

1. 布尔运算符 \oplus 的定义如下: $1\oplus 1=0$, $1\oplus 0=1$, $0\oplus 1=1$, $0\oplus 0=0$ 。此算子称为“异或”(XOR)算子。

化简下列表达式。

- a) $x\oplus 0$
- b) $x\oplus 1$
- c) $x\oplus x$
- d) $x\oplus \bar{x}$

- a) Since $0\oplus 0=0$ and $1\oplus 0=1$, this expression simplifies to x .
- b) Since $0\oplus 1=1$ and $1\oplus 1=0$, this expression simplifies to x' .
- c) Looking at the definition, we see that $x\oplus x=0$ for all x .
- d) This is similar to part (c); this time the expression always equals 1.

2. 定义布尔运算符 \odot : $1\odot 1=1$, $1\odot 0=0$, $0\odot 1=0$, $0\odot 0=1$, 证明下列各等式成立。(\oplus 为异或运算符)

- a) $x\odot y = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$
- b) $x\odot y = \overline{(x\oplus y)}$
- c) $x\odot y = y\odot x$

(a) 根据定义, 左边式子在 x 和 y 均相等时为 1、否则为 0; 同理, 右边式子在 x 和 y 相等时为 1、否则为 0。

(b) 真值表:

x	y	$x\odot y$	$x\oplus y$	$\overline{(x\oplus y)}$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	1

(c) 根据定义, \odot 运算符具有对称性。

3. 证明下面的恒等式成立。

- a) $x\oplus y = (x+y)\overline{(xy)}$
- b) $x\oplus y = (x\cdot\bar{y}) + (\bar{x}\cdot y)$

x	y	$x\oplus y$	$x+y$	xy	$\overline{(xy)}$	$(x+y)\overline{(xy)}$	$x\bar{y}$	$\bar{x}y$	$x\bar{y} + \bar{x}y$
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

4. 求下列布尔表达式的对偶。

a) $x+y$

b) $\bar{x} \cdot \bar{y}$

c) $x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x}$

d) $x\bar{z} + x \cdot 0 + \bar{x} \cdot 1$

(a) xy (b) $x' + y'$ (c) $(x+y+z)(x' + x' + x')$ (d) $(x+z')(x+1)(x' + 0)$

5. 证明下列等式成立或不成立。

a) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

b) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$

c) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

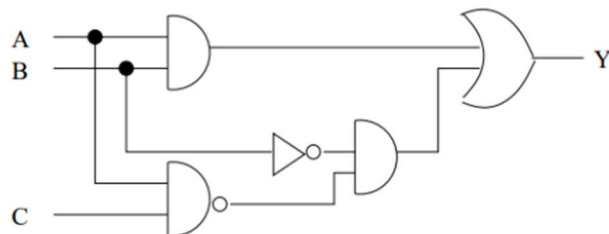
a) True, as a table of values can show

b) False; take $x = 1, y=1, z=1$, for instance

c) False; take $x=1, y=1, z=0$, for instance

6. 用逻辑电路图表示以下逻辑函数

$$Y = AB + \overline{AC}B$$



7. 代数法化简

(1)
$$\overline{\overline{XY} + \overline{XYZ} + X(Y + XY)}$$

(2)
$$(A + B)(\bar{A} + C)(B + C)$$

(3)
$$XY + \overline{XZ} + X\bar{Y}Z(XY + Z)$$

8. 证明以下公式成立

$$(1) XY + YZ + \bar{Y}Z = XY + Z$$

$$(2) AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = \bar{A} + B$$

$$(3) A + \bar{A}B + A\bar{B} = A + B$$

$$(4) \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC = AB + BC + AC$$

$$(1) XY + YZ + \bar{Y}Z = XY + (Y + \bar{Y})Z = XY + Z$$

$$(2) AB + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = AB + \bar{A} = AB + \bar{A}(1 + B) \\ = AB + \bar{A} + \bar{A}B = \bar{A} + B$$

$$(3) A + \bar{A}B + A\bar{B} = A(1 + \bar{B}) + \bar{A}B = A + \bar{A}B \\ = A(1 + B) + \bar{A}B = A + B$$

$$(4) \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\ = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC + ABC + ABC \\ = (\bar{A} + A)BC + A(B + \bar{B})C + AB(C + \bar{C}) \\ = AB + BC + AC$$

9. 将逻辑函数 $F(A, B, C, D) = A + D$ 分别表示为最小项之和的形式以及最大项之积的形式。

$$ABCD + ABC\bar{D} + AB\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}CD + A\bar{B}\bar{C}D \\ + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BCD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$$

$$(A + B + C + D)(A + B + \bar{C} + D) \\ \cdot (A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$$

