二次元有向ポリマーの最大値に関する問題

中島修太（慶應義塾大学）

Clément Cosco, Ofer Zeitouni との共同研究

自己紹介

- 名古屋大学　学部生　(2010-2014) <- 4年生のときに吉田先生の授業を受けた
- 京都大学　修士、博士(2014-2019) <- 指導教員は福島先生
- 2015年にComets-Fukushima-Yoshida-Nakajimaでジャンプつき有向ポリマーの論文を発表
- 2019年から2020年まで名古屋大学でポスドク(中島-中島完成)

モデルと主結果

有向ポリマーとは？

- 有向ポリマー（**Directed polymer**）は，さまざまな物理現象をモデル化する：
  - **無秩序環境**におけるランダムなポリマー**成長**
  - 乱流系における**界面成長**
  - 確率的（ランダム）システムにおける**経路最適化**
- **主な特徴**：
  - ポリマーの経路は**特定の方向（時間方向）**に沿って進む．
  - 環境は各配置にランダムなエネルギーを割り当てる．
  - 系は**エネルギー最小化**と**エントロピー最大化**のバランスを取る．
- これらは，以下のようなより広い確率構造とも結び付く：
  - **分枝過程**
  - さまざまな成長過程を記述する**KPZ普遍性**クラス

有向ポリマー

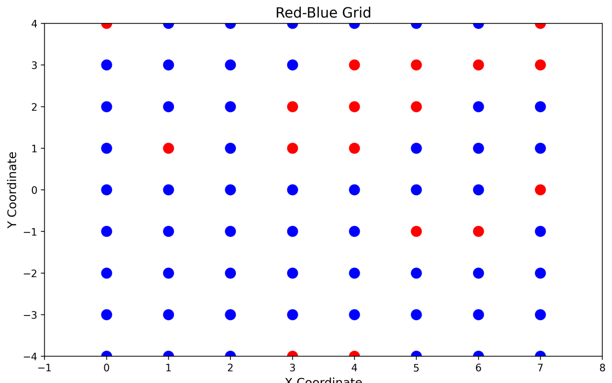
- P_x を$\mathbb{Z}^d$ 上でx から始まる単純ランダムウォーク（SRW）の測度とする．
- $(\omega(n,x))_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{Z}^d}$ を平均0のi.i.d. 確率変数とし，次を仮定する：

$$\mathbb{E}[\omega(n,x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,x)}] < \infty, \forall\beta > 0.$$

有向ポリマー

- P_x を$\mathbb{Z}^d$ 上でx から始まる単純ランダムウォーク（SRW）の測度とする．
- $(\omega(n,x))_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{Z}^d}$ を平均0のi.i.d. 確率変数とし，次を仮定する：

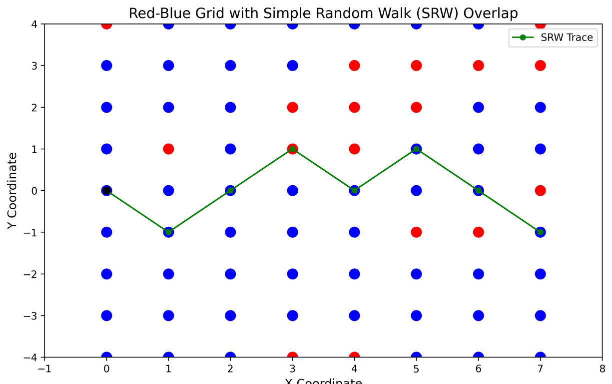
$$\mathbb{E}[\omega(n,x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,x)}] < \infty, \forall \beta > 0.$$



有向ポリマー

- P_x を$\mathbb{Z}^d$ 上でx から始まる単純ランダムウォーク（SRW）の測度とする．
- $(\omega(n,x))_{n\in\mathbb{N},x\in\mathbb{Z}^d}$ を平均0のi.i.d. 確率変数とし，次を仮定する：

$$\mathbb{E}[\omega(n,x)^2]=1,\quad \Lambda(\beta):=\log\mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,x)}]<\infty,\ \forall\beta>0.$$



