1.(1)

x 论域为所有饼，A(x)：饼 x 是硬的，B(x)：饼 x 好吃，C(x)：饼 x 是甜的

硬的饼都不好吃 $\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$

不硬的饼都是甜的 $\forall x\,(\neg A(x) \rightarrow C(x))$

所有好吃的饼都是甜的 $\forall x\,(B(x) \rightarrow C(x)$

推理过程：

$\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$	前提引入
$A(c) \rightarrow B(c)$，任意 c	全称示例
$\forall x\,(\neg A(x) \rightarrow C(x))$	前提引入
$\neg A(c) \rightarrow C(c)$，任意 c	全称示例
$\neg B(c) \vee C(c)$，任意 c	化简
$\forall x(B(x) \rightarrow C(x))$	全称生成

1.(2)

x 论域为所有高中生，A(x)表示高中生 x 上了艺术课，B(x)表示高中生 x 很酷，C(x)表示 x 是聪明的

上了艺术课的高中生都很酷 $\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

有聪明的高中生并不酷 $\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$

有的聪明的高中生并没上艺术课 $\exists x\,(C(x) \wedge \neg A(x))$

推理过程：

$\exists x\,(C(x) \wedge \neg B(x))$	前提引入
$C(c)\ \wedge \neg B(c)$	存在示例
$\forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$	前提引入
$A(c) \rightarrow B(c)$	全称示例
$\neg A(c) \wedge C(c)$	化简
$\exists x\,(C(x) \wedge \neg A(x))$	存在生成

2.

方案 1，利用成员表证明

A	B	C	$A\cup B\cup C$	$(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

方案 2，利用集合化简

$A-B=A\cap\neg B, B-C=B\cap\neg C, C-A=C\cap\neg A$ 带入右边的式子进行化简，即求

$(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)=(A\cap\neg B)\cup(B\cap\neg C)\cup(C\cap\neg A)\cup(A\cap B\cap C)$

因为 $\begin{aligned}&(A\cap\neg B)\cup(A\cap B\cap C)\cup(C\cap\neg A)=A\cap[\neg B\cup(A\cap C)]\cup(C\cap\neg A)\\&=(A\cap\neg B)\cup(C\cap A)\cup(C\cap\neg A)=(A\cap\neg B)\cup C\end{aligned}$

同理可得：

$(B\cap\neg C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\neg B)=(B\cap\neg C)\cup A$

$(C\cap\neg A)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B\cap\neg C)=(C\cap\neg A)\cup B$

所以：

$$\begin{aligned}&(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)=(A\cap\neg B)\cup(B\cap\neg C)\cup(C\cap\neg A)\cup(A\cap B\cap C)\\&=(A\cap\neg B)\cup C\cup(B\cap\neg C)\cup A\cup(C\cap\neg A)\cup B\\&=A\cup B\cup C\end{aligned}$$

方案 3，证明 $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)\subseteq A\cup B\cup C$ 和

$$A\cup B\cup C\subseteq(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$$

任意 $x\in(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$，则可推到出 $x\in A\cup B\cup C$，即可证明 $(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)\subseteq A\cup B\cup C$。同理，任意 $x\in A\cup B\cup C$，则可推到出 $x\in(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$，即可证明 $A\cup B\cup C\subseteq(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$。所以可证明 $A\cup B\cup C=(A-B)\cup(B-C)\cup(C-A)\cup(A\cap B\cap C)$

3.证明：令命题 P 为若f(x)是算术三角函数，则其导数$f'(x) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$也是算术三角函数

基础步骤：

1， 恒等函数$\mathrm{I}(x) = \mathrm{x}$满足命题 P。由题意得，$\mathrm{I}(x) = \mathrm{x}$是算术三角函数，其导数为 1，是常函数，也是算术三角函数，所以恒等函数满足命题 P。

2， 任意常函数 N 满足命题 P。由题意得，N 是算术三角函数，其导数为 0，是常函数，也是算术三角函数，所以任意长函数 N 满足命题 P。

3， 正弦函数$\sin(x)$满足命题 P。由题意得，$\sin(x)$是算术三角函数。其导数为:

