese la otra considerada. Un arco a definido por esta bisectriz es denominado un arco convexo o un arco reflexivo dependiendo de cuando la cuña contenga a ambas aristas e y e' en su frontera o no.

Cada vértice convexo (reflexivo) de P obviamente da lugar a un arco convexo (reflexivo) de $S(P)$. Arcos convexos pueden conectar a dos nodos de $S(P)$, esto es imposible para arcos reflexivos.

Lema 2.3.2. *Arcos reflexivos de $S(P)$ sólo emanan de vértices reflexivos de P .*

Demostración. Sea vu un arco emanado por algún vértice v de P . Entonces u es un nodo que corresponde a un evento de arista o a un evento de división. Es suficiente mostrar que, después del evento, $S(P)$ continúa en u con arcos convexos solamente.

En el primer caso, sea vw la arista desvanecida. Dado que el arco wu se encuentra con vu en u , u es un vértice convexo del polígono encogido en el momento que el evento toma lugar. En el otro caso, el polígono se divide en u . Es obvio que, en ese momento u es un vértice convexo de ambos nuevos polígonos.

En conclusión, cada nuevo vértice generado durante el proceso de encogimiento es convexo. Entonces los arcos que parten de u son convexos también. \square

Una buena propiedad de $S(P)$ es que particiona a P en polígonos monótonos. Cada uno de estos polígonos representa la cara de una arista y es monótono en la dirección de esta última [1].

2.4. Cómputo del esqueleto recto

El primer algoritmo mostrado por Aichholzer [1] computa el esqueleto recto de un polígono simple de n vértices en un tiempo dado por $O(n^2 \log n)$ simulando, de forma discreta, el proceso de encogimiento. Más adelante Aichholzer y Aurenhammer [3] lo generalizaron para figuras poligonales en el plano y disminuyeron la complejidad espacial a $O(n)$. Además mostraron que, a diferencia del medial axis, el esqueleto recto no puede ser descrito utilizando un modelo de distancia. Esta es la razón por la cual, las bien desarrolladas técnicas en geometría computacional, tales como los diagramas de Voronoi concretos y los abstractos, no son aplicables en el cómputo de $S(P)$.

En 1997, Eppstein y Erickson [4] encontraron el primer algoritmo subcuadrático con un tiempo de ejecución dado por $O(n^{17/11+\epsilon})$ y similar tiempo de complejidad espacial. También ellos presentaron un algoritmo sensitivo al número de vértices reflexivos involucrados con un tiempo de complejidad dado por $O(n^{1+\epsilon} + n^{8/11+\epsilon} r^{9/11+\epsilon})$, donde r es el número de vértices reflexivos del polígono.

Es poca la publicidad disponible en la literatura sobre los detalles de implementación del algoritmo de construcción del esqueleto recto. Esta es la razón por la cual, se realizó una sencilla implementación basada en una simulación discreta del proceso de contracción o dilatación de un polígono simple. Los detalles de la misma son expuestos a continuación.

La estructura de almacenamiento básica utilizada por el algoritmo es una *lista circular de árboles* (LCA) doblemente enlazada. El esqueleto recto, $S(P)$ presenta una estructura arbórea, por lo que, en esta sección se hace referencia a $S(P)$ como árbol. Cada árbol de la lista representará un posible subárbol de $S(P)$. $S(P)$ es construido mediante un apropiado proceso de mezcla de árboles. En el momento en que la cardinalidad de la LCA sea uno, se habrá obtenido el árbol correspondiente al esqueleto recto hacia el interior del polígono.

En principio tendremos almacenados en la LCA n árboles, constituidos por los vértices de P . Estos árboles formarán las hojas del árbol $S(P)$. Cada subárbol de $S(P)$ tendrá asociado dos aristas de P y un arco que represente la bisectriz formada por dichas aristas. La mezcla entre dos árboles es detallada a continuación.

Supóngase que se esté analizando la mezcla de un árbol A_i con sus respectivos adyacentes A_{i-1} y A_{i+1} . Si el arco b_i correspondiente a A_i se intersecta con sus respectivos arcos adyacentes b_{i-1} y b_{i+1} . Sólo se tendrá en cuenta el punto de intersección más cercano al nodo raíz de A_i . Ver Figura 2.3(a). Esta intersección, si existe, es referenciada como intersección válida. Pudiera suceder que ambas intersecciones se produjesen en un mismo punto, en este caso ambas son válidas y tratadas secuencialmente.

