221900180田永铭 数理逻辑作业6

Problem1 证明 FOL 公理的有效性

证明以下几组 FOL 公理均是有效的
- 第三组公理：$\vDash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
- 第四组公理：$\vDash \alpha \to \forall x\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
- 第五组公理：$\vDash x = x$
- 第六组公理：$\vDash (x = y) \to (\alpha \to \alpha\prime)$，其中 α 为原子公式，$\alpha\prime$ 为对 α 中的 x 进行0次或多次替换成y后得到的 wff

证明：

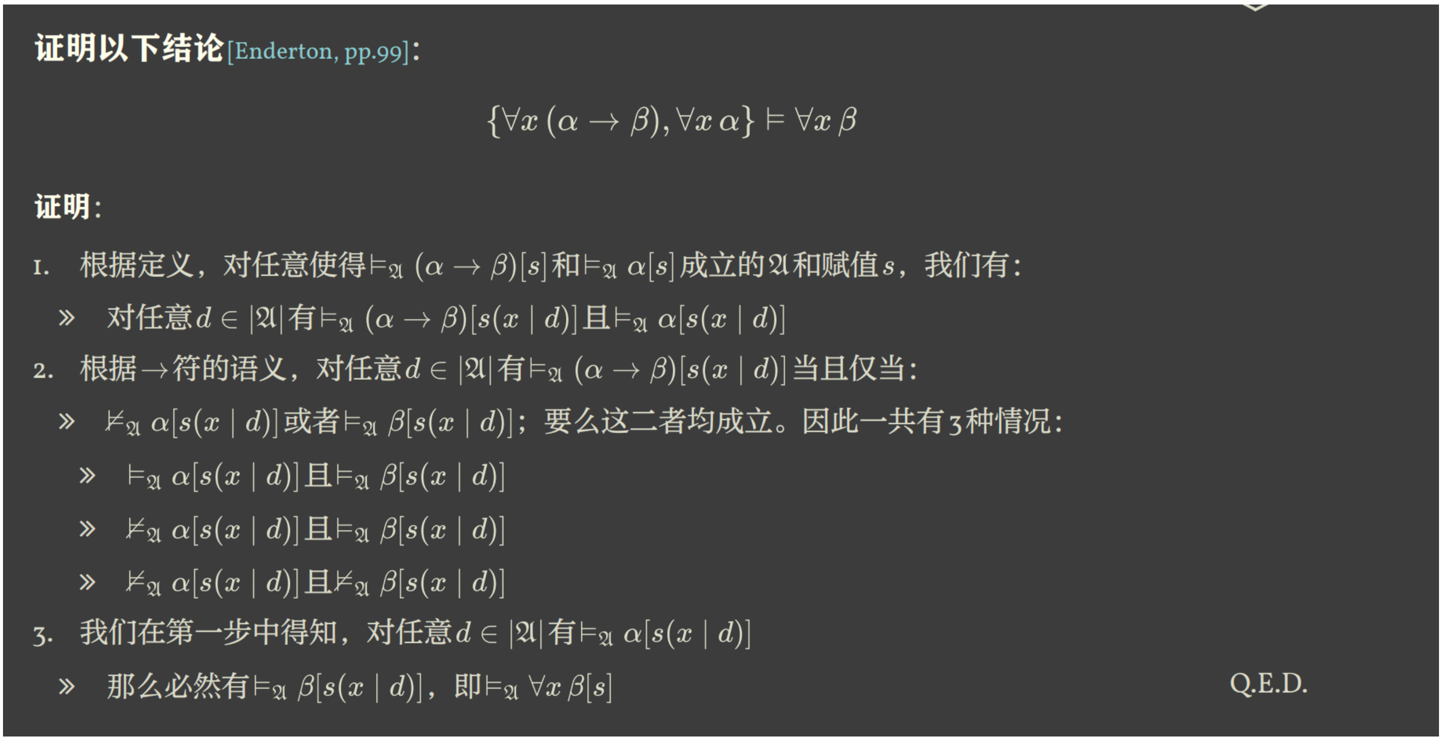
（1）第三组公理：$\vDash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$

证明：

利用演绎定理，改公理等价于：

$\{\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\alpha\} \vDash \forall x\beta$. (1)

而(1)式在PPT的6.17页已经完全证明，如图：



所以得证.

