

函数及其运算

马晓星

<http://cs.nju.edu.cn/xxm>

南京大学计算机科学与技术系



回顾

- 集合的基本概念
 - 集合及其描述
 - 集合相等、子集关系
 - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
 - 交并补、广义交、广义并
 - 集合恒等式
 - 集合相关命题的证明方式



提要

- 函数
 - 关系
 - 函数的定义
 - 单射与满射
 - 反函数
 - 函数的运算
 - 函数构成的集合、序列



有序对 (Ordered pair)

- (a, b) 是集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 的简写

- 次序的体现

$(x, y) = (u, v)$ iff $x = u$ 且 $y = v$

- 若 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, 则 $\{x\} = \{u\}$ 或 $\{x\} = \{u, v\}$, 因此 $x = u$ 。
- 假设 $y \neq v$
- (1) 若 $x = y$, 左边 = $\{\{x\}\}$, 而 $v \neq x, \therefore$ 右边 $\neq \{\{x\}\}$;
- (2) 若 $x \neq y$, 则必有 $\{x, y\} = \{u, v\}$, 但 y 既非 u , 又非 v , 矛盾。

笛卡尔乘积 (Cartesian Product)

- 对任意集合 A, B 笛卡尔积

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

- 例: $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若 A, B 是有限集合, $|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A = \{1, 2\}, \quad \mathcal{P}(A) \times A = ?$
- $|A| = m, |B| = n, |A \times B| = ?$
- $\emptyset \times \mathcal{P}(\emptyset) = ?$
- $|\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = ?$

关系 (Relation) 的定义

- 若 A, B 是集合,从 A 到 B 的一个 (二元) 关系是 $A \times B$ 的一个子集.

$$R \subseteq A \times B$$

是一个集合。

- 集合的元素是有序对
 - 可以是空集
-
- 关系意味着什么？
 - 两类对象之间建立起来的联系！

二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
 - “从 A 到 B 的关系” R ; $R \subseteq A \times B$
 - 若 $A = B$: 称为“集合 A 上的（二元）关系”
- 例子
 - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
 - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合 A 上的**空关系** \emptyset : 空关系即空集
- **全域关系** E_A : $E_A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$
- **恒等关系** I_A : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$

函数 (function)

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合 A 到 B 的**函数** f 是对元素的一种指派：给 A 的每个元素均指派 B 的一个元素。记作 $f : A \rightarrow B$
- $f : A \rightarrow B$: 函数的**型构**
- f 的**定义域** (domain) 是 A ， f 的**伴域** (codomain) 是 B
- 如果 f 为 A 中元素 a 指派的 B 中元素为 b ，就写成 $f(a) = b$ 。此时，称 b 是 a 的**像**，而 a 是 b 的**一个原像**。
- A 中元素的像构成的集合称为 **f 的值域** (range) 。
- 函数也称为**映射** (mapping) 或**变换** (transformation) 。

函数

- 备注

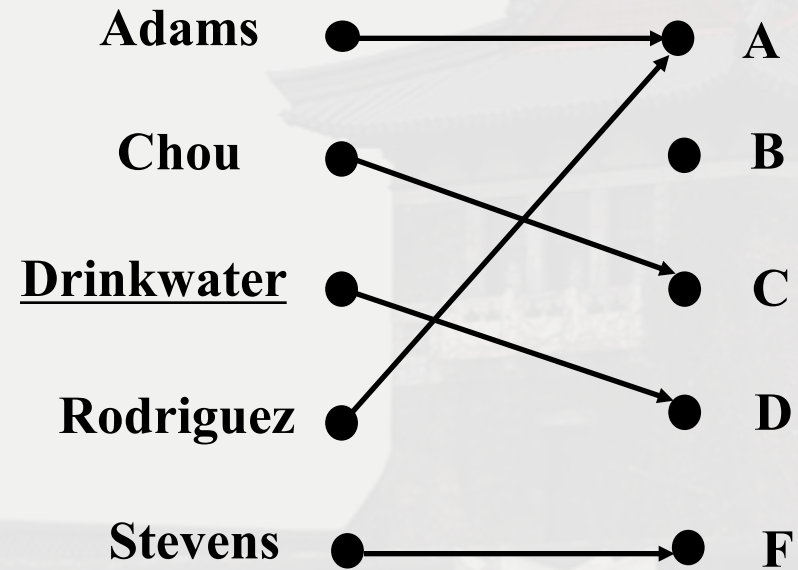
- 函数在其定义域中的每个元素都有唯一的取值
- 函数的值域是其伴域的子集
- 函数相等 $f = g$ iff
 - $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$
 - $\forall x(x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x) = g(x))$
 - $\text{codom}(f) = \text{codom}(g)$
- 若 A 和 B 皆是非空的有限集合，从 A 到 B 的不同的函数有 $|B|^{|A|}$ 个。 $(a_1, a_2, \dots, a_{|A|})$ 的像, 均有 $|B|$ 种选择)

