谓词逻辑初步

马晓星
http://cs.nju.edu.cn/xxm
南京大学计算机科学与技术系

前情回顾

- 命题逻辑
  - 逻辑运算符
  - 命题表达式
  - 命题的真值表
  - 逻辑（语义）蕴含
  - 逻辑等价
  - 命题逻辑的推理
  - 命题逻辑公式的范式
  - 自然演绎规则及论证
  - 命题逻辑的正确性及完备性

内容提要

- 引言
- 逻辑公式
  - 谓词
  - 量词
- 常用逻辑等价式
- 前束范式
- 基于规则的推理
- FOL的一些定论

引言

- 知识表示
  - $\forall n\ (\mathrm{odd}(n) \rightarrow \mathrm{odd}(n^2))$
  - brother(z, y) $\wedge$ father(y, x) $\rightarrow$ uncle(z, x)   // z is uncle of x
  - father(z, y) $\wedge$ father(y, x) $\rightarrow$ grandfather(z, x)

  - 上述知识无法用命题逻辑表达！

引言

- 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
  - $\forall n\left(\mathrm{even}(n) \wedge (n>2) \rightarrow \exists m \exists k\left(p(m) \wedge p(k) \wedge (n=m+k)\right)\right)$
    - $\mathrm{even}(n)$：n 是一个偶数
    - $p(x)$: x 是一个质数
  - 这个断言无法用命题逻辑表达！（命题逻辑的局限性）

谓词（Predicate）

- 如果x是整数，"x 大于2" 不是命题，它的真值依赖于x的取值
  - 可以将 "x大于2"表示为 $P(x)$。　　//论域为实数
- 一元谓词$P(\cdot)$: 给定x, $P(x)$ 要么为真，要么为假.
  - 如 $P(x)$: x 是一个质数　　// x是变量，论域为正整数
- 二元谓词$Q(\cdot,\cdot)$
  - 如 $Q(x,y)$：$x = y + 3$　　// 2个变量
  - 如 uncle(z, x)： z is uncle of x　//论域？

逻辑公式（Formula）

- 原子陈述：
  - $P(t_1, \ldots, t_n)$，其中P是n元谓词， t_i是常量、变量或函数取值

- 逻辑公式（有时称为“陈述”）：
  - 原子陈述是逻辑公式；
  - 若P是逻辑公式，x是自由变量，则$\exists xP$和$\forall xP$是逻辑公式；
  - 若P和Q是逻辑公式，则 $\neg P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \rightarrow Q$ 是逻辑公式。

    备注：量词的优先级高于其它逻辑运算符。

    举例： $\forall x\left(x \leq 0 \vee \exists y(y > 0 \wedge x = y^2)\right)$

量化公式中的变元

- 约束变元
  - $\forall x \exists y(y > x)$ 是 $\forall x(\exists y(y > x))$ 简写，x和y都是约束变元
  - $\exists y(y > x) \wedge \exists z(x > z)$，$y$和$z$都是约束变元
- 自由变元
  - $\exists y(y > x) \wedge \exists z(x > z)$，$x$是自由变元
  - $\exists y(y > x) \wedge (x + 2 > y)$, x是自由变元，后面那个y也是自由变元
- 量词作用域
  - 前面那个$\exists y$的作用域是 $(y > x)$
- 重命名（约束变元）
  - $\exists y(y > x) \wedge (x + 2 > y) \equiv \exists z(z > x) \wedge (x + 2 > y)$
  - $\exists y(y > x) \wedge \exists y(x > y) \equiv \exists y(y > x) \wedge \exists z(x > z)$

量化公式的真假

- $\forall x$（全称量词）

  $\forall x P(x)$ 为真 当且仅当 对所有的$x, P(x)$为真

  // "所有的"？论域， domain of discourse

- $\exists x$ （存在量词）

  $\exists x P(x)$为真 当且仅当 存在某个$x, P(x)$为真 //论域

- 例如：
  - $\forall x(x > 2)$为假， $\exists x(x > 2)$为真 //论域为实数
  - $\forall x \exists y(y > x)$为真，$\exists y \forall x\ (y > x)$为假 //论域为实数

多个量词并用

- $\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$
  - 举例：$P(x,y)$ 表示 $x+y=y+x$。论域为实数集。

- $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$
  - 举例： $P(x,y)$ 表示$x=y+1$。

- $\forall x \exists y P(x,y)$ 与 $\exists y \forall x P(x,y)$ 不一定等价
  - 举例：$P(x,y)$ 表示 $y>x$ 。

