第四次作业参考答案

By 梁文艺 朱映

对于任一公式，可用下面的方法构造出与其等值的范式：

(1)利用等价公式：A↔B<=>(A→B)∧(B→A), A→B<=>¬A∨B使公式中仅含联结词¬，∧，∨；

(2)利用德•摩根定律和双重否定律¬(A∨B) <=> ¬A∧¬B，¬(A∧B) <=> ¬A∨¬B， ¬ ¬A <=>A将否定符¬移到命题变元前，并去掉多余的否定符；

(3)利用分配律A∧(B∨C) <=>(A∧B)∨(A∧C)， A∨(B∧C)<=>(A∨B)∧(A∨C)将公式化成析取范式或合取范式，所得即与原公式等价。

(4)在析取范式的简单合取式和合取范式的简单析取式中，如同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次；

(5)去掉析取范式中的所有永假的简单合取式和合取范式中所有永真的简单析取式，即去掉简单合取式中含有形如P∧¬P的子公式和简单析取式中含有形如P∨¬P的子公式;

(6)若析取范式的某一个简单合取式中缺少该命题公式中所规定的命题变元，如缺少命题变元P，则可用公式(¬P∨P)∧Q=Q将命题变元补进去，并利用分配律展开，然后合并相同的简单析取式，此时得到的简单析取式将是标准的极大项；

(7)利用幂等律将相同的极小项和极大项合并,同时利用交换律进行顺序调整，由此可转换成标准的主析取范式和主合取范式。

第四次作业最大问题：

主合取范式还是容易出错，注意对应关系，代入赋值验证
第三题对于条件的理解与表达，至少不能直接用交

---

1. **利用等值演算先求解下列公式的主析取范式，再根据主析取范式转换得到对应的主合取范式。**
    1. $(P \wedge Q) \vee R$

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge Q) \vee R \\
\Leftrightarrow &(P \wedge Q \wedge T) \vee (T \wedge T \wedge R) \qquad \text{幺律} \\
\Leftrightarrow &(P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R) \qquad \text{排中律} \\
\Leftrightarrow &(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \qquad \text{分配律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \qquad \text{幂等律，交换律（主析取范式）} \\
\Leftrightarrow &m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \qquad \text{（主析取范式）}
\end{aligned}
$$

    转换（记原式为G）：

$$
\begin{aligned}
G &\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \\
\neg G &\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4 \\
G &\Leftrightarrow \neg\neg G \Leftrightarrow \neg(m_0 \vee m_2 \vee m_4) \\
&\Leftrightarrow \neg m_0 \wedge \neg m_2 \wedge \neg m_4 \qquad \text{德摩根律（主合取范式）} \\
&\Leftrightarrow (M_0 \wedge M_2 \wedge M_4) \qquad \text{德摩根律（主合取范式）} \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \qquad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}
$$

    2. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \land (Q \to R) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor R) \qquad \text{蕴含等值式} \\
\Leftrightarrow &((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land R) \qquad \text{分配律} \\
\Leftrightarrow &((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land R) \lor (Q \land R)) \qquad \text{分配律} \\
\Leftrightarrow &((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land R) \lor (Q \land R)) \qquad \text{分配律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land R) \lor (Q \land R) \qquad \text{排中律，幺律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q \land (R \lor \neg R)) \lor (\neg P \land (Q \lor \neg Q) \land R) \lor ((P \lor \neg P) \land Q \land R) \qquad \text{幺律，排中律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land \neg R)) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \\
&\lor (P \land Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \qquad \text{幺律，排中律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \qquad \text{幂等律，交换律（主析取范式）} \\
\Leftrightarrow &m_0 \lor m_1 \lor m_3 \lor m_7 \qquad \text{幂等律，交换律（主析取范式）}
\end{aligned}
$$

转换（记原式为G）：

$$
\begin{aligned}
G &\Leftrightarrow m_0 \lor m_1 \lor m_3 \lor m_7 \\
\neg G &\Leftrightarrow m_2 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_6 \\
G &\Leftrightarrow \neg\neg G \Leftrightarrow \neg(m_2 \lor m_4 \lor m_5 \lor m_6) \\
&\Leftrightarrow (M_2 \lor M_4 \lor M_5 \lor M_6) \qquad \text{德摩根律（主合取范式）} \\
&\Leftrightarrow (P \lor \neg Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor R) \land (\neg P \lor Q \lor \neg R) \land (\neg P \lor \neg Q \lor R) \qquad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}
$$

---

2. **利用主析取范式或主合取范式求证**

$$
(P \to Q) \land (P \to R) \iff P \to (Q \land R)
$$

证明:

