第二次作业 221900180 田永铭 凸优化

2.6 平面包含 半空间

解：(1) ~~若超平面~~ $\{x|a^Tx\le b\}\subseteq\{x|\tilde{a}^Tx\le\tilde{b}\}$ 的条件是：
$\exists\lambda>0, s.t. \tilde{a}=\lambda a$，且 $\tilde{b}\ge\lambda b$。

证明：①充分性：若 $\exists\lambda>0, s.t. \tilde{a}=\lambda a, \tilde{b}\ge\lambda b$，~~则设~~ 则 $a^Tx\le b\Rightarrow\lambda a^Tx\le\lambda b\Rightarrow\tilde{a}^Tx\le\tilde{b}$。且 $\lambda>0$ 保证了同向。

②必要性：首先 $\tilde{a}=\lambda a$ 必对某 λ 成立，否则显然平面无法包含另一个。
反设 $\tilde{b}<\lambda b$：考虑满足 $a^T\tilde{x}=b$ 的点，则 $\tilde{a}^T\tilde{x}=\lambda a^T\tilde{x}=\lambda b>\tilde{b}$，
矛盾。~~∴反~~ ∴ $\tilde{b}\ge\lambda b$ 才可。必要性得证。

综上：条件为 $\exists\lambda>0, s.t. \tilde{a}=\lambda a$ 且 $\tilde{b}\ge\lambda b$。

(2) 半空间相等的条件：$\exists\lambda>0, s.t. \tilde{a}=\lambda a$ 且 $\tilde{b}=\lambda b$。

证明：由(1)可易推得。半空间A = 半空间B $\Leftrightarrow$ 半空间A ⊆ 半空间B 且半空间B ⊆ 半空间A。

2.11 双曲集合

证明：(1) 证 $\{x\in R_+^2 \mid x_1x_2\ge1\}$ 为凸集：设 $\forall x,y\in C$（记为C），$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$，
则有 $x_1x_2\ge1, y_1y_2\ge1$。设 $\forall\theta\in[0,1]$，则 $\theta x+(1-\theta)y=\theta(x_1,x_2)+(1-\theta)(y_1,y_2)$
$=(\theta x_1+(1-\theta)y_1, \theta x_2+(1-\theta)y_2)$。$[\theta x_1+(1-\theta)y_1][\theta x_2+(1-\theta)y_2]$
$=\theta^2x_1x_2+\theta(1-\theta)(x_1y_2+x_2y_1)+(1-\theta)^2y_1y_2$
$=\theta^2x_1x_2+\theta(1-\theta)(x_1y_2+x_2y_1)+(1-\theta)^2y_1y_2$. (*)
$=-\theta(1-\theta)(y_1-x_1)(y_2-x_2)+\theta x_1x_2+(1-\theta)y_1y_2$
~~不妨假设 $x\succeq y$，即 $(y_1-x_1)(y_2-x_2)$~~
①若 $x\succeq y$，则 $\theta x+(1-\theta)y\succeq y$，设 $z=\theta x+(1-\theta)y$，
设 $z=(z_1,z_2)$，则 $z_1z_2\ge y_1y_2\ge1$，∴结论显然成立。若 $x\preceq y$，同理亦成立。
②若 $x\not\succeq y$ 且 $x\not\preceq y$，则 $(y_1-x_1)(y_2-x_2)<0$，∴(*)式 $\ge0+1=1$。∴结论亦成立

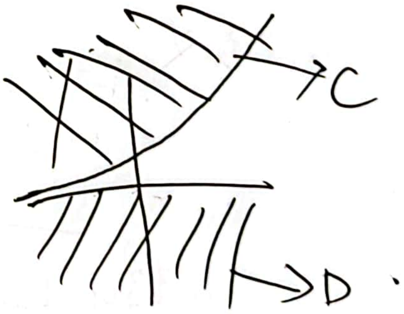
证毕。

(2) 证 $\{x\in R_+^n \mid \prod_{i=1}^n x_i\ge1\}$ 凸：
由提示：若 $a,b\ge0$ 且 $0\le\theta\le1$，则 $a^\theta b^{1-\theta}\le\theta a+(1-\theta)b$。

$$\therefore \prod_i(\theta x_i+(1-\theta)y_i)\ge\prod_i x_i^\theta y_i^{1-\theta}=\left(\prod_i x_i\right)^\theta\left(\prod_i y_i\right)^{1-\theta}\ge1^\theta\cdot1^{1-\theta}=1.$$

