

二次元有向ポリマーの最大値に関する問題

中島修太 (慶應義塾大学)

Clément Cosco, Ofer Zeitouni との共同研究

自己紹介

- 名古屋大学 学部生 (2010-2014) <- 4年生のときに吉田先生の授業を受けた
- 京都大学 修士、博士(2014-2019) <- 指導教員は福島先生
- 2015年にComets-Fukushima-Yoshida-Nakajimaでジャンプつき有向ポリマーの論文を発表
- 2019年から2020年まで名古屋大学でポスドク(中島-中島完成)

モデルと主結果

有向ポリマーとは？

- 有向ポリマー (Directed polymer) は、さまざまな物理現象をモデル化する：
 - 無秩序環境におけるランダムなポリマー成長
 - 乱流系における界面成長
 - 確率的 (ランダム) システムにおける経路最適化
- 主な特徴：
 - ポリマーの経路は特定の方向 (時間方向) に沿って進む.
 - 環境は各配置にランダムなエネルギーを割り当てる.
 - 系はエネルギー最小化とエントロピー最大化のバランスを取る.
- これらは、以下のようなより広い確率構造とも結び付く：
 - 分枝過程
 - さまざまな成長過程を記述するKPZ普遍性クラス

有向ポリマー

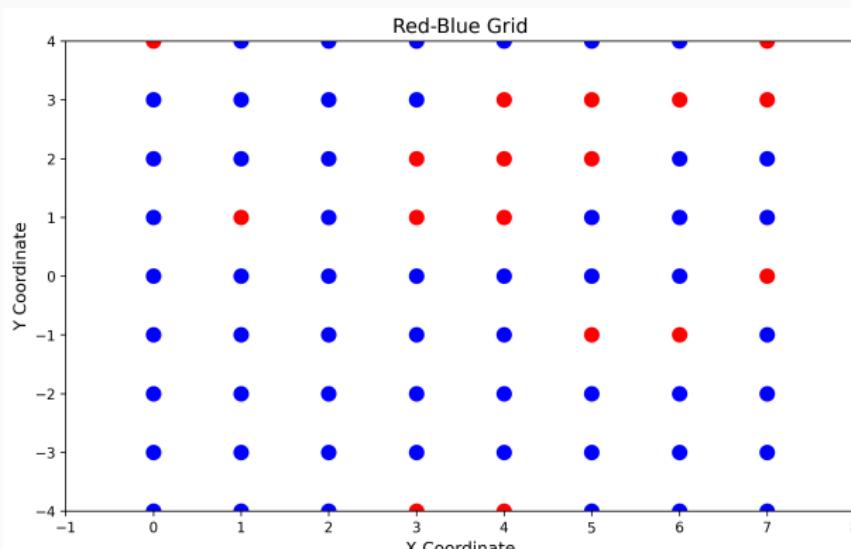
- P_x を \mathbb{Z}^d 上で x から始まる単純ランダムウォーク (SRW) の測度とする.
- $(\omega(n, x))_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$ を平均0のi.i.d. 確率変数とし, 次を仮定する:

$$\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \forall \beta > 0.$$

有向ポリマー

- P_x を \mathbb{Z}^d 上で x から始まる単純ランダムウォーク (SRW) の測度とする.
- $(\omega(n, x))_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$ を平均0のi.i.d. 確率変数とし, 次を仮定する:

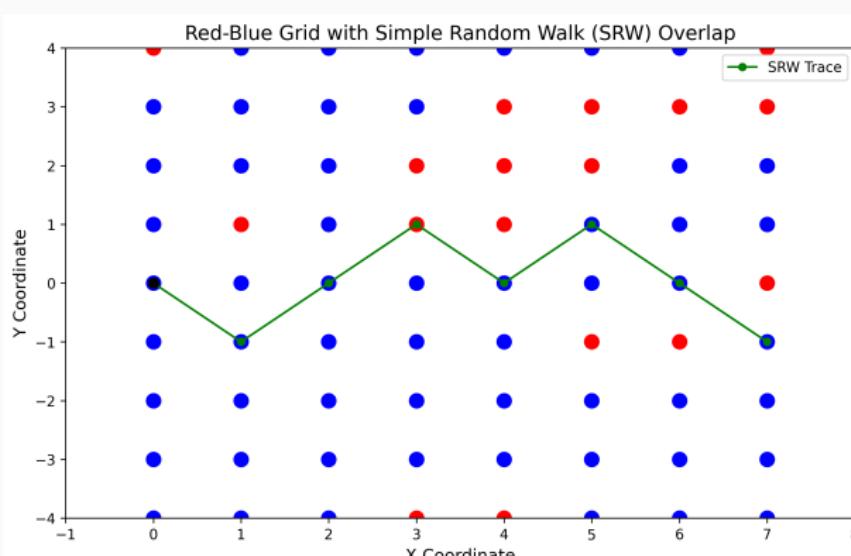
$$\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \forall \beta > 0.$$



