6. Ⓜ Simulieren Sie einen fairen Würfel X_i und erzeugen Sie die Häufigkeitsverteilungen (Matlab: *histogram*) und die empirische CDFs (Matlab: *cdfplot*) von einer vernünftig gewählten Anzahl von Realisierungen folgender Zufallsvariable:

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - E[X_i]}{\sqrt{nV[X_i]}}, \qquad n = 1, 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100$$

Dabei sind $E[X_i] = 3.5$ und $V[X_i] = 2.9167$ Erwartungswert und Varianz bei einmal Würfeln. Die Verteilung von S_n wird der einer Normalverteilung $\mathcal{N}$ immer ähnlicher. Durch die Standardisierung (Subtraktion des Erwartungswertes, Division durch die Wurzel aus n-mal der Varianz) gleicht sich S_n immer mehr an $\mathcal{N}(0,\,1)$ an (zeichnen Sie $\mathcal{N}(0,\,1)$ als Overlay in die Histogramme). Welches fundamentale mathematische Theorem steckt dahinter?

7. ⒶⓂ Beantworten Sie folgende Frage: Ein biometrisches System zur Zugangskontrolle hat folgende Eckdaten: Das System erkennt eine berechtigte Person in 95 von 100 Fällen richtig, allerdings wird eine unberechtigte Person in 1 von 100 Fällen trotzdem durchgelassen. Das System soll in einer Firma mit 500 Mitarbeitern verwendet werden um den Zugang zum Serverraum zu überwachen, in den nur 3 Personen eintreten dürfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit daß eine durchgelassene Person auch zutrittsberechtigt ist?

8. Ⓜ Stellen jeweils Sie die Dichten einer T-Verteilung als auch die Dichten einer χ^2-Verteilung mit mit $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ Freiheitsgraden dar. Zeichnen Sie zusätzlich $\mathcal{N}(0,\,1)$ in die beiden Figures. Beantworten Sie folgende Fragen:

   - Kann $\mathcal{N}(0,\,1)$ mit einer T-Verteilung approximiert werden?
   - Kann $\mathcal{N}(0,\,1)$ mit einer χ^2-Verteilung approximiert werden?

   Wenn ja, wie, wenn nein, warum nicht?

9. Gegeben ein Fischteich mit m Fischen, m unbekannt. Die Populationsgröße soll mittels dem Schätzer $\hat{m} = \frac{c \cdot r}{t}$ eruiert werden. Dazu werden zunächst c Fische aus dem Teich geangelt, mit einem Farbtupfer versehen und in den Teich zurückgegeben. Eine Woche später werden nochmals r Fische geangelt und es wird die Anzahl t dieser r Fische ermittelt, die einen Farbtupfer haben.

   a) Ⓜ Simulieren Sie dieses Beispiel mit einem virtuellen Teich mit $m = 500$ Fischen und den Werten $c = r \in \{10, 20, 40, 80\}$. Führen Sie jede Simulation 100 mal durch und vergleichen Sie die Streuung der Ergebnisse in Abhängigkeit zu den Werten c bzw. r.

   b) Ⓐ⊕ Zeigen Sie, dass der Schätzer $\hat{m} = \frac{c \cdot r}{t}$ ein Maximum-Likelihood-Schätzer ist. (Hinweis: Hypergeometrische Verteilung für die Anzahl t). Die Likelihood-Funktion hängt von m ab, man versucht zu zeigen, dass der Quotient $L(m)/L(m-1)$ genau dann > 1 ist, wenn $m < c \cdot r/t$. Damit steigt also L bis zu diesem Wert an, danach fällt L und damit ist dieses m der gesuchte Schätzwert.