证毕!

（2）第四组公理：$\vDash \alpha \to \forall x\alpha$**，其中** x **不在** α **中自由出现**

证明：

除了ppt上已经给出的证明方法外，还可以如下证明：

对任意结构$\mathfrak{A}$和赋值$s: V \to |\mathfrak{A}|$有：

若有$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$,则 对于所有的$d \in |\mathfrak{A}|$, s 与 $s(x|d)$ 对于α 中的自由变元均取值一致（这是因为x不在α中自由出现），由定理22A可得：

$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] iff \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$.

所以有$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$.

由d的任意性以及结构和赋值的任意性得：

$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\alpha[s]$.

所以有：

$\vDash \alpha \to \forall x\alpha.$

证毕!

(3) 第五组公理: $\vDash x = x$

证明:

显而易见，任意一个结构$\mathfrak{A}$通过赋值s满足 $x = x$ 当且仅当 赋值s满足$s(x) = s(x)$,而同一个赋值函数对同一个元素进行赋值，得到的结果一定是相等的，所以这显然成立.

证毕!

(4) 第六组公理: $\vDash (x = y) \to (\alpha \to \alpha\prime)$**，其中** α **为原子公式，**$\alpha\prime$ **为对** α **中的** x **进行**0**次或多次替换成y后得到的 wff**

证明:

利用演绎定理知，只需证明:

$\{x = y, \alpha\} \vDash \alpha'.$

证明如下:

取任意结构$\mathfrak{A}$和赋值$s : V \to |\mathfrak{A}|$，使之满足:

$\vDash_{\mathfrak{A}} x = y[s]$,即$s(x) = s(y).$

断言：所有的项t都具有这样的性质：若t'可以由t通过将某些位置的x换为y获得,则$\bar{s}(t') = \bar{s}(t)$,理由如下:

对t的长度作归纳即可。长度为1显然，假设长度为n满足，则长度为n+1的时候，相当于在n成立的基础上又加了一次基础的替换，将公式长度拆解为1和n的部分，可以说明赋值对应都相等，所以得证.

不妨先讨论一下α含有两个项的情形，若α是$t_1 = t_2$,那么α'就是$t_1' = t_2'$,其中t_i'由t_i得到.

所以有:

$$
\begin{aligned}
\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \quad & iff \quad \bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2), \\
& iff \quad \bar{s}(t_1') = \bar{s}(t_2'), \\
& iff \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha'[s].
\end{aligned}
$$

类似地，若α是$P(t_1 t_2 \cdots t_n)$(即这么多项组成的公式)，那么α'是$P(t_1' t_2' \cdots t_n')$,可以类似地证明其正确性.

证毕!

Problem2 证明FOL可靠性定理的推论

证明推论 2.31：若 Γ 是可满足的，那么它是一致的

证明:

ppt已经有一阶逻辑可靠性的证明，如下图所示:

FOL的可靠性

可靠性的证明（假设引理成立）：

根据证明的定义进行归纳证明：

1. **奠基**：证明长度为1时有以下两种情况：
   - $\varphi \in \Lambda$是逻辑公理，那么根据引理2.26有$\vDash \varphi$，因此$\Gamma \vDash \varphi$
   - $\varphi \in \Gamma$，显然有$\Gamma \vDash \varphi$
2. **归纳**：假设证明长度小于n时可靠性定理成立，当证明长度为n时：
   - 若$\varphi \in \Lambda \cup \Gamma$，则与奠基情况相同，否则
   - φ从ψ与$\psi \to \varphi$通过MP规则推导而来：根据归纳假设有$\Gamma \vDash \psi$且$\Gamma \vDash (\psi \to \varphi)$
     - 注意：这里我们使用的是定义2.7中定义的第一套公理系统，其中只有一条MP推理规则。对于有多条推理规则的系统的可靠性证明请见[Open Logic; Hao et.al.]对应章节
   - 又根据蕴含连词的解释可知$\Gamma \vDash (\psi \to \varphi)$当且仅当$\nvDash \psi$或$\vDash \varphi$
   - 前者与归纳假设中的$\Gamma \vDash \psi$矛盾，因此有$\vDash \varphi$ Q.E.D.

