レポート課題まとめ（Classes 4–7）

Class 4: Kolmogorovの拡張定理

4.1 μ が well-defined であることを確かめよ。具体的には $\pi_n^{-1}(A_n) = \pi_m^{-1}(A_m)$ となる $A_n, A_m \in \mathcal{S}$ について，$P_n(A_n) = P_m(A_m)$ が成り立つことを示せ。

4.2 授業の証明では $\Omega_1 = \{-1, 1\}$ における一様確率測度の無限直積を扱った。全く同じ証明は $[0, 1]$ 上の一様測度の無限測度の構成では成り立たない？なぜか述べよ（拡張するにはより複雑な議論が必要になる理由を説明せよ）。

Class 5: 様々な分布

5.1 ポアソン分布に関する問題: $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ の期待値と分散を求めよ。また，$X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1)$ と $X_2 \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2)$ が独立のとき，$X_1 + X_2$ の分布を求めよ。

5.2 幾何分布に関する問題: $X \sim \mathrm{Geo}(p)$（$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$）の期待値と分散を求めよ。さらに記憶なし性質

$$\mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

が成り立つことを示せ。

5.3 ガンマ分布がどのような応用を持つか調べて記述せよ。

Class 6: 大数の法則と中心極限定理（コイントス）

6.1 理論計算（一般 p）: $X_i \sim \mathrm{CF}(p)$（すなわち $\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$）とし，$S_n$ の期待値 $\mathbb{E}[S_n]$ と分散 $\mathrm{Var}(S_n)$ を求めよ。

6.2 シミュレーション（生成AIを用いること）:

- $n = 100$ としてコイントス 100 回を 10000 回繰り返すシミュレーションを実装せよ。
- 得られた S_n のヒストグラムを作成せよ。
- 同じグラフ上に（$p = \frac{1}{2}$ のとき）平均 $\frac{n}{2}$・分散 $\frac{n}{4}$ の正規分布密度を重ねて描け（必要なら連続性補正も可視化）。

6.3 考察:

- シミュレーション結果と正規近似の一致度を，中心と裾の両方で評価せよ。
- $n = 20, 50, 200$ などに変えたときの精度の違いを述べよ。
- 連続性補正の効果について論じよ。

Class 7: 特性関数

7.1 幾何分布とガンマ分布の特性関数: 次の分布について特性関数 $\varphi_X(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X}]$ を計算せよ（わからなかったら導出法を調べて書け）。

- 成功確率 $p \in (0,1)$ の幾何分布（試行回数型）。$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$（$k = 1, 2, \ldots$）。
- 形状 $k > 0$，スケール $\theta > 0$ のガンマ分布。密度 $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta}$（$x > 0$）。

7.2 弱法則の向きから見る特性関数の収束: 独立同分布な確率変数 X_i（$i \geq 1$）が $\mathbb{E}[X_i] = 0$ かつ $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ を満たすとする。$S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ とおくと，$\varphi_{S_n}(\xi) \to 1$（各 ξ に対して）を示せ（授業の定理より S_n が 0 に分布収束している事実を使える）。

7.3 ヒント: テイラーの定理を用いて $e^{i\xi X_i/n} = 1 + \frac{i\xi X_i}{n} + \left(\frac{i\xi\theta X_i}{n}\right)^2$（$\theta \in [0,1]$）と書き，期待値を取って評価する。有限分散条件から二乗項は n^{-2} オーダーで消えることを確認せよ。