作业 2

截止日期：2023.11.2

姓名: 田 永 铭
学号: 221900180
成绩: ________

Problem 1 (2pt) . 给定下列命题，

$$A \iff (B \vee E).$$
$$E \Rightarrow D.$$
$$C \wedge F \Rightarrow \neg B.$$
$$E \Rightarrow B.$$
$$B \Rightarrow F.$$
$$B \Rightarrow C.$$

试证明：$\neg A \wedge \neg B$

Solution: 证明如下:
假设 B
因为 $B \Rightarrow F$
所以 F
因为 $B \Rightarrow C$
所以 C
所以 $C \wedge F$
又因为 $C \wedge F \Rightarrow \neg B$
所以 $\neg B$
与假设矛盾
所以 $\neg B$

因为 $E \Rightarrow B$
并且 $\neg B$
所以 $\neg E$(取拒式)
所以 $\neg(B \wedge E)$
因为 $A \iff (B \wedge E)$
所以 $\neg A$

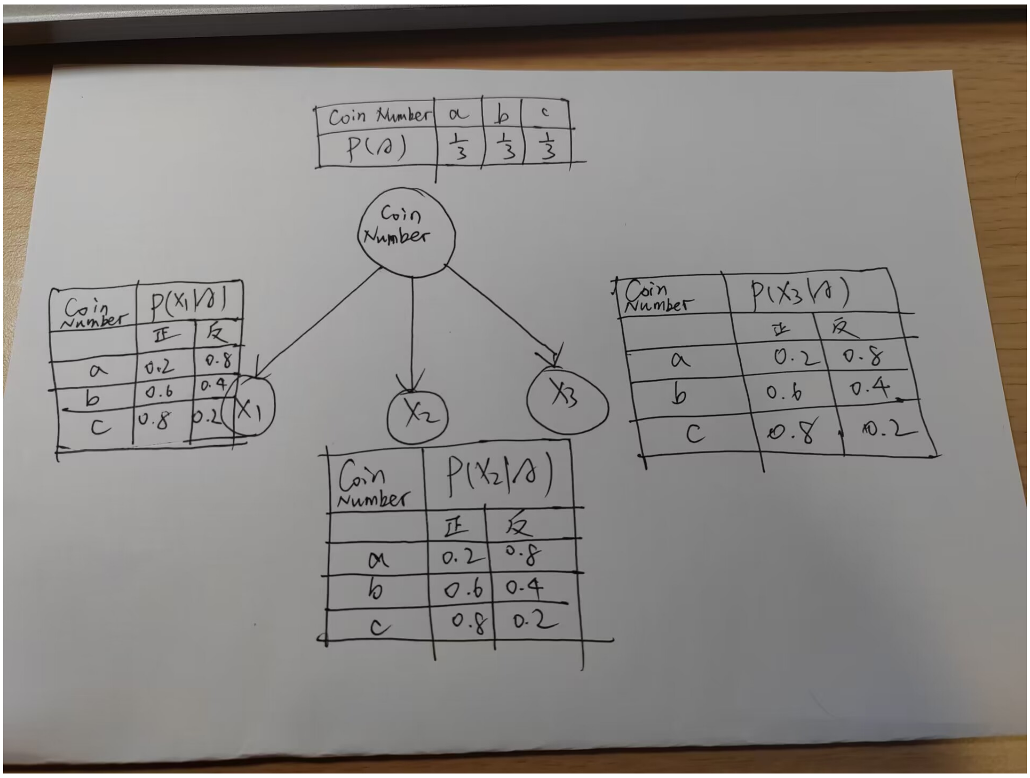
所以 $\neg(B \wedge E)$ □

Problem 2 . 袋子里有 3 个不均匀的硬币 a、b、c，抛掷硬币正面朝上的概率分别为 0.2、0.6、0.8，随机取出一个硬币（3 个硬币被取出的概率相等），并把取出的硬币抛 3 次，得到的结果是 X_1,X_2,X_3。