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

可以看成是：恒等函数$\mathrm{I}(x)$加上常函数$\frac{\pi}{2}$，再与正弦函数$\sin(x)$复合得到的结果。因为三者都是算术三角函数，所以得到的结果$\sin(x + \frac{\pi}{2})$也是算术三角函数，所以$\cos(x)$是算术三角函数。

因此$\sin(x)$满足命题 P

归纳步骤：

假设 f,g 是算数三角函数，且满足命题 P，即f', g'也是算术三角函数。

则由 f,g 经过{+,·,∘}运算得到的结果为：

1， $\mathrm{f} + \mathrm{g}$，是算术三角函数，$(\mathrm{f} + \mathrm{g})'$=f'+g'，也是算术三角函数，因此满足命题 P

2， f·g，是算术三角函数，(f·g)'=f'·g+f·g'，因为 f,g,f',g'都是算术三角函数，因此满足命题 P

3， $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$，是算术三角函数，$(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})' = \mathrm{f}'(\mathrm{g}) \cdot \mathrm{g}'$，因为 f',g,g'都是算术三角函数，因此$\mathrm{f}'(\mathrm{g})$是算术三角函数，$\mathrm{f}'(\mathrm{g}) \cdot \mathrm{g}'$是算术三角函数。因此满足命题 P。

综上所述，若f(x)是算术三角函数，则其导数$f'(x) = \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$也是算术三角函数

4.

X 中每个元素都映射到 f(X)中一个元素 （函数）

f(X)中每个元素仅被映射到 1 次（单射）

f(X)中每个元素都至少被映射到 1 次（满射）

X 和 f(X)存在一一映射 f，X 和 f(X)等势

5.

方法 1：

假设$\{1,2,3\}^w$可数，则我们将其中所有元素按照某种顺序列出：

$L1 = a_{11}a_{12}a_{13} \ldots$

$L2 = a_{21}a_{22}a_{23} \ldots$

$L3 = a_{31}a_{32}a_{33} \ldots$

……

使用下列规则构造一个新的串 L

$L=a_1a_2a_3 \ldots$，其中$a_i = \begin{cases} 2 \text{ 若} a_{ii} = 1 \\ 1 \text{ 若} a_{ii} \neq 1 \text{ 或 Li 长度小于 i} \end{cases}$；

则 L 显然与所有列出的$\{1,2,3\}^w$中的元素都不同，与$\{1,2,3\}^w$中所有元素均可列出矛盾。因此$\{1,2,3\}^w$不可列，所以不可数。

方法 2：

card $\{1,2\}^w \leq$ card $\{1,2,3\}^w$，而$\{1,2\}^w \approx \{0,1\}^w$。由于$[0,1) \approx \{0,1\}^w$，从而 card $R \leq$ card $\{1,2,3\}^w$，$\{1,2,3\}^w$不可数。（$[0,1) \approx \{0,1\}^w$的证明参见课件）

- **$[0, 1) \approx \{0, 1\}^N$ 从而 $R \approx \rho(N)$**
  - **[0,1)中的数唯一地表示为$0.b_1b_2b_3b_4\ldots$**
    不容许连续无数个1，比如1/2=0. 1000… (NOT 0.0111…)
  - **$f: [0, 1) \to \{0, 1\}^N$**
    $0.b_1b_2b_3b_4\ldots \to b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$
    ***f*是单射**
  - **$g: \{0, 1\}^N \to [0, 1)$**
    $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots \to 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ //看做十进制数
    ***g*是单射**
  - **根据Bernstein定理，得证**

方法 3：

构造一个从(0,1)到$\{1,2,3\}^w$的单射

令$r \in (0,1) = 0.d_1d_2d_3d_4 \ldots\ldots$，$d_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

其中 0={111} 1={112} 2={113} 3={121} 4={122} 5={123} 6={131} 7={132} 8={133} 9={211}

