

# 二次元有向ポリマーの最大値に関する問題

---

中島修太（慶應義塾大学）

Clément Cosco, Ofer Zeitouni との共同研究

# 自己紹介

- 名古屋大学 学部生 (2010-2014) <- 4年生のときに吉田先生の授業を受けた
- 京都大学 修士、博士(2014-2019) <- 指導教員は福島先生
- 2015年にComets-Fukushima-Yoshida-Nakajimaでジャンプつき有向ポリマーの論文を発表
- 2019年から2020年まで名古屋大学でポスドク(中島-中島完成)

## モデルと主結果

---

# 有向ポリマーとは？

- 有向ポリマー (Directed polymer) は、さまざまな物理現象をモデル化する：
  - 無秩序環境におけるランダムなポリマー成長
  - 乱流系における界面成長
  - 確率的 (ランダム) システムにおける経路最適化
- 主な特徴：
  - ポリマーの経路は特定の方向 (時間方向) に沿って進む。
  - 環境は各配置にランダムなエネルギーを割り当てる。
  - 系はエネルギー最小化とエントロピー最大化のバランスを取る。
- これらは、以下のようなより広い確率構造とも結びつく：
  - 分枝過程
  - さまざまな成長過程を記述するKPZ普遍性クラス

# 有向ポリマー

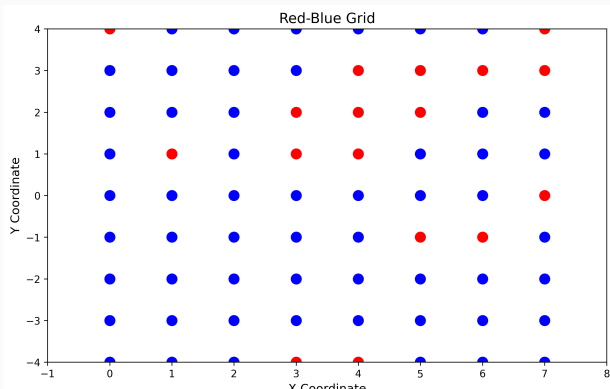
- $P_x$  を  $\mathbb{Z}^d$  上で  $x$  から始まる単純ランダムウォーク (SRW) の測度とする.
- $(\omega(n, x))_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$  を平均0のi.i.d. 確率変数とし, 次を仮定する:

$$\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

# 有向ポリマー

- $P_x$  を  $\mathbb{Z}^d$  上で  $x$  から始まる単純ランダムウォーク (SRW) の測度とする.
- $(\omega(n, x))_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$  を平均0のi.i.d. 確率変数とし, 次を仮定する:

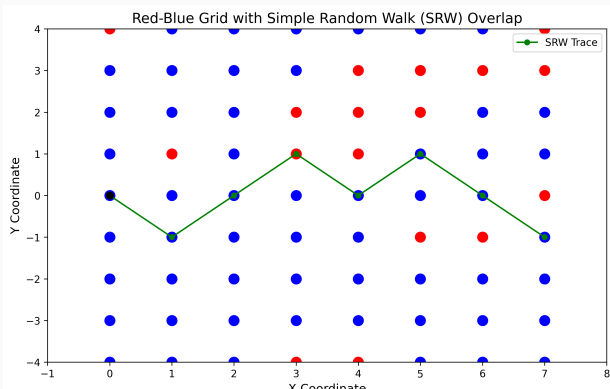
$$\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$



# 有向ポリマー

- $P_x$  を  $\mathbb{Z}^d$  上で  $x$  から始まる単純ランダムウォーク (SRW) の測度とする.
- $(\omega(n, x))_{n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d}$  を平均0のi.i.d. 確率変数とし, 次を仮定する:

$$\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1, \quad \Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$



# 有向ポリマー

- $P_x$  は  $\mathbb{Z}^d$  上で  $x$  から始まる単純ランダムウォークの測度,
- $\omega(n, x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$  は平均0のi.i.d. 確率変数  
で  $\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1$ , かつ

$$\Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

## ポリマー分配関数

$$W_N(\beta, x) := \mathbb{E}_x \left[ e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$



# 有向ポリマー

- $P_x$  は  $\mathbb{Z}^d$  上で  $x$  から始まる単純ランダムウォークの測度,
- $\omega(n, x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$  は平均0のi.i.d. 確率変数  
で  $\mathbb{E}[\omega(n, x)^2] = 1$ , かつ

$$\Lambda(\beta) := \log \mathbb{E}[e^{\beta \omega(n, x)}] < \infty, \quad \forall \beta > 0.$$