逻辑蕴含（语义蕴涵）

- $\phi \vDash \psi$ 当且仅当 $\phi \vdash \psi$ 永真。

- 或者更一般地，

  $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ 当且仅当$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ 永真。

一阶逻辑公式的永真性判定可以有相当的难度！

$$\forall n \left(\mathrm{even}(n) \wedge (n>2) \to \exists m \exists k \left(p(m) \wedge p(k) \wedge (n = m + k)\right)\right)$$

哥德巴赫猜想（1740s年），就是这个逻辑公式，至今无法判定其真假

变量的论域（domain of discourse）：无限与有限，天壤之别

将自然语言翻译成逻辑公式

- 任意实数的平方都是正数

  $\forall x P(x)$，其中 $P(x)$表示$x^2 > 0$，论域为实数

- 所有美国人都吃汉堡包

  $\forall x\, C(x)$，其中$C(x)$表示“x吃汉堡包”，论域为美国人

  $\forall x(A(x) \to C(x))$，论域为人类

  $A(x)$表示“x是美国人”，$C(x)$表示“x吃汉堡包”

- 有的政治家是诚实的

  $P(x)$表示“x是政治家”，$H(x)$表示“x是诚实的”

  $\exists x(P(x) \land H(x))$　　//外层的( )不能缺

将自然语言翻译成逻辑公式

- 这个班上的每个学生都学过微积分课程.

  $S(x)$: x是这个班上的学生， $C(x)$: x学过微积分课程

  $$\forall x\,(S(x) \rightarrow C(x))$$

- 这个班上的每个学生都或去过加拿大，或去过墨西哥.

  $$\forall x\,(S(x) \rightarrow V(x,c) \vee V(x,m))$$

  其中，c代表“加拿大”，m代表“墨西哥”，

  $V(x,y)$表示“x 去过 y”

常用逻辑等价式

- $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

  例如：

  $\forall x P(x)$：对所有实数x，其平方是正数 // $P(x)$表示$x^2 > 0$

  其否定：存在某个实数x，其平方不是正数。

- $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$

  例如：

  $\exists x P(x)$：存在实数x，x的平方是正数。

  其否定：对任意实数x，其平方不是正数。

常用逻辑等价式/蕴含式

- $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$
- $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$

- $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x) \vDash \forall x(P(x) \lor Q(x))$
- $\exists x(P(x) \land Q(x)) \vDash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

反向蕴涵×：是奇数或偶数

- $\forall x(P(x) \lor R) \equiv (\forall x P(x)) \lor R$
- $\exists x(P(x) \land R) \equiv (\exists x P(x)) \land R$

R中不能有自由的x

常用逻辑等价式

- $\forall x(R\rightarrow P(x)) \equiv R \rightarrow \forall xP(x)$

  $\forall x(\neg R\vee P(x)) \equiv \neg R\vee(\forall xP(x))$

- $\exists x(R\rightarrow P(x)) \equiv R\rightarrow \exists xP(x)$
- $\forall x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\exists xP(x)) \rightarrow R$
- $\exists x(P(x) \rightarrow R) \equiv (\forall xP(x)) \rightarrow R$

  $\exists x(\neg P(x)\vee R) \equiv (\exists x\neg P(x))\vee R\equiv \neg(\forall xP(x)) \vee R$

注意：这里x不在R中自由出现

前束范式（Prenex Normal Form）

$\forall x\,(x \le 0 \lor \exists y\,(y>0 \land x = y^2))$ //不是前束范式

$\forall x\, \exists y\,(x \le 0 \lor (y>0 \land x = y^2))$ //前束析取范式

有通用方法，把任意一阶逻辑公式转化为PNF（PDNF/PCNF）

转化为前束范式（举例说明）

$$\exists z\big(\exists x Q(x,z)\vee\exists x P(x)\big)\rightarrow\neg\big(\neg\exists x P(x)\wedge\forall x\exists z Q(z,x)\big)$$

$$\equiv\neg\exists z\big(\exists x Q(x,z)\vee\exists x P(x)\big)\vee\neg\big(\neg\exists x P(x)\wedge\forall x\exists z Q(z,x)\big)$$ （消去→）

$$\equiv\forall z\big(\forall x\neg Q(x,z)\wedge\forall x\neg P(x)\big)\vee\big(\exists x P(x)\vee\exists x\forall z\,\neg Q(z,x)\big)$$ （内移￢）