例如 0.123 可以转换为 112113121，0.999 可以转换为 211211211

这样任意一个(0,1)中的实数均可以表示为$\{1,2,3\}^w$中的不同元素，得到一个从(0,1)到$\{1,2,3\}^w$的单射。

card $(0,1) \leq$ card $\{1,2,3\}^w$，(0,1)不可数，$\{1,2,3\}^w$不可数。

6.证明：

因为 p 是素数，所以 $3|p-1$ 或 $3|p+1$，所以 $3|p^2-1$

又因为 p 是素数，所以 $2|p-1$ 且 $2|p+1$，同时 $4|p-1$ 或 $4|p+1$，所以 $8|p^2-1$

因为 3,8 互素，所以 $24|p^2-1$

7.(1) 证明：

自反性：$\forall \mathrm{a} \in A, f(a)=f(a), a \equiv_f a,$

对称性：$\forall a, b \in A,$ 若$\mathrm{a} \equiv_f b,$ 则$f(a)=f(b),$ 所以 $f(b)=f(a), b \equiv_f a$

传递性：$\forall a, b, c \in A,$ 若$a \equiv_f b, b \equiv_f c,$ 则$f(a)=f(b), f(b)=f(c)$，

所以 $f(a)=f(c), a \equiv_f \mathrm{c}$

综上，关系$\equiv_{\mathrm{f}}$是等价关系。

(2) 对于非空集合 A 上的任意一个等价关系 R，必可得到 A 关于 R 的若干等价类

$[a_0],[a_1],\cdots,[a_k],$ 且$\bigcup_{\mathrm{i}=0}^{k}[a_i]=A, \forall 0 \le x \le y \le k, [a_x] \bigcap [a_y]=\phi$，$[a_x] \subseteq P(A)$。

由此可定义函数 $f: f(a)=[a]$

验证：(i) $\forall (x, y) \in R, xRy \Rightarrow [x]=[y], f(x)=f(y),$ 即$(x, y) \in \equiv_f,$ 所以$R \subseteq \equiv_f$

(ii) $\forall (x, y) \in \equiv_f, f(x)=f(y) \Rightarrow [x]=[y] \Rightarrow xRy \Rightarrow (x, y) \in R \Rightarrow \equiv_f \subseteq R$

因此 R=$\equiv_{\mathrm{f}}$。

8.(1) 数学归纳法．L的非空子集S的大小是 1 时，显然S有最小上界．设S的大小为$k, (k \geq 1)$时，S有最小上界．当S的大小为$k+1$时，即$S = \{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}\}$．由假设知，$a_1, a_2, \dots, a_k$有最小上界，记为$u$，记$u^* = u \vee a_{k+1}$，显然，$u^*$是$S$的上界．对于$S$的任意上界$u'$，$u \preccurlyeq u'$，$a_{k+1} \preccurlyeq u'$，即$u'$是$u$和$a_{k+1}$的上界，所以$u^* \preccurlyeq u'$．于是$u^*$是$S$的最小上界．又因为$L$是非空有限集，$L$的任意非空子集是有限集，所以$L$的任意非空子集都有最小上界，同理，$L$的任意非空子集都有最大下界．综上，$\langle L, \preccurlyeq \rangle$必是完全格．

(2) $\langle \mathcal{R}, \leq \rangle$　(注：集合需是非空无限集)

(3) 任意$x \in A$，$\wedge A \preccurlyeq x$，$f(x) \preccurlyeq x$，由函数的单调性，有$f(\wedge A) \preccurlyeq f(x) \preccurlyeq x$，所以$f(\wedge A)$是$A$的下界，于是$f(\wedge A) \preccurlyeq \wedge A$．再由函数的单调性，有$f\big(f(\wedge A)\big) \preccurlyeq f(\wedge A)$，所以$f(\wedge A) \in A$，于是$\wedge A \preccurlyeq f(\wedge A)$．综上，$\wedge A \preccurlyeq f(\wedge A) \preccurlyeq \wedge A$，所以$f(\wedge A) = \wedge A$．

(4) 对于任意不动点$p = f(p)$，有$p \in A$，$\wedge A \preccurlyeq p$，所以$\wedge A$是最小不动点．