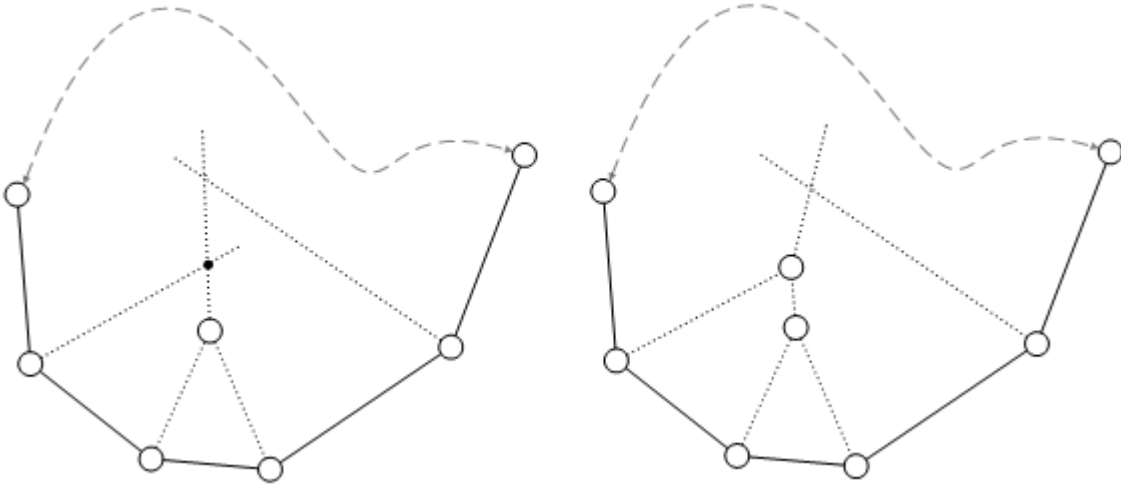


Figura 2.3: (a) Intersección válida en negro y (b) árbol resultante de una mezcla de unión.

La mezcla solo tendrá lugar entre dos árboles A_1 y A_2 adyacentes. Denotemos por a_1 y a_2 los arcos correspondientes a A_1 y A_2 respectivamente. En correspondencia con los eventos analizados tendremos dos tipos mezcla.

El evento de arista representa una mezcla en la que los árboles A_1 y A_2 se funden formando un nuevo árbol A teniendo por hijos a los árboles A_1 y A_2 . Esta mezcla será llamada *mezcla*

de unión. Esto implica que la intersección entre a_1 y a_2 es válida. A_1 y A_2 son remplazados en la LCA por A , disminuyendo su cardinalidad en uno. Ver Figura 2.3(b).

Llámesse ladera de un árbol al camino simple desde su raíz hasta la primera o la última de sus hojas.

El evento de división es representado, sin pérdida de generalidad, por la mezcla entre A_1 y un subárbol de A_2 , a este último llámesele A_s . Este caso es referido como *mezcla de corte*. Sea $C(A_s)$ el conjunto de los nodos de la ladera de A_s próxima a A_1 y $C(A_2)$ el conjunto de los nodos de la ladera de A_2 también próxima a A_1 . Entonces $C(A_s) \subset C(A_2)$. De la misma manera que en la mezcla de unión, A_1 y A_s se funden. Los subárboles contenidos en A_2 , hijos de los nodos pertenecientes a $C(A_2) - C(A_s)$ son reinsertados en la LCA. Esta mezcla provoca un aumento en la cardinalidad de la LCA. Ver Figura 2.4.