函数是一种特殊的关系

- 若 f 是从 A 到 B 的一个函数, $R = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ 是一个从 A 到 B 的一个关系。
- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
对于 A 中的每个元素 a , B 中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb
则 R 是一个从 A 到 B 的函数。
- 如何用逻辑公式表达上述条件?

函数举例

- 某课程成绩



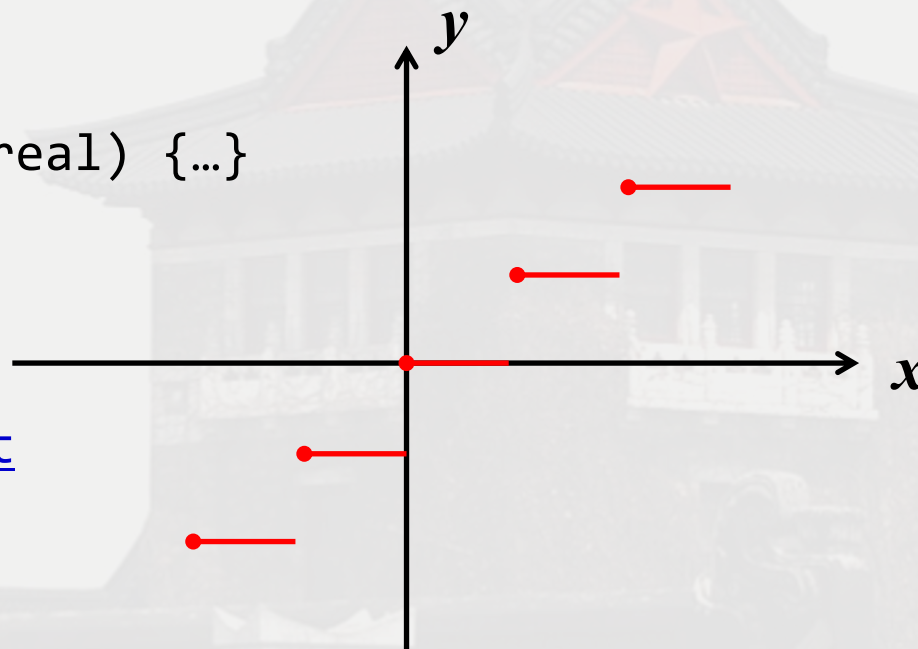
函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