## ポリマー分配関数

$$W_N(\beta, x) := \mathbb{E}_x \left[ e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

## ポリマー測度

$$P_{N, \beta}^{polymer}((S_n)_{n=0}^N) := \frac{e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))}}{W_N(\beta, 0)} P_0((S_n)_{n=0}^N).$$

## 弱・強無秩序 (Weak/Strong disorder)

### ポリマー分配関数

$$W_N(x) := W_N(\beta, x) := E_x \left[ e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

### 相転移

ある  $\beta_c \in [0, \infty]$  が存在して：

$\beta > \beta_c$  なら  $W_N(\beta, x) \rightarrow 0$  (局在相) ,

$\beta < \beta_c$  なら  $W_N(\beta, x) \rightarrow W_\infty(\beta, x) > 0$  (拡散相) .

## 弱・強無秩序 (Weak/Strong disorder)

### ポリマー分配関数

$$W_N(x) := W_N(\beta, x) := E_x \left[ e^{\sum_{n=1}^N (\beta \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta))} \right], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

### 相転移

ある  $\beta_c \in [0, \infty]$  が存在して：

$\beta > \beta_c$  なら  $W_N(\beta, x) \rightarrow 0$  (局在相) ,

$\beta < \beta_c$  なら  $W_N(\beta, x) \rightarrow W_\infty(\beta, x) > 0$  (拡散相) .

- $d = 1, 2$  では  $\beta_c = 0$  (常に局在) . (Carmona-Hu 02, Comets-Shiga-Yoshida 03)
- $d \geq 3$  では  $\beta_c > 0$  (相転移が存在) . (Comets-Yoshida 06)

# KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$  は次の離散版を満たす：

確率熱方程式 (stochastic heat equation)：

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \beta u(t, x) \xi(t, x),$$

ここで  $\xi(t, x)$  は  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  上のホワイトノイズである。

# KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$  は次の離散版を満たす：

確率熱方程式 (stochastic heat equation) :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \beta u(t, x) \xi(t, x),$$

ここで  $\xi(t, x)$  は  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  上のホワイトノイズである。

Hopf–Cole変換： $h(t, x) = \log u(t, x)$ . ( $\log W_N(\beta, x)$  に対応)

Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) 方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, x) = \frac{1}{2} \Delta h(t, x) + \frac{1}{2} |\nabla h(t, x)|^2 + \beta \xi(t, x).$$

# KPZ方程式との関係

$W_N(\beta, x)$  は次の離散版を満たす：

確率熱方程式 (stochastic heat equation) :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + \beta u(t, x) \xi(t, x),$$

ここで  $\xi(t, x)$  は  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  上のホワイトノイズである。

Hopf–Cole変換： $h(t, x) = \log u(t, x)$ . ( $\log W_N(\beta, x)$  に対応)

Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) 方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, x) = \frac{1}{2} \Delta h(t, x) + \frac{1}{2} |\nabla h(t, x)|^2 + \beta \xi(t, x).$$

これらの方程式は（そのままでは）解をもたない！

# 中間領域

中間領域 ( $d = 1$ ) :

## Theorem (Alberts-Khanin-Quastel 14)

Let  $d = 1$ . For  $\beta_N = \frac{\hat{\beta}}{N^{1/4}}$ :  $\log W_{tN}(\beta_N, x\sqrt{N}) \xrightarrow{(d)} \text{KPZ}_{\hat{\beta}}(t, x)$

# 中間領域

中間領域 ( $d = 1$ ) :

## Theorem (Alberts-Khanin-Quastel 14)

Let  $d = 1$ . For  $\beta_N = \frac{\hat{\beta}}{N^{1/4}}$ :  $\log W_{tN}(\beta_N, x\sqrt{N}) \xrightarrow{(d)} \text{KPZ}_{\hat{\beta}}(t, x)$

中心極限定理 ( $d = 2$ ) .  $\lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$  とおく .

## Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 17, Caravenna-Cottini 22, Cosco-Donadini 23+)

Let  $d = 2$ . For  $\beta_N = \frac{\sqrt{\pi}\hat{\beta}}{\sqrt{\log N}}$  :

$$(i) \forall \hat{\beta} < 1 : \quad \log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N} \left( -\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2 \right),$$

$$(ii) \forall \hat{\beta} \geq 1 : \quad W_N(\beta_N, 0) \rightarrow 0.$$



Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 17, Caravenna-Cottini 22, Cosco-Donadini 23+)

Let  $d = 2$ . For  $\beta_N = \frac{\sqrt{\pi}\hat{\beta}}{\sqrt{\log N}}$  :

- (i)  $\forall \hat{\beta} < 1$  :  $\log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right)$ ,
- (ii)  $\forall \hat{\beta} \geq 1$  :  $W_N(\beta_N, 0) \rightarrow 0$ .

