南京大學
NANJING UNIVERSITY

人工智能导论

不确定性

郭兰哲

南京大学 智能科学与技术学院

Homepage: www.lamda.nju.edu.cn/guolz

Email: guolz@nju.edu.cn

大纲

- 不确定环境
- 概率论基础
- 贝叶斯网：表示
- 贝叶斯网：语法语义
- 贝叶斯网：精确推理
- 贝叶斯网：近似推理

大纲

- 不确定环境
- 概率论基础
- 贝叶斯网：表示
- 贝叶斯网：语法语义
- 贝叶斯网：精确推理
- 贝叶斯网：近似推理

不确定环境

- 现实世界充满不确定性
  - 以自动驾驶出租车agent为例，agent的目标是按时将乘客送到机场，令A_t表示在飞机起飞前 t 分钟出发，是否能按时到达？

- 现实世界问题：
  - 部分可观察（道路状况、其它司机的规划等）
  - 噪声感知（地图导航）
  - 建模复杂性（交通难预测）
  - 缺少对动态世界的知识（爆胎、陨石）

不确定环境

- 现实世界充满不确定性
  - 以自动驾驶出租车agent为例，agent的目标是按时将乘客送到机场，令A_t表示在飞机起飞前 t 分钟出发，是否能按时到达？

- 逻辑推理要么得出错误结论：
  - A_{90}能让我按时到达机场
- 要么只能得到弱一些的结论：
  - A_{90}能让我按时到达机场，如果不抛锚、不堵车、不遇到交通事故、不爆胎、飞机不会提前起飞、没有陨石砸到我的车，…

不确定环境下的决策

- 概率(probability)提供了一种方法概括由惰性(laziness)和无知(ignorance)产生的不确定性
  - laziness：为了确保得到一个没有任何意外的规则，需要列出前提和结论的完整集合，工作量太大
  - ignorance：对于该领域，缺少完整的认识和理论

- 堵车的概率是0.9
- 发生堵车的情况下， A_{90}能让我按时到达机场的概率为0.6， A_{120}能让我按时到达机场的概率为0.8
- …

不确定环境下的决策

假如：

$$P(A_{25}\ gets\ me\ there\ on\ time\ |\ \ldots) = 0.04$$

$$P(A_{90}\ gets\ me\ there\ on\ time\ |\ \ldots) = 0.70$$

$$P(A_{120}\ gets\ me\ there\ on\ time\ |\ \ldots) = 0.95$$

$$P(A_{1440}\ gets\ me\ there\ on\ time\ |\ \ldots) = 0.9999$$

如何做决策？

必须在各种决策的不同结果之间有所偏好：效用理论(utility theory)

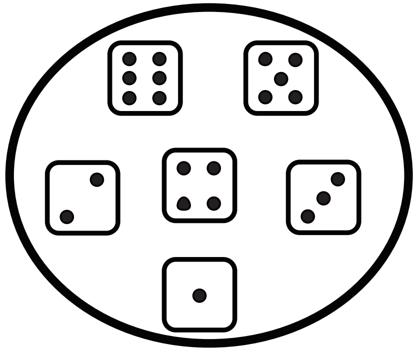
决策理论=概率理论+效用理论

大纲

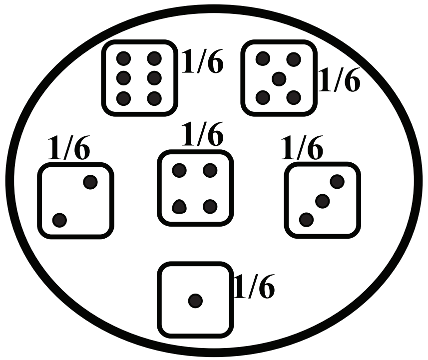
- 不确定环境
- 概率论基础
- 贝叶斯网：表示
- 贝叶斯网：语法语义
- 贝叶斯网：精确推理
- 贝叶斯网：近似推理

基本概率符号

- 所有可能的情况构成的集合 Ω 称为样本空间（sample space)
  - 例如，掷骰子的六种可能情况：{1,2,3,4,5,6}

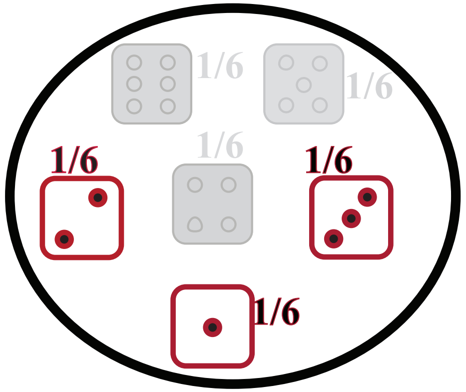


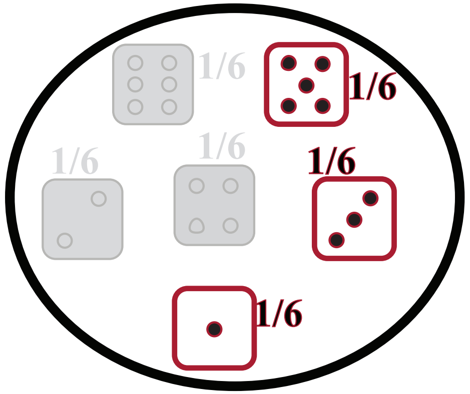
- 概率模型(probability model)为每一个可能的情况ω赋一个数值概率$\mathrm{P}(\omega)$
  - 例如，$P(1) = P(2) = P(3) = \mathrm{P}(4) = P(5) = P(6) = 1/6.$



- 根据概率论基本公理，有：
  - $0 \leq \mathrm{P}(\omega) \leq 1$
  - $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

事件(event)

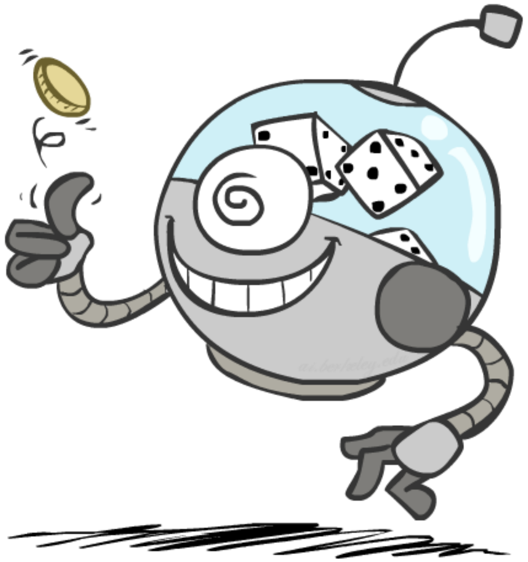




- Ω 的任何一个子集可以称为一个事件(event)
  - 例如，“点数小于4”的事件对应集合{1,2,3}
  - 例如，“点数是奇数”的事件对应集合{1,3,5}

- 一个事件 A 发生的概率等于集合中所有样本发生的概率之和：
  - $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$
  - 例如：(点数小于4) $= P(1) + P(2) + P(3) = 1/2$

随机变量(random variables)



- 一个随机变量是可以用来表示随机结果的变量，取值自某个区间
  - Odd表示骰子点数是否为奇数？-> {true, false}
    - Odd(1) = true, Odd(6)=false
  - T =Is it hot or cold？-> {hot, cold}
  - D = How log will take to get to the airport？-> $[0, \infty]$
- 随机变量 X 的概率分布给出了其取值范围内每个值x的概率（事件$X = x$的概率）
  - $P(X = x) = \sum_{\{\omega:X(\omega)=x\}} P(\omega)$
  - 例如：$P(Odd = true) = P(1) + P(3) + P(5) = 1/2$