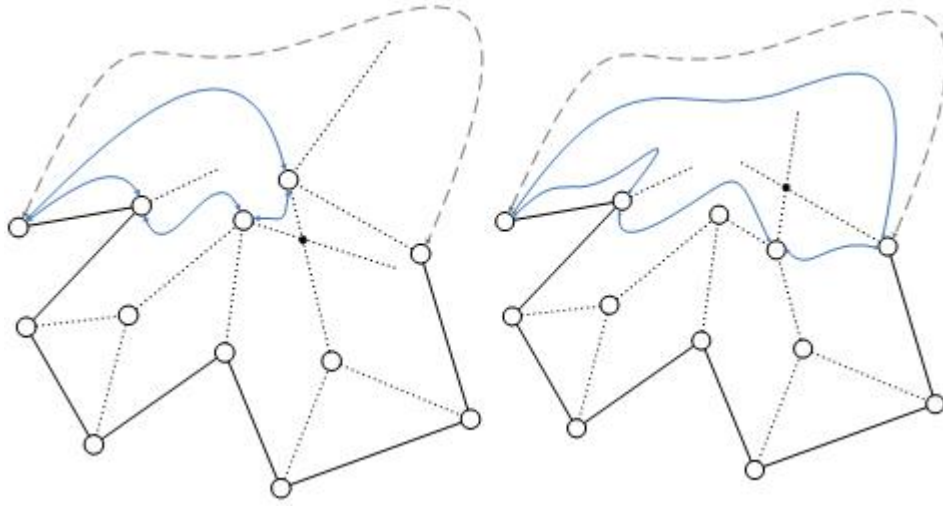


Figura 2.4: (a) Mezcla de corte y (b) consecuencias de esta en la LCA.

En ambos tipos de mezcla pudiera suceder que el árbol A_1 cortase a A_2 por sobre un nodo n , lo cual refleja que varios eventos están sucediendo de forma simultánea. En estos casos se procede de forma análoga, según el tipo de mezcla que se esté tratando, con la excepción de que no se crea un nuevo nodo. El nodo n por sobre el cual pasa el corte, pasa a ser la raíz del nuevo árbol que tendrá como hijo a A_1 . A_1 estará como primer o último hijo en dependencia de la posición relativa de A_1 con respecto a A_2 . Ver Figura 2.5.

Un árbol reflexivo es un árbol que tiene un arco reflexivo conectado a su raíz. En el algoritmo que se expone se ha hecho el siguiente presupuesto.

Presupuesto 2.4.1. *Una mezcla de corte sólo es inducida por un árbol reflexivo.*

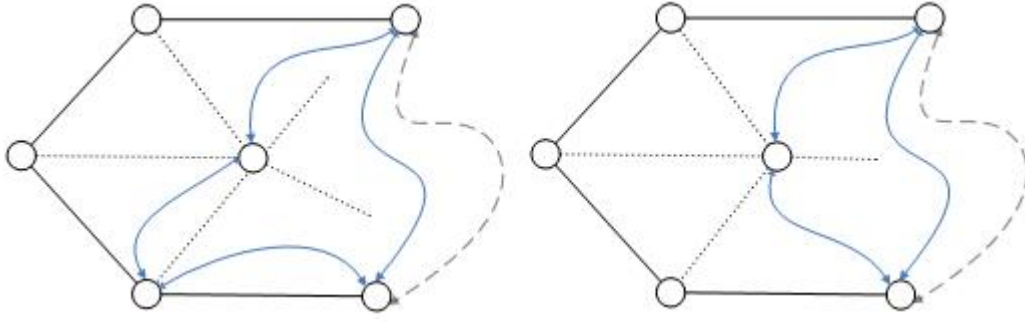


Figura 2.5: (a) Eventos simultaneos y (b) consecuencias de estos en la LCA.

El presupuesto anterior discrimina, de antemano, el tipo de mezcla que se producirá. O sea, sólo cuando se esté en presencia de un árbol reflexivo, se realizará una búsqueda de la posible intersección de su arco bisectriz con los arcos contenidos en la ladera correspondiente de sus respectivos árboles adyacentes.

En el algoritmo se ha hecho uso de una cola de prioridad como estructura auxiliar. Esta cola es implementada utilizando un Heap [2]. En ella se almacenarán las intersecciones que ocurran entre las bisectrices del polígono. La prioridad es dada a la intersección que cumpla que la distancia, entre este punto de intersección y una de las aristas involucradas en el cómputo de la bisectriz en la que este punto se encuentre, sea menor.