有向ポリマー

- P_x は$\mathbb{Z}^d$ 上でx から始まる単純ランダムウォークの測度,
- $\omega(n,x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ は平均0のi.i.d. 確率変数で$\mathbb{E}[\omega(n,x)^2] = 1$，かつ

$$\Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,x)}] < \infty, \quad \forall\beta > 0.$$

ポリマー分配関数

$$W_N(\beta,x) := \mathrm{E}_x\left[e^{\sum_{n=1}^N(\beta\omega(n,S_n)-\Lambda(\beta))}\right], \; x \in \mathbb{Z}^d.$$

有向ポリマー

- P_x は$\mathbb{Z}^d$ 上でx から始まる単純ランダムウォークの測度,
- $\omega(n,x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ は平均0のi.i.d. 確率変数で$\mathbb{E}[\omega(n,x)^2] = 1$，かつ

$$\Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta\omega(n,x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

ポリマー分配関数

$$W_N(\beta, x) := \mathrm{E}_x\left[e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega(n,S_n) - \Lambda(\beta))}\right], \ x \in \mathbb{Z}^d.$$

ポリマー測度

$$P_{N,\beta}^{polymer}((S_n)_{n=0}^N) := \frac{e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega(n,S_n) - \Lambda(\beta))}}{W_N(\beta, 0)} \mathrm{P}_0((S_n)_{n=0}^N).$$

弱・強無秩序（Weak/Strong disorder）

ポリマー分配関数

$$W_N(x) := W_N(\beta, x) := \mathrm{E}_x\left[e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega(n,S_n)-\Lambda(\beta))}\right],\ x \in \mathbb{Z}^d.$$

相転移

ある$\beta_c \in [0, \infty]$ が存在して：

$\beta > \beta_c$ なら$W_N(\beta, x) \to 0$（局在相），

$\beta < \beta_c$ なら$W_N(\beta, x) \to W_\infty(\beta, x) > 0$（拡散相）．

弱・強無秩序（Weak/Strong disorder）

ポリマー分配関数

$$W_N(x) := W_N(\beta, x) := \mathrm{E}_x\left[e^{\sum_{n=1}^{N}(\beta\omega(n,S_n)-\Lambda(\beta))}\right],\ x \in \mathbb{Z}^d.$$

相転移

ある$\beta_c \in [0, \infty]$ が存在して：

$\beta > \beta_c$ なら$W_N(\beta, x) \to 0$（局在相），

$\beta < \beta_c$ なら$W_N(\beta, x) \to W_\infty(\beta, x) > 0$（拡散相）．

- $d = 1, 2$ では$\beta_c = 0$（常に局在）．(Carmona-Hu 02, Comets-Shiga-Yoshida 03)
- $d \geq 3$ では$\beta_c > 0$（相転移が存在）．(Comets-Yoshida 06)

KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$ は次の離散版を満たす：

確率熱方程式（stochastic heat equation）：

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \beta u(t,x)\xi(t,x),$$

ここで$\xi(t,x)$ は$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズである．

KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$ は次の離散版を満たす：

確率熱方程式（stochastic heat equation）：

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \beta u(t,x)\xi(t,x),$$

ここで$\xi(t,x)$ は$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズである.