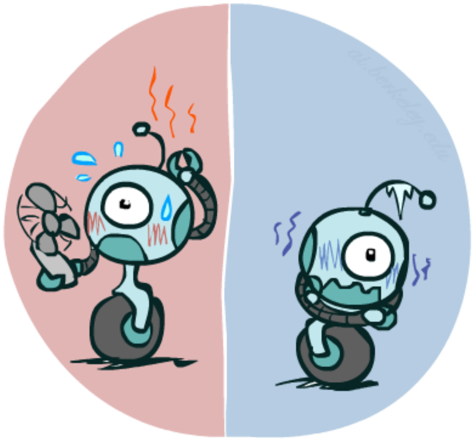
概率分布(probability distribution)

- 把所有取值及其概率关联起来；求和为1

- 温度：

$P(T)$

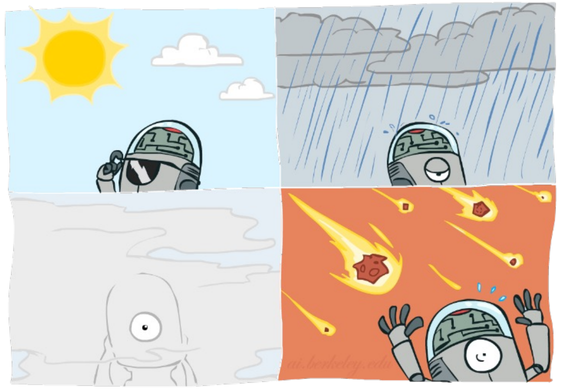
T	P
hot	0.5
cold	0.5



- 天气：

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
meteor	0.0



- 联合分布

$P(T,W)$

		温度	
		hot	cold
天气	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

概率分布(probability distribution)

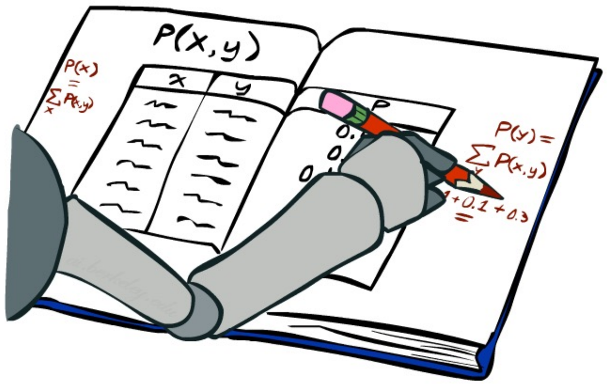
- $P(+x,+y)?$ 0.2
- $P(+x)?$ 0.2+0.3=0.5
- $P(+x \text{ OR } -y)$ 0.2+0.3+0.1=0.6

$$P(X,Y)$$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

边缘分布(marginal distribution)

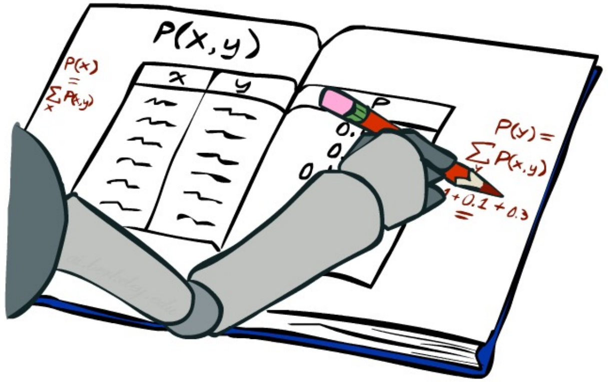
- 除了某个变量的其他变量取每个可能值的概率相加



$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

		Temperature		
		hot	cold	$P(W)$
Weather	sun	0.45	0.15	0.60
	rain	0.02	0.08	0.10
	fog	0.03	0.27	0.30
	meteor	0.00	0.00	0.00
	$P(T)$	0.50	0.50	

边缘分布(marginal distribution)



$P(X,Y)$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

$$P(x) = \sum_y P(x,y)$$

$$P(y) = \sum_x P(x,y)$$

$P(X)$

X	P
+x	
-x	

$P(Y)$

Y	P
+y	
-y	

边缘分布(marginal distribution)

$P(X,Y)$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

$$P(x) = \sum_y P(x,y)$$

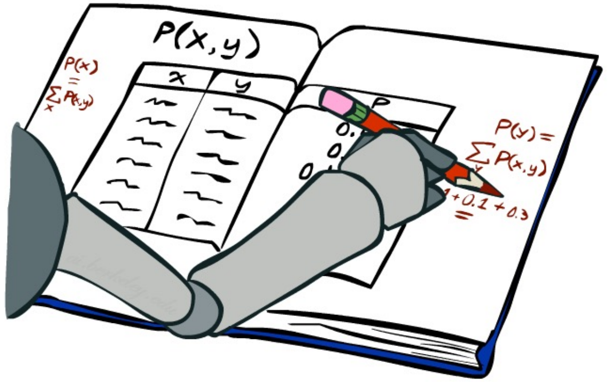
$$P(y) = \sum_x P(x,y)$$

$P(X)$

X	P
+x	0.5
-x	0.5

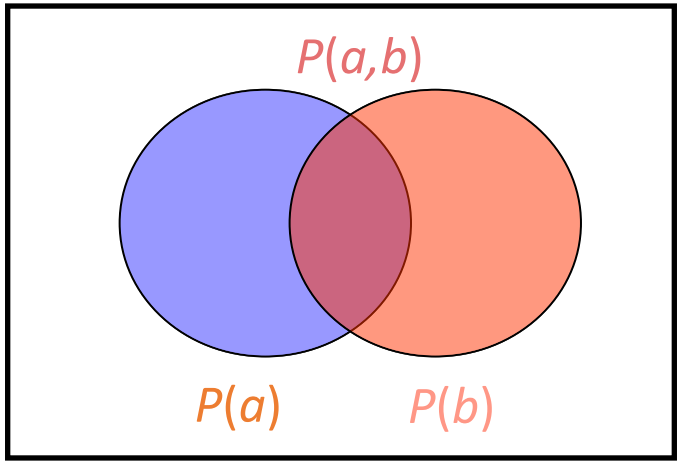
$P(Y)$

Y	P
+y	0.6
-y	0.4



条件概率

- 无条件概率(unconditional probabilities)或先验概率(prior probabilities)
  - 例如：$P(Weather = sunny) = 0.5$
- 条件概率(conditional probabilities)或后验概率(posterior probabilities)
  - 例如：$P(Weather = sunny|Temperature = cold) = 0.3$



$$P(a \mid b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$

$P(T,W)$

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

$$P(W{=}s \mid T{=}c) = \frac{P(W{=}s, T{=}c)}{P(T{=}c)} = 0.15/0.50 = 0.3$$

$= P(W{=}s,T{=}c) + P(W{=}r,T{=}c) + P(W{=}f,T{=}c) + P(W{=}m,T{=}c)$
$= 0.15 + 0.08 + 0.27 + 0.00 = 0.50$

条件概率

$$P(X, Y)$$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

$$P(a|b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$

- P(+x | +y) ?
- P(-x | +y) ?
- P(-y | +x) ?

