第八章　线性方程组的迭代解法

线性方程组Ax=b的解法可分为直接法和迭代法两大类。当A是大型稀疏矩阵时，常使用迭代解法。

但是迭代法也有缺点,它要求方程组的系数矩阵具有某种特殊性质，以保证迭代过程的收敛性。发散的迭代过程是没有实用价值的。

本章将讨论怎样构造迭代法，分析其收敛性，并给出收敛的判别条件。

方程组迭代法的构造原则

先将方程组$Ax=b$改写为等价的形式：$x=Bx+f$

然后得到迭代格式：$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

B称为迭代矩阵，方程组的不同等价形式可以得到不同的迭代格式，相应的迭代矩阵也不同。

一、Jacobi迭代

例1：

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

准确解 x= $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

从第k个方程中解出x_k，
得到等价的方程组：

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.1x_3 + 1.5 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.4x_2 + 2 \end{cases}$$

构造迭代格式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases} \qquad （*1）$$

在(*1)中， 令k=0, 取 $x_1^{(0)}=0,\ x_2^{(0)}=0,\ x_3^{(0)}=0$ 代入，

得到： $x_1^{(1)}=0.3,\ \ x_2^{(1)}=1.5,\ \ x_3^{(1)}=2$

再令k=1, 代入，得： $x_1^{(2)}=0.8,\ \ x_2^{(2)}=1.76,\ \ x_3^{(2)}=2.66$

再令k=2, 代入，得： $x_1^{(3)}=0.918,\ \ x_2^{(3)}=1.921,\ \ x_3^{(3)}=2.864$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad 0.2x_2^{(k)}+0.1x_3^{(k)}+0.3 \\
x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} \qquad\qquad +0.1x_3^{(k)}+1.5 \\
x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)}+0.4x_2^{(k)} \qquad\qquad +2
\end{cases}
\qquad (*1)
$$

在(*1)中，令k=0, 取 $x_1^{(0)}=0,\ x_2^{(0)}=0,\ x_3^{(0)}=0$ 代入，

得到： $x_1^{(1)}=0.3,\ \ x_2^{(1)}=1.5,\ \ x_3^{(1)}=2$

再令k=1, 代入，得： $x_1^{(2)}=0.8,\ \ x_2^{(2)}=1.76,\ \ x_3^{(2)}=2.66$

再令k=2, 代入，得： $x_1^{(3)}=0.918,\ \ x_2^{(3)}=1.921,\ \ x_3^{(3)}=2.864$

k	$x_1^{(k+1)}$	$x_2^{(k+1)}$	$x_3^{(k+1)}$
3	0.9716	1.97	2.954
4	0.9894	1.98972	2.98232
5	0.996176	1.996112	2.993768
…	……	……	……
8	0.999814032	1.999814544	2.999693216
9	0.999932230	1.999932128	2.999888624
10	0.999975288	1.999975308	2.999959297

迭代格式（*1）：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phantom{0.2x_1^{(k)}} \quad 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} \phantom{+0.4x_2^{(k)}} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} \phantom{+0.1x_3^{(k)}} + 2 \end{cases}$$

称为Jacobi迭代格式

写为矩阵向量形式： $\vec{x}^{(k+1)} = B \cdot \vec{x}^{(k)} + \vec{f}$

其中：

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B称为迭代矩阵

对于一般方程Ax=b，
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写为等价方程组：

（第k个方程中解出x_k）

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \cdots - a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

Jacobi迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

或写为：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}), \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

为讨论Jacobi迭代的收敛性，需将其表示为矩阵向量形式.

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$， A可以分裂为：A=D-L-U

其中 $D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ $L = -\begin{bmatrix} 0 & & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $U = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

A=D-L-U, 方程组Ax=b 可以写为: (D-L-U)x=b

$$Dx=(L+U)x+b$$

$$\Rightarrow \quad x=D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$$

写为迭代格式： $x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$

或 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$

其中: $B=D^{-1}(L+U)$, $f=D^{-1}b$

其分量形式: $$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right),\quad i=1,2,\cdots,n$$

正是Jacobi迭代，B= $D^{-1}(L+U)$ 为Jacobi迭代的迭代矩阵

二、Gauss-Seidel迭代

例2: 将例1中的迭代

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} \qquad\qquad + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} \qquad\qquad + 2 \end{cases} \qquad (*1)$$

改写为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} \qquad\qquad + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} \qquad\qquad + 2 \end{cases} \qquad (*2)$$

(*2)称为 Gauss-Seidel迭代 格式, 特点是每个分量的迭代中, 及时引入分量的新信息.