$$\equiv\forall z\forall x\big(\neg Q(x,z)\wedge\neg P(x)\big)\vee\exists x\big(P(x)\vee\forall z\,\neg Q(z,x)\big)$$ （简化）

$$\equiv\forall z\forall x\big(\neg Q(x,z)\wedge\neg P(x)\big)\vee\exists y\big(P(y)\vee\forall w\neg Q(w,y)\big)$$ （重命名）

$$\equiv\forall z\forall x\,\exists y\Big(\big(\neg Q(x,z)\wedge\neg P(x)\big)\vee P(y)\vee\forall w\neg Q(w,y)\Big)$$ （前移量词）

$$\equiv\forall z\forall x\exists y\forall w\Big(\big(\neg Q(x,z)\wedge\neg P(x)\big)\vee P(y)\vee\neg Q(w,y)\Big)$$ （前移量词）

$$\equiv\forall z\forall x\exists y\forall w\Big(\big(\neg Q(x,z)\vee P(y)\vee\neg Q(w,y)\big)\wedge\big(\neg P(x)\vee P(y)\vee\neg Q(w,y)\big)\Big)$$

前束合取范式PCNF

前束合取范式（举例说明）

$$\forall z \forall x\, \exists y \forall w \left(\left(\neg Q(x,z) \vee P(y) \vee \neg Q(w,y) \right) \wedge \left(\neg P(x) \vee P(y) \vee \neg Q(w,y) \right) \right)$$

$$\forall x \forall y \forall z\, ((\neg B(z,y) \vee \neg F(y,x) \vee U(z,x)) \wedge (\neg F(z,y) \vee \neg F(y,x) \vee G(z,x)))$$

$$\boxed{brother(z,y) \wedge father(y,x) \rightarrow uncle(z,x)}$$

$$\boxed{father(z,y) \wedge father(y,x) \rightarrow grandfather(z,x)}$$

Prolog (Programming in Logic)

- **若z是y的兄弟，且y是x的父亲，则z是x的叔叔。**
  - $brother(z, y) \wedge father(y, x) \rightarrow uncle(z, x)$

$$\boxed{uncle(z, x) \text{ :- } brother(z, y), father(y, x)}$$

- 事实
  - $brother(Klopp, Karl)$
  - $brother(Klinsmann, Karl)$
  - $brother(Karl, Loew)$
  - $father(Karl, Neuer)$
- **查询**：？ $uncle(z, Neuer)$

量词相关的“自然演绎规则”

$$\frac{\forall x\, \phi}{\phi[t/x]}\ \forall x\,\mathrm{e.}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\, \phi}\ \forall x\,\mathrm{i.}$$

$$\frac{\exists x\, \phi \qquad \boxed{\begin{array}{l} x_0 \quad \phi[x_0/x] \\ \quad\vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi}\ \exists\mathrm{e.}$$

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi}\ \exists x\,\mathrm{i.}$$

$\phi[t/x]$的含义：把公式ϕ中自由的x都换成t而得的公式。

基于规则的推理（举例）

- 前提
  - 在这个班上的某个学生没有读过这本书
  - 班上的每个人都通过了第一门考试
- 结论：
  - 通过第一门考试的某个人没有读过这本书

$C(x)$: x在这个班上

$B(x)$: x读过这本书了

$P(x)$: x通过了第一门考试

$\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$

$\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$

$\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

1.		$\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$	前提
2.	u	$C(u) \wedge \neg B(u)$	$\exists$e 1
3.		$C(u)$	$\wedge e_1$ 2
4.		$\neg B(u)$	$\wedge e_2$ 2
5.		$\forall x\,(C(x) \rightarrow P(x))$	前提
6.		$C(u) \rightarrow P(u)$	$\forall$e 5
7.		$P(u)$	$\rightarrow$ e 3,6
8.		$P(u) \wedge \neg B(u)$	$\wedge$i 4,7
9.		$\exists x\,(P(x) \wedge \neg B(x))$	$\exists$i 8
10.		$\exists x\,(P(x) \wedge \neg B(x))$	$\exists$i 1,2-9

一阶谓词逻辑的定论

自然演绎规则（含量词相关的）是正确的、完备的

不可判定的（Undecidable）

No program exists which, given any ϕ, decides whether $\models \phi$

小结

- 常用逻辑等价式
- 前束范式
  - 转化方法
  - 逻辑公式的复杂性
- 基于规则的推理
  - 量词相关的“自然演绎规则”
  - 自然演绎规则的正确性与完备性
- 一阶谓词逻辑的不可判定性及推理复杂性

Q&A