条件概率

$$P(X,Y)$$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$

- P(+x | +y) ?   0.2 / 0.6 = 1/3
- P(-x | +y) ?   0.4 / 0.6 = 2/3
- P(-y | +x) ?   0.3 / 0.5 = 3/5

条件概率分布

- 给定一个变量集合，另一个变量集合的概率分布

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

$P(W \mid T=h)$

hot
0.90
0.04
0.06
0.00

$P(W \mid T=c)$

cold
0.30
0.16
0.54
0.00

$P(W \mid T)$

hot	cold
0.90	0.30
0.04	0.16
0.06	0.54
0.00	0.00

归一化(Normalization)

- 概率之和为1
- 每一项乘α = 1/(所有项之和)

$P(W,T)$

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

$P(W,T=c)$

0.15
0.08
0.27
0.00

Normalize

$\alpha = 1/0.50 = 2$

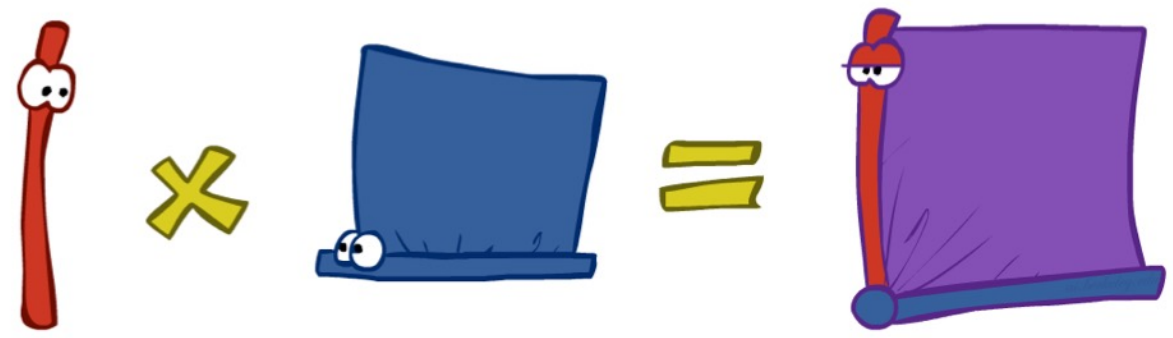
$P(W \mid T=c) = P(W,T=c)/P(T=c)$
$= \alpha\, P(W,T=c)$

0.30
0.16
0.54
0.00

乘法规则

$$P(a \mid b)P(b) = P(a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad P(a \mid b) = \frac{P(a, b)}{P(b)}$$

为了使 a 和 b 都成立，就需要 b 成立，并且在给定 b 成立的前提下 a 也成立



乘法规则

$$P(W \mid T)\, P(T) = P(W, T)$$

$P(W \mid T)$

hot	cold
0.90	0.30
0.04	0.16
0.06	0.54
0.00	0.00

$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

$P(W, T)$

		Temperature	
		hot	cold
Weather	sun	0.45	0.15
	rain	0.02	0.08
	fog	0.03	0.27
	meteor	0.00	0.00

链式法则

重复应用乘法规则，可以得到：

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_3 \mid x_1, x_2)\, P(x_1, x_2) = P(x_3 \mid x_1, x_2)\, P(x_2 \mid x_1)\, P(x_1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) &= \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_{n-1})\, \mathbf{P}(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1}) \\
&= \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_{n-2})\, \mathbf{P}(X_{n_1} | X_1, \ldots, X_{n-2})\, \mathbf{P}(X_n | X_1, \ldots, X_{n-1}) \\
&= \ldots \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1})
\end{aligned}$$

概率推理

- 概率推理（probability inference)：给定一个概率模型，计算某个期望的概率
  - 给定某些证据(evidence)计算某个变量的概率
  - P(airport on time | no accidents) = 0.90

- 随着新的证据出现，概率也会发生变化
  - P(airport on time | no accidents) = 0.90
  - P(airport on time | no accidents, raining) = 0.80

使用完全联合分布推理

一个有三个布尔变量toothache（牙痛）、cavity（牙齿有洞）、catch（牙医探针污染造成的牙龈感染）组成的问题域，其完全联合分布为：

	toothache		¬ *toothache*	
	catch	¬ *catch*	*catch*	¬ *catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ *cavity*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

使用完全联合分布推理

一个有三个布尔变量toothache（牙痛）、cavity（牙齿有洞）、catch（牙医探针污染造成的牙龈感染）组成的问题域，其完全联合分布为：

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

$$P(toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$

使用完全联合分布推理

一个有三个布尔变量toothache（牙痛）、cavity（牙齿有洞）、catch（牙医探针污染造成的牙龈感染）组成的问题域，其完全联合分布为：

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ cavity	.016	.064	.144	.576

$P(cavity \text{ or } toothache)$

$= 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 + 0.072 + 0.008 = 0.28$

使用完全联合分布推理

一个有三个布尔变量toothache（牙痛）、cavity（牙齿有洞）、catch（牙医探针污染造成的牙龈感染）组成的问题域，其完全联合分布为：

	toothache		¬ *toothache*	
	catch	¬ *catch*	*catch*	¬ *catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ *cavity*	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

$$P(cavity|toothache) = \frac{P(cavity \wedge toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.018 + 0.012}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.6$$

使用完全联合分布推理

一个有三个布尔变量toothache（牙痛）、cavity（牙齿有洞）、catch（牙医探针污染造成的牙龈感染）组成的问题域，其完全联合分布为：

	toothache		¬ *toothache*	
	catch	¬ *catch*	*catch*	¬ *catch*
cavity	.108	.012	.072	.008
¬ *cavity*	.016	.064	.144	.576

$$P(\neg cavity|toothache) = \frac{P(\neg cavity \land toothache)}{P(toothache)}$$

$$= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4$$

使用完全联合分布推理

	toothache		*¬ toothache*	
	catch	*¬ catch*	*catch*	*¬ catch*
cavity	**.108**	**.012**	**.072**	**.008**
¬ cavity	**.016**	**.064**	**.144**	**.576**

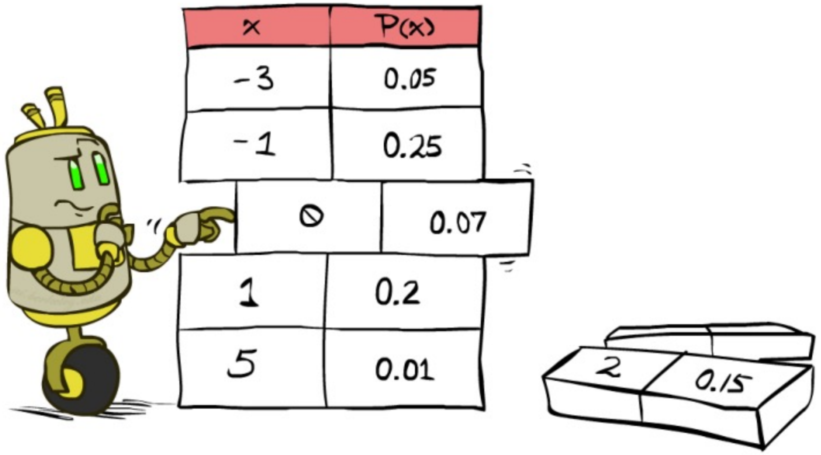
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Cavity|toothache) = \alpha\, \mathbf{P}(Cavity, toothache)\\
&\quad = \alpha\, [\mathbf{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathbf{P}(Cavity, toothache, \neg catch)]\\
&\quad = \alpha\, [\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle]\\
&\quad = \alpha\, \langle 0.12, 0.08\rangle = \langle 0.6, 0.4\rangle
\end{aligned}
$$