Java Program

```
int floor(float real) {...}
```

float: float \rightarrow int

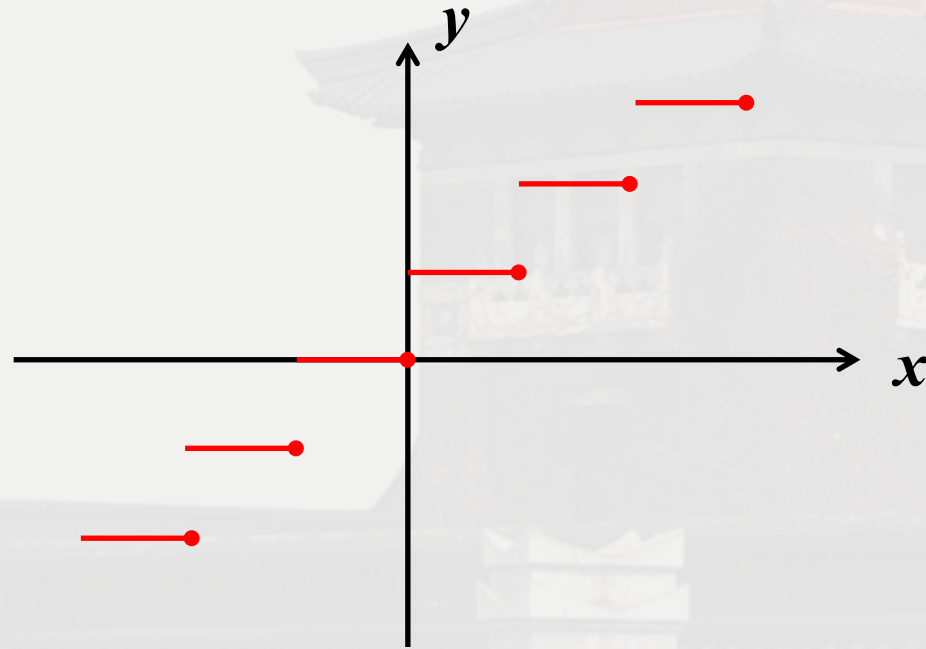


- 函数 f 的图像 (graph): $\{ (a, b) \mid a \in A \wedge f(a) \in b \}$

函数举例

- 上取整函数 $\lceil x \rceil: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

ceiling function



函数举例

- 对于任意实数 x , $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
- 对于任意实数 x , $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$
 - 令 $x = n + \epsilon$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \epsilon < 1$. 采用分情形证明方法
 - $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{2} \leq \epsilon < 1$
- “对于任意实数 x, y , $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ” – 对不对?
 - 反例: $x = y = \frac{1}{2}$

函数举例

- 设 A 为非空集合, A 上的 恒等函数 $\iota_A: A \rightarrow A$ 定义为
$$\iota_A(x) = x, \quad x \in A$$
- 设 U 为非空集合, 对任意的 $A \subseteq U$, 特征函数 $\chi_A: U \rightarrow \{0,1\}$ 定义为:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in U - A \end{cases}$$

如果要记录每节离散数学课的到课情况?