在(*2)中, 取 $x_1^{(0)}=0,\ x_2^{(0)}=0,\ x_3^{(0)}=0$ 逐次迭代，得

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	0.3	1.56	2.684
2	0.8804	1.94448	2.953872
3	0.9842832	1.9922438	2.9937542
4	0.9978242	1.9989403	2.9991409
5	0.9997021	1.9998545	2.9998822
6	0.9999591	1.99998	2.9999838

本例中, Gauss-Seidel迭代的收敛速度较快.

对于一般方程Ax=b，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

改写为等价方程组：

（第k个方程中解出x_k）

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \cdots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \cdots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

⬇

Gauss-Seidel迭代：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代：

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 \qquad - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \quad \cdots \quad - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\[2ex]
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} \qquad - a_{23}x_3^{(k)} \quad \cdots \quad - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\[2ex]
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} \qquad - a_{34}x_4^{(k)} \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right) \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} \quad \cdots \quad - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} \qquad\right)
\end{cases}
$$

old

new

或写为：$x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$

将Gauss-Seidel迭代表示为矩阵向量形式.

$A=D-L-U$, 方程组$Ax=b$ 可以写为: $(D-L-U)x=b$

$$Dx=(Lx+Ux)+b$$

写为迭代格式: $Dx^{(k+1)}=(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)})+b$

$$(D-L)x^{(k+1)}=Ux^{(k)}+b$$

$$x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$$

或 $$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+f$$

其中: $G=(D-L)^{-1}U$, $f=(D-L)^{-1}b$

G称为Gauss-Seidel迭代的迭代矩阵

求例1中方程组两种迭代的迭代矩阵

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

令A=D-L-U

$$\text{则}: D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意L，U元素的符号

Jacobi迭代:

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel迭代:

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.04 & 0.12 \\ 0 & 0.056 & 0.068 \end{pmatrix}$$

将例1中的方程组按方程②,③,①的次序重排,得:

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 \ -2x_2 + 5x_3 = 10 \\ 10x_1 \ -2x_2 \ -x_3 = 3 \end{cases}$$

按Jacobi迭代格式计算，

$$取 x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 得: x_1 = \begin{pmatrix} -7.5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -31 \\ -8.75 \\ -68 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -85.25 \\ -190.5 \\ -285.5 \end{pmatrix}, \cdots \ 发散$$

需要讨论，在何条件下可保证迭代格式的收敛性。

迭代格式的收敛性

设方程组Ax=b的准确解为x*，迭代格式为：

$$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f \qquad \text{B为迭代矩阵}$$

若迭代产生的序列 $\{x^{(k)}\}$收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \tilde{x}$

对$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 两边求极限，得 $\tilde{x}=B\tilde{x}+f$

而 x=Bx+f 是Ax=b的等价方程组，所以有 $A\tilde{x}=b$ ，

即 $\tilde{x}$ 是方程组Ax=b的准确解。

因此，只要迭代格式收敛，一定收敛到方程组的准确解。

令$\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^{*}$，$\varepsilon^{(k)}$为第$k$次迭代解与准确解的误差。

$$\because \quad x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + f,$$

$$x^{*} = Bx^{*} + f,$$

相减： $\varepsilon^{(k)} = B\varepsilon^{(k-1)}$

递推： $\varepsilon^{(k)} = B\varepsilon^{(k\text{-}1)} = B \cdot B\varepsilon^{(k\text{-}2)} = \cdots = B^{k}\varepsilon^{(0)}$

显然，误差向量$\varepsilon^{(k)} \to 0$ 的充要条件是矩阵

$$B^{k} \to \mathrm{O}, \qquad (k \to \infty)$$

所以，迭代格式的收敛性问题转化为迭代矩阵的幂趋向于O矩阵的问题。

定理. $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = O$ 的充要条件是B的谱半径$\rho(B)<1$.