Algoritmo para el cómputo del esqueleto recto de un polígono simple.

1) Inicialización:

- (a) crea con los vértices dados V_1, V_2, \dots, V_n un árbol para luego almacenar cada árbol en la LCA. Tendremos en este momento n árboles activos.
- (b) por cada árbol A_i , almacenado en la LCA, añadir dos referencias a las aristas incidentes (en este momento los árboles son los vertices del polígono) y computar la bisectriz .
- (c) para cada árbol A_i calcular la intersección válida de la bisectriz con las bisectrices de los árboles adyacentes A_{i-1} y A_{i+1} y (si existe) almacenarla dentro de una cola de prioridad de acuerdo con la distancia a la línea soporte de la arista . Para cada intersección almacenar también dos referencias a los árboles A_l y A_r , lo que significa dos orígenes de las bisectrices que crean el punto de intersección I . Estos son necesarios para la identificación adecuada de las aristas e_l y e_r durante el cómputo de las bisectrices en pasos posteriores del algoritmo. Guardar el tipo de mezcla (mezcla por unión o mezcla por corte).

- 2) Mientras la cola de prioridad de los puntos de intersección tenga más de dos intersecciones hacer:
- (a) extraer el punto de intersección I del tope de la cola de prioridad
 - (b) si los árboles apuntados por I están marcados como procesados o si alguno está marcado y la intersección no es válida, entonces continuar en el paso 2
 - (c) Si la intersección es producida por una mezcla de unión.
 - i marcar los árboles A_l y A_r (referenciados por I) como procesados
 - ii crear un nuevo árbol A teniendo como hijos a A_l y A_r . Insertar A en la LCA, lo que significa conectarlo con el predecesor de A_l y el sucesor de A_r
 - iii conectar el nuevo árbol A con las apropiadas aristas e_l y e_r (apuntadas por los árboles A_l y A_r respectivamente)
 - iv para el nuevo árbol A_i creado a partir de I , computar:
 - ◇ una bisectriz b_i entre las aristas e_l y e_r
 - ◇ la intersección válida I_v (si existe) de b_i con sus bisectrices adyacentes analizando, en caso de que A_i o alguno de sus árboles adyacentes fuese reflexivo, la intersección de todos los arcos de la ladera de A_{i-1} y A_{i+1} próxima a A_i , con b_i
 - ◇ almacenar I_v (si existe) en la cola de prioridad y el tipo de mezcla que produjo
 - (d) En caso contrario, si la intersección es producida por una mezcla de corte y el corte se produce con A_r (el pseudocódigo para el caso en que el corte hubiera sido a A_l es simétrico)
 - i insertar cada subárbol, hijo de los nodos de la ladera, ver Figura 2.4, en la LCA como predecesores del árbol contenedor de A_r , además de remarcarlos como no procesados
 - ii quitar al árbol contenedor de A_r de la LCA.
 - iii crear un nuevo árbol A añadiendo como hijos a A_l y A_r
 - iv remplazar A_l por A en la LCA
 - v computar la bisectriz de A
 - vi para el nuevo árbol A y los subárboles recién reinsertados en la LCA computar la intersección válida con sus respectivos adyacentes y almacenarlas en la cola de prioridad así como, el tipo de mezcla correspondiente a cada una de ellas

- 3) Teniendo dos árboles A_1 y A_2 en la LCA añadir como hijo de A_1 a A_2 , si A_1 no representa un vértice, en caso de serlo hacer la operación contraria (ambos no pueden representar vértices ya que un polígono tiene al menos tres vértices).
- 4) Devolver el árbol resultante. FIN.

El algoritmo antes expuesto puede ser fácilmente modificado para tratar el cómputo del esqueleto recto hacia el exterior del polígono. Simplemente el resultado, en lugar de ser un único árbol, como es el caso del esqueleto recto en su interior, será una LCA. Lo anterior se debe a la ausencia de intersección de arcos por lo que tendremos árboles que nunca lleguen a mezclarse.