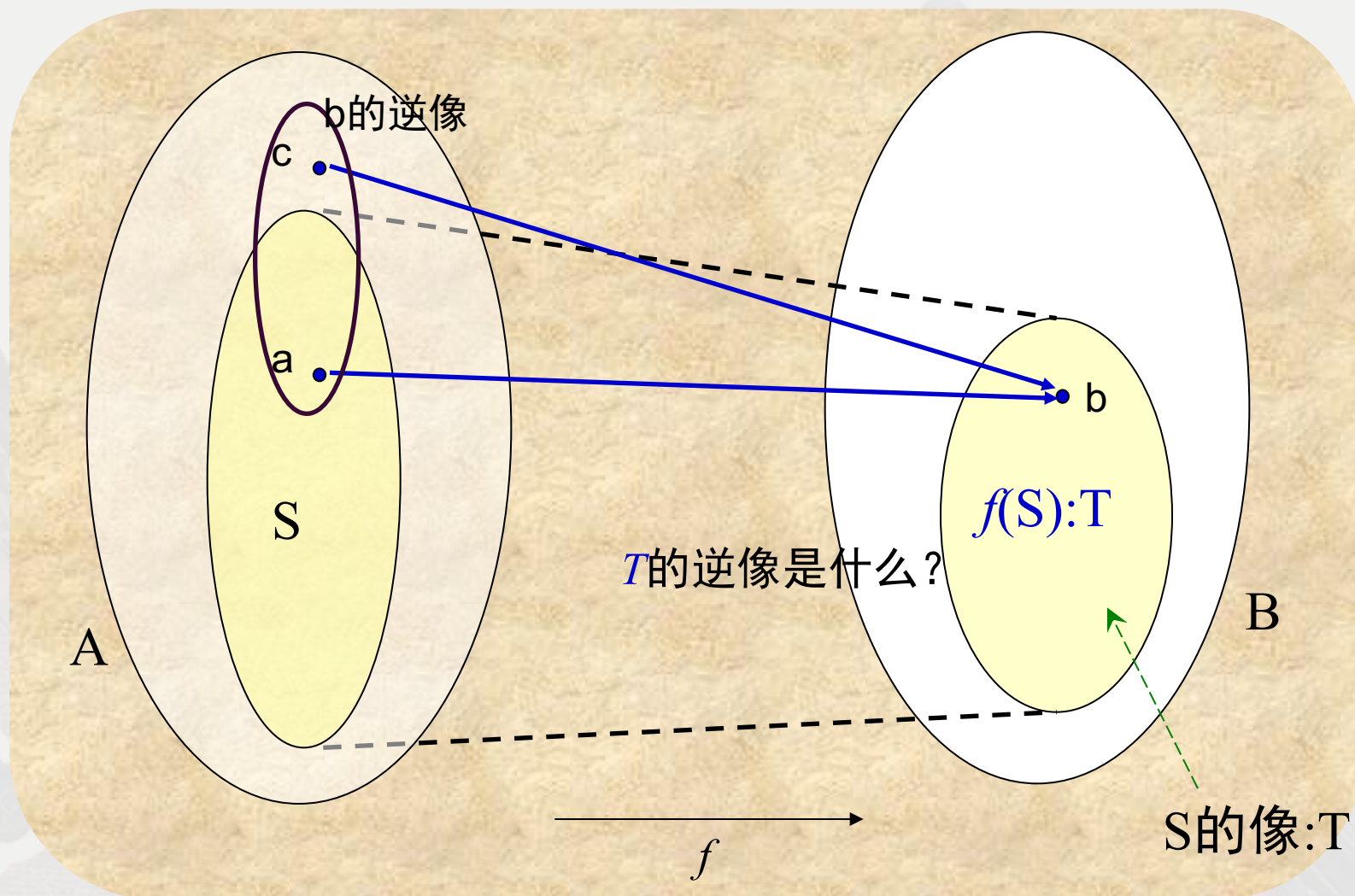
子集在函数下的像

- 设 f 是从集合 A 到 B 的函数, S 是 A 的一个子集。
 S 在 f 下的像, 记为 $f(S)$, 定义如下:

$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S. t = f(s)\}$$

- 备注: $f(A)$ 即为 f 的值域。

S 的像和逆像



并集的像

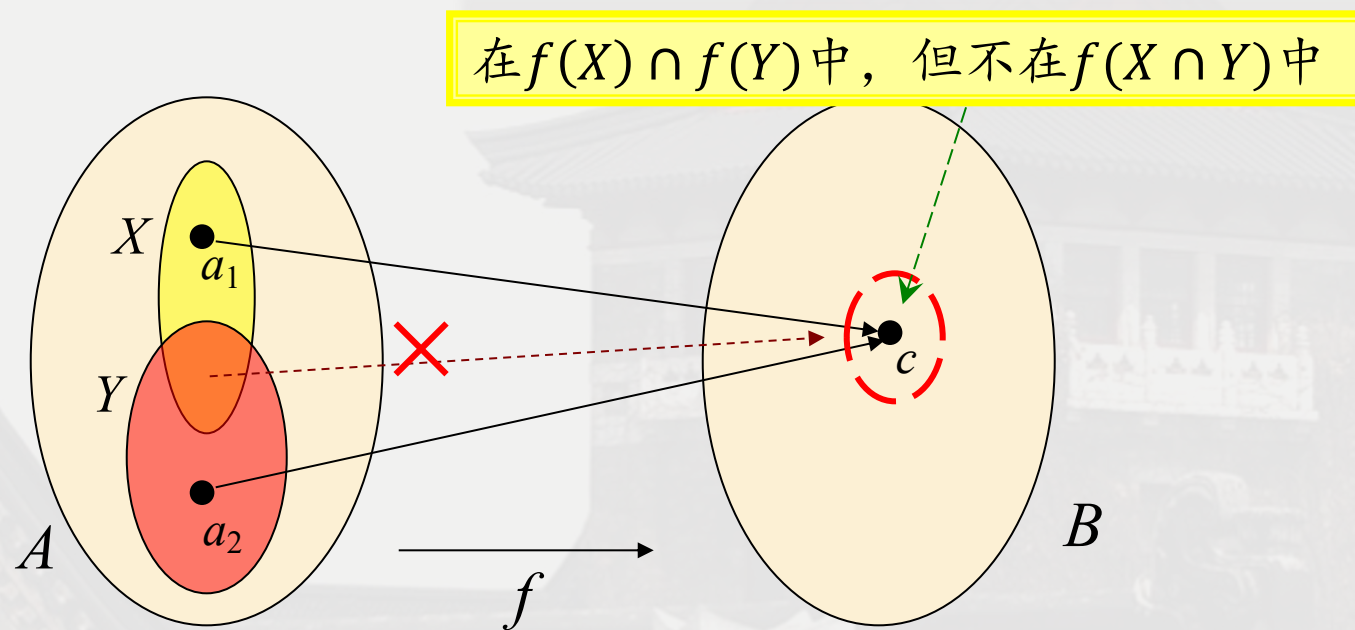
- 设函数 $f: A \rightarrow B$, 且 X, Y 是 A 的子集, 则 $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
 - 证明:
 - $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

