一． 简答题：（6x6）

1） 两个相互独立的随机事件 A 和 B 至少发生一个的概率为 8/9，事件 A 发生而 B 不发生的概率为 5/9，试求 P(A).

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=8/9$ ①

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=5/9$ ②

①－②： $P(B)=\frac{1}{3}$

$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})$

$\therefore P(A)=\frac{P(A-B)}{P(\bar{B})}=\frac{5/9}{1-1/3}=\frac{5}{6}$

或： $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$， $\frac{P(A)}{P(\bar{A})}=\frac{P(A)P(\bar{B})}{P(\bar{A})P(\bar{B})}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{A}\bar{B})}=\frac{5/9}{1/9}=5$， $\therefore P(A)=\frac{5}{6}$

2） 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3，且 $EX=2.3$, $EX^2=5.9$，求 X 的概率分布列。

设分布律：

X	1	2	3
p	a	b	c

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=1 \\ a+2b+3c=EX=2.3 \\ a+4b+9c=EX^2=5.9 \end{cases}$$

解得 $a=0.2$, $b=0.3$, $c=0.5$

$\therefore$

X	1	2	3
p	0.2	0.3	0.5

3） 设总体 X 服从泊松分布：$P(X=k)=\frac{1}{k!}e^{-1}$, $k=0,1,2,\cdots$. 从总体中抽取容量为 100 的简单随机样本 X_1，X_2，…，X_{100}，用中心极限定理求概率 $P(X_1+X_2+\ldots+X_{100}<120)$.

$X_i \sim P(1)$, $\therefore EX_i=1$, $DX_i=1$

$\therefore E(\sum_1^{100} X_i)=100$, $D(\sum_1^{100} X_i)=100$

$\therefore \sum_1^{100} X_i \overset{近似}{\sim} N(100,100)$

$P(\sum_1^{100} X_i<120)=P\left(\frac{\sum_1^{100} X_i-100}{\sqrt{100}} \leq \frac{120-100}{\sqrt{100}}\right)$

$=\Phi(2)=0.9773$

4） 设总体 X~N(μ, 4), 从 X 中抽取容量 n 的样本 $X_1, X_2, \ldots X_n$，样本均值 $\bar{X}$，问 n 至少取多少时，才能以 90%的概率保证样本均值与总体均值 μ 之差的绝对值小于 0.1.

$X \sim N(\mu,4)$, $\bar{X} \sim N(\mu,\frac{4}{n})$, $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{4/n}} \sim N(0,1)$

令 $P(|\bar{X}-\mu|<0.1)=P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{4/n}}\right|<\frac{0.1}{\sqrt{4/n}}\right)=2\Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{4/n}}\right)-1=0.9$

$\therefore \Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right)=0.95$, $\therefore \frac{0.1}{2/\sqrt{n}}=1.65 \rightarrow n=33^2=1089$

5） 设 $X_1, X_2, \ldots, X_9$ 是取自总体 $X\sim N(0,2)$ 的样本，求常数 a, b, c，使 $Z=a(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)^2+b(X_5+5X_6+X_7)^2+c(3X_8+4X_9)^2$ 服从 χ^2 分布，并指出其自由度.

$X_1+2X_2+3X_3+4X_4 \sim N(0,60)$

$X_5+5X_6+X_7 \sim N(0,54)$

$3X_8+4X_9 \sim N(0,50)$

$\therefore Z_1=\frac{1}{\sqrt{60}}(X_1+2X_2+3X_3+4X_4)\sim N(0,1)$

$Z_2=\frac{1}{\sqrt{54}}(X_5+5X_6+X_7)\sim N(0,1)$

$Z_3=\frac{1}{\sqrt{50}}(3X_8+4X_9)\sim N(0,1)$

$\therefore Z=Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2\sim\chi^2(3)$

$\therefore a=\frac{1}{60},\ b=\frac{1}{54},\ c=\frac{1}{50}$

自由度为3.

6） 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，从 X 中抽取 5 个样本: 15, 19, 15, 18, 13，求 μ 的置信度 0.95 的置信区间。

μ的置信区间: $\left(\overline{X}-\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$ $S_{n-1}=\sqrt{6}=2.449$

由样本: $\overline{X}=16,\ S_n^2=\frac{1}{5}(1^2+3^2+1^2+2^2+3^2)=4.8,\ S_n=2.191,\ t_{0.025}(4)=2.776$

$\therefore$ 所求为: $\left(16-\frac{2.191}{\sqrt{4}}\cdot 2.776,\ 16+\frac{2.191}{\sqrt{4}}\times 2.776\right)=(12.96, 19.04)$

二. 已知甲乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件正品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件正品。现从甲箱任取 3 件产品放入乙箱，再从乙箱任取 1 件，发现是次品. 问前面从甲箱中取出放入乙箱的 3 件产品中，有 1 件，2 件和 3 件次品三种情况中，那一种可能性最大？

设从甲箱取出3件产品中含有K件次品的事件为A_K $(K=0,1,2,3)$

则 $P(A_K)=\dfrac{C_3^K C_3^{3-K}}{C_6^3}$ $(K=0,1,2,3)$ ∴

i	0	1	2	3
$P(A_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

设B为从乙箱取出一件是次品的事件.

