第九次作业参考答案

By 梁文艺 朱映

注意反证和归谬的区别。归谬由$p \vdash q, \neg q$得出$\neg p$，而反证是由$\neg p \vdash q, \neg q$得出p

---

1. **设 x 不在 p 中自由出现，求证：**
   1. $\vdash (p \to \forall xq) \to \forall x(p \to q)$
   证明：由演绎定理，只需证明 $(p \to \forall xq) \vdash \forall x(p \to q)$

$$
\begin{aligned}
&(1) p \to \forall xq && \text{假定} \\
&(2) \forall xq \to q && \text{K4} \\
&(3) p \to q && \text{(1),(2) HS} \\
&(4) \forall x(p \to q) && \text{(3) Gen}
\end{aligned}
$$

   2. $\vdash (p \to \exists xq) \to \exists x(p \to q)$
   证明：这题解法很多，这里给出一种。**注意反证律和归谬律的区别。**
   由演绎定理，只需证明 $(p \to \exists xq) \vdash \exists x(p \to q)$
   由反证律，只需证明 $\{(p \to \exists xq), \neg\exists x(p \to q)\} \vdash \gamma, \neg\gamma$，$\gamma$为某个公式

$$
\begin{aligned}
&(1) p \to \exists xq && \text{假定} \\
&(2) \forall x\neg(p \to q) && \text{假定} \\
&(3) \forall x\neg(p \to q) \to \neg(p \to q) && \text{K4} \\
&(4) \neg(p \to q) && \text{(2),(3) MP} \\
&(5) \neg(p \to q) \to p && \text{永真式（蕴涵等值式，德摩根律）} \\
&(6) \neg(p \to q) \to \neg q && \text{永真式} \\
&(7) p && \text{(4),(5) MP} \\
&(8) \neg q && \text{(4),(6) MP} \\
&(9) \exists xq && \text{(1),(7) MP} \\
&(10) \forall x\neg q && \text{(8) Gen}
\end{aligned}
$$

   上述9、10两式矛盾，因此由反证律，原式得证。

---

2. **设**$t \in T$**，**φ**和**$\varphi' \in \Phi_M$**，**φ'**是**φ**的x变通，且**$\varphi'(x) = \varphi(t)$**。用项**t**代换项**$u(x)$**中x所得的项记为**$u(t)$**，求证**$\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$
   证明：仿照讲义上进行层次归纳。
   对$u(x)$在项集T中的层次数k归纳。
   1. k=0时，有两种可能的情形：
      a) $u(x)$不包含x，即可能仅包含常元或非x变元；由于φ和φ'互为x的变通，而此时$u(x) = u(t)$，则$\varphi'(u(x)) = \varphi(u(t))$
      b) $u(x) = x$，此时$u(t) = t$，$\varphi'(u(x)) = \varphi'(x) = \varphi(t) = \varphi(u(t))$
   2. k>0时，设$u(x) = f_i^n(t_1(x), \cdots, t_n(x))$，其中$t_1(x), \cdots, t_n(x)$是较低层次的项，这时$u(t) = f_i^n(t_1(t), \cdots, t_n(t))$，有：

$$
\begin{aligned}
\varphi'(u(x)) &= \varphi'(f_i^n(t_1(x), \cdots, t_n(x))) \\
&= \bar{f}_i^n(\varphi'(t_1(x)), \cdots, \varphi'(t_n(x))) \\
&= \bar{f}_i^n(\varphi(t_1(t)), \cdots, \varphi(t_n(t))) \\
&= \varphi(u(t))
\end{aligned}
$$

   综上，归纳完毕，命题得证。

---

3. **设K中的$C=\{c_1\},F=\{f_1^1,f_1^2,f_2^2,\},R=\{R_1^2\}$。它的一个解释域是$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\},\bar{c_1}=0,\bar{f_1^k}$是后继函数，$\bar{f_1^2}$是+，$\bar{f_2^2}$是$\times$,$\bar{R_1^2}$是=。试对以下公式分别找出$\varphi,\psi\in\Phi_N$，使$|p|(\varphi)=1,|p|(\psi)=0$，其中$p$为：**
   注意，答案非常多，言之有理即可。
   1. $R_1^2\left(f_1^2(x_1,x_1),f_2^2(x_2,x_3)\right)$
      该公式为$x_1+x_2=x_2\times x_3$，任给一个成真和成假指派即可。
      φ：$\bar{x_1}=1,\bar{x_2}=1,\bar{x_3}=2$
      ψ：$\bar{x_1}=1,\bar{x_2}=1,\bar{x_3}=3$
   2. $\neg R_1^2(f_2^2(x_1,x_2),f_2^2(x_2,x_3))$
      该公式为$x_1\times x_2\neq x_2\times x_3$，同1可得：
      φ：$\bar{x_1}=1,\bar{x_2}=1,\bar{x_3}=2$
      ψ：$\bar{x_1}=1,\bar{x_2}=2,\bar{x_3}=1$
   3. $\forall x_1\ R_1^2(f_2^2(x_1,c_1),x_1)\to R_1^2(x_1,x_2)$
      对公式进行改名:$\forall x_3\ R_1^2(f_2^2(x_3,c_1),x_3)\to R_1^2(x_1,x_2)$
      该公式为，对任意x_3都满足$c_1x_3=x_3$，则$x_1=x_2$.同1可得：
      φ：$\bar{x_1}=1,\bar{x_2}=1,\bar{c_1}=0$
      ψ：分析可知前提$\forall x_3\ R_1^2(f_2^2(x_3,c_1),x_3)$ 的值恒为0，不存在项解释 ψ 使$|p|(\psi)=0$。