使用完全联合分布推理

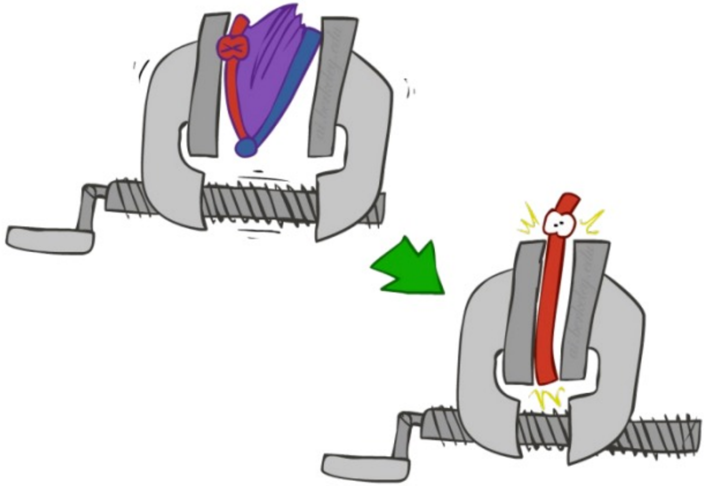
- 通用推理过程：
  - 考虑只查询一个变量的情况，假设这个变量为X(这个例子中是$Cavity$)，假设E是证据变量集合（这个例子中只有$Toothache$)，e表示其观察值；并假设H为其余未观测变量（这个例子中是$Catch$），计算过程为：

$$P(X|e) = \alpha P(X,e) = \alpha \sum_{h} (X,e,h)$$

Step1：选择(select)与证据变量一致的部分



Step2：对未观测变量求和消元(summing out)



Step3：归一化(Normalize)

$\times \alpha$

使用完全联合分布推理

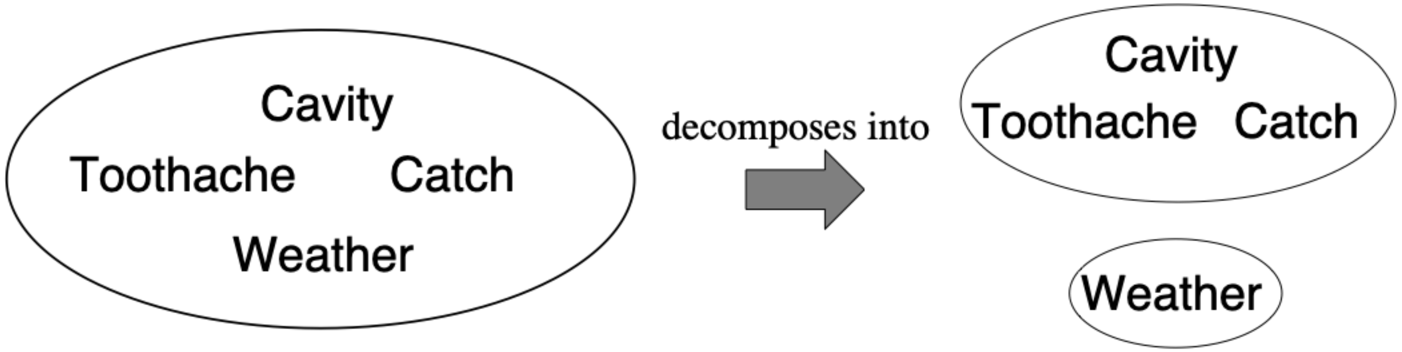
- 假设共n个变量，每个变量有d 个取值：
  - 空间复杂度： $O(d^n)$
  - 时间复杂度： $O(d^n)$

可扩展性差！

独立性（independence）

- A和B是独立的：

$$P(A|B) = P(A) \quad or \quad P(B|A) = P(B) \quad or \quad P(A,B) = P(A)P(B)$$



$$32 \rightarrow 2^3 + 4 = 12$$

$$P(Toothache, Catch, Cavity, Weather)$$
$$= P(Toothache, Catch, Cavity)P(Weather)$$

有助于减少问题域表示的规模并降低推理问题的复杂度，

然而现实世界中独立性非常难以满足

条件独立性（independence）

如果已知病人是否有牙洞， $Toothache$ 和 $Catch$ 是相互独立的，可以写作：

$$P(toothache, catch|cavity) = P(toothache|cavit)P(catch|cavity)$$

那么：

$$P(Toothache, Catch, Cavity)$$
$$= P(Toothache, Catch|Cavity)P(Cavity)$$
$$= P(Toothache|Cavity)P(Catch|Cavity)P(Cavity)$$

通过条件独立性将一个大的概率问题分解成一些联系非常弱的子集，

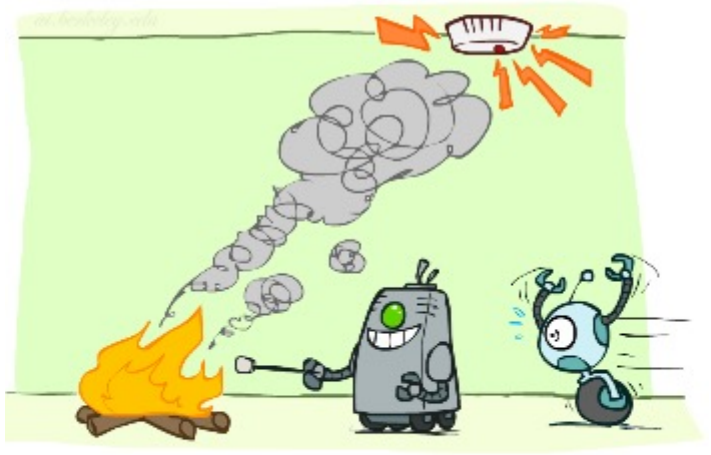
是人工智能历史上最重大的进展之一

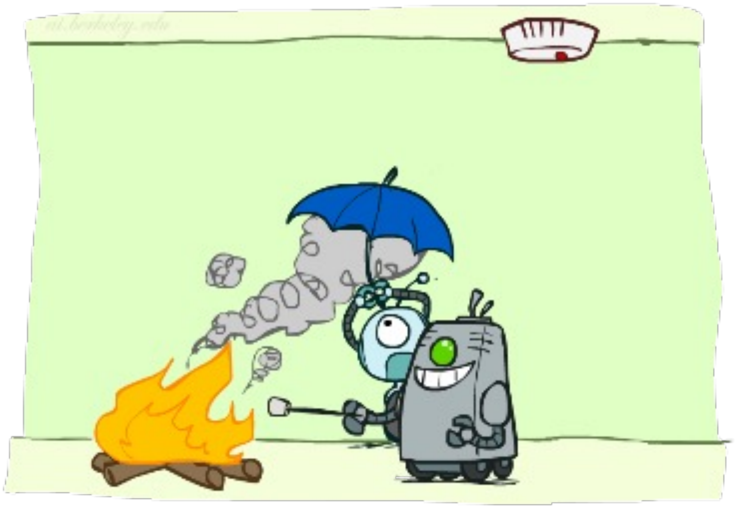
条件独立性（independence）

- 考虑如下情况：
  - 堵车（traffic)
  - 打伞（umbrella)
  - 下雨（raining)

条件独立性（independence）

- 考虑如下情况：
  - 着火（fire)
  - 冒烟（smoke)
  - 警报（alarm)