1. 主析取范式:

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \land (P \to R) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \qquad \text{蕴含等值式} \\
\Leftrightarrow &((\neg P \lor Q) \land \neg P) \lor ((\neg P \lor Q) \land R) \qquad \text{分配律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \lor (Q \land \neg P)) \lor ((\neg P \land R) \lor (Q \land R)) \qquad \text{分配律，幂等律} \\
\Leftrightarrow &\neg P \lor (Q \land R) \qquad \text{吸收律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land (Q \lor \neg Q) \land (R \lor \neg R)) \lor ((P \lor \neg P) \land Q \land R)) \qquad \text{幺律，排中律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \qquad \text{分配律，交换律（主合取范式} \\
\Leftrightarrow &m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_7 \qquad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P \to (Q \land R) \\
\Leftrightarrow &\neg P \lor (Q \land R) \qquad \text{蕴含等值式} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land (Q \lor \neg Q) \land (R \lor \neg R)) \lor ((P \lor \neg P) \land Q \land R)) \qquad \text{幺律，排中律} \\
\Leftrightarrow &(\neg P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \qquad \text{分配律，交换律（主合取范式} \\
\Leftrightarrow &m_0 \lor m_1 \lor m_2 \lor m_3 \lor m_7 \qquad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}
$$

$$
(P \to Q) \land (P \to R) \iff P \to (Q \land R) \qquad \text{主析取范式存在唯一性}
$$

2. 主合取范式:

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \wedge (P \to R) \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \quad \text{蕴含等值式} \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \quad \text{幺律，矛盾律} \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \quad \text{分配律，幂等律，交换律（主合取范式）} \\
\Leftrightarrow & M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \quad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& P \to (Q \wedge R) \\
\Leftrightarrow & \neg P \vee (Q \wedge R) \quad \text{蕴含等值式} \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \quad \text{分配律} \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R)) \wedge (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q) \vee R) \quad \text{幺律，矛盾律} \\
\Leftrightarrow & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \quad \text{分配律，幂等律，交换律（主合取范式）} \\
\Leftrightarrow & M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \quad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}
$$

$$
(P \to Q) \wedge (P \to R) \iff P \to (Q \wedge R) \quad \text{主合取范式存在唯一性}
$$

3. **利用主析取范式求解满足以下条件的派遣问题。某科研所要从 3 名科研骨干 A，B，C 中挑选 1-2 名出国进修，由于工作需要，选派时要满足以下条件：**
   ①若 A 去，则 C 同去；
   ②若 B 去，则 C 不能去；
   ③若 C 不去，则 A 或 B 可以去。

第三个条件可以理解成 $\neg C \to (A \vee B), \neg C \to ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)), \neg C \to T$，合理即可。

答：分别记 A，B，C 被选择出国进修为 A，B，C，则：
① $A \to C$
② $B \to \neg C$
③ $\neg C \to (A \vee B)$
满足三个条件：
(隐含第四个条件，选 1-2 名出国进修：$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$)

$$
\begin{aligned}
& (A \to C) \wedge (B \to \neg C) \wedge (\neg C \to (A \vee B)) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \quad \text{蕴含等值式，双重否定律，交换律} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee (B \wedge \neg B) \vee C) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \quad \text{矛盾律，幺律} \\
\Leftrightarrow & (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \quad \text{分配律，幂等律，交换律（主合取范} \\
\Leftrightarrow & M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6 \wedge M_7 \quad \text{（主合取范式）} \\
\Leftrightarrow & m_1 \vee m_2 \vee m_5 \text{（主析取范式）} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \quad \text{（主析取范式）}
\end{aligned}
$$

由主析取范式可知，由三种可能选择：1.C去，A,B不去，2.B去，A,C不去，3，A和C去，B不去。

$$
\begin{aligned}
& (A \to C) \wedge (B \to \neg C) \wedge (\neg C \to (A \vee B)) \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \quad \text{蕴含等值式，双重否定律，交换律} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \vee (B \wedge \neg B) \vee C) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee C) \quad \text{矛盾律，幺律} \\
\Leftrightarrow & (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \quad \text{分配律，幂等律，交换律（主合取范} \\
\Leftrightarrow & M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_6 \wedge M_7 \quad \text{（主合取范式）} \\
\Leftrightarrow & m_1 \vee m_2 \vee m_5 \text{（主析取范式）} \\
\Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \quad \text{（主析取范式）}
\end{aligned}
$$

由主析取范式可知，由三种可能选择：1.C去，A,B不去，2.B去，A,C不去，3，A和C去，B不去。
