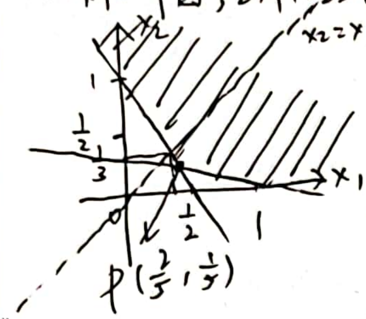
221900180 田永铭 凸优化作业4

4.1. 解：作图，$2x_1+x_2\geq1$, $x_1+3x_2\geq1$, $x_1\geq0$, $x_2\geq0$ 表示的可行域是：



(a) 令 $f_0(x_1,x_2)=x_1+x_2=t$，即 $x_2=-x_1+t$（一条平行直线）

易知：交点P若在直线上，t最小.

$\therefore x^*=(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$，$p^*=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

(b) 同(a)理：$x_2=-x_1+t$，此时 $t\to-\infty$ 时，可以与可行域有交集.

$\therefore$ 该问题无下界，最优值为 $-\infty$.

(c) $f_0(x_1,x_2)=x_1$，为了最小化 x_1，即令直线 $x=x_1$ 与可行域交点且 x_1 最小，即 $x_1=0$.

$\therefore X_{opt}=\{(0,x_2)\mid x_2\geq1\}$，$p^*=0$.

(d) 作直线 $x_2=x_1$. ①则在该直线下方，$f_0(x_1,x_2)=x_1$；②否则，$f_0(x_1,x_2)=x_2$. $\begin{cases}x_2=x_1\\2x_1+x_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\x_2=\frac{1}{3}\end{cases}$

①：$x_1(\min)=\frac{1}{3}$. ②：$x_{2\min}=\frac{1}{3}$.

$\therefore x^*=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，$p^*=\frac{1}{3}$.

(e) ①若最优值在内部：$f_0(x_1,x_2)=x_1^2+9x_2^2$，令 $\begin{cases}\frac{\partial f_0}{\partial x_1}=2x_1=0,\\\frac{\partial f_0}{\partial x_2}=18x_2=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x_1=0,\\x_2=0,\end{cases}$ 但(0,0)不在可行集内.

②若在 $2x_1+x_2=1$ 边界上.

令 $f(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+9x_2^2+\lambda(2x_1+x_2-1)$. 令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+2\lambda=0,\\\frac{\partial f}{\partial x_2}=18x_2+\lambda=0,\\\frac{\partial f}{\partial\lambda}=2x_1+x_2-1=0.\end{cases}$ 得 $(x_1,x_2)=(\frac{18}{37},\frac{1}{37})$. 不符 $x_1+3x_2\geq1$.

③若在 $x_1+3x_2=1$ 边界上.

令 $f(x_1,x_2,\mu)=x_1^2+9x_2^2+\mu(x_1+3x_2-1)$.

令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+\mu=0,\\\frac{\partial f}{\partial x_2}=18x_2+3\mu=0\\\frac{\partial f}{\partial\mu}=x_1+3x_2-1=0.\end{cases}$ $\therefore(x_1,x_2)=(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$. 符合. 且为min.

④∵在 $2x_1+x_2=1$ 边界上即不可，∴不可能在 $2x_1+x_2=1$ 和 $x_1+3x_2\geq1$ 交的边界.

综上：③成立：$x^*=(\frac{1}{2},\frac{1}{6})$，$p^*=\frac{1}{2}$.

4.3 证明：只需证 $\nabla f(x^*)^T(y-x^*)\geq0$ (*) for any $y\in X$ 定义域 即可.

$\nabla f(x)=Px+q$.

~~$\therefore \nabla f(x^*)^T(y-x^*)$~~ $\cancel{\begin{bmatrix}13&12&-2\\12&17&6\\-2&6&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}}$

$\therefore\nabla f(x^*)=\begin{bmatrix}13&12&-2\\12&17&6\\-2&6&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-22\\-14.5\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21\\14.5\\-11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-22\\-14.5\\13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$.

$\therefore\nabla f(x^*)^T(y-x^*)=\begin{bmatrix}-1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-1\\y_2-\frac{1}{2}\\y_3+1\end{bmatrix}=1-y_1+2y_3+2=3-y_1+2y_3$.

又∵ $y_i\in[-1,1]$，$i=1,2,3$，$\therefore 3-y_1+2y_3\geq3-1-2=0$.

∴(*)成立. ∴证毕.

4.9 正方LP (方阵且满秩) minimize $c^TA^{-1}y$ subject to $y\preceq b$.

证明：令 $y=Ax$，∴原题⟺ minimize $c^TA^{-1}y$ subject to $y\preceq b$.

① 若 $A^{-T}c\preceq 0$，即 $(c^TA^{-1})^T\preceq 0$，~~则y可取~~ $c^TA^{-1}y$ 关于 y 为仿射函数(单调减)，

∴ $(c^TA^{-1}y)_{min}=c^TA^{-1}b$.

② 若 $A^{-T}c\succ 0$，则 $y\to-\infty$ 时，$c^TA^{-1}y\to-\infty$，无下界.

∴ 其最优值由 $p^*=\begin{cases} c^TA^{-1}b, & A^{-T}c\preceq 0 \\ -\infty, & \text{otherwise}\end{cases}$ 给出.