有向ポリマー

- P_x を \mathbb{Z}^d 上で x から始まる単純ランダムウォーク (SRW) の測度とする.
- $(\omega(n, x))_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$ を平均0のi.i.d. 確率変数とし, 次を仮定する:

$$\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \forall \beta > 0.$$



有向ポリマー

- P_x は \mathbb{Z}^d 上で x から始まる単純ランダムウォークの測度,
- $\omega(n, x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ は平均0のi.i.d. 確率変数
で $\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1$, かつ

$$\Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

ポリマー分配関数

$$W_N(\beta, x) := \mathbb{E}_x \left[e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

有向ポリマー

- P_x は \mathbb{Z}^d 上で x から始まる単純ランダムウォークの測度,
- $\omega(n, x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ は平均0のi.i.d. 確率変数
で $\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1$, かつ

$$\Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

ポリマー分配関数

$$W_N(\beta, x) := \mathbb{E}_x \left[e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

ポリマー測度

$$P_{N, \beta}^{polymer}((S_n)_{n=0}^N) := \frac{e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))}}{W_N(\beta, 0)} P_0((S_n)_{n=0}^N).$$

弱・強無秩序 (Weak/Strong disorder)

ポリマー分配関数

$$W_N(x) := W_N(\beta, x) := \mathbb{E}_x \left[e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

相転移

ある $\beta_c \in [0, \infty]$ が存在して：

$\beta > \beta_c$ なら $W_N(\beta, x) \rightarrow 0$ (局在相) ,

$\beta < \beta_c$ なら $W_N(\beta, x) \rightarrow W_\infty(\beta, x) > 0$ (拡散相) .

弱・強無秩序 (Weak/Strong disorder)

ポリマー分配関数

$$W_N(x) := W_N(\beta, x) := \mathbb{E}_x \left[e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

相転移

ある $\beta_c \in [0, \infty]$ が存在して：

$\beta > \beta_c$ なら $W_N(\beta, x) \rightarrow 0$ (局在相) ,

$\beta < \beta_c$ なら $W_N(\beta, x) \rightarrow W_\infty(\beta, x) > 0$ (拡散相) .

- $d = 1, 2$ では $\beta_c = 0$ (常に局在) . (Carmona-Hu 02, Comets-Shiga-Yoshida 03)
- $d \geq 3$ では $\beta_c > 0$ (相転移が存在) . (Comets-Yoshida 06)

KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$ は次の離散版を満たす：

確率熱方程式 (stochastic heat equation) :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \beta u(t, x) \xi(t, x),$$

ここで $\xi(t, x)$ は $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズである.

KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$ は次の離散版を満たす：

確率熱方程式 (stochastic heat equation) :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \beta u(t, x) \xi(t, x),$$

ここで $\xi(t, x)$ は $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズである。

Hopf–Cole変換 : $h(t, x) = \log u(t, x)$. ($\log W_N(\beta, x)$ に対応)

Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) 方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, x) = \frac{1}{2} \Delta h(t, x) + \frac{1}{2} |\nabla h(t, x)|^2 + \beta \xi(t, x).$$

KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$ は次の離散版を満たす：

確率熱方程式 (stochastic heat equation) :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \beta u(t, x) \xi(t, x),$$

ここで $\xi(t, x)$ は $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズである。

Hopf–Cole変換 : $h(t, x) = \log u(t, x)$. ($\log W_N(\beta, x)$ に対応)

Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) 方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, x) = \frac{1}{2} \Delta h(t, x) + \frac{1}{2} |\nabla h(t, x)|^2 + \beta \xi(t, x).$$

これらの方程式は（そのままでは）解をもたない！

中間領域

中間領域 ($d = 1$) :