En este caso y en particular para el algoritmo antes presentado, nos encontramos con la cola de prioridad vacía por lo que se devuelve la LCA presente en ese momento. Otra particularidad que se tuvo en cuenta, en el caso en que se quiera obtener el esqueleto recto hacia el exterior del polígono, fue la asignación a cada árbol en la LCA de un padre ficticio infinito sobre la bisecriz definida por su raíz. Esto se realizó en consecuencia con que, cada cara de este tipo de esqueleto, va a ser abierta. Además como se verá en el próximo capítulo esto es conveniente en el cálculo siguiente, ya que permite la obtención del conjunto resultado para ambos casos en un mismo algoritmo. Ver Figura 2.6.

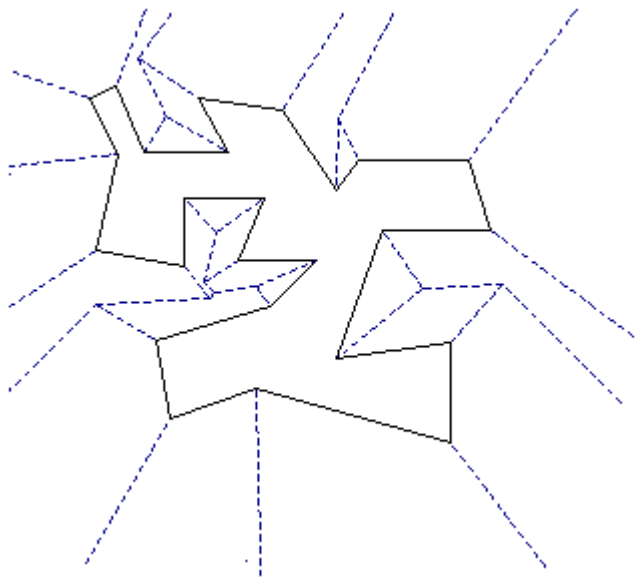


Figura 2.6: Esqueleto hacia el exterior del polígono.

Los polígonos convexos son particularmente tratados en la construcción del esqueleto recto ya sea hacia el interior o exterior de P . La no presencia de vértices reflexivos en ellos, y por ende de árboles reflexivos, elimina, según el presupuesto visto, la posibilidad de que se produzca una mezcla de corte. En el primer caso la construcción del árbol se hace gradual. En el otro caso, obtenemos el resultado de forma directa ya que las bisectrices de los vértices del polígono no se intersectan, por lo que el resultado radica en una LCA con exactamente n árboles constituidos estos vértices.

Análisis

Por conveniencia, se ha separado el análisis del algoritmo en dos casos: para polígonos convexos y no convexos. La complejidad espacial, en cualquiera de estos casos, es dada en $O(n)$ ya que esta depende linealmente del número de nodos involucrados en $S(P)$, que a lo sumo es $n - 2$, en adición de los vértices del polígono que forman las hojas del esqueleto recto.

Si el polígono P es convexo y $S(P)$ es construido hacia el exterior de P el tiempo de complejidad viene dado por $O(n)$ ya que no se producen intersecciones. En este caso, cuando la construcción de $S(P)$ se realiza hacia el exterior, el tiempo de complejidad que se expone está basado en el **Presupuesto 1.4.1**. Esta complejidad está dada en $O(n \log n)$ ya que cada intersección encontrada es almacenada en la cola de prioridad en un tiempo logarítmico. Se puede establecer una correspondencia lineal entre el número de intersecciones analizadas por el algoritmo y el número de vértices del polígono.

Hasta este momento, no se ha encontrado el orden de complejidad del algoritmo para los casos en que se traten polígonos no convexos. En la práctica se puede comprobar que este es eficiente y alcanza su punto de parada.

Capítulo 3

Las paralelas

En este capítulo se propone un método eficiente para la obtención, a partir del esqueleto recto, del conjunto de polígonos resultado del problema planteado. En el diseño expuesto, esto equivale a encontrar una función que dada una lista circular de árboles LCA devuelva el adecuado conjunto.