贝叶斯规则

乘法规则： $P(a|b)P(b) = P(a,b) = P(b|a)P(a)$

⇨ 贝叶斯规则： $P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$

为什么贝叶斯规则很有用？

$$P(cause|effect) = \frac{P(effect|cause)P(cause)}{P(effect)}$$

贝叶斯规则是大多数进行概率推理的现代人工智能系统的基础

贝叶斯规则

- 医生知道脑膜炎会引起病人脖子僵硬，比如有70%的可能性；医生还了解一些无条件先验知识：例如，病人脑膜炎的概率为1/50000

- 令M表示病人患有脑膜炎， S表示病人脖子僵硬

$$P(s|m) = 0.7$$

$$P(m) = 1/50000$$

$$P(s) = 0.01$$

- 脖子僵硬的人中，患脑膜炎的概率

$$P(m|s) = \frac{P(s|m)P(m)}{P(s)} = \frac{0.7 * 1/50000}{0.01} = 0.0014$$

贝叶斯规则

$P(W)$

R	P
sun	0.8
rain	0.2

$P(D|W)$

D	W	P
wet	sun	0.1
dry	sun	0.9
wet	rain	0.7
dry	rain	0.3

- $P(W|dry)?$

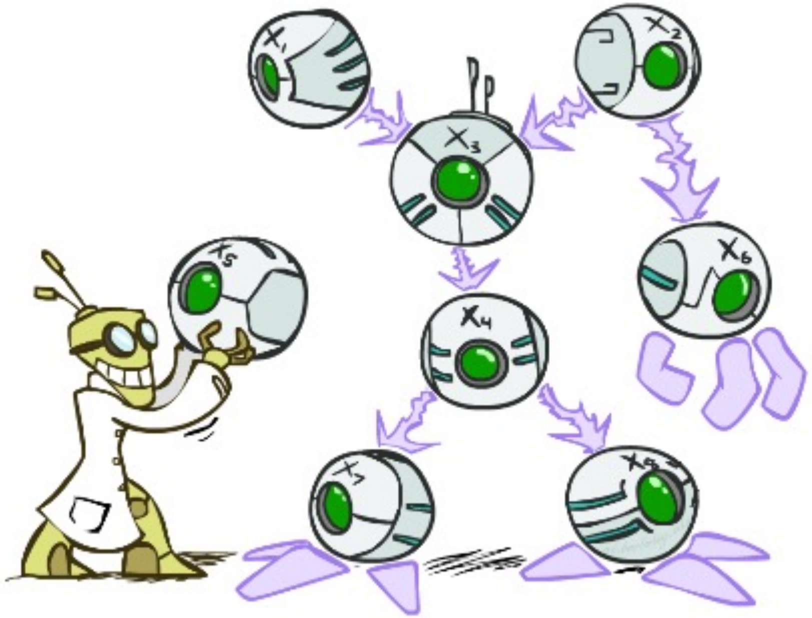
- $P(sun|dry) = P(dry|sun) * P(sun) = 0.9 * 0.8 = 0.72$
- $P(rain|dry) = P(dry|rain) * P(rain) = 0.3 * 0.2 = 0.14$
- $P(sun|dry) = \frac{0.72}{0.72+0.14} = 12/13$
- $P(sun|dry) = \frac{0.14}{0.72+0.14} = 1/13$