Theorem (Alberts-Khanin-Quastel 14)

Let $d = 1$. For $\beta_N = \frac{\hat{\beta}}{N^{1/4}}$: $\log W_{tN}(\beta_N, x\sqrt{N}) \xrightarrow{(d)} \text{KPZ}_{\hat{\beta}}(t, x)$

中間領域

中間領域 ($d = 1$) :

Theorem (Alberts-Khanin-Quastel 14)

Let $d = 1$. For $\beta_N = \frac{\hat{\beta}}{N^{1/4}}$: $\log W_{tN}(\beta_N, x\sqrt{N}) \xrightarrow{(d)} \text{KPZ}_{\hat{\beta}}(t, x)$

中心極限定理 ($d = 2$) . $\lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$ とおく.

Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 17, Caravenna-Cottini 22, Cosco-Donadini 23+)

Let $d = 2$. For $\beta_N = \frac{\sqrt{\pi}\hat{\beta}}{\sqrt{\log N}}$:

(i) $\forall \hat{\beta} < 1$: $\log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right)$,

(ii) $\forall \hat{\beta} \geq 1$: $W_N(\beta_N, 0) \rightarrow 0$.

Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 17, Caravenna-Cottini 22, Cosco-Donadini 23+)

Let $d = 2$. For $\beta_N = \frac{\sqrt{\pi}\hat{\beta}}{\sqrt{\log N}}$:

$$(i) \forall \hat{\beta} < 1 : \quad \log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right),$$
$$(ii) \forall \hat{\beta} \geq 1 : \quad W_N(\beta_N, 0) \rightarrow 0.$$

- 臨界点 $\hat{\beta} = 1$ では, 場 $(W_{tN}(\beta_N, [\sqrt{N}x]))_{t \geq 0, x \in [-1,1]^2}$ が分布の意味で, いわゆる **Critical Stochastic Heat Flow** に収束することが知られている.

CLTの証明 (Cosco–Donadini)

$\hat{\beta} < 1$ とする. 示したいのは $\log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right)$.

- ステップ1 (decoupling) : 任意の $M > 0$ に対し, $W_N \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \prod_{k=1}^M W_{k,M}$ が L^2 で成り立つ. ここで

$$W_{k,M} := \mathbb{E} \left[e^{\sum_{n=N^{k/M}}^{N^{(k+1)/M}} (\beta_N \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta_N))} \right].$$

- ステップ2 ([Taylor展開 : $\log(1+x) \approx x - x^2/2$] + CLT) :

$$\sum_{k=1}^M \log W_{k,M} \underset{M \rightarrow \infty}{\approx} \sum_{k=1}^M (W_{k,M} - 1) - \frac{1}{2}(W_{k,M} - 1)^2$$

$$\underset{N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \lambda^2) - \frac{\lambda^2}{2}.$$

対数相関場

$\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$ を思い出す. 次を定義する:

$$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right).$$

Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 20)

As $N \rightarrow \infty$,

$$\forall \hat{\beta} < 1 : h_N(x) \xrightarrow{(d)} \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2}} G(x),$$

with $G(x)$ a log-correlated Gaussian field on \mathbb{R}^2 independent of $\hat{\beta}$,
i.e., when $|x - y| \rightarrow 0$,

$$\mathbb{E}[G(x)G(y)] \sim \log \frac{1}{|x - y|}.$$

主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right)$ と
定義する.

Cosco-N.-Zeitouni, 2025+

For all $\hat{\beta} < 1$, as $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \max_{|x| \leq N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t) dt,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2(1 - t)}}.$$

主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right)$ と
定義する.

Cosco-N.-Zeitouni, 2025+

For all $\hat{\beta} < 1$, as $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \max_{|x| \leq N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t) dt,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2(1-t)}}.$$

- 方針：不均一BBMとの比較.

主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right)$ と定義する.

Cosco-N.-Zeitouni, 2025+

For all $\hat{\beta} < 1$, as $N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \max_{|x| \leq N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t) dt,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2(1-t)}}.$$

- 方針：不均一BBMとの比較.
- 必要： $q = O(\sqrt{\log N})$ の範囲で $\mathbb{E}[(W_N(x))^q]$ (delta-bose gas) の評価.