- 臨界点  $\hat{\beta} = 1$  では、場  $(W_{tN}(\beta_N, \lfloor \sqrt{N}x \rfloor))_{t \geq 0, x \in [-1, 1]^2}$  が分布の意味で、いわゆる **Critical Stochastic Heat Flow** に収束することが知られている。

# CLTの証明 (Cosco-Donadini)

$\hat{\beta} < 1$  とする. 示したいのは  $\log W_N(\beta_N, 0) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda^2}{2}, \lambda^2\right)$ .

- ステップ1 (decoupling) : 任意の  $M > 0$  に対し,  $W_N \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \prod_{k=1}^M W_{k,M}$  が  $L^2$  で成り立つ. ここで

$$W_{k,M} := \mathbb{E} \left[ e^{\sum_{n=N^{k/M}}^{N^{(k+1)/M}} (\beta_N \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta_N))} \right].$$

- ステップ2 ([Taylor展開:  $\log(1+x) \approx x - x^2/2$ ] + CLT) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \log W_{k,M} &\underset{M \rightarrow \infty}{\approx} \sum_{k=1}^M (W_{k,M} - 1) - \frac{1}{2} (W_{k,M} - 1)^2 \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, \lambda^2) - \frac{\lambda^2}{2}. \end{aligned}$$

## 対数相関場

$\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$  を思い出す．次を定義する：

$$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left( \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right).$$

### Theorem (Caravenna-Sun-Zygouras 20)

As  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\forall \hat{\beta} < 1 : h_N(x) \xrightarrow{(d)} \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2}} G(x),$$

with  $G(x)$  a log-correlated Gaussian field on  $\mathbb{R}^2$  independent of  $\hat{\beta}$ ,  
i.e., when  $|x - y| \rightarrow 0$ ,

$$\mathbb{E}[G(x)G(y)] \sim \log \frac{1}{|x - y|}.$$

# 主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left( \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right)$  と定義する.

**Cosco-N.-Zeitouni, 2025+**

For all  $\hat{\beta} < 1$ , as  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \max_{|x| \leq N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t) dt,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2(1 - t)}}.$$

# 主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left( \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right)$  と定義する.

**Cosco-N.-Zeitouni, 2025+**

For all  $\hat{\beta} < 1$ , as  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \max_{|x| \leq N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t) dt,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2(1 - t)}}.$$

- 方針：不均一BBMとの比較.

# 主結果

$h_N(x) := \sqrt{\log N} \left( \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) - \mathbb{E} \log W_N(\beta_N, x\sqrt{N}) \right)$  と定義する.

**Cosco-N.-Zeitouni, 2025+**

For all  $\hat{\beta} < 1$ , as  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\log N)^{-1} \max_{|x| \leq N^{1/2}} h_N(x) = \int_0^1 \sigma(t) dt,$$

where

$$\sigma(t) := \sqrt{\frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2(1 - t)}}.$$

- 方針：不均一BBMとの比較.
- 必要： $q = O(\sqrt{\log N})$  の範囲で  $\mathbb{E}[(W_N(x))^q]$  (delta-bose gas) の評価.

## 関連研究

---

# 分枝ブラウン運動 (BBM)

定義：

- $t = 0$  に原点の1粒子から開始する.
- 粒子は (独立な) 指数分布に従うランダム時刻までブラウン運動に従う (指数時計).
- 分枝時刻に粒子は2つの独立な粒子に分裂する.
- 各子孫は独立にブラウン運動する.
- 以降も独立な指数時計により同様に分枝を繰り返す.
- $\mathcal{N}(t)$ : 時刻  $t$  に生存している粒子の集合.



# BBMのシミュレーション



<https://njima091.github.io/Lectures/miscellany/Bbm.html>

# 分枝過程の最大値

分枝ブラウン運動の最大値：

**Bramson 83, Bramson-Zeitouni 09**

$$\max_{v \in \mathcal{N}(t)} B_t^v \approx \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + X,$$

where  $X$  follows a shifted Gumbel distribution.