∴ i 为每个分量　　∴证毕。

2.23 给出两个不相交的闭凸集不能被严格分离的例子。



解：在 R^2 内，$C=\{x \mid x_2\ge e^{x_1}\}$ 与 $D=\{x \mid x_2\le0\}$。
不能被严格分离。

2.33 单调非负锥 $K_{m+}=\{x\in R^n \mid x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge0\}$。

(a) K_{m+} 为正常锥。

证明：①凸、闭性：K_{m+} 可看成由 $x_1\ge x_2, x_2\ge x_3\ldots x_n\ge0$ 这n个齐次线性不等式限定成的区域，∴既凸且闭。

②实：∃点 ~~$x=(n+100, n+99, \ldots)$~~ $x=(n, n-1, n-2\ldots1)$ 满足严格不等式，∴在内部，∴内部非空。

③尖：设 $x\in K_{m+}$ 且 $-x\in K_{m+}$，则 $x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge0$，又有 $-x_1\ge-x_2\ge\cdots\ge0$，
∴ $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$。∴ $x=0$。

∴ K_{m+} 为正常锥。

(b) $K_{m+}^* = \{y \mid \sum_{i=1}^{k} y_i \ge 0, k=1,2,3\cdots n\}$.

证明: $K_{m+}^* = \{y \mid x^T y \ge 0, \forall x \in K\}$.

由K_{m+}定义得, $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge 0$.

由K_{m+}^*定义得: $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \ge 0$. (*)

由恒等式(提示)得: (*)等价于 $(x_1-x_2)y_1 + (x_2-x_3)(y_1+y_2) + \cdots + (x_n)(y_1+y_2+\cdots+y_n) \ge 0$.

① 充分性: 只需 s.t. ~~芽~~ $\sum_{i=1}^{k} y_i \ge 0$, $k=1,2,3\cdots n$ 成立, 则(*)成立, 显然.

② 必要性: 反设 $\exists t$, s.t. $\sum_{i=1}^{t} y_i < 0$, 即 $y_1+y_2+y_3+\cdots y_t < 0$. 则 $\exists X$ 满足 $x_t - x_{t-1} \to \infty$, s.t. (*)式不成立. ∴必要性成立.

综上: $K_{m+}^* = \{y \mid \sum_{i=1}^{k} y_i \ge 0, k=1,2,3\cdots n\}$.

3.1 设 $f: R \to R$ 为凸函数, $a, b \in \operatorname{dom} f$, $a<b$.

(a) 证 $f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$ for $\forall x \in [a,b]$.

证明: 由 Jenson inequality: $f(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k) \le \theta_1 f(x_1) + \cdots + \theta_k f(x_k)$. ($\sum_i \theta_i = 1$)

~~$\therefore f(x) = f(\frac{b-x}{b-a}x + \frac{x-a}{b-a}x) \le \frac{b-x}{b-a}f(x) + \frac{x-a}{b-a}f(x)$~~

$\therefore f(x) = f(\frac{b-x}{b-a}\cdot a + \frac{x-a}{b-a}\cdot b) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$. 证毕.

(b) 证 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ for $\forall x \in (a,b)$, 画草图.

~~证明~~

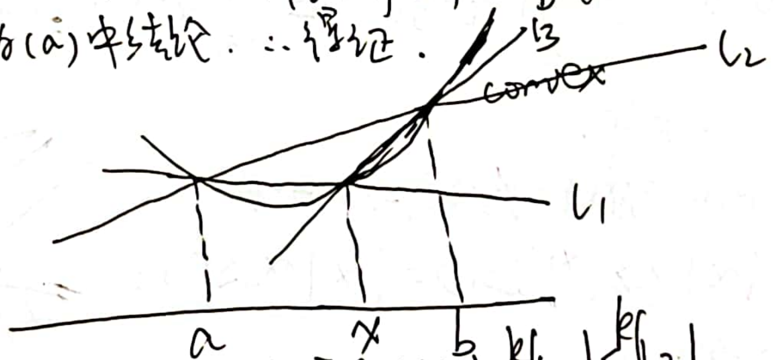
证明: 仅证 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 而 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ 同理.