那么我们只需要证明一阶逻辑可靠性能够推出我们需要证明的推论即可，证明如下：

可靠性表示为：若$\Gamma \vdash \alpha$,则$\Gamma \vDash \alpha$. (1)

我们需要证明它能够推出: 若 Γ 可满足，那么Γ一致. (2)

利用反证法：

假设(1)的全部和(2)的前提均成立，且有Γ不一致.

由于Γ不一致，所以$\Gamma \vdash \perp$.

所以由(1)得：$\Gamma \vDash \perp$.

由定义得，这表示所有满足Γ的真值指派都满足$\perp$，

即不存在满足Γ的真值指派，

即Γ不可满足.

所以假设不成立，由反证法得结论成立.

我们已经证明了一阶逻辑可靠性能够推出我们需要证明的推论，所以推论也成立.

证毕!

Problem3 证明

P为二元谓词，f为一元函数，证明$\vDash x = y \to (Pzfx \to Pzfy)$

证明:

方法一:

由已经证明的第六组公理：⊨ (x = y) → (α → α′)⊨(x=y)→(α→α′)，其中 α 为原子公式，$\alpha\prime$ 为对 α 中的 x 进行0次或多次替换成y后得到的 wff， 显然该题结论也成立.

方法二:

设任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值$s: V \to |\mathfrak{A}|$，则:

$\vDash_{\mathfrak{A}} x = y \to (Pzfx \to Pzfy)[s]$

iff $\nvDash_{\mathfrak{A}} x = y[s]$或者 $\vDash_{\mathfrak{A}} (Pzfx \to Pzfy)[s]$

iff $s(x) \neq s(y)(1)$或者 $\nvDash_{\mathfrak{A}} Pzfx[s](2)$或者 $\vDash_{\mathfrak{A}} Pzfy[s](3)$.

这三者只要有一个及以上成立即可，下面证明这是对的:

不妨证明假设(1)不成立，则(2)与(3)至少有一个成立，证明如下:

因为(1)不成立，所以$s(x) = s(y)$. 所以有:

$\bar{s}(fx) = f(s(x)) = f(s(y)) = \bar{s}(fy)$.

又因为s对于同样的z赋值肯定一样，而P又是同一个函数，所以:

$\nvDash_{\mathfrak{A}} Pzfx[s]$ iff $\nvDash_{\mathfrak{A}} Pzfy[s]$.

即(2)与(3)必定成立其中一个.

所以(1)(2)(3)三者必定有一个及以上成立，所以结论成立.

证毕!

Problem4 证明

证明以下一阶逻辑公式不是逻辑有效的，但是是可满足的，其中 P 为二元谓词
$\forall x(\neg Pxx) \wedge \forall x \forall y \forall z((Pxy \wedge Pyz) \to (Pxz \wedge \forall x \exists y Pxy))$

证明:

只需要取一个使得该式子为真的结构和赋值 (1)

以及一个使得该式子为假的结构和赋值 (2)

即可.

(1)使得该式子为真的结构和赋值

设结构$|\mathfrak{A}|$中仅有一个元素{1}，Pxy这个二元谓词指的是$x \neq y$.

那么在这种结构下，原表达式的$\forall x(\neg Pxx)$显然成立，因为$1 = 1$.

而$\forall x \forall y \forall z((Pxy \wedge Pyz) \to (Pxz \wedge \forall x \exists y Pxy))$ 中的前件只能是$P_{11} \wedge P_{11}$,这显然为假，而蕴含语句前件为假就一定整个为真，所以整个蕴含语句都真.

因此，原式在这种结构和赋值下为真，即该式子是可以满足的.

(2)使得该式子为假的结构和赋值

设结构$|\mathfrak{A}|$中仅有一个元素{1}，与(1)不同的是，Pxy这个二元谓词指的是$x = y$.

则原表达式最外层合取的前面的一个式子$\forall x(\neg Pxx)$始终无法成立，由因为是合取式，所以整个式子一定为假.

因此，原式在这种结构和赋值下为假，即该式子不是逻辑有效的.

证毕!