《概率论与数理统计》期末试卷

2022/2023 学年第一学期 院系________________

学号__________________姓名______________ 考试成绩__________

题号	一40分	二12分	三12分	四12分	五12分	六12分	总分
得分							

$\Phi(1) = 0.8413, \Phi(1.5) = 0.9332, t_{0.025}(15) = 2.132, t_{0.025}(16) = 2.120$

$\chi^2_{0.025}(24) = 39.364, \chi^2_{0.975}(24) = 12.401, \chi^2_{0.025}(25) = 40.646, \chi^2_{0.975}(25) = 13.120$

一. 简答题(8×5分）

1. 在(0,1)上任取两数，求两数之积小于0.5的概率。

解：$P = 1 - \int\limits_{0.5}^{1} dx \int\limits_{1/2x}^{1} dy = 0.5 + 0.5 \ln 2$

2.设X为随机变量，服从$(-1,2)$上的均匀分布，求X^2的概率密度函数。

解：

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{y}} & 0 < y \le 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{y}} & 1 < y < 2 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

3. 设随机变量X, Y的相关系数为0.5，$DX = 9, DY = 16$，求$D(X - Y)$

解：$cov(X,Y) = \sqrt{DXDY}\rho_{XY} = 6$

$D(X - Y) = DX + DY - 2cov(X,Y) = 13$

4. 设计算机进行加法运算时，误差相互独立，均服从$N(-0.5,0.5)$的均匀分布。若将1200个数相加，求误差总和的均对值大于15的概率。

解：$P(|\sum\limits_{i=1}^{1200} X_i| > 15) = P(|\frac{\sum\limits_{i=1}^{1200} X_i - 0}{100}| > \frac{15-0}{100}) = 2(1-\Phi(1.5)) = 0.1336$。

5. 设总体$X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$，其中$\sigma_0$是已知常数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，样本均值记为$\overline{X}$，试写出总体均值$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间？

解：$[\overline{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}]$。

二. (12分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} k(x^2+y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x^2 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).$P(0 < X < \frac{1}{3})$；(3).X, Y的边缘密度。

解：1).$k = \frac{5}{4}$;

2).$P(0 < X < \frac{1}{3}) = \int\limits_0^{1/3} dx \int\limits_0^{1-x^2} \frac{5}{4}(x^2+y)dy = \frac{67}{324}$

3).

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{5}{8}(1-x^4) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{4}[\frac{2}{3}(1-y)^{3/2} + 2y(1-y)^{1/2}] & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

三. (12 分) 设总体X服从正态分布$N(1,4)$，总体Y服从正态分布$N(1,2)$，而$X_1,X_2,\cdots,X_4$及Y_1,Y_2分别来自总体X,Y的简单随机样本，且相互独立。它们的样本均值记为$\overline{X},\overline{Y}$，样本方差记为$S_1^2,S_2^2$。求$\frac{2(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{3}{2}S_1^2+S_2^2}}$的分布。

解：

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\frac{3S_1^2}{4}\sim\chi^2(3),\frac{S_2^2}{2}\sim\chi^2(1)$$

$$\frac{2(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{\frac{3}{2}S_1^2+S_2^2}}=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})/\sqrt{2}}{\sqrt{[\frac{3}{4}S_1^2+\frac{1}{2}S_2^2]/4}}\sim t(4)$$

四. (12分) 设随机变量X的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^\theta} & x>1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

其中未知参数$\theta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体的简单随机样本，求θ的矩估计和极大似然估计。

解：

$$EX=\int_1^{+\infty}xp(x)dx=\frac{\theta}{\theta-1}$$

$$\theta=\frac{EX}{EX-1}$$

$$\widehat{\theta}_1=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$$

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

$$\widehat{\theta}_2=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$$

五. (12分) 考察某个单位成年男性的胆固醇水平，抽取了样本容量为25的一组样本，测得样本标准差S为12。假设胆固醇水平X服从$N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，求方差σ^2的置信水平为0.95的置信区间。

解：置信区间$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = \left(\frac{24*144}{39.364}, \frac{24*144}{12.401}\right)$

六. (12 分) 设某厂生产的灯泡寿命服从正态分布，从中抽取16个灯泡,测得样本均值$\overline{X}$为940小时,样本标准差S为120小时.试在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验整批灯泡的寿命是否为1000小时?

解：$T = \frac{|\overline{X}-1000|}{S/\sqrt{16}} = 2 < t_{0.025}(15) = 2.132$ 是1000小时。