对任意的 t , 若 $t \in f(X \cup Y)$, 则存在 $s \in X \cup Y$, 满足 $f(s) = t$;
若 $s \in X$, 则 $t \in f(X)$; 否则 $s \in Y$, 则 $t \in f(Y)$. $\therefore t \in f(X) \cup f(Y)$
 - $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

对任意的 t , 若 $t \in f(X) \cup f(Y)$,
情况1: $t \in f(X)$, 则存在 $s \in X \subseteq X \cup Y$, 满足 $f(s) = t$, $\therefore t \in f(X \cup Y)$
情况2: $t \in f(Y)$, 同样可得 $t \in f(X \cup Y)$
 $\therefore t \in f(X \cup Y)$
- 于是有 $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ 。 ■

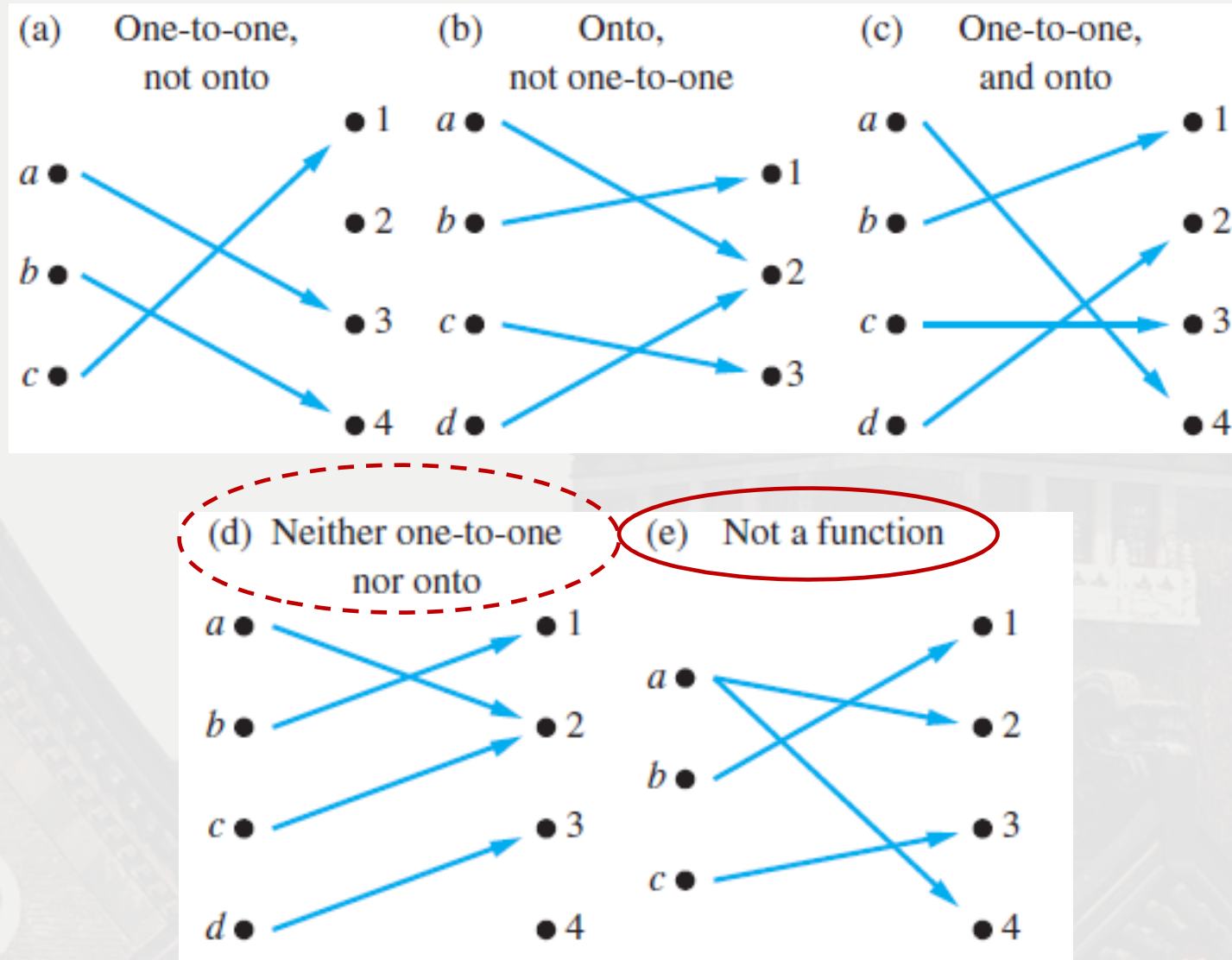
交集的像

- 设函数 $f: A \rightarrow B$ ，且 X, Y 是 A 的子集，则 $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$