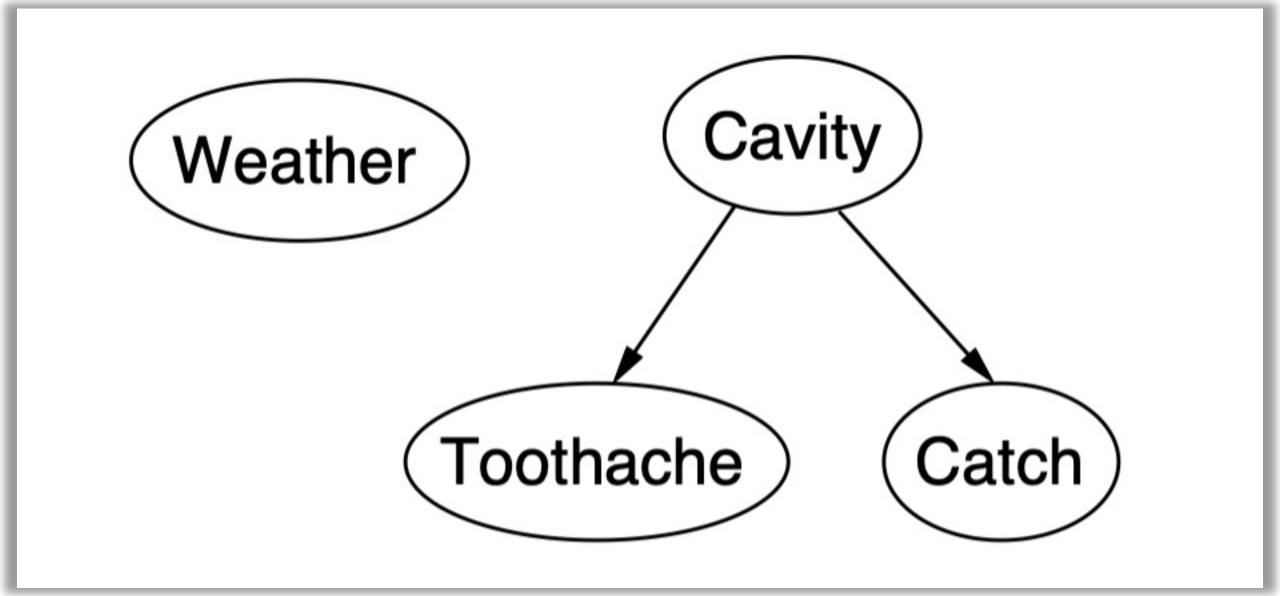
大纲

- 不确定环境
- 概率论基础
- 贝叶斯网：表示
- 贝叶斯网：语法语义
- 贝叶斯网：精确推理
- 贝叶斯网：近似推理

贝叶斯网

- 贝叶斯网(Bayesian network)是一个图模型，用简单的条件分布描述复杂的联合分布
- 图中的边可以用于表示变量之间的依赖关系

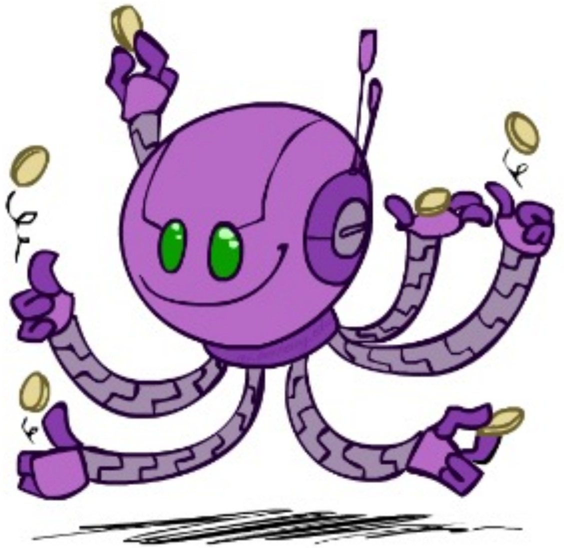




- Weather独立于其他变量
- 给定Cavity后Toothache和Catch是条件独立的

Example: Coin flip

- n 次独立地掷硬币

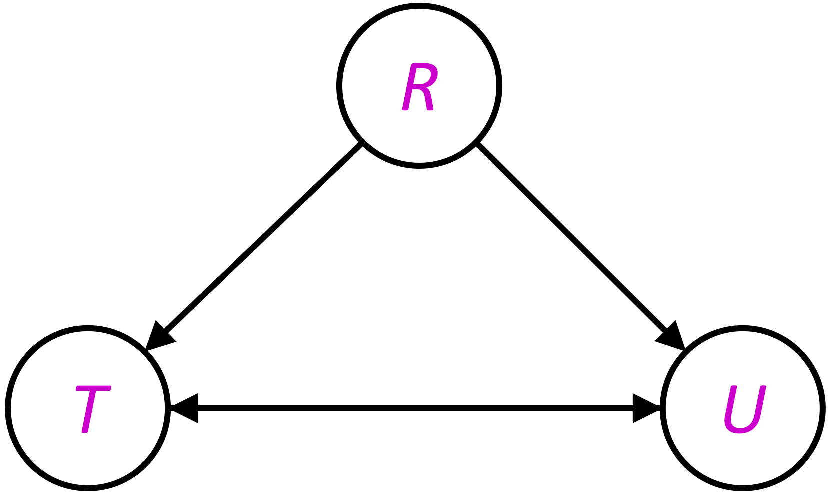


X_1 X_2 $\cdots$ X_n

- 绝对独立：任意两个变量之间都不具有关联

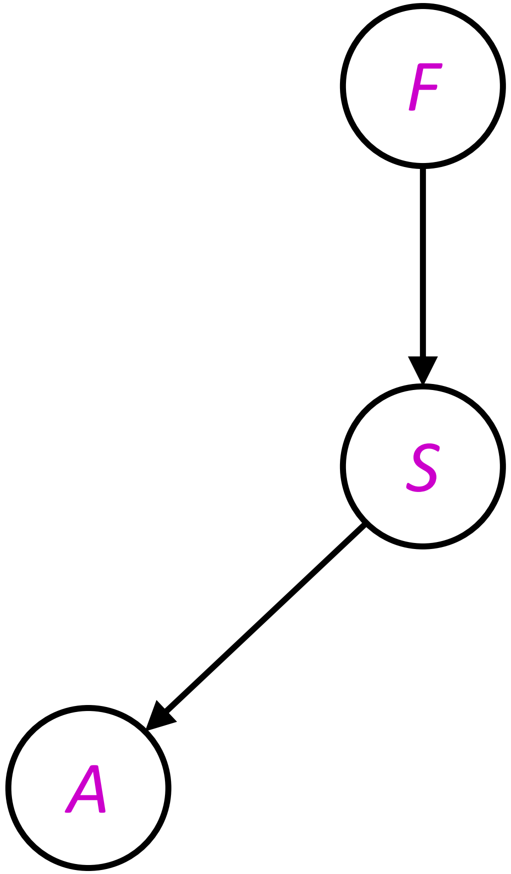
Example： 堵车

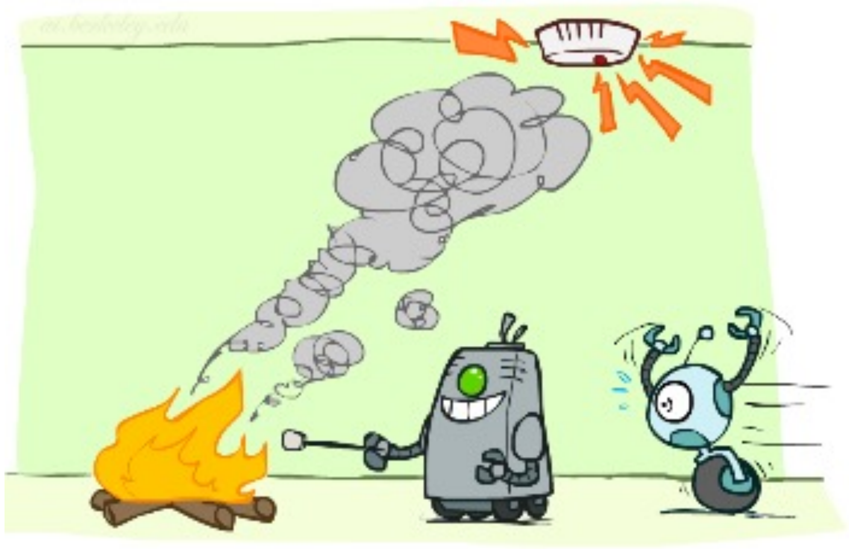
- 变量：
  - T： 堵车
  - U： 打伞
  - R： 下雨



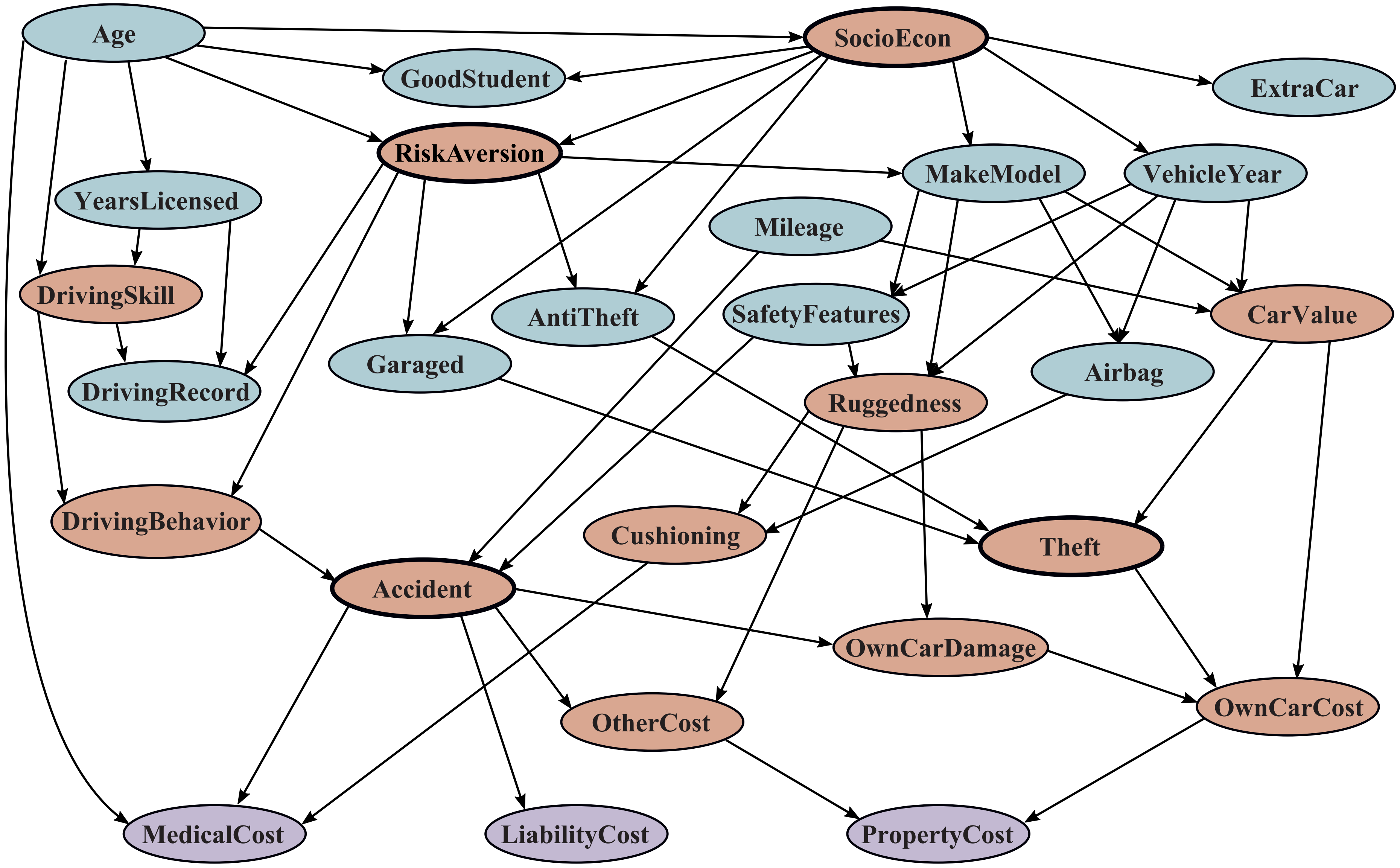
Example： 烟雾警报

- 变量：
  - F： 着火
  - S： 烟雾
  - A： 烟雾警报