Hopf–Cole変換：$h(t,x) = \log u(t,x)$. （$\log W_N(\beta, x)$ に対応）

Kardar–Parisi–Zhang（KPZ）方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t,x) = \frac{1}{2}\Delta h(t,x) + \frac{1}{2}|\nabla h(t,x)|^2 + \beta\xi(t,x).$$

KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$ は次の離散版を満たす：

確率熱方程式（stochastic heat equation）：

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \beta u(t,x)\xi(t,x),$$

ここで$\xi(t,x)$ は$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズである．

Hopf–Cole変換：$h(t,x) = \log u(t,x)$.　（$\log W_N(\beta, x)$ に対応）

Kardar–Parisi–Zhang（KPZ）方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t,x) = \frac{1}{2}\Delta h(t,x) + \frac{1}{2}|\nabla h(t,x)|^2 + \beta\xi(t,x).$$

$d \geq 2$ では，これらの方程式は（そのままでは）良定義ではない！

中間領域

中間領域（$d=1$）：

Theorem (Alberts-Khanin-Quastel 14)

Let $d=1$. For $\beta_N = \frac{\hat{\beta}}{N^{1/4}}$: $\log W_{tN}(\beta_N, x\sqrt{N}) \xrightarrow{(d)} \mathrm{KPZ}_{\hat{\beta}}(t,x)$

中間領域

中間領域（$d=1$）：

Theorem (Alberts-Khanin-Quastel 14)

Let $d=1$. For $\beta_N = \frac{\hat\beta}{N^{1/4}}$: $\log W_{tN}(\beta_N, x\sqrt{N}) \xrightarrow{(d)} \mathrm{KPZ}_{\hat\beta}(t,x)$

中心極限定理（$d=2$）．$\lambda(\hat\beta)^2 := \log \frac{1}{1-\hat\beta^2}$ とおく．

Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 17, Caravenna-Cottini 22, Cosco-Donadini 23+)

Let $d=2$. For $\beta_N = \frac{\sqrt{\pi}\hat\beta}{\sqrt{\log N}}$:

$$(i)\ \forall \hat\beta < 1: \quad \log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right),$$

$$(ii)\ \forall \hat\beta \geq 1: \quad W_N(\beta_N, 0) \to 0.$$

中間領域

Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 17, Caravenna-Cottini 22, Cosco-Donadini 23+)

Let $d = 2$. For $\beta_N = \frac{\sqrt{\pi}\hat{\beta}}{\sqrt{\log N}}$:

$$(i)\ \forall \hat{\beta} < 1 : \quad \log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right),$$

$$(ii)\ \forall \hat{\beta} \geq 1 : \quad W_N(\beta_N, 0) \to 0.$$

- 臨界点$\hat{\beta} = 1$ では，場$(W_{tN}(\beta_N, \lfloor \sqrt{N} x \rfloor))_{t \geq 0, x \in [-1,1]^2}$ が分布の意味で，いわゆる**Critical Stochastic Heat Flow**に収束することが知られている．

CLTの証明（Cosco–Donadini）

$\hat{\beta} < 1$ とする．示したいのは$\log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right)$ である．

- ステップ1（decoupling）：任意の$M > 0$ に対し，$W_N \underset{N\to\infty}{\approx} \prod_{k=1}^{M} W_{k,M}$ がL^2 で成り立つ．ここで

$$W_{k,M} := \mathrm{E}\left[e^{\sum_{n=N^{k/M}}^{N^{(k+1)/M}} (\beta_N \omega(n,S_n) - \Lambda(\beta_N))}\right].$$

- ステップ2（Taylor展開：$\log(1+x) \approx x - x^2/2$ + CLT）：

$$\sum_{k=1}^{M} \log W_{k,M} \underset{M\to\infty}{\approx} \sum_{k=1}^{M} (W_{k,M} - 1) - \frac{1}{2}(W_{k,M} - 1)^2$$

$$\underset{N\to\infty, M\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \lambda^2) - \frac{\lambda^2}{2}.$$

対数相関場

$\beta_N = \hat{\beta}\sqrt{\pi/\log N}$ を思い出す．次を定義する：

$$h_N(x) := \sqrt{\log N}\left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E}\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N})\right).$$

Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 20)

As $N \to \infty$,

$$\forall \hat{\beta} < 1: \; h_N(x) \xrightarrow{(d)} \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2}} G(x),$$

with $G(x)$ a log-correlated Gaussian field on $\mathbb{R}^2$ independent of $\hat{\beta}$, i.e., when $|x-y| \to 0$,

$$\mathbb{E}[G(x)G(y)] \sim \log \frac{1}{|x-y|}.$$

主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N}\left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E}\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N})\right)$ と定義する．