函数性质

- 函数 $f: A \rightarrow B$ 是**单射**（一对一的, injection, injective function, one-to-one function）
 - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$
 - 等价的说法: $\forall x_1, x_2 \in A$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_1 = x_2$
 - //另一种等价的说法?
- 函数 $f: A \rightarrow B$ 是**满射**（映上的, surjection, surjective function, onto function）
 - $\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$
 - //等价的说法: $f(A) = B$
- 函数 $f: A \rightarrow B$ 是**双射**（一一对应）
 - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
 - 满射+单射



函数性质的证明

- 判断 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$ 的性质
- 单射?
 - 令 $f(\langle x_1, y_1 \rangle) = f(\langle x_2, y_2 \rangle)$
 - $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ 且 $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$, 易见: $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$
 - $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$
- 满射?
 - 对于任意的 $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 总存在 $\langle \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \rangle$, 使得
 - $f\left(\left\langle \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2} \right\rangle\right) = \langle a, b \rangle$

函数性质的证明

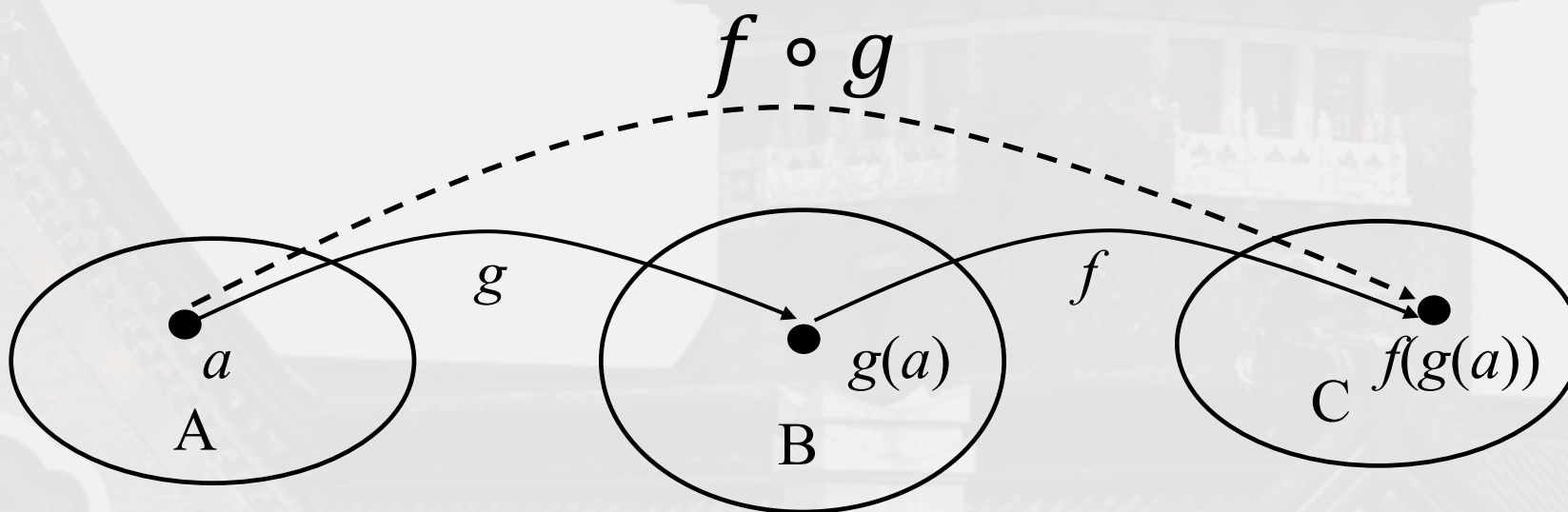
- 设 A 为有限集合， f 是从 A 到 A 的函数。 f 是单射当且仅当 f 是满射。