注意：$\rho(B) = \max\limits_i |\lambda_i(B)|$, 是$B$的按模最大特征值。

推论1 迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$所得序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充要条件是B的谱半径小于1。

推论2 迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$所得序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充分条件是B的任何一种范数$||B||<1$。

证明：若B的某种矩阵范数$||B||<1$, 由第七章性质1,

$\rho(B) \le \|B\| < 1$, 从而迭代格式收敛。

谱半径的性质 $\rho(A)=\max|\lambda(A)|$

谱半径是A的按模最大特征值.

性质1. 设||A||是A的任意一种算子范数，则有：

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

即谱半径是一切矩阵算子范数的下界. 或, A的算子范数是A任一特征值的上界.

证明:设 λ 是A的任一特征值, x为相应特征向量, $Ax=\lambda x$

$$|\lambda|\cdot\|x\| = \|\lambda\cdot x\| = \|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$$

$$\therefore\ |\lambda| \leq \|A\| \to \max|\lambda| \leq \|A\| \to \rho(A) \leq \|A\|$$

迭代格式的收敛速度问题

设迭代矩阵B有n个线性无关特征向量$u_1,u_2,\ldots u_n$相应特征值为 λ_1，$\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 。线性无关向量$u_1,u_2,\ldots u_n$可以作为R^n空间的一组基，任意向量可用$u_1,u_2,\ldots u_n$展开。$\therefore\ \varepsilon^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}c_i u_i$

$$\therefore\ \varepsilon^{(k)}=B^k\varepsilon^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}c_i B^k u_i=\sum_{i=1}^{n}c_i\lambda_i^k u_i$$

$$\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|=\left|\sum_{i=1}^{n}c_i\lambda_i^k u_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot|\lambda_i|^k\cdot\|u_i\|\le\rho^k(B)\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot\|u_i\|$$

$\therefore$ 若$\rho(\mathrm{B})<1$，则$\left\|\varepsilon^{(\mathrm{k})}\right\|\to 0$，迭代收敛。（推论1 的充分性得证）

$\rho(\mathrm{B})<1$越小，$\left\|\varepsilon^{(\mathrm{k})}\right\|$趋于0的速度越快，因此，可用$\rho(\mathrm{B})$衡量收敛速度。

迭代格式的收敛性判别

推论1 迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 所得序列$\{x^{(k)}\}$收敛的充要条件是B的谱半径小于1。

推论2 迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 所得序列{x(k)}收敛的充分条件是B的任何一种范数$\|B\|<1$。

因为 $\rho(B)=\max_i|\lambda_i(B)|$计算困难, 一般先用推论2,

由$\|B\|<1$判别收敛性.

注：只能用推论2判别迭代格式的收敛,
不能用推论2判别迭代格式的发散.

在前面给出的例1中的方程组，两种迭代的迭代矩阵

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

令A=D-L-U

$$\text{则}: D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注意L，U元素的符号

Jacobi迭代:

$$B = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel迭代:

$$G = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.04 & 0.12 \\ 0 & 0.056 & 0.068 \end{pmatrix}$$

Jacobi迭代矩阵为B

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\because \|B\|_1=0.6<1$，$\therefore$ Jacobi迭代收敛。

Gauss-Seidel迭代矩阵为G

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.04 & 0.12 \\ 0 & 0.056 & 0.068 \end{pmatrix}$$

$\because \|G\|_1=0.296<1$，$\therefore$ Gauss-Seidel迭代收敛。

实际上，可以求出：$\rho(B)=0.3646$，$\rho(G)=0.137$

$\rho(G)$较小，收敛速度快。这与算例中，Gauss－Seidel迭代收敛较快相一致。

例3. 方程组 $Ax=b$, $A=\begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 解$x=\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix}$

将方程组写为等价的形式，$x=(I-A)x+b$,

构造迭代格式：$x^{(k+1)} = (I-A)x^{(k)} + b$

迭代矩阵 $B = I - A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$,

求出：$\|B\|_\infty = 1.1 > 1$, $\|B\|_1 = 1.2 > 1$, $\|B\|_F = 1.241 > 1$,

但是不能得出迭代发散的结论。

实际上，B的特征值为0.9，0.8，ρ(B)=0.9<1，迭代是收敛的。但 ρ(B)=0.9较大，收敛较慢。

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_{10} = \begin{bmatrix} 6.51322 \\ 15.07652 \end{bmatrix} \quad x_{25} = \begin{bmatrix} 9.2821 \\ 22.8652 \end{bmatrix} \quad x_{50} = \begin{bmatrix} 9.94846 \\ 24.84546 \end{bmatrix} \quad x_{100} = \begin{bmatrix} 9.99973 \\ 24.9992 \end{bmatrix}$$