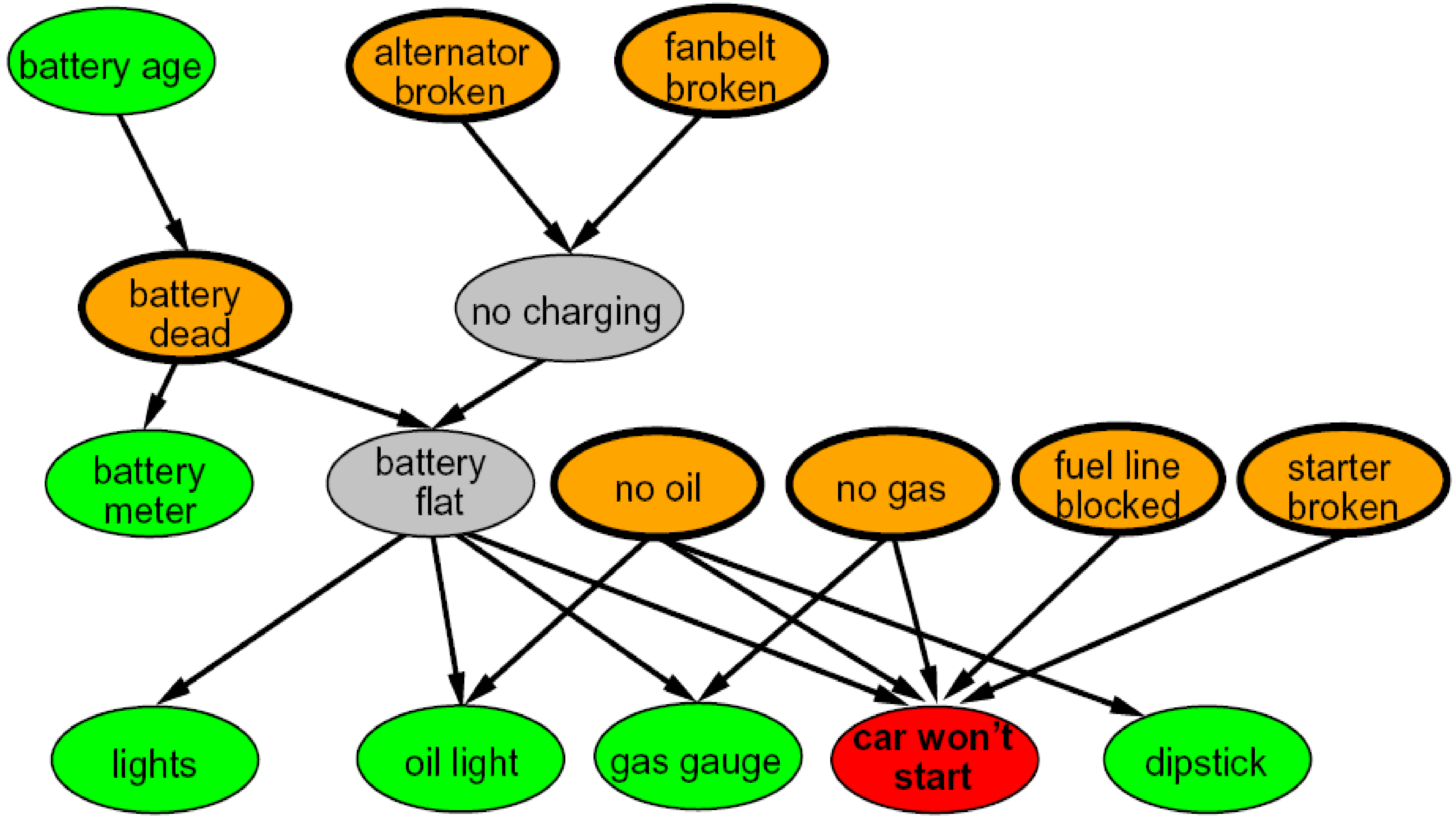




Example Bayes Net: Car Insurance



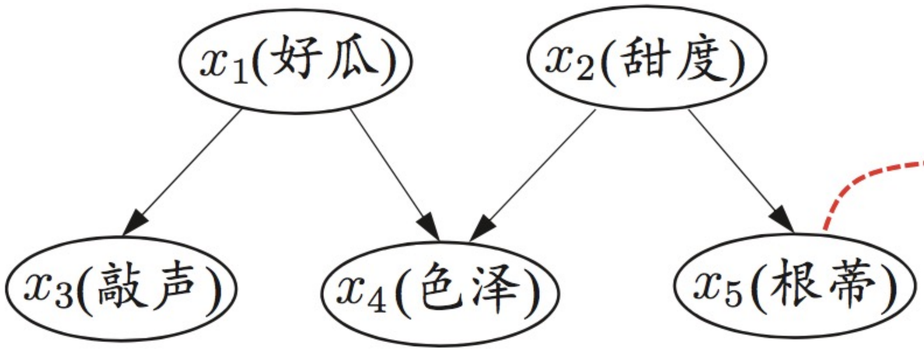
Example Bayes Net: Car Won't Start



贝叶斯网的语法语义

贝叶斯网： Syntax

- 每个节点对应一个随机变量
- 一组有向边，没有有向回路（有向无环图，DAG）
- 每个节点有一个条件概率分布$P(X_i|Parents(X_i))$，量化其父节点对该节点的影响
  - 条件概率表 (Conditional Probability Table，CPT)



条件概率表
(CPT, Conditional Probability Table)

		根蒂	
		硬挺	蜷缩
甜度	高	0.1	0.9
	低	0.7	0.3

Bayes net = Topology (graph) + Local Conditional Probabilities

例子：防盗报警器

你在家里安装了一个新防盗报警器，这个报警器对于探测小偷闯入很可靠，但偶尔也会对轻微的地震有反应。你有两个邻居John和Mary，他们承诺在你工作时听到警报声就给你打电话。John听到警报声总是会给你打电话，但有时候会把电话铃声当成警报声，Mary喜欢大声听音乐，因此有时候听不见警报声。给定他们是否给你打电话，怎么估计有人入室盗窃的概率？