反函数

- 设 f 是从 A 到 B 的**双射**， f 的**反函数**是从 B 到 A 的函数，它指派给 B 中元素 b 的是 A 中满足 $f(a) = b$ 的（唯一的） a 。 f 的反函数记作 f^{-1} 。
 - $f(a) = b$ 当且仅当 $f^{-1}(b) = a$
 - 任何函数都有反函数吗？
- 例子
 - $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(\langle x, y \rangle) = \langle x + y, x - y \rangle$
 - $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f^{-1}(\langle x, y \rangle) = \langle ?, ? \rangle$

函数的复合

- 设 g 是从 A 到 B 的函数, f 是从 B 到 C 的函数, f 和 g 的复合用 $f \circ g$ 表示, 定义为: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $x \in A$



复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律

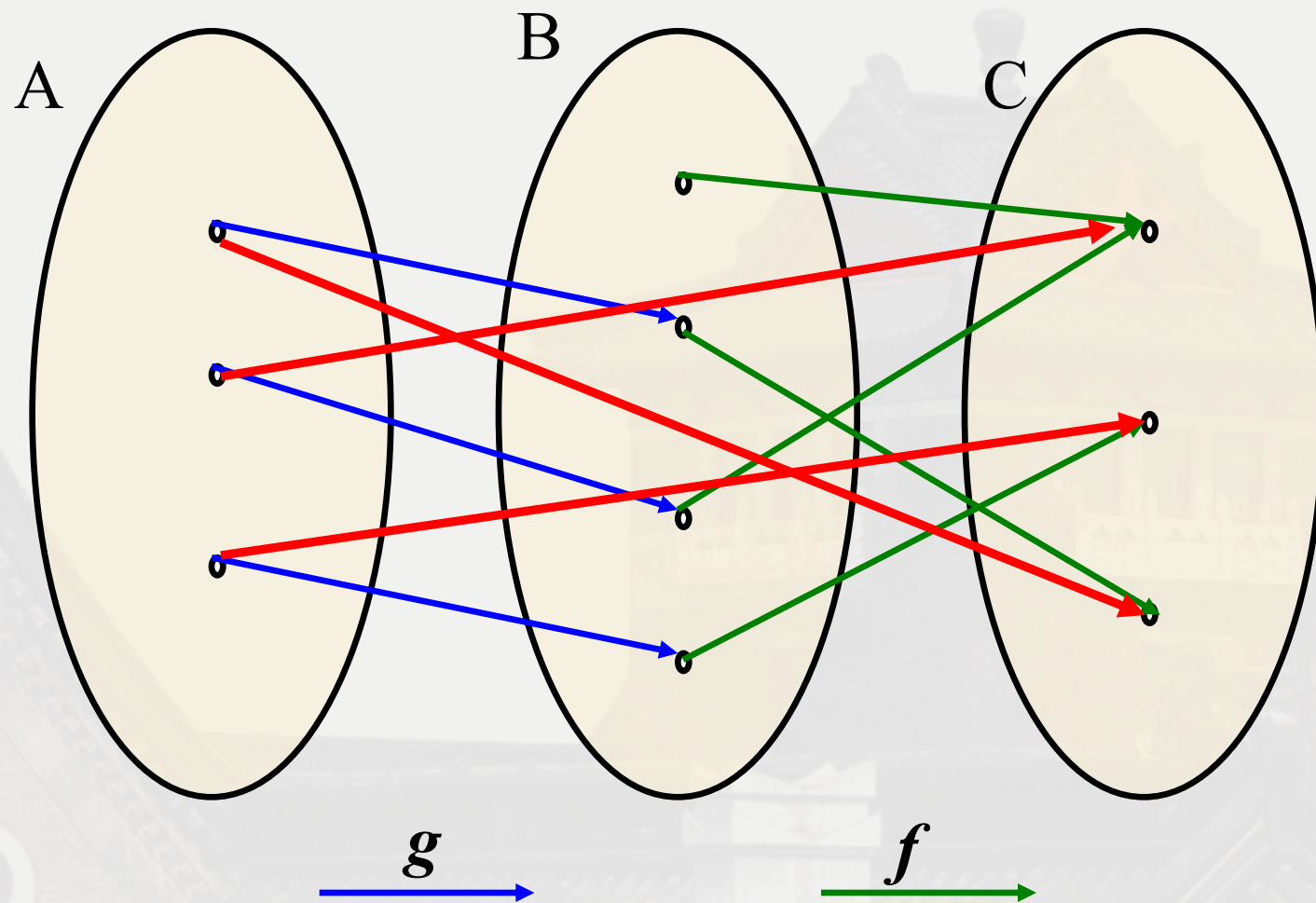
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设 f 是从 A 到 B 的双射

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= l_A \\ f \circ f^{-1} &= l_B \end{aligned}$$

但是...