関連研究

分枝ブラウン運動 (BBM)

定義：

- $t = 0$ に原点の1粒子から開始する.
- 粒子は（独立な）指数分布に従うランダム時刻までブラウン運動に従う（**指数時計**）.
- 分枝時刻に粒子は2つの独立な粒子に分裂する.
- 各子孫は独立にブラウン運動する.
- 以降も独立な指数時計により同様に分枝を繰り返す.
- $\mathcal{N}(t)$ ：時刻 t に生存している粒子の集合.

BBMのシミュレーション



<https://njima091.github.io/Lectures/miscellany/Bbm.html>

分枝過程の最大値

分枝ブラウン運動の最大値：

Bramson 83, Bramson-Zeitouni 09

$$\max_{v \in \mathcal{N}(t)} B_t^v \approx \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + X,$$

where X follows a shifted Gumbel distribution.

分枝過程の最大値

分枝ブラウン運動の最大値：

Bramson 83, Bramson-Zeitouni 09

$$\max_{v \in \mathcal{N}(t)} B_t^v \approx \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + X,$$

where X follows a shifted Gumbel distribution.

同様の現象は、多くの（ガウス）対数相関場（Gaussian free field, cover times, random matrices, ゼータ関数, …）でも現れる。

不均一BBM

定義：

- 古典的BBMの時間依存分散版：

$$\sigma_T^2(t) := \sigma^2(t/T),$$

ここで：

- σ は $[0, 1]$ 上の滑らかで狭義単調減少な関数.
- σ の導関数は負の定数で上から抑えられる.

- 粒子：

- 分散 $\int_0^\cdot \sigma_T^2(s) ds$ をもつブラウン運動を行う.
- 独立な指数時計で分枝する.

不均一BBMの最大値

不均一分枝ブラウン運動の最大値：

Feng-Zeitouni 13

Suppose that $\sigma : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ is a smooth function such that $\sup_{x \in [0, 1]} \sigma'(x) < 0$. As $T \rightarrow \infty$,

$$\max_{v \in \mathcal{N}(T)} B_T^v = v_\sigma T - \Omega(T^{1/3}),$$

where we define

$$v_\sigma := \sqrt{2} \int_0^1 \sigma(s) ds.$$

不均一BBMの最大値

不均一分枝ブラウン運動の最大値：

Feng-Zeitouni 13

Suppose that $\sigma : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ is a smooth function such that $\sup_{x \in [0, 1]} \sigma'(x) < 0$. As $T \rightarrow \infty$,

$$\max_{v \in \mathcal{N}(T)} B_T^v = v_\sigma T - \Omega(T^{1/3}),$$

where we define

$$v_\sigma := \sqrt{2} \int_0^1 \sigma(s) ds.$$

主要項の係数や次の次数が古典的BBMとは異なる。

モーメント評価

モーメント公式

再掲 : $W_N(\beta_N) = \mathbb{E}_0 \left[\exp \left\{ \sum_{n=1}^N (\beta_N \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta_N)) \right\} \right].$

モーメント公式

$\omega(n, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ とする. このとき

$$\mathbb{E} [W_N^q] = \mathbb{E}_0^{\otimes q} \left[e^{\beta_N^2 \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i < j \leq q} \mathbf{1}_{S_n^i = S_n^j}} \right],$$

ここで $(S_n^i)_{i \leq q}$ は SRW の独立なコピーである.

- Delta-Bose gas (δ -Bose gas) .
- 非ガウスの場合は公式があまりきれいにならない.

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き, $\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$ とおく.

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if
 $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} \log N$, then we have

$$\mathbb{E}[(W_N)^q] \leq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1 - \hat{\beta}^2}$.

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き, $\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$ とおく.

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if
 $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} \log N$, then we have

$$\mathbb{E}[(W_N)^q] \leq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1 - \hat{\beta}^2}$.

- $q \in \mathbb{N}$ を固定すると, $\hat{\beta} < 1$ の領域で W_N は全てのモーメントをもつ (Lygkonis–Zygouras 21).

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き, $\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$ とおく.

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if
 $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} \log N$, then we have

$$\mathbb{E}[(W_N)^q] \leq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1 - \hat{\beta}^2}$.

- $q \in \mathbb{N}$ を固定すると, $\hat{\beta} < 1$ の領域で W_N は全てのモーメントをもつ (Lygkonis–Zygouras 21).
- 改良点: $\hat{\beta}_0 \rightarrow 1$, $1/3 \rightarrow 1$, および $o(q^2) \rightarrow o(1)$.