变量：Burglar、Earthquake、Alarm、JohnCalls、MaryCalls

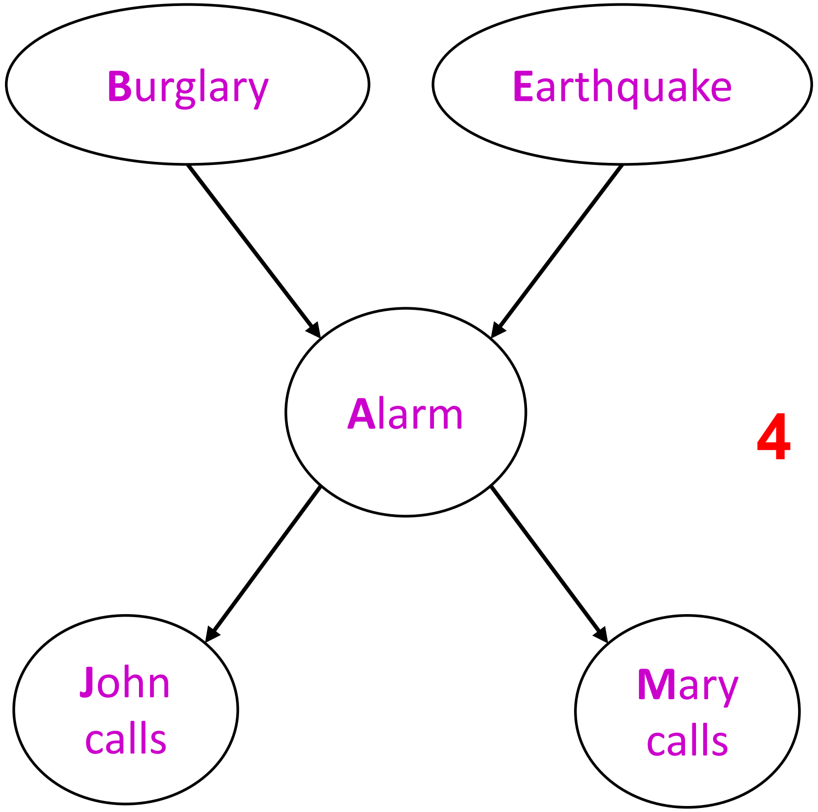
网络结构反映了因果关系：

- 小偷闯入影响警报
- 地震影响警报
- 警报导致Mary打电话
- 警报导致John打电话

例子：防盗报警器

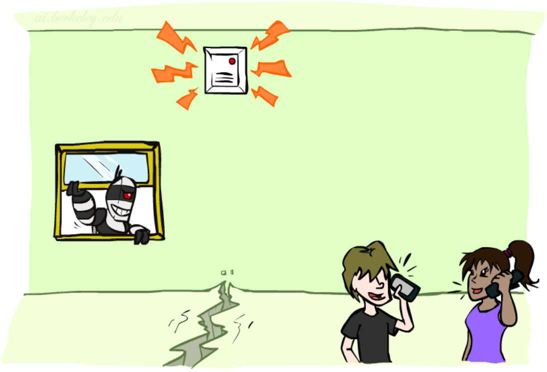
P(B)	
true	false
0.001	0.999

1



1

P(E)	
true	false
0.002	0.998



B	E	P(A|B,E)	
		true	false
true	true	0.95	0.05
true	false	0.94	0.06
false	true	0.29	0.71
false	false	0.001	0.999

4

A	P(J|A)	
	true	false
true	0.9	0.1
false	0.05	0.95

2

A	P(M|A)	
	true	false
true	0.7	0.3
false	0.01	0.99

2

每个CPT表中自由变量的数目？

- 父节点：$d_1,\dots,d_k$
- 当前节点：d
- 每一行求和为1

$$(d-1)\prod_i d_i$$

大纲

- 不确定环境
- 概率论基础
- 贝叶斯网：表示
- 贝叶斯网：语法语义
- 贝叶斯网：精确推理
- 贝叶斯网：近似推理

Global Semantic

- 完整的联合分布可以由局部条件分布的乘积得到：

$$P(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i | parents(x_i))$$

Example: Coin flip

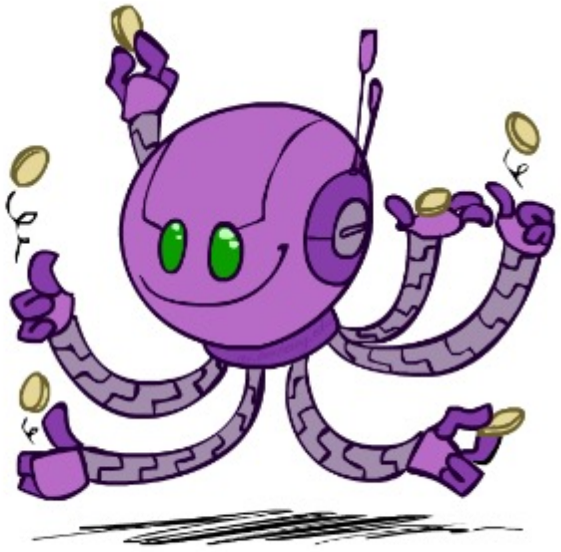
X_1 X_2 . . . X_n

h	0.5
t	0.5

h	0.5
t	0.5

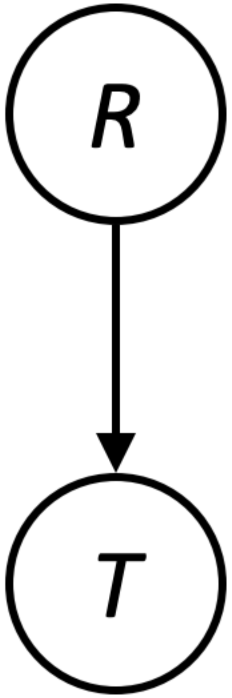
. . .

h	0.5
t	0.5



$$P(h, h, t, h) = ?$$

Example: Traffic



$P(R)$

+r	1/4
-r	3/4

$P(T|R)$

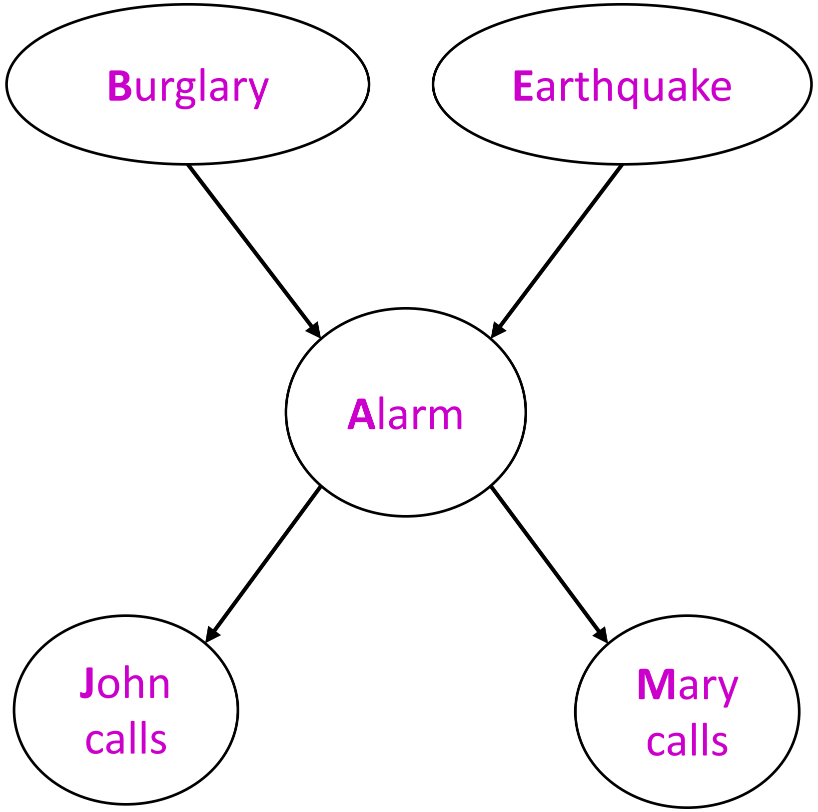
+r	+t	3/4
	-t	1/4
-r	+t	1/2
	-t	1/2

$P(R,T)$

+r	+t	3/16
+r	-t	1/16
-r	+t	6/16
-r	-t	6/16

例如：

P(B)	
true	false
0.001	0.999



P(E)	
true	false
0.002	0.998

P(b,□e, a, □j, □m)

=

P(b) P(□e) P(a|b,□e) P(□j|a) P(□m|a)

=.001x.998x.94x.1x.3=.000028

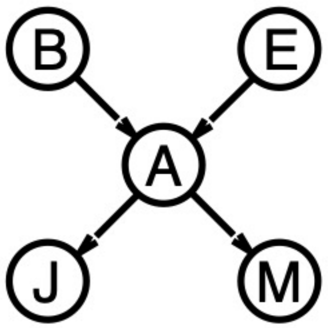
B	E	P(A|B,E)	
		true	false
true	true	0.95	0.05
true	false	0.94	0.06
false	true	0.29	0.71
false	false	0.001	0.999

A	P(J|A)	
	true	false
true	0.9	0.1
false	0.05	0.95

A	P(M|A)	
	true	false
true	0.7	0.3
false	0.01	0.99

紧致性(compactness)

- 假设：
  - n个随机变量
  - 取值集合的大小d
  - 最大父节点的数目k



- 完全联合分布： $O(d^n)$
- 贝叶斯网： $O(nd^{k+1})$

都可以描述完全联合分布，但是贝叶斯网更节省空间，并且更容易获取local CPT