由迭代矩阵||B||<1不但可判别收敛性，还可估计迭代的精度。

定理2 设方程组Ax=b的迭代格式$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$，若B的某种矩阵范数$||B||_v<1$，则：

1）迭代法收敛

2）$\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v} \leq \dfrac{\|B\|_{v}}{1-\|B\|_{v}}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_{v}$

3）$\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v} \leq \dfrac{\|B\|_{v}^{k}}{1-\|B\|_{v}}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_{v}$

证明：1）$\rho(B)\le||B||_v<1$，迭代法收敛。

2） $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v} \leq \frac{\|B\|_{v}}{1-\|B\|_{v}}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_{v}$

证 2） $\because x^{(k)}-x^{*}=\left(Bx^{(k-1)}+f\right)-\left(Bx^{*}+f\right)=B\left(x^{(k-1)}-x^{*}\right)$

$$\therefore\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v} \leq\|B\|_{v} \cdot\left\|x^{(k-1)}-x^{*}\right\|_{v}=\|B\|_{v} \cdot\left\|x^{(k-1)}-x^{(k)}+x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v}$$

$$\leq\|B\|_{v} \cdot\left(\left\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\right\|_{v}+\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v}\right)$$

$$\therefore\left(1-\|B\|_{v}\right)\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v} \leq\|B\|_{v} \cdot\left\|x^{(k-1)}-x^{(k)}\right\|_{v}$$

$$\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_{v} \leq \frac{\|B\|_{v}}{1-\|B\|_{v}}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_{v}$$

2)成立.

证 3） $x^{(k)}-x^{(k-1)}=\left(Bx^{(k-1)}+f\right)-\left(Bx^{(k-2)}+f\right)=B\left(x^{(k-1)}-x^{(k-2)}\right)$

$$\therefore \left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|_v \le \|B\|_v \cdot \left\|x^{(k-1)}-x^{(k-2)}\right\|_v \le \|B\|_v^{\,2} \cdot \left\|x^{(k-2)}-x^{(k-3)}\right\|_v$$

递推 $\le \cdots \le \|B\|_v^{\,k-1} \cdot \left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_v$

代入2), 便得到3) $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|_v \le \dfrac{\|B\|_v^k}{1-\|B\|_v}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_v$

注1: 定理2 表示，当$x^{(k)}$与$x^{(k-1)}$充分接近时，

一般， $x^{(k)}$与x^*也充分接近。

因此，可用$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|<\varepsilon$ 作为迭代的停止准则。

注2: 当$\|B\|<1$且充分接近1时，$\dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}$ 很大，

尽管 $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$ 很小，但 $\|x^{(k)}-x^*\|$ 仍然较大，迭代

收敛可能很慢。

例如：方程组 $\begin{cases} 10^6 x_1 - 999999 x_2 = 1 \\ -999999 x_1 + 10^6 x_2 = 1 \end{cases}$ 解 $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jacobi迭代：$\vec{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0.999999 \\ 0.999999 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 10^{-6} \\ 10^{-6} \end{pmatrix}$

取$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$, 得: $x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.100001 \\ 0.100001 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.100002 \\ 0.100002 \end{pmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.100003 \\ 0.100003 \end{pmatrix}$, $\cdots$

此时，$x^{(k)}$ 与 $x^{(k+1)}$ 很接近，$\left\| x^{(3)} - x^{(2)} \right\|_\infty < 10^{-6}$，