3.1. Relación entre las caras del esqueleto y las aristas de la poligonal resultante.

El esqueleto recto $S(P)$ se encuentra determinado, de manera unívoca, por n caras. Cada arista e define una única cara en $S(P)$ de la cual forma parte. Las caras de $S(P)$ se encuentran conectadas. Cada cara $f(e)$ representa un polígono monótono en la dirección de e [1]. $f(e)$ representa el área recorrida por e cuando el polígono original P es contraído o dilatado. Cada nodo de $S(P)$ define un arco del mismo con excepción de su raíz. $f(e)$ está determinada por las intersecciones producidas entre e y el resto de las aristas de P , al ser todas trasladadas a una misma velocidad. Ver **Lema 2.3.1**.

Los arcos de una cara de $S(P)$ se encuentran reflejados en el árbol $S(P)$ por los arcos involucrados en el camino simple desde un vértice hoja hasta la siguiente (adyacente) hoja. Los arcos de $S(P)$, involucrados en $f(e)$, son los involucrados en el recorrido simple desde un extremo de e hasta el otro. Ver Figura 3.1.

Sea $p(e)$ la línea paralela a la arista e que se encuentra a distancia d . El algoritmo que se presentará efectúa un recorrido por el árbol $S(P)$ o, más específicamente, por cada cara de $S(P)$, hallando las intersecciones de $p(e)$ con cada uno de los arcos que conforman $f(e)$.

El ser la cara $f(e)$ un polígono garantiza que $p(e)$ interseca $f(e)$ en una cantidad par de arcos. Sea $J(e)$ el conjunto de intersecciones entre $p(e)$ y cada uno de los arcos de $f(e)$. Entonces, si $|J(e)| = \emptyset$, la arista e no va a estar reflejada en la poligonal resultante. Formalmente

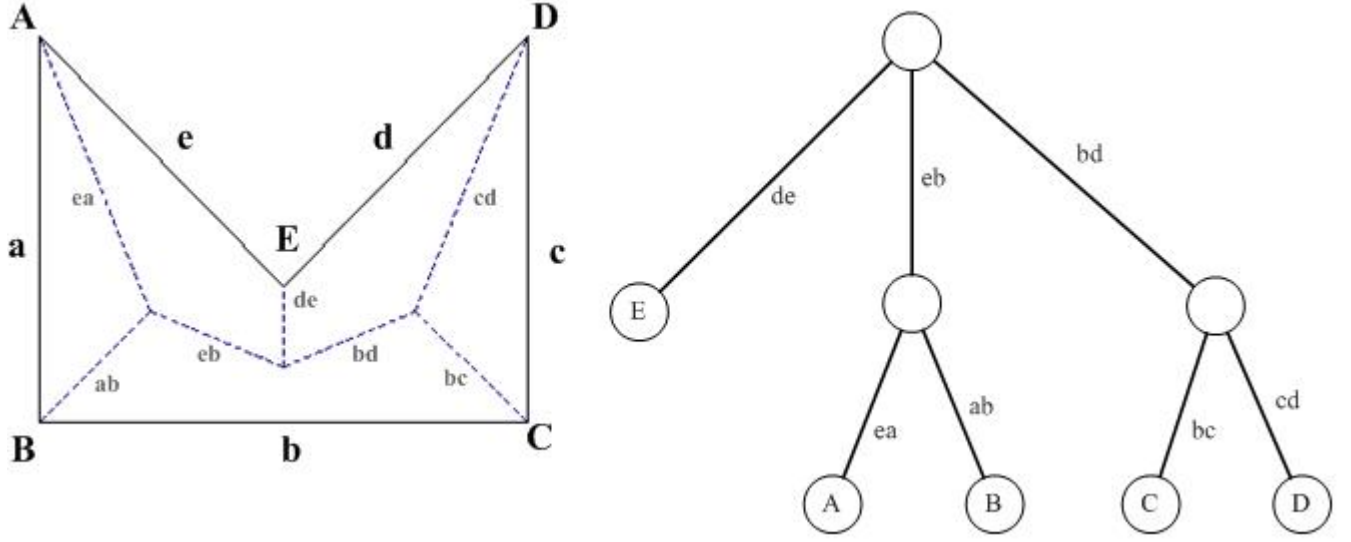


Figura 3.1: (a) Vista geométrica de $S(P)$ y (b) vista arbórea de $S(P)$

dicho, ninguna arista en la poligonal resultante, va a estar relacionada con e .