# 分枝過程の最大値

分枝ブラウン運動の最大値：

**Bramson 83, Bramson-Zeitouni 09**

$$\max_{v \in \mathcal{N}(t)} B_t^v \approx \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + X,$$

where  $X$  follows a shifted Gumbel distribution.

同様の現象は、多くの（ガウス）対数相関場（Gaussian free field, cover times, random matrices, ゼータ関数, ...）でも現れる.

定義：

- 古典的BBMの時間依存分散版：

$$\sigma_T^2(t) := \sigma^2(t/T),$$

ここで：

- $\sigma$  は  $[0, 1]$  上の滑らかで狭義単調減少な関数.
- $\sigma$  の導関数は負の定数で上から抑えられる.
- 粒子：
  - 分散  $\int_0^\cdot \sigma_T^2(s) ds$  をもつブラウン運動を行う.
  - 独立な指数時計で分枝する.

# 不均一BBMの最大値

不均一分枝ブラウン運動の最大値：

## Feng-Zeitouni 13

Suppose that  $\sigma : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  is a smooth function such that  $\sup_{x \in [0, 1]} \sigma'(x) < 0$ . As  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\max_{v \in \mathcal{N}(T)} B_T^v = v_\sigma T - \Omega(T^{1/3}),$$

where we define

$$v_\sigma := \sqrt{2} \int_0^1 \sigma(s) ds.$$

# 不均一BBMの最大値

不均一分枝ブラウン運動の最大値：

## Feng-Zeitouni 13

Suppose that  $\sigma : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  is a smooth function such that  $\sup_{x \in [0, 1]} \sigma'(x) < 0$ . As  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\max_{v \in \mathcal{N}(T)} B_T^v = v_\sigma T - \Omega(T^{1/3}),$$

where we define

$$v_\sigma := \sqrt{2} \int_0^1 \sigma(s) ds.$$

主要項の係数や次の次数が古典的BBMとは異なる.

## モーメント評価

---

# モーメント公式

再掲：  $W_N(\beta_N) = E_0[\exp\{\sum_{n=1}^N(\beta_N\omega(n, S_n) - \Lambda(\beta_N))\}]$ .

## モーメント公式

$\omega(n, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$  とする. このとき

$$\mathbb{E}[W_N^q] = E_0^{\otimes q} \left[ e^{\beta_N^2 \sum_{n=1}^N \sum_{1 \leq i < j \leq q} 1_{S_n^i = S_n^j}} \right],$$

ここで  $(S_n^i)_{i \leq q}$  はSRW の独立なコピーである.

- Delta-Bose gas ( $\delta$ -Bose gas) .
- 非ガウスの場合は公式があまりきれいにならない.



$W_N = W_N(\beta_N, 0)$  と書き,  $\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$  とおく.

## Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume  $\omega(i, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . For any  $\hat{\beta}$  small enough, if  $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2} \log N$ , then we have

$$\mathbb{E}[(W_N)^q] \leq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where  $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1 - \hat{\beta}^2}$ .

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$  と書き,  $\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$  とおく.

## Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume  $\omega(i, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . For any  $\hat{\beta}$  small enough, if  $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2} \log N$ , then we have

$$\mathbb{E}[(W_N)^q] \leq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where  $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$ .

- $q \in \mathbb{N}$  を固定すると,  $\hat{\beta} < 1$  の領域で  $W_N$  は全てのモーメントをもつ (Lygkonis-Zygouras 21) .

$W_N = W_N(\beta_N, 0)$  と書き,  $\beta_N = \hat{\beta} \sqrt{\pi / \log N}$  とおく.

## Theorem (Cosco-Zeitouni 22)

Assume  $\omega(i, x) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . For any  $\hat{\beta}$  small enough, if  $\binom{q}{2} \leq \frac{1}{3} \frac{\hat{\beta}^2}{1-\hat{\beta}^2} \log N$ , then we have

$$\mathbb{E}[(W_N)^q] \leq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where  $\lambda^2 := \lambda(\hat{\beta})^2 := \log \frac{1}{1-\hat{\beta}^2}$ .

- $q \in \mathbb{N}$  を固定すると,  $\hat{\beta} < 1$  の領域で  $W_N$  は全てのモーメントをもつ (Lygkonis-Zygouras 21) .
- 改良点:  $\hat{\beta}_0 \rightarrow 1$ ,  $1/3 \rightarrow 1$ , および  $o(q^2) \rightarrow o(1)$ .