但 $x^{(k)}$ 与 x^* 相差很远。原因 $\|B\|_1 = 0.999999$，很接近1

用 $\left\| x^{(k-1)} - x^{(k)} \right\| < \varepsilon$ 作为迭代的停止准则要注意这一点。

Jacobi迭代，Gauss-Seidel迭代的收敛性判别（由A的性质判别）

对方程组Ax=b，考虑由A本身来判别Jacobi迭代, Gauss-Seidel迭代收敛性。

定义1：如果n 阶方阵 A＝$\{a_{ij}\}$满足：

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

即A各行主对角线元素的绝对值大于同行其它元素绝对值之和：则称 A 为严格对角占优。

定义2：如果n 阶方阵 A＝$\{a_{ij}\}$满足：

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

且至少对一个 i 成立不等式，则称 A为 弱对角占优。

定义3（可约与不可约矩阵） 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，当$n\geq 2$时，如果存在$n$阶排列矩阵$P$使得

$$P^T AP=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

成立，其中A_{11}为r阶子矩阵，A_{22}为$n-r$阶子矩阵（$1\leq r\leq n$)，则称A是可约的.如果不存在排列阵P使得上式成立，则称A是不可约的.

A是可约矩阵，意味着$Ax=b$可经过若干行列重排(若A经过两行交换的同时进行相应的两列交换,称对A进行一次行列重排),化为两个低阶方程组求解.

事实上，由$Ax=b$可化为$P^TAP(P^Tx)=P^Tb$,且记

$$y=P^Tx=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, P^Tb=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$其中y_1,d_1为r维向量.

于是，求解$Ax=b$化为求解$\begin{cases} A_{11}y_1+A_{12}y_2=d_1 \\ \qquad\qquad A_{22}y_2=d_2 \end{cases}$

易知，A是可约矩阵的充要条件是存在一个下标的非空子集$J \subset \{1,2,\cdots,n\}$使得

$$a_{kj} = 0, \qquad k \in J, j \notin J.$$

等价的定义：

A＝$\{a_{ij}\}_{nxn}$，设N＝{1,2,…,n}, 若存在集合N的子集I，J 满足 $I \bigcup J = N,\ I \bigcap J = \Phi$， 使得对$i \in$I，$j \in$J的一切$a_{ij}$＝$0$，则称A为可约矩阵，否则称A为不可约。

例子：

$$A=\begin{pmatrix}\times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad P^T AP=\begin{pmatrix}\times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times\end{pmatrix}$$

或： N = {1,2,3,4}，取 I = {2,3}，J = {1,4}，

对任意 $i \in \mathrm{I}$，$j \in \mathrm{J}$，有 $a_{ij}=0$.

因此A是可约矩阵。

定理1. 若A为严格对角占优或不可约弱对角占优矩阵，则A必为非奇异矩阵。

证明：以严格对角占优矩阵为例。

反证法，若A奇异，则$|A|=0$，方程组$Ax=0$有非零解.
记为$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，设$|x_k|=\max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$

考察第k个方程：$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0 \;\rightarrow\; a_{kk}x_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j$

$$|a_{kk}x_k| = \left|\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j\right| \le \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|\cdot|x_j| \le |x_k| \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|$$

$\therefore \; |a_{kk}| \le \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|$，与A严格对角占优矛盾，所以A非奇异

定理2： 设线性方程组Ax=b,若A为严格对角占优或不可约弱对角占优矩阵，则对任意的初值x_0, Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法收敛。

定理3： 设线性方程组Ax=b,若A为对称正定矩阵，则Gauss-Seidel迭代收敛。

证明1.设A严格对角占优，证Jacobi迭代收敛。

$$\because \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad \therefore \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

Jacobi迭代收敛 $\Leftrightarrow \rho(\mathrm{B})<1$，其中$B = D^{-1}(L+U)$

$$B = D^{-1}(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & \cdots & 0 & \cdots & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \qquad \left\|D^{-1}(L+U)\right\|_{\infty} = \max_{i} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

$$\therefore \ \rho(B) = \rho(D^{-1}(L+U)) \leq \left\|D^{-1}(L+U)\right\|_{\infty} < 1$$

因此，Jacobi迭代收敛

证明2.设A不可约弱对角占优, 证G-S迭代收敛。

G-S迭代收敛 $\Leftrightarrow$ $\rho(\mathrm{G})<1$，其中$G=(D-L)^{-1}U$

$\Leftrightarrow$ G的任一特征值λ满足：$|\lambda|<1.$

设λ是G的特征值，则

$$\det(G-\lambda I)=\text{等价于}\det(\lambda D-\lambda L-U)=0$$

$$\left(\begin{aligned}&\det(G-\lambda I)=\det[(D-L)^{-1}U-\lambda I]\\&=\det(D-L)^{-1}\cdot\det[U-\lambda(D-L)]=0\end{aligned}\right)$$