Cosco-N.-Zeitouni, 2025+

For all $\hat{\beta} < 1$, as $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty}(\log N)^{-1}\max_{|x|\le N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t)\mathrm{d}t,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2(1-t)}}.$$

主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N}\left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E}\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N})\right)$ と定義する．

Cosco-N.-Zeitouni, 2025+

For all $\hat{\beta} < 1$, as $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty}(\log N)^{-1}\max_{|x|\le N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t)\mathrm{d}t,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2(1-t)}}.$$

- 方針：不均一BBMとの比較．

主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N}\left(\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E}\log W_N(\beta_N, x\sqrt{N})\right)$ と定義する．

Cosco-N.-Zeitouni, 2025+

For all $\hat{\beta} < 1$, as $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} (\log N)^{-1} \max_{|x|\le N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t)\mathrm{d}t,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2(1-t)}}.$$

- 方針：不均一BBMとの比較．
- 必要：$q = O(\sqrt{\log N})$ の範囲で$\mathbb{E}[(W_N(x))^q]$（delta-bose gas）の評価．

関連研究

分枝ブラウン運動（BBM）

定義：

- $t = 0$ に原点の1粒子から開始する.
- 粒子は（独立な）指数分布に従うランダム時刻までブラウン運動を行う（指数時計）.
- 分枝時刻に粒子は2つの独立な粒子に分裂する.
- 各子孫は独立にブラウン運動する.
- 以降も独立な指数時計により同様に分枝を繰り返す.
- $\mathcal{N}(t)$：時刻t に生存している粒子の集合.

BBMのシミュレーション

https://njima091.github.io/Lectures/miscellany/Bbm.html

分枝過程の最大値

分枝ブラウン運動の最大値：

Bramson 83, Bramson-Zeitouni 09

$$\max_{v \in \mathcal{N}(t)} B_t^v \approx \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + X,$$

where X follows a shifted Gumbel distribution.

分枝過程の最大値

分枝ブラウン運動の最大値：

Bramson 83, Bramson-Zeitouni 09

$$\max_{v \in \mathcal{N}(t)} B_t^v \approx \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + X,$$

where X follows a shifted Gumbel distribution.

同様の現象は，多くの（ガウス）対数相関場（Gaussian free field，cover times，random matrices，ゼータ関数，...）でも現れる．

不均一BBM

定義：

- 古典的BBMの**時間依存分散**版：

$$\sigma_T^2(t) := \sigma^2(t/T),$$

  ここで：
  - σ は$[0,1]$ 上の**滑らかで狭義単調減少**な関数．
  - σ の導関数は**負の定数**で上から抑えられる．
- 粒子：
  - 分散$\int_0^\cdot \sigma_T^2(s)\,\mathrm{d}s$ をもつブラウン**運動**を行う．
  - 独立な指数時計で分枝する．

不均一分枝ブラウン運動の最大値：

Feng-Zeitouni 13

Suppose that $\sigma : [0,1] \to (0,\infty)$ is a smooth function such that $\sup_{x\in[0,1]} \sigma'(x) < 0$. As $T \to \infty$,

$$\max_{v\in\mathcal{N}(T)} B_T^v = v_\sigma T - \Omega(T^{1/3}),$$

where we define

$$v_\sigma := \sqrt{2}\int_0^1 \sigma(s)\mathrm{d}s.$$

不均一BBMの最大値

不均一分枝ブラウン運動の最大値：

Feng-Zeitouni 13

Suppose that $\sigma : [0,1] \to (0,\infty)$ is a smooth function such that $\sup_{x\in[0,1]} \sigma'(x) < 0$. As $T \to \infty$,

$$\max_{v\in\mathcal{N}(T)} B_T^v = v_\sigma T - \Omega(T^{1/3}),$$

where we define

$$v_\sigma := \sqrt{2}\int_0^1 \sigma(s)\mathrm{d}s.$$

主要項の係数や次の次数が古典的BBMとは異なる.