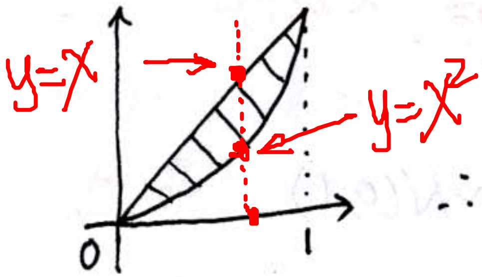
$P(B|A_0)=0$, $P(B|A_1)=\frac{1}{6}$, $P(B|A_2)=\frac{2}{6}$, $P(B|A_3)=\frac{3}{6}$

$\therefore P(B)=\sum_{K=0}^{3}P(A_K)P(B|A_K)=\frac{1}{4}$

$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{10}$, $P(A_2|B)=\frac{6}{10}$, $P(A_3|B)=\frac{1}{10}$

∴ 甲箱取出3件中有2件次品可能性最大.

三．　设二维随机变量（X，Y）在平面区域 D 上服从均匀分布，其中 D 是抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 在第一象限所围的有界闭区域，（1）求 X, Y 的边缘密度，(2）求 D(X)，E(XY).



$$S=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ p(x,y)=\begin{cases}6 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

(1) $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\int_{x^2}^{x}6\,dy=6x-6x^2$ $\quad(0\le x\le 1)$

$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dx=\int_{y}^{\sqrt{y}}6\,dx=6\sqrt{y}-6y$ $\quad(0\le y\le 1)$

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,p_X(x)\,dx=\int_0^1 6x(x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 p_X(x)\,dx=\int_0^1 6x^2(x-x^2)\,dx=\frac{3}{10}$

$\therefore\ DX=EX^2-(EX)^2=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

$E(XY)=\iint_D xy\,p(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}6xy\,dy=\frac{1}{4}$

四. 某保险公司开办车辆盗窃险，有5000辆车参保. 若一年内整车被盗，赔偿2万元. 设每辆车一年内被盗的概率为 0.004，且各车是否被盗是独立的. (1) 若每车每年交保费 300 元，求保险公司盈利超过 100 万元的概率. (2) 若保险公司希望每年盈利超过 120 万元的概率达到 90%，问保险公司应要求每车每年交保费多少元? (用中心极限定理求解).

设每年有X辆车被盗，则 $X \sim B(5000, 0.004)$. $EX=20$, $DX=19.92$ $X \overset{近}{\sim} N(20, 19.92)$

由中心极限定理: $\frac{X-20}{\sqrt{19.92}} \overset{近似}{\sim} N(0,1)$

(1) 盈利 >100万 $\Leftrightarrow X<25$

$P(X<25)=P\left(\frac{X-20}{\sqrt{19.92}}<\frac{25-20}{\sqrt{19.92}}\right)=\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{19.92}}\right)=\Phi(1.12)=0.8686$

(2) 设每车每年应交保费 y 万元，则盈利 $=5000y-2X$

令 $P(5000y-2X>120)=0.9$

即 $P(X<2500y-60)=P\left(\frac{X-20}{\sqrt{19.92}}<\frac{2500y-80}{\sqrt{19.92}}\right)=\Phi\left(\frac{2500y-80}{\sqrt{19.92}}\right)=0.9$

$\Phi(1.28)=0.9$, $\therefore \frac{2500y-80}{\sqrt{19.92}}=1.28$

解之 $y=0.034285$ (万元)

$\therefore$ 每年应交 343元.

五. 设总体 X~N(1, 5), Y~N(2, 8)且 X,Y 独立，X_1, X_2 及 $Y_1, \ldots, Y_9$ 是 X, Y 的样本，求常数 C_1，使

$$C_1 \cdot \frac{(X_1-1)^2+(X_2-1)^2}{\sum_{k=1}^{9}(Y_k-2)^2}$$ 服从 F 分布.