证明如下: 两边去分母, 得: $(b-a)f(x) - (b-x)f(a) + (a-x)f(b) \le 0$. 等价于证

~~$f(x)$~~ $\because a<b$, ~~$f(x)$~~ $\therefore$ 即证 $f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$.

而此结论即为(a)中结论. ∴得证.

图形意义:



展示了 l_1、l_2、l_3 的斜率关系: $k(l_1) \le k(l_2) \le k(l_3)$.

(c) 设f可微. 以(b)结论证明: $f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b)$.

证明: ~~$f'(a)$~~ 由~~凸性定义: $f(b) \ge f(a) + f'(a)(b-a)$~~.

~~又$\because a<b$, $\therefore f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$~~ $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

由(b) $\because \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ∴两边同时取极限得: $f'(a) \le \lim_{x\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

~~又~~ 而 $f'(b) = \lim_{x\to b} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, 同理可证.

~~(d) 不会~~.

凸优化第二次作业(2) 221900180 田永铭 凸优化

(d) 假设 f 二次可微，用(c)中结论证 $f''(a)\geq 0$ 且 $f''(b)\geq 0$.

由(c): $f'(b)\geq f'(a)$, $\therefore f''(a)=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\geq 0$.

$f''(b)=\lim\limits_{a\to b}\dfrac{f'(b)-f'(a)}{b-a}\geq 0$.（即设 $b-a\to\varepsilon$，ε 为充分小的正数）.

3.5 凸函数的滑动平均. $f:R\to R$ is convex, $R_+\subseteq \mathrm{dom} f$. 证 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, $\mathrm{dom}\,F=R_{++}$ 为 convex

证明: $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, $\therefore F'(x)=\dfrac{-\int_0^x f(t)dt}{x^2}+\dfrac{1}{x}\cdot f(x)$,

$$F''(x)=\frac{-f(x)\cdot x^2+2x\int_0^x f(t)dt}{x^4}+\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{-xf(x)+2\int_0^x f(t)dt}{x^3}+\frac{x^2f'(x)-xf(x)}{x^3}$$

$$=\frac{2\left(\int_0^x f(t)dt-xf(x)\right)}{x^3}+\frac{f'(x)}{x}$$

$$=\frac{2}{x^3}\left[\int_0^x f(t)dt-xf(x)+\frac{x^2}{2}f'(x)\right]$$

$$=\frac{2}{x^3}\int_0^x[f(t)-f'(x)(t-x)-f(x)]dt$$

≥ 0 (f的凸性保证), $\therefore F(x)$ 凸.

3.7 设 $f:R^n\to R$ 为 convex, $\mathrm{dom} f=R^n$, f 为 upbounded on R^n. 证 $f=\mathrm{Const}$.

证明: 反设 $f\neq \mathrm{Const}$, 即 $\exists\, x_1, x_2$, s.t. $f(x_1)\neq f(x_2)$. $x_1\neq x_2$ 且 $f'(x_1)\neq 0$.

由 f 的凸性: $f(x_2)\geq f(x_1)+(x_2-x_1)f'(x_1)$

① 若 $f'(x_1)>0$, 则当 $x_2\to+\infty$ 时, $f(x_2)\geq f(x_1)+\infty\cdot f'(x_1)\to+\infty$. 与 f 有上界矛盾.

~~则当 $x_2\to+\infty$ 时, 有 $f(x_2)\geq f(x_1)-(x_1-x_2)f'(x_1)$~~

② 若 $f'(x_1)<0$, 则当 $x_2\to-\infty$ 时, $f(x_2)\geq f(x_1)-\underset{+\infty}{(x_1-x_2)}\underset{-}{f'(x_1)}\to+\infty$.