モーメント評価

モーメント公式

再掲：$W_N(\beta_N) = \mathrm{E}_0\left[\exp\left\{\sum_{n=1}^{N}(\beta_N\omega(n,S_n) - \Lambda(\beta_N))\right\}\right]$.

モーメント公式

$\omega(n,x) \sim \mathcal{N}(0,1)$ とする．このとき

$$\mathbb{E}\left[W_N^q\right] = \mathrm{E}_0^{\otimes q}\left[e^{\beta_N^2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{1\le i<j\le q} \mathbf{1}_{S_n^i = S_n^j}}\right],$$

ここで$(S_n^i)_{i\le q}$ はSRW の独立なコピーである．

- Delta-Bose gas（δ-Bose gas）．
- 非ガウスの場合は公式があまりきれいにならない．

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き，$\beta_N = \hat{\beta}\sqrt{\pi/\log N}$ とおく.

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i,x) \sim \mathcal{N}(0,1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if $\binom{q}{2} \le \frac{1}{3}\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2}\log N$, then we have

$$\mathbb{E}\left[(W_N)^q\right] \le e^{\lambda^2\binom{q}{2}+o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log\frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$.

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き，$\beta_N = \hat{\beta}\sqrt{\pi/\log N}$ とおく．

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i,x) \sim \mathcal{N}(0,1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3}\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2}\log N$, then we have

$$\mathbb{E}\left[(W_N)^q\right] \leq e^{\lambda^2\binom{q}{2}+o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log\frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$.

- $q^2 = o(\log N/\log\log N)$ なら，全ての$\hat{\beta} < 1$ に対して成り立つ．

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き，$\beta_N = \hat{\beta}\sqrt{\pi/\log N}$ とおく．

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i,x) \sim \mathcal{N}(0,1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3}\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2}\log N$, then we have

$$\mathbb{E}\left[(W_N)^q\right] \leq e^{\lambda^2\binom{q}{2}+o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log\frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$.

- $q^2 = o(\log N/\log\log N)$ なら，全ての$\hat{\beta} < 1$ に対して成り立つ．
- $q \in \mathbb{N}$ を固定すると，$\hat{\beta} < 1$ の領域でW_N は全てのモーメントをもつ（Lygkonis–Zygouras 21）．

上からの評価

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$ と書き，$\beta_N = \hat{\beta}\sqrt{\pi/\log N}$ とおく．

Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume $\omega(i,x) \sim \mathcal{N}(0,1)$. For any $\hat{\beta}$ small enough, if $\binom{q}{2} \le \frac{1}{3}\frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2}\log N$, then we have

$$\mathbb{E}\left[(W_N)^q\right] \le e^{\lambda^2\binom{q}{2}+o(q^2)},$$

where $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log\frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$.

- $q^2 = o(\log N/\log\log N)$ なら，全ての$\hat{\beta} < 1$ に対して成り立つ．
- $q \in \mathbb{N}$ を固定すると，$\hat{\beta} < 1$ の領域でW_N は全てのモーメントをもつ（Lygkonis–Zygouras 21）．
- 改良点：$\hat{\beta}_0 \to 1$，$1/3 \to 1$，および$o(q^2) \to o(1)$.

改良

$t \le 1$ に対して次を定義する：

$$W_{tN} := \mathrm{E}_0\left[e^{\sum_{n=1}^{tN}(\beta_N\omega(n,S_n)-\Lambda(\beta_N))}\right], \quad \lambda_t^2 := \log\left(\frac{1}{1-\hat{\beta}^2 t}\right).$$

Theorem (Cosco-N, 2025+)

For any $\hat{\beta} < 1$, $\alpha < 1$, and $t \le 1$, if $\binom{q}{2} \le \alpha\frac{\hat{\beta}^2}{1-t\hat{\beta}^2}\log N$,

$$\mathbb{E}\left[(W_{tN})^q\right] \le e^{\lambda_t^2\binom{q}{2}+o(q^2)},$$

where $o(q^2)$ depends only on N, α.