若|λ|≥1是G的特征值，因A=D-L-U不可约弱对角占优则 $\lambda D-\lambda L-U$ 也是不可约弱对角占优。

由定理1，$\lambda D-\lambda L-U$ 非奇异，

$\det(\lambda D-\lambda L-U)\neq 0,\quad \therefore\ \det(G-\lambda I)\neq 0$

因此任意|λ|≥1的λ，都不是G的特征值。

$\therefore\ G$没有$|\lambda|\geq 1$的特征值，$\therefore\ \rho(\mathrm{G})=\max\limits_{j}|\lambda_j|<1$

于是，Gauss-Seidel迭代收敛。

注1：对不满足定理2的矩阵A，J迭代和G-S迭代的收敛可能不一致。

如，$A_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, J迭代收敛, G-S迭代不收敛。

$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, G-S迭代收敛，J迭代不收敛。

注2：两者都收敛时，并不总是G-S迭代的收敛速度快于J迭代的收敛速度.

三、超松驰迭代法

为加快迭代法的收敛速度，考察Gauss-Seidel迭代：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)$$

$$= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

第k+1次的迭代值可以看成是第k次迭代值加修正项.
为加速收敛，对修正项乘以调节因子ω：

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ω称为松弛因子，可通过改变ω的值加速收敛。

方法称为逐次超松弛迭代法，简称为SOR迭代法.

ω<1，为低松弛迭代法； ω>1, 为超松弛迭代法。

ω＝1为 Gauss-Seidel迭代。

算法：
$$\begin{cases} y_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1,2,\cdots,n \\ x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(y_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) \end{cases}$$

$$\because \quad x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(y_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega y_i^{(k+1)}$$

$\therefore$ $x_i^{(k+1)}$是 $x_i^{(k)}$与$y_i^{(k+1)}$的加权平均。

求出SOR方法的迭代矩阵

令 A=D-L-U，则

$Dx^{(k+1)}= \omega(b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)})+(1-\omega)Dx^{(k)}$

$(D-\omega L)x^{(k+1)}=[(1-\omega)D+\omega U]x^{(k)})+\omega b$

所以，SOR方法的迭代矩阵为：

$L = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$

SOR格式：$x^{(k+1)}=Lx^{(k)}+f$

其中， $f=\omega(D-\omega L)^{-1}b$

对于方程组Ax=b $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

同样的精度，用Jacobi迭代法, 需要1154次.（ $\rho(B_J)=0.9877$ ）

用G-S迭代法, 需要578次。

用SOR方法

ω	1	1.7	1.72	1.737	1.74
次数	578	78	66	54	57

定理：SOR方法收敛的必要条件是：$0<\omega<2$.

证明：SOR迭代阵 $L = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$

$\det(L)=\det(D-\omega L)^{-1}\det[(1-\omega)D+\omega U]$

$(D-\omega L)^{-1}$为下三角阵，主对角元 为$1/a_{11}, \ldots, 1/a_{nn}$

$[(1-\omega)D+\omega U]$为上三角阵，主对角元为：

$(1-\omega)a_{11}$， … ， $(1-\omega)a_{nn}$

所以，$\det(L)= (1-\omega)^n$

若SOR方法收敛，则 $\rho(L)<1$ 设L的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$

则 $|\det(L)|=|\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n|\le|\rho(L)|^n<1$

$\therefore\ |(1-\omega)^n|<1, \quad \therefore\ |1-\omega|<1,$ 得$0<\omega<2.$

定理：若A是对称正定矩阵，则SOR方法收敛的充要条件是$0<\omega<2$.

因此在迭代法的收敛性分析中，各种方法的迭代矩阵的性态起着重要的作用：

设 $A = -L + D - U = [a_{ij}]_{n\times n}$， 其中

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{Jacobi} = D^{-1}(L+U); \qquad B_{G-S} = (D-L)^{-1}U;$$

$$B_{SOR} = (D-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)D+\omega U\}$$

当A为n阶对称正定矩阵，讨论另一种迭代方法—共轭斜量法（*Conjugate Gradient Method*，简称CG方法).我们要解的问题是：$Ax=b$,则有下列CG算法：