$t \leq 1$  に対して次を定義する：

$$W_{tN} := \mathbb{E}_0 \left[ e^{\sum_{n=1}^{tN} (\beta_N \omega(n, S_n) - \Lambda(\beta_N))} \right], \quad \lambda_t^2 := \log \left( \frac{1}{1 - \hat{\beta}^2 t} \right).$$

## Theorem (Cosco-N, 2025+)

For any  $\hat{\beta} < 1$ ,  $\alpha < 1$ , and  $t \leq 1$ , if  $\binom{q}{2} \leq \alpha \frac{\hat{\beta}^2}{1 - t\hat{\beta}^2} \log N$ ,

$$\mathbb{E} [(W_{tN})^q] \leq e^{\lambda_t^2 \binom{q}{2} + o(q^2)},$$

where  $o(q^2)$  depends only on  $N, \alpha$ .

### ポイント

- 有限回の交差を許す
- 一般の重み

## Theorem (Cosco-Zeitouni 23)

(i) For any  $\hat{\beta} < 1$ ,  $\binom{q}{2} = O(\log N)$ ,

$$\mathbb{E} [W_N^q] \geq e^{\lambda^2 \binom{q}{2} - o(q^2)}.$$

(ii) If  $\binom{q}{2} \geq (\log N)^2$ ,  $\mathbb{E}[W_N^q] \geq e^{cN/\log N}$ .

## 証明方針

---

# 階層分解

$\log W_N(x)$  を次のように分解する：

$$\log W_N(x) = \sum_{k=1}^K \log W_{N,k}(x),$$

ここで各成分は、ある時間区間に対応する分配関数で：

$$W_{N,k}(x) := \frac{W_{N^{(k+1)/K}}(x)}{W_{N^{k/K}}(x)}.$$

この分解は、次のスライドで見るような階層構造を示唆している．

# Chaining argument

空間・時間方向の相関を次のように評価する：

1. 近い点：  $|x - y| \leq N^{k/(2K) - \epsilon}$  なら

$$\log W_{N,k}(x) \approx \log W_{N,k}(y).$$

2. 遠い点：  $|x - y| \geq N^{k/(2K) + \epsilon}$  なら

$$\log W_{N,k}(x) \perp \log W_{N,k}(y).$$

3. 異なるレベル：  $k_1 \neq k_2$  のとき，  $\log W_{N,k_1}(x)$  と  $\log W_{N,k_2}(y)$  は近似的に独立．

これらは分枝過程に現れる階層的な相関構造を表す： すなわち

$|x - y| \approx N^{k/(2K)}$  のとき，分岐時刻は  $N^{k/K}$  に対応する．



# 分散と対数相関

各成分の分散は、関数 $f(t)$ により近似的に

$$\mathrm{Var}(\log W_{N,k}(x)) \sim \frac{f(\frac{k}{K})}{K \log N}, \quad \text{where} \quad f(t) = \frac{\hat{\beta}^2}{1 - \hat{\beta}^2 t}.$$

$k$  で足し上げると、場

$$h_N(x) := \sqrt{\log N} (\log W_N(\sqrt{N}x) - \mathbb{E} \log W_N(\sqrt{N}x))$$

は対数相関ガウス場になる：

$$\mathrm{Cov}(h_N(x), h_N(y)) \approx \int_{-2 \log |x-y|}^1 f(t) dt,$$

これは $N \rightarrow \infty$  で不均一BBMの挙動を反映している。

# 不均一BBMとの比較

不均一分枝ブラウン運動 (BBM) との類比により：

- 分解の「レベル」 $k$  は、時間依存の分枝イベントに対応する．
- 分散 $f(t)$  は、BBMの時間依存拡散係数に対応する．
- 不均一BBMの最大値に関する既知の結果 (Feng–Zeitouni) より

$$\max_{|x| \leq 1} h_N(x) = \max_{|x| \leq 1} \sqrt{\log N} \log W_N(x) \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{f(t)} dt.$$

従って、 $h_N(x)$  の最大値は、不均一BBMの最大値解析と並行する方法で導ける．

厳密な証明では、十分良い近似のためにモーメント評価に関する良い評価が必要になる．

## 今後の課題

---

- $\hat{\beta} = 1$  : 臨界2次元Stochastic Heat Flow  
(Caravenna–Sun–Zygouras 23, Liu–Zygouras 24+)

吉田先生，ご還暦おめでとうございます．今後  
のご研究，そしてご執筆のますますのご発展を  
心よりお祈り申し上げます．