221900180 田永铭 计算方法作业 9

221900180 田永铭 计算方法作业9

P139 2. 改进Euler：

解：由改进的Euler公式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))]$，

代入 $y'=x+y$，$h=0.1$ 得：$(x_n=nh)$

$$y_{n+1}=\left(\frac{h^2+2h+2}{2}\right)y_n+\frac{h}{2}(nh^2+2nh)+\frac{h^2}{2}.$$

经计算：$y_0=1$，$y_1=1.1100$，$y_2=1.2421$，$y_3=1.3985$，$y_4=1.5818$，$y_5=1.7949$.

准确解为：$y(0)=1$，$y(1)=1.1103$，$y(2)=1.2428$，$y(3)=1.3997$，$y(4)=1.5836$，$y(5)=1.7974$.

6. (2) 用 Classical-Runge-Kutta 求解：

解：公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4), \\ K_1=f(x_n,y_n), \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1), \\ K_3=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_2), \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3). \end{cases}$$

代入 $y'=\frac{3y}{1+x}$，$y(0)=1$，$h=0.2$ 得：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{0.2}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=\frac{3y_n}{1+x_n} \\ K_2=\frac{3(y_n+0.1K_1)}{1+x_n+0.1} \\ K_3=\frac{3(y_n+0.1K_2)}{1+x_n+0.1} \\ K_4=\frac{3(y_n+0.2K_3)}{1+x_n+0.2} \end{cases}$$

解得：

x_n	计算的解
0.2	1.727548209
0.4	2.742951299
0.6	4.094181355
0.8	5.829210728
1	7.996012143

9. 二阶显式、隐式Adams方法：

解：① 二阶显式Adams：

$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{1}{2}h(3f_{n+1}-f_n)$，代入 $f=1-y$，$h=0.2$ 得：

$y_{n+2}=(1-\frac{3}{2}h)y_{n+1}+\frac{h}{2}y_n+h$.

② 二阶隐式Adams：

同理：$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n+\frac{2h}{2+h}$.

又由给定初值 $y_0=0$，$y_1=0.181$，∴ 结果如下：

x_n	显式 y_n	显式误差 $\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	隐式 y_n	隐式误差 $\lvert y(x_n)-y_n\rvert$	准确值
0.4	0.327	2.67995×10^{-3}	0.330	3.20046×10^{-4}	0.329679954
0.6	0.447	4.18836×10^{-3}	0.452	8.11636×10^{-4}	0.451188363
0.8	0.545	5.67103×10^{-3}	0.551	3.28964×10^{-4}	0.550671035
1.0	0.626	6.12058×10^{-3}	0.633	8.79441×10^{-4}	0.632120558

∴ 隐式方法更准确.

P161

1. 二分5次：

解：原题要求误差小于0.05，老师要求二分5次，为统一，只需二分五次正好误差小于0.05，

误差公式为 $|x^*-x_k| \le \frac{b-a}{2^{k+1}}$，令 $\frac{b-a}{2^{k+1}} \le 0.05$，得：$b-a \le 3.2$ ∴（二分五次可）

~~$\frac{b-a}{2^{k+1}} > 0.05$，得：$b-a > 1.6$（二分四次不可）~~

由于是不等式，所以"二分四次不可"条件无法直接得出。

只好先算准确值（利用工具）：1.61803398.

解 ∵ $f(x)=x^2-x-1=0$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=-1<0$，$f(2)=1>0$，

∴根在 $[1,2]$.

区间长度为1，$\frac{1}{2^{k+1}}<0.05$ 得：$k>4.322$ ∴k取5. 即正好五次二分达精确值.

∴

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$的正负性
0	1	2	1.5	−
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	−
4	1.5625	1.625	1.59375	−
5	1.59375	1.625	1.609375	−
~~6~~				

1.609375 即为最终估计所需要求（根）.

3. 迭代：

考察 $x_0=1.5$ 的邻域 $[1.3,1.6]$：

解：(1) 当 $x\in[1.3,1.6]$ 时，$\varphi(x)=1+\frac{1}{x^2}\in[1.3,1.6]$. $|\varphi'(x)|=\left|\frac{2}{x^3}\right| \le \frac{2}{1.3^3} \approx 0.9<1$.
$=L$

∴收敛.

(2) $x\in[1.3,1.6]$，$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}\in[1.3,1.6]$，$|\varphi'(x)|=\frac{2}{3}\left|\frac{x}{(1+x^2)^{2/3}}\right|<\frac{2}{3}\times\frac{1.6}{(1+1.3^2)^{2/3}}\approx 0.5$
$=L<1$.

∴也收敛

(3) $x\in[1.3,1.6]$，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $\overset{x_0}{\notin}[1.3,1.6]$，$|\varphi'(x)|=\left|\frac{1}{2(x-1)^{3/2}}\right|>1$.

∴发散.

计算：选(2)（因为L小）.

∵需要四位有效数字，

∴令 $|x^*-x^k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| < \frac{1}{2}\times10^{-3}$（有1位整数），

∴ $|x_{k+1}-x_k| < 10^{-3}$ 即可.

令 $x_0=1.5$，计算得：

k	x_k	$x_{k+1}-x_k$
1	1.481248034	
2	1.472705730	
3	1.468817314	
4	1.467047973	
5	1.466243010	$<10^{-3}$
6	1.465876820	

∴取 $k=5$ 时 $x_k=1.466$ 即可.