La cara $f(e)$ es convexa si el desplazamiento de la arista e no se vió interrumpido por un arco reflexivo o un arco convexo, en el caso de que la construcción de $S(P)$ haya sido hacia el exterior de P . Si $f(e)$ es convexa, entonces e está en correspondencia, a lo sumo, con un único segmento en la poligonal resultante, $J(e) = \emptyset \vee |J(e)| = 1$.

El caso en que $f(e)$ no sea convexa es debido a que al menos un vértice reflexivo (convexo si $S(P)$ se trata hacia el exterior) colisionó a la arista e dividiéndola; e tuvo participación en al menos un evento de división. Esto provoca, también en dependencia de la distancia, que $J(e) = \emptyset \vee |J(e)| \geq 2$, lo cual significa que a e le corresponden, al menos, un par de segmentos en la poligonal resultante. Ver Figura 4. Es evidente que la $|J(e)|$ es par.

Cuando se pretende obtener la poligonal resultante de una dilatación del polígono se estará trabajando con un esqueleto hacia el exterior del mismo. Esto implica que existirán caras abiertas. Los arcos que conforman estas caras están representados en la LCA por los arcos de un par de laderas vecinas. Ver Figura 3.2. En caso que se tenga un único árbol A ($S(P)$ en el interior de P), el árbol siguiente de A es el propio A y los arcos de una de sus caras son obtenidos recorriendo cada una de sus laderas. Ver Figura 3.1.

Es obvio que, cada vez que $p(e)$ entre en una cara abierta tendrá que salir de esta.

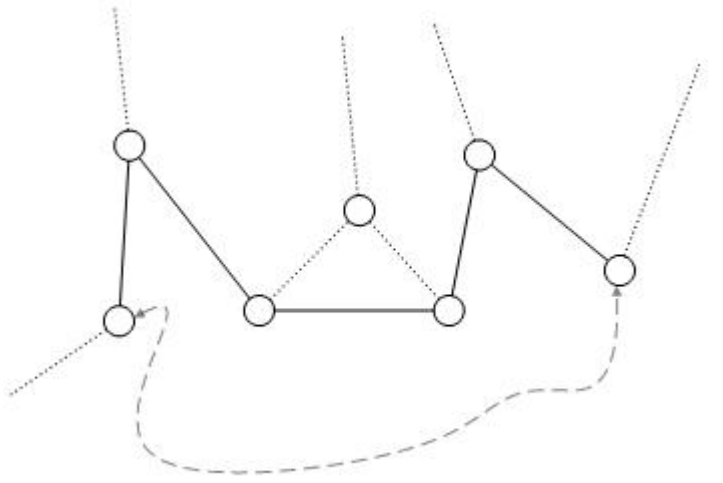


Figura 3.2: Arcos que conforman la cara abierta

3.2. Cómputo del conjunto de polígonos

Con el objetivo de lograr una mayor legibilidad y fácil exposición se realizará el cómputo de las paralelas en dos procedimientos. Primero se mostrará un procedimiento de recorrido de la LCA de acuerdo con la cara que se esté analizando. Luego se expondrá el algoritmo que construya la poligonal resultante a medida en que hace dicho recorrido.

Se marcarán las caras analizadas para no caer en un ciclo infinito. Esto es posible ya que el conjunto de caras se encuentra conectado.

Procedimiento de recorrido de una hoja h hasta la siguiente hoja h' . Esto equivale a devover los arcos de una cara.

- 1) Si h esta marcada fin del recorrido. En este punto se está sobre una hoja de $S(P)$ por lo que, en el momento de inicio, se estará comenzando una cara y en el punto de parada se estará cerrando otra. En cualquier otro momento que se llegue a este punto se estarán haciendo las dos cosas.
- 2) Si h es último hijo
 - Hacer $n \leftarrow h$
 - Mientras $n \neq \text{Raíz}(S(P)) \wedge n$ es último hijo hacer $n \leftarrow \text{Padre}(n)$
 - Si $n = \text{Raíz}(S(P))$

- hacer $n \leftarrow \text{PrimerHijo}(n)$ mientras n no es hoja. Ir al paso 1.
 - En caso contrario
 - $n \leftarrow \text{PróximoHermano}(n)$
 - Hacer $n \leftarrow \text{PrimerHijo}(n)$ mientras n no sea hoja. Ir al paso 1.
- 3) Si h no es último hijo
- $n \leftarrow \text{PróximoHermano}(n)$
 - Hacer $n \leftarrow \text{PrimerHijo}(n)$ mientras n no sea hoja. Ir al paso 1.