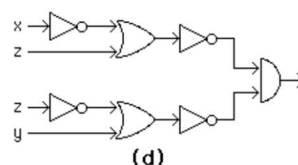
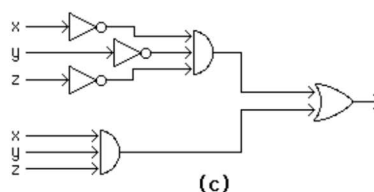
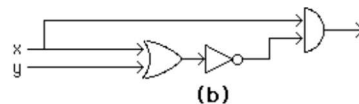
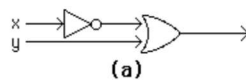
10. 用反相器、与门和或门构造产生下列输出的电路。

a) $\bar{x} + y$

b) $\overline{(x + y)} \cdot x$

c) $xyz + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$

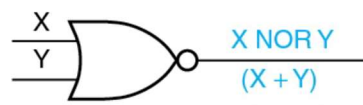
d) $\overline{(\bar{x} + z)} \cdot (y + \bar{z})$



11. 与非 (NAND) 门和或非 (NOR) 门也是电路中常用的两种门，如果使用这两种门来表示电路，就没有必要使用其他类型的门了。这两种门的记号如下：



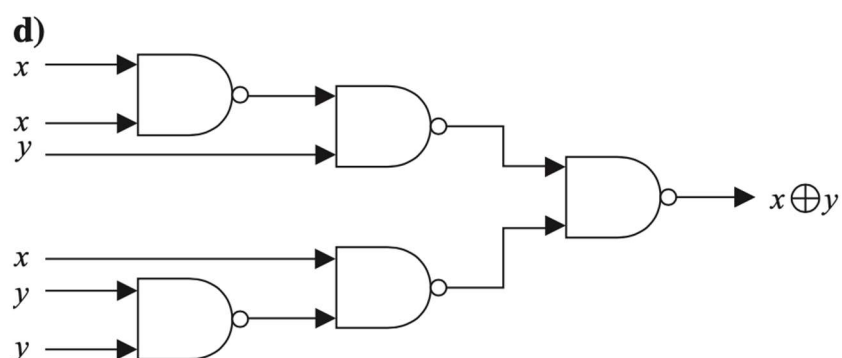
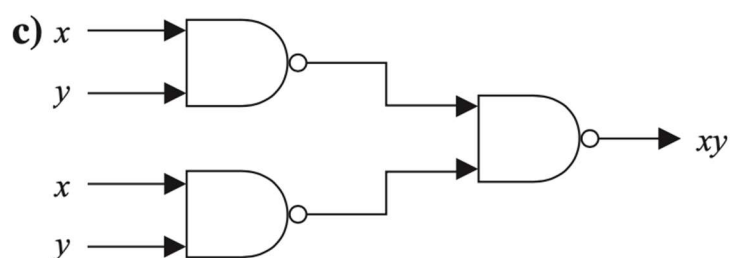
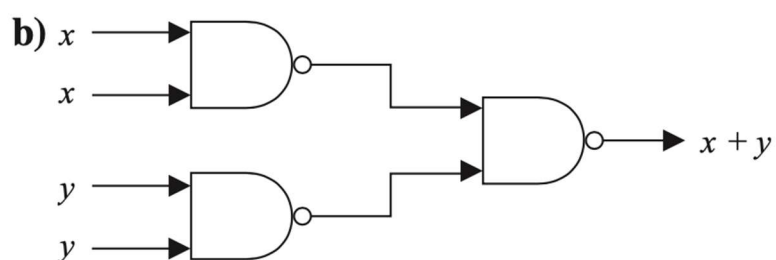
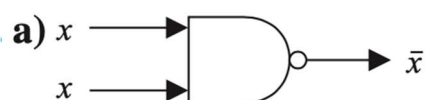
X	Y	X NAND Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



X	Y	X NOR Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

使用与非门构造具有下列输出的电路：

- a) \bar{x}
- b) $x + y$
- c) $x \cdot y$
- d) $x \oplus y$



12. 定义运算符 “|” 或 “NAND” 如下：1|1=0 且 1|0=0|1=0|0=1。证明下列式子：

- a) $\bar{x} = x|x$
- b) $x \cdot y = (x|y)|(x|y)$
- c) $x + y = (x|x)|(y|y)$

答案：

a) 使用 “|” 的定义。如果 $x=1$ ，那么 $x|x=0$ ，如果 $x=0$ ，那么 $x|x=1$ 。因此 $\bar{x} = x|x$ 。

b) 真值表。