- 若 $f \circ g$ 是满射，能推出 f 和 g 是满射吗？
 - f 一定是满射， g 不一定是满射。
- 若 $f \circ g$ 是单射，能推出 f 和 g 是单射吗？
 - g 一定是单射， f 不一定是单射。



函数的加法、乘法

- 设 f 和 g 是从 A 到 \mathbb{R} 的函数，那么 $f + g$ 和 $f \cdot g$ (或写作 fg) 也是从 A 到 \mathbb{R} 的函数，其定义为

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A$$

$$fg(x) = f(x)g(x), \quad x \in A$$

递增（递减）函数

- 设 f 的定义域和伴域都是实数(或其子集),
- f 是递增的

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$$

- f 是严格递增的

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$$

部分函数 (Partial Functions)

- 从集合 A 到集合 B 的**部分函数** f 是对元素的一种指派, 对 A 中的某些元素各指派 B 的一个元素。记作 $f:A \rightarrow B$ 或 $f:A \rightharpoonup B$ 或 $f:A \hookrightarrow B$
 - 对 A 中的某些元素, 部分函数 f 没有定义
 - 有定义的元素全体构成 f 的定义域
- 举例: $f:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(n) = \sqrt{n}$

函数构成的集合（回顾）

- 初等函数 ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
 - 基本初等函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数
 - 四则运算
 - 函数的复合
- 微积分
 - 基本初等函数
 - 连续？可导？可积分？
 - 运算（加、乘、除、复合）之后，连续？可导？可积分？
 - 多元函数？

函数构成的集合

- B^A : A 到 B 的所有函数构成的集合, A 和 B 皆非空。
 - 若 A 和 B 皆有限, $|B^A|=|B|^{|A|}$
 - 若 $|A|=1$, $|B^A|=|B|$
 - 若 $|B|=1$, $|B^A|=1$
 - 若 $B=\{0,1\}$, B^A 等同于 $\mathcal{P}(A)$, 为何 $\mathcal{P}(A)$ 有时记为 2^A ?

序列 (sequence)

- 一个**序列**是从 \mathbb{Z} 的一个子集（通常是 \mathbb{N} 或 \mathbb{Z}^+ ）到某个集合 S 的一个函数。我们用 a_n 代表整数 n 的像，称为这个序列的项， $\{a_n\}$ 代表这个序列。
 - 有限序列 vs 无穷序列
 - $\left\{\frac{1}{n}\right\}, n \in \mathbb{Z}^+$; $\{n^2\}$; $\{a_n\}$, 其中 $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1, k \in \mathbb{N}$
- 一个0/1无穷序列是 \mathbb{N} 到 $\{0,1\}$ 的一个函数，等同于 \mathbb{N} 的某个子集
 - $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: 0/1无穷序列全体构成的集合，也可记为 $2^{\mathbb{N}}$
 - 区间 $[0,1)$ 中的一个实数是否可以表示为一个0/1序列？

一个有趣的例子

- 自然数 $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ 的任何一种排列中，必然含一个长度不小于 $n + 1$ 的严格递增链或严格递减链。
 - $7, 4, 3, 5, 2, 1, 9, 8, 6, 10, \dots, 10, 3, 2, 6, 4, 7, 5, 9, 1, 8$
- 在所给的序列中，以 k 开始的严格递增序列长度记为 $I(k)$ ，以 k 开始的严格递减序列长度记为 $D(k)$ 。
- $f: k \rightarrow (I(k), D(k)), k \in \{1, 2, \dots, n^2 + 1\}$
 - $f(7) = (3, 5), f(4) = (4, 4), f(3) = (4, 3), f(5) = (3, 3), f(2) = (3, 2), f(1) = (3, 1)$
 - $f(9) = (2, 3), f(8) = (2, 2), f(6) = (2, 1), f(10) = (1, 1)$
- f 是单射：对于 $k_1 < k_2$ ，如果 k_1 排在 k_2 前面，则 $I(k_1) > I(k_2)$ ，如果 k_2 排在 k_1 前面，则 $D(k_2) > D(k_1)$
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于 n ：
 - f 的值域最多有 n^2 个元素
 - f 不可能是单射

小结

- 函数的定义
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的运算
- 函数构成的集合、序列

Q&A

- 欢迎提问