Contrucción de la poligonal resultante dado $S(P)$ y una distancia δ

- (1) Crear una pila S inicialmente vacía.
- (2) Para cada cara $f(e)$ del recorrido calcular la línea $p(e)$ paralela a la arista e y a distancia δ .
- (3) Para cada arco a involucrado en el recorrido de $f(e)$ hacer
 - ▷ calcular el punto de intersección pt entre $p(e)$ con a . Si pt no existe continuar en el paso (3).
 - ▷ si S está vacía almacenar pt en S
 - ▷ si en el tope de S hay un punto t reemplazarlo por un segmento con inicio en t y final en pt . En este momento se forma un segmento en $f(e)$.
 - ▷ si en el tope de S hay un segmento seg entonces si pt es igual al punto final de seg reemplazar seg por una poligonal constituida por ese segmento. En este momento se pasa para una nueva cara se va a construir una poligonal. En caso contrario almacenar pt en S . En este caso la cara no es convexa y va a tener en su interior más de un segmento.
 - ▷ si en el tope de S hay una poligonal pl entonces si pt es igual al punto de inicio de pl sacar la poligonal del tope de la pila y devolverla. Se cierra una poligonal y se agrega el polígono resultante al conjunto resultado. En caso contrario agregar pt a pl
- (4) El algoritmo termina cuando son recorridas todas las caras.

Análisis

El tiempo de complejidad del algoritmo está determinado por el recorrido que se realiza sobre cada cara de $S(P)$. En vista de que, en este recorrido, se pasa por cada arco del árbol $S(P)$ dos veces y el número de arcos está acotado por $2n - 3$ el tiempo de ejecución del algoritmo es $O(n)$.

La complejidad espacial está acotada, en el peor caso por r , donde r es el número de vértices reflexivos del polígono. Esto sucede cuando una cara no es convexa pudiendo contener, a lo sumo, r segmentos en ella.

Conclusiones

Se ha presentado un algoritmo para el cómputo del conjunto de polígonos, resultante del crecimiento o decrecimiento un polígono mediante paralelas, habiendo fijado, previamente, una distancia. Además se discuten toda una serie de características que evidencia la complejidad que se presenta en este problema.

Para el alcance del objetivo trazado, se realizó una sencilla implementación del algoritmo de construcción del esqueleto recto de un polígono simple, cuyos detalles son explícitamente mostrados. En complemento de esto, se presenta un algoritmo para la obtención del conjunto resultado a partir de dicho esqueleto.

Como problema abierto, se encuentra la extensión de este problema a una poligonal abierta. Esta extensión se presenta como un problema similar en construcción al problema de dilatar de un polígono, tratado en este trabajo. Otro de los problemas a resolver consiste en obtener la complejidad computacional del expuesto algoritmo de construcción del esqueleto recto, para el caso en que el polígono original no sea convexo.

Bibliografía

- [1] O. Aichholzer y F. Aurenhammer, D. Alberts, y B. Gartner. A novel type of skeleton for polygons. *The Journal of Universal Computer Science*, 1(1995), 752-761.
- [2] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, y Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms.
- [3] O. Aichholzer y F. Aurenhammer. Stright skeletons for general polygonal figures. *Proc. 2nd Annu. Int'l. Computing and Combinatorics Conf.*, 1996, 117-126.
- [4] D.Eppstein y J. Erickson. Raising roof, crashing cycles and playing pool: Applications of a data structure for finding pairwise interactions. *Discrete Compt. Geom.*, 22(1999), 569-592.
- [5] SW. Cheng y A. Vigneron. *Motorcycle Graphs and Stright Skeletons*. 2001, 2005.
- [6] P. Felkel y S.Obdrzalek. Stright skeleton implementation. In *Proc. 14th Spring Conf. Comp. Graphics*, 210-218, 1998.