4.12 解：由题意得：该问题可建模为：

minimize $C=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

~~subject to $b_i+\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-\sum_{j=1}^{n}x_{ji}$, $i=1,2,3\cdots n$~~

subject to $b_i+\sum_{j=1}^{n}x_{ji}-\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=0\quad i=1,2,3\cdots n$

$l_{ij}\le x_{ij}\le u_{ij}$.

其中：C为凸函数(仿射)，不等式约数为凸函数("矩形约束")，
等式约束为仿射，符合LP定义.

4.13 解：观察知：$Ax\preceq b$ 条件在 $A\in\mathcal{A}$，$\mathcal{A}=\{A\in R^{m\times n}\mid \bar{a}_{ij}-v_{ij}\le a_{ij}\le \bar{a}_{ij}+v_{ij}\}$
的条件下，~~等价于~~ 只需求解 $\bar{A}x+Vz\preceq b$，$z=(|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|)$.

~~又令若 $y=|t|$，则⟺ $-y\le t\le y$~~

∴问题可表示为： minimize c^Tx

subject to $\bar{A}x+Vy\preceq b$

$-y\preceq x\preceq y$

∴为LP，构造完毕.

检查：c^Tx为仿射凸函数，不等式约束为n个半空间交，为凸集，∴为LP，构造完毕.

4.19 证明：

(a) 不等式约束为范数不等式，是凸函数；$c^Tx+d>0$ 形成的是凸集.

只需证 $\frac{\|Ax-b\|_1}{c^Tx+d}$ 为拟凸函数.

其subset为 $\{x\mid \frac{\|Ax-b\|_1}{c^Tx+d}\le\alpha\}$，~~即{x|~~ ∵ $c^Tx+d>0$，∴即 $\{x\mid \|Ax-b\|_1\le\alpha(c^Tx+d)\}$.

~~其为~~ 其不等式约束为 $\|u\|_1\le\alpha v$ 在 $u=Ax-b$，$v=c^Tx+d$ 下的仿射变换.

又∵范数为凸集函数，αv 仿射函数为凸函数，∴ $\|u\|_1\le\alpha v$ 为凸的约束.
形成的(必是)凸集. ∴得证.

221900180 田永锐 凸优化作业4 ②

4.19(b) ①设 x 在前一个问题中可解，令 $y=\frac{x}{c^Tx+d}$, $t=\frac{1}{c^Tx+d}$.

则 $\|x\|_\infty \le 1 \Leftrightarrow \|\frac{y}{t}\|_\infty \le 1 \Leftrightarrow \|y\|_\infty \le \|t\|_\infty \Leftrightarrow \|y\|_\infty \le t$.

$\frac{\|Ax-b\|_1}{c^Tx+d} \Leftrightarrow t\|A\frac{y}{t}-b\|_1 \Leftrightarrow \|Ay-bt\|_1$.

同时有: $c^Ty+dt=\frac{c^Tx}{c^Tx+d}+\frac{d}{c^Tx+d}=1$.

$y\in R^n, t\in R$.

②设 y,t 在后一个问题中可解，则 $t>0$，否则 $y=0$，与 $c^Ty+dt=1$ 矛盾. 令 $x=\frac{y}{t}$，∴ $\|x\|_\infty=\frac{\|y\|_\infty}{\|t\|_\infty}\le 1$,

$c^Tx+d=\frac{1}{t}$,

$\frac{\|Ax-b\|_1}{c^Tx+d}=\|Ay-bt\|_1$.

∴原问题等价于

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && \|Ay-bt\|_1\\ &\text{subject to} && \|y\|_\infty \le t\\ &&& c^Ty+dt=1\end{aligned}$$

$(y\in R^n, t\in R)$.

这是一个凸优化问题. ∴得证.

4.23 令 $z_i=(a_i^Tx-b_i)^2$.

∴ $\|Ax-b\|_4=(\sum_{i=1}^m z_i^2)^{\frac14}$ 开次方对问题无实质影响，可删去.

规范化后为:

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && \sum_{i=1}^m z_i^2\\ &\text{subject to} && a_i^Tx-b_i=y_i,\quad i=1,2,3\cdots m\\ &&& y_i^2-z_i\le 0,\quad i=1,2,3\cdots m.\end{aligned}$$

其目标函数为凸函数，等式限制为仿射，不等式约束为 $y_i^2-z_i\le 0$ 是凸二次型.

∴为QCQP.

∴建模成立.

4.33 化为凸问题（此题课上未讲过GP，有参考）

解:(a) $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && t\\ &\text{subject to} && \frac{p(x)}{t}\le 1,\ \frac{q(x)}{t}\le 1\end{aligned}$$

这是一个几何规划问题. 令 $y_i=\log x_i$ 可转化为凸形式的几何规划.

(b) $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && e^{t_1}+e^{t_2}\\ &\text{subject to} && \frac{p(x)}{t_1}\le 1,\ \frac{q(x)}{t_2}\le 1.\end{aligned}$$

令 $y_i=\log x_i$. 可化为GP.

(c) 令 $\frac{p(x)}{r(x)-q(x)}\le t$，∴ $p(x)\le t(r(x)-q(x))$ (∵ $r(x)>q(x)$),

∴ $p(x)+tq(x)\le t\,r(x)$，∴ $\frac{p(x)+tq(x)}{t\,r(x)}\le 1$.

∴ $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} && t\\ &\text{subject to} && \frac{\frac{p(x)}{t}+q(x)}{r(x)}\le 1.\end{aligned}$$

令 $y_i=\log x_i$，同理∴为GP.