解: $X_k \sim N(1,5)$, $\therefore \frac{X_k-1}{\sqrt{5}} \sim N(0,1)$, 同理 $\frac{Y_k-2}{\sqrt{8}} \sim N(0,1)$

$\left(\frac{X_1-1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{X_2-1}{\sqrt{5}}\right)^2 \sim \chi^2(2)$, $\sum_1^9\left(\frac{Y_k-2}{\sqrt{8}}\right)^2 \sim \chi^2(9)$

$$\therefore \frac{\left(\left[\frac{X_1-1}{\sqrt{5}}\right]^2+\left[\frac{X_2-1}{\sqrt{5}}\right]^2\right)/2}{\sum_1^9\left(\frac{Y_k-2}{\sqrt{8}}\right)^2/9} = \frac{36}{5}\frac{(X_1-1)^2+(X_2-1)^2}{\sum_1^9(Y_k-2)^2} \sim F(2,9)$$

$$\therefore C = \frac{36}{5}$$

六. 设总体 X 的概率密度函数为 $p(x,\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}} & -\infty<\theta_1\leq x<+\infty\\ 0 & 其它\end{cases}$，$(\theta_2>0)$.

若 $X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本，求未知参数 θ_1，θ_2 的矩估计量和极大似然估计量。

矩估计: $EX=\int_{\theta_1}^{+\infty}\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\cdot x\,dx=\theta_1+\theta_2$ ①

$EX^2=\int_{\theta_1}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}dx=\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2=(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_2^2$ ②

①代入②: $\theta_2^2=EX^2-(EX)^2$, $\therefore\hat{\theta}_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^2-\overline{X}^2}$

由① $\theta_1=EX-\theta_2$, $\therefore\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum X_i^2-\overline{X}^2}$ 为矩估计量.

极大似然估计:

$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^n p(x_i,\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\theta_2^n}e^{-\sum_1^n\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}}$ $(x_1\geq\theta_1,\cdots,x_n\geq\theta_1)$

$\ln L(\theta_1,\theta_2)=-n\ln\theta_2-\sum_{i=1}^n\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}$

$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=\dfrac{n}{\theta_2}>0 & ①\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_2}=-\dfrac{n}{\theta_2}+\dfrac{1}{\theta_2^2}\sum_1^n(x_i-\theta_1) & ②\end{cases}$

由① L关于θ_1上升, θ_1越大, L越大

但$\theta_1\leq x_1,\cdots,\theta_1\leq x_n$

$\therefore$ 取 $\hat{\theta}_1=\min\{x_i\}$

由②: $\theta_2=\frac{1}{n}\sum_1^n(x_i-\theta_1)=\frac{1}{n}\sum x_i-\theta_1$, 取 $\hat{\theta}_2=\overline{X}-\hat{\theta}_1=\overline{X}-\min\{x_i\}$

七. 机器包装产品，假设每包重量服从正态分布，要求每袋标准重量为 100 克，方差不能超过 4 克。某天开机后，随机抽取 n=10 袋，测得平均重量为 99.89 克，样本标准差 $S_{n-1}=0.975$ 克，试检验包装机的标准重量和方差是否合格？（取 $\alpha=0.05$）

解：设每包重量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，由题意检验 μ 与 σ^2.

(1) 检验均值 μ，$H_0: \mu=100$，$H_1: \mu\neq 100$

H_0 成立时，$T=\dfrac{\overline{X}-100}{S_{n-1}/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域：$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(9)=2.262$，$\therefore |\tilde{T}|\geq 2.262$

$\because \bar{x}=99.89$，$S_{n-1}=0.975$

$\therefore |\tilde{T}|=\left|\dfrac{99.89-100}{0.975/\sqrt{10}}\right|=|-0.357|<2.262$，$\therefore$ 接受 H_0

(2) 检验方差 σ^2，$H_0: \sigma^2=4$，$H_1: \sigma^2>4$

H_0 成立时，$\chi^2=\dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{4}\sim\chi^2(n-1)$

$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\therefore$ 拒绝域 $\tilde{\chi}^2\geq 16.919$

$\tilde{\chi}^2=\dfrac{9\times 0.975^2}{4}=2.139<16.919$，$\therefore$ 接受 H_0

综合 (1), (2) 包装机合格

查表：$\Phi(1.12)=0.8686$, $\Phi(1.28)=0.9$, $\Phi(1.65)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.9773$, $t_{0.025}(4)=2.776$, $t_{0.05}(4)=2.1318$, $t_{0.025}(9)=2.262$, $t_{0.05}(9)=1.833$, $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$, $\chi^2_{0.025}(10)=20.483$