~~③ 若 $f'(x_1)=0$, 则 $f(x_2)\geq f(x_1)$~~ 与 f 有上界矛盾.

($\because f\neq \mathrm{const}$ $\therefore$ 必能找到 $f'(x_1)\neq 0$ 的点 x_1).

综上: f 为常数.

3.11 单调映射

(1) 证明 ∇f 单调 (若 $f:R^n\to R$ 可微且凸), $(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(x-y)\geq 0$.

证明: 设 $\forall\, x,y\in \mathrm{dom}\,\nabla f$, 欲证

$\because f$ 凸, $\therefore$ $f(y)\geq f(x)+\nabla f(x)^T(y-x)$ ①

$f(x)\geq f(y)+\nabla f(y)^T(x-y)$ ②

①+②: $0\geq \nabla f(x)^T(y-x)+\nabla f(y)^T(x-y)$, 即 $(\nabla f(x)-\nabla f(y))^T(x-y)\geq 0$.

$\therefore$ 证毕.

(2) 反过来，是否每个单调映射都对应某凸函数的梯度？

解：否. 设 $\psi(x)=\begin{pmatrix}x_1\\x_1+x_2\end{pmatrix}$.

则 $(\psi(x)-\psi(y))^T(x-y)=(x_1-y_1,\ x_1+x_2-y_1-y_2)\begin{pmatrix}x_1-y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}$

$=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_1-y_1)(x_2-y_2)$.

① 若 $|x_1-y_1|\geq|x_2-y_2|$，则 $(\psi(x)-\psi(y))^T(x-y)\geq(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2-|x_1-y_1|^2=(x_2-y_2)^2\geq0$.

② 若 $|x_1-y_1|<|x_2-y_2|$，则 $(\psi(x)-\psi(y))^T(x-y)\geq(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2-|x_2-y_2|^2=(x_1-y_1)^2\geq0$.

综上：$\psi(x)$ 满足单调映射条件.

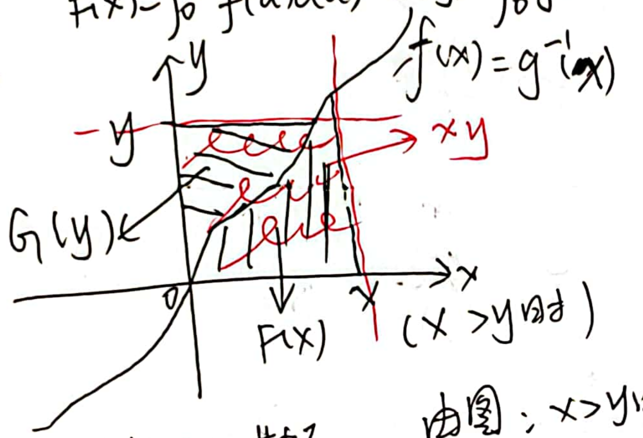
同时：假设 $\exists\ \nabla f=\psi$，

则 $\frac{\partial f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}=\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}$，即有 $0=1$，显然不成立，∴假设不成立.

∴结论不成立.

3.38 Young不等式. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ↑，$f(0)=0$，g 为 f 反函数. def F, G as: $F(x)=\int_0^x f(a)da$，$G(y)=\int_0^y g(a)da$. 证 F,G 共轭. 解释 $xy\leq F(x)+G(y)$.

解：



由图：$x>y$ 时，面积上直接可得：$xy\leq F(x)+G(y)$

~~①证F,G共轭：~~

~~证明~~

同理：$x<y$ 时 仍有 $xy\leq F(x)+G(y)$.

等号成立的条件是 ~~f(x)=g(y)~~ ∴ $f(x)=y$，$g(y)=x$

∴ $F(x)\geq xy-G(y)$，$G(y)\geq xy-F(x)$.

此时 $G(y)+F(x)=xy$，且有 $F(x)=\sup_y(xy-G(y))$，$G(y)=\sup_x(yx-F(x))$.

满足F与G共轭的定义.

∴证毕.