算法 选定初值$x_0\in R^n$和阈值$\varepsilon\succ 0$,设$r_0=d_0=b-Ax_0$,

对$k=1,2,\cdots,$计算

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k d_k,\qquad \alpha_k=(r_k,r_k)/(d_k,Ad_k);$$

$$r_{k+1}=r_k-\alpha_k Ad_k,\qquad d_{k+1}=r_{k+1}+\beta_k d_k,$$

$$\beta_k=(r_{k+1},r_{k+1})/(r_k,r_k).$$

（•,•）为R^n中的内积,$(x,y)=x^T y$

上面给出的共轭斜量算法有如下性质：

1.如果对$1 \le k \le n-1, r_0, r_1, \cdots, r_k$均不为零，则$d_0, d_1, \cdots, d_k$亦不为零，从而$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$与$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{k-1}$都不为零.并且对$0 \le j < i \le k$有

$$(r_i, r_j) = 0, \qquad (r_i, d_j) = 0, \qquad (d_i, Ad_j) = 0.$$

2.共轭斜量法程序简单, 存储需要量小, 每次迭代仅需保留向量x, r, d, Ad;每次迭代的主要工作量是一次矩阵乘向量Ad,特别适合求解大型稀疏问题.

数例 下面是一个14*14的矩阵

a1 =

3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000
-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0
0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0	0
0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0.5000	0	0	0
0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0.5000	0	0	0	0
0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0.5000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.5000	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0	0.5000	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0	0
0	0	0	0.5000	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0	0
0	0	0.5000	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000	0
0	0.5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000	-1.0000
0.5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.0000	3.0000

由LU分解得到的下三角矩阵L

L =

1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.3333	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.3750	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.3810	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.3818	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.3819	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-0.3820	1.0000	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.3820	1.0000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.1910	0.0729	-0.3541	1.0000	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.1910	0.0729	0.0279	0.0106	-0.4027	1.0000	0	0	0	0
0	0	0	0.1909	0.0729	0.0279	0.0106	0.0041	-0.0048	-0.4237	1.0000	0	0	0
0	0	0.1905	0.0727	0.0278	0.0106	0.0041	0.0015	-0.0018	-0.0073	-0.4297	1.0000	0	0
0	0.1875	0.0714	0.0273	0.0104	0.0040	0.0015	0.0006	-0.0007	-0.0027	-0.0077	-0.4308	1.0000	0
0.1667	0.0625	0.0238	0.0091	0.0035	0.0013	0.0005	0.0002	-0.0002	-0.0009	-0.0026	-0.0068	-0.4281	1.0000

由LU分解得到的上三角矩阵U

U =

3.0000	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000
0	2.6667	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0.1667
0	0	2.6250	-1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0.5000	0.1875	0.0625
0	0	0	2.6190	-1.0000	0	0	0	0	0	0.5000	0.1905	0.0714	0.0238
0	0	0	0	2.6182	-1.0000	0	0	0	0.5000	0.1909	0.0727	0.0273	0.0091
0	0	0	0	0	2.6181	-1.0000	0	0.5000	0.1910	0.0729	0.0278	0.0104	0.0035
0	0	0	0	0	0	2.6180	-1.0000	0.1910	0.0729	0.0279	0.0106	0.0040	0.0013
0	0	0	0	0	0	0	2.6180	-0.9271	0.0279	0.0106	0.0041	0.0015	0.0005
0	0	0	0	0	0	0	0	2.5623	-1.0319	-0.0122	-0.0046	-0.0017	-0.0006
0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4727	-1.0476	-0.0181	-0.0068	-0.0023
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4444	-1.0503	-0.0189	-0.0063
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4371	-1.0499	-0.0166
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4381	-1.0437
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.4576

将上述形式的矩阵扩展到高阶的矩阵，用*Matlab*的*LU*分解软件进行*LU*分解，用*CPU*时间如下（秒）：

500阶	1000阶	1500阶	2000阶	2008阶	2500阶	3000阶
0.0470	0.3130	1.1250	5.9840	6.0940	14.8750	27.9220

取精确解*X*的分量都为1，取初始值为0，用共轭斜量法进行计算：

3000阶，精确度为10^{-16}，*cpu*时间0.0620秒

100万阶，精确度为10^{-16}，*cpu*时间15.8910秒

300万阶，精确度为10^{-16}，*cpu*时间28.4380秒