# レポート課題まとめ（Classes 8–12）

## Class 8: 確率変数列の収束概念

**8.1** （授業で挙げたもの以外で）確率収束するが，概収束しない例を挙げよ。

**8.2** $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ を仮定して $X_nY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$ を証明せよ。

## Class 9: Bochner の定理

**9.1** 開集合 $O \subset \mathbb{R}$ かつ $O \neq \mathbb{R}$ について，$f(x) = d(x, O^c)$ が連続関数であることを示せ。（ここで $d(x, A) = \inf\{|x-y| : y \in A\}$ とする。）

**9.2** $f$ を有界な台をもつ非負な連続関数とする。$M \in \mathbb{N}$ とし

$$f_M^+(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{M} \mathbf{1}_{\{f(x) \geq (j-1)/M\}}$$

と定義するとき，$f(x) \leq f_M^+(x) \leq f(x) + \frac{1}{M}$ を示せ。

## Class 10: 独立性

**10.1** $X$ と $Y$ を独立な確率変数とする。$X+Y$ の積率母関数 $f(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}]$ を $X$ の積率母関数と $Y$ の積率母関数で表せ。また $f$ の定義域についても考察せよ（$X$ と $Y$ の積率母関数の定義域との関係を述べよ）。

**10.2** $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ を独立とする。このとき $X+Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda+\mu)$ を特性関数を用いて証明せよ。

## Class 11: 独立確率変数列に対する大数の法則と中心極限定理

**11.1** 強法則の証明の条件のもとで次を示せ。ある $C > 0$ が存在して

$$\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])^4] \leq Cn^{-2}.$$

**11.2** 次の補題を証明せよ（本文中のレポート）。

$$a_n \to a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n \to e^{-a}.$$

## Class 12: 条件付き期待値

**12.1** 公平なサイコロ2つを同時に投げ，出目を $X, Y$ とする。$S = X + Y$ とおく。$\mathbb{E}[X \mid S]$ の分布を求めよ。

**12.2** $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid G]] = \mathbb{E}[X]$ を証明せよ。