1. (2pt) 画出对应的贝叶斯网络，并给出 CPT 表。

2. (3pt) 如果抛掷结果是 2 次正面朝上，1 次反面朝上，取出的硬币最可能是哪一个？

Solution: 1. 贝叶斯网络和 CPT 表见下方 (Page 2) 2. 记事件 A 为抛掷的硬币两次正面向上，一次反面向上
则
$P(A|a) = C_3^2 * 0.2 * 0.2 * 0.8 = 0.096$
$P(A|b) = C_3^2 * 0.6 * 0.6 * 0.4 = 0.432$
$P(A|c) = C_3^2 * 0.8 * 0.8 * 0.2 = 0.384$
又有:
$P(a) = P(b) = P(c) = \frac{1}{3}$



$P(A) = \frac{1}{3} * (0.096 + 0.432 + 0.384) = 0.304$

由贝叶斯公式:

$P(a|A) = \frac{P(A|a)*P(a)}{P(A)} = \frac{0.096*\frac{1}{3}}{0.304} = \frac{2}{19}$

$P(b|A) = \frac{P(A|b)*P(b)}{P(A)} = \frac{0.432*\frac{1}{3}}{0.304} = \frac{9}{19}$

$P(c|A) = \frac{P(A|c)*P(c)}{P(A)} = \frac{0.384*\frac{1}{3}}{0.304} = \frac{8}{19}$

所以硬币最有可能是 b

□

Problem 3 . 给定下列贝叶斯网，CPT 表中的概率表示事件为真的概率。

1. (6pt) 下列等式是否成立？请给出原因
   (a) $P(B, I, M) = P(B)P(I)P(M)$
   (b) P(J|G)=P(J|G,I)
   (c) $P(M|G, B, I) = P(M|G, B, I, J)$
2. (2pt) 计算 $P(+b, +i, -m, +g, +j)$

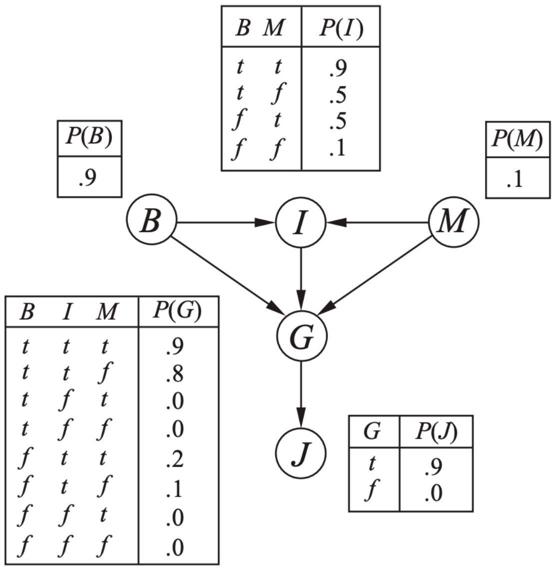
Solution: 1. (a) 不成立

$P(B, I, M) = P(B)P(M)P(I|B, M) \neq P(B)P(M)P(I)$

前者是 $0.9*0.1*0.9 = 0.081$, 后者是 $0.9*0.1*(0.9*0.1*0.9+0.9*0.9*0.5+0.1*0.1*0.5+0.1*0.9*0.1) = 0.12645$

(b) 成立

I 对 J 的影响只能通过 G 传递，所以给定 G 和给定 G 与 J，对 I 的影响完全等价，所以成立



(c) 成立

P(M|G,B,I,J) = $\frac{P(M,G,B,I,J)}{P(G,B,I,J)} = \frac{P(B)P(M)P(I|B,M)P(G|I,B,M)P(J|G)}{P(B)P(I|B)P(G|I,B)P(J|G)}$
P(M|G,B,I) = $\frac{P(M,G,B,I)}{P(G,B,I)} = \frac{P(B)P(M)P(I|B,M)P(G|I,B,M)}{P(B)P(I|B)P(G|I,B)}$
所以两者相等
同时可以文字解释:
给定了 G，M->G->J 的影响消除，J 与 M 独立，在两个式子都给定 G 的情况下，是否给定 J 对 M 无影响

2. $P(+b,+i,-m,+g,+j) = P(+b)*P(-m)*P(+i|+b,-m)*P(+g|+b,+i,-m)*P(+j|+g) = 0.9*0.9*0.5*0.8*0.9 = 0.2916$

□