$\boxed{\text{ポイント}}$

- 有限回の交差を許す
- 一般の重み

下からの評価

Theorem (Cosco-Zeitouni 23)

(i) For any $\hat{\beta} < 1$, $\binom{q}{2} = O(\log N)$,

$$\mathbb{E}\left[W_N^q\right] \geq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} - o(q^2)}.$$

(ii) If $\binom{q}{2} \geq (\log N)^2$, $\mathbb{E}[W_N^q] \geq e^{cN/\log N}$.

証明方針

階層分解

$\log W_N(x)$ を次のように分解する：

$$\log W_N(x) = \sum_{k=1}^{K} \log W_{N,k}(x),$$

ここで各成分は，ある時間区間に対応する分配関数で：

$$W_{N,k}(x) := \frac{W_{N^{(k+1)/K}}(x)}{W_{N^{k/K}}(x)}.$$

この分解は，次のスライドで見るような階層構造を示唆している．

Chaining argument

空間・時間方向の相関を次のように評価する：

1. 近い点： $|x-y| \le N^{k/(2K)-\epsilon}$ なら
$$\log W_{N,k}(x) \;\approx\; \log W_{N,k}(y).$$
2. 遠い点： $|x-y| \ge N^{k/(2K)+\epsilon}$ なら
$$\log W_{N,k}(x) \;\perp\; \log W_{N,k}(y).$$
3. 異なるレベル： $k_1 \neq k_2$ のとき，$\log W_{N,k_1}(x)$ と$\log W_{N,k_2}(y)$ は近似的に独立.

これらは分枝過程に現れる階層的な相関構造を表す: すなわち

$|x-y| \approx N^{k/(2K)}$ のとき，分岐時刻は$N^{k/K}$ に対応する.

分散と対数相関

各成分の分散は，関数$f(t)$ により近似的に

$$\mathrm{Var}\big(\log W_{N,k}(x)\big) \;\sim\; \frac{f\left(\frac{k}{K}\right)}{K\,\log N}, \quad \text{where} \quad f(t) \;=\; \frac{\hat\beta^2}{1-\hat\beta^2\, t}.$$

k で足し上げると，場

$$h_N(x) := \sqrt{\log N}\,(\log W_N(\sqrt{N}x) - \mathbb{E}\log W_N(\sqrt{N}x))$$

は対数相関ガウス場になる：

$$\mathrm{Cov}\big(h_N(x), h_N(y)\big) \;\approx\; \int_{-2\log|x-y|}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

これは$N \to \infty$ で不均一BBMの挙動を反映している．

不均一BBMとの比較

不均一分枝ブラウン運動（BBM）との類比により：

- 分解の「レベル」k は，時間依存の分枝イベントに対応する．
- 分散プロファイル $f(t)$ は，BBMの時間依存拡散係数に対応する．
- 不均一BBMの最大値に関する既知の結果（例：Feng–Zeitouni）より

$$\max_{|x|\leq 1} h_N(x) = \max_{|x|\leq 1} \sqrt{\log N} \log W_N(x) \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

従って，　$h_N(x)$ の最大値は，不均一BBMの最大値解析と並行する方法で導ける．

厳密な証明では，十分良い近似のためにモーメント評価に関する鋭い条件が必要になる．

今後の課題

今後の課題

- $\hat{\beta} = 1$：臨界2次元Stochastic Heat Flow
  （Caravenna–Sun–Zygouras 23，Liu–Zygouras 24+）

最後に

吉田先生，ご還暦おめでとうございます．今後のご研究，そしてご執筆のますますのご発展を心よりお祈り申し上げます．