改良

$t \leq 1$ に対して次を定義する：

$$W_{tN} := E_0 \left[e^{\sum_{n=1}^{tN} (\beta_N \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta_N))} \right], \quad \lambda_t^2 := \log \left(\frac{1}{1 - \hat{\beta}^2 t} \right).$$

Theorem (Cosco-N, 2025+)

For any $\hat{\beta} < 1$, $\alpha < 1$, and $t \leq 1$, if $\binom{q}{2} \leq \alpha \frac{\hat{\beta}^2}{1-t\hat{\beta}^2} \log N$,

$$\mathbb{E} [(W_{tN})^q] \leq e^{\lambda_t^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where $o(q^2)$ depends only on N, α .

ポイント

- 有限回の交差を許す
- 一般の重み

下からの評価

Theorem (Cosco-Zeitouni 23)

(i) For any $\hat{\beta} < 1$, $\binom{q}{2} = O(\log N)$,

$$\mathbb{E}[W_N^q] \geq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} - o(q^2)}.$$

(ii) If $\binom{q}{2} \geq (\log N)^2$, $\mathbb{E}[W_N^q] \geq e^{cN/\log N}$.

證明方針

階層分解

$\log W_N(x)$ を次のように分解する：

$$\log W_N(x) = \sum_{k=1}^K \log W_{N,k}(x),$$

ここで各成分は、ある時間区間に応する分配関数で：

$$W_{N,k}(x) := \frac{W_{N^{(k+1)/K}}(x)}{W_{N^{k/K}}(x)}.$$

この分解は、次のスライドで見るような階層構造を示唆している。

Chaining argument

空間・時間方向の相関を次のように評価する：

1. 近い点： $|x - y| \leq N^{k/(2K) - \epsilon}$ なら

$$\log W_{N,k}(x) \approx \log W_{N,k}(y).$$

2. 遠い点： $|x - y| \geq N^{k/(2K) + \epsilon}$ なら

$$\log W_{N,k}(x) \perp \log W_{N,k}(y).$$

3. 異なるレベル： $k_1 \neq k_2$ のとき， $\log W_{N,k_1}(x)$ と $\log W_{N,k_2}(y)$ は近似的に独立。

これらは分枝過程に現れる階層的な相関構造を表す：すなわち

$|x - y| \approx N^{k/(2K)}$ のとき， 分岐時刻は $N^{k/K}$ に対応する。

分散と対数相関

各成分の分散は、関数 $f(t)$ により近似的に

$$\text{Var}(\log W_{N,k}(x)) \sim \frac{f\left(\frac{k}{K}\right)}{K \log N}, \quad \text{where} \quad f(t) = \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2 t}.$$

k で足し上げると、場

$$h_N(x) := \sqrt{\log N} (\log W_N(\sqrt{N}x) - \mathbb{E} \log W_N(\sqrt{N}x))$$

は対数相関ガウス場になる：

$$\text{Cov}(h_N(x), h_N(y)) \approx \int_{-2 \log |x-y|}^1 f(t) dt,$$

これは $N \rightarrow \infty$ で不均一BBMの挙動を反映している。

不均一BBMとの比較

不均一分枝ブラウン運動 (BBM) との類比により：

- 分解の「レベル」 k は、時間依存の分枝イベントに対応する。
- 分散 $f(t)$ は、BBMの時間依存拡散係数に対応する。
- 不均一BBMの最大値に関する既知の結果 (Feng-Zeitouni) より

$$\max_{|x| \leq 1} h_N(x) = \max_{|x| \leq 1} \sqrt{\log N} \log W_N(x) \rightarrow \int_0^1 \sqrt{f(t)} dt.$$

従って、 $h_N(x)$ の最大値は、不均一BBMの最大値解析と並行する方法で導ける。

厳密な証明では、十分良い近似のためにモーメント評価に関する良い評価が必要になる。

今後の課題

今後の課題

- $\hat{\beta} = 1$: 臨界2次元Stochastic Heat Flow
(Caravenna–Sun–Zygouras 23, Liu–Zygouras 24+)

最後に

吉田先生、ご還暦おめでとうございます。今後
のご研究、そしてご執筆のますますのご発展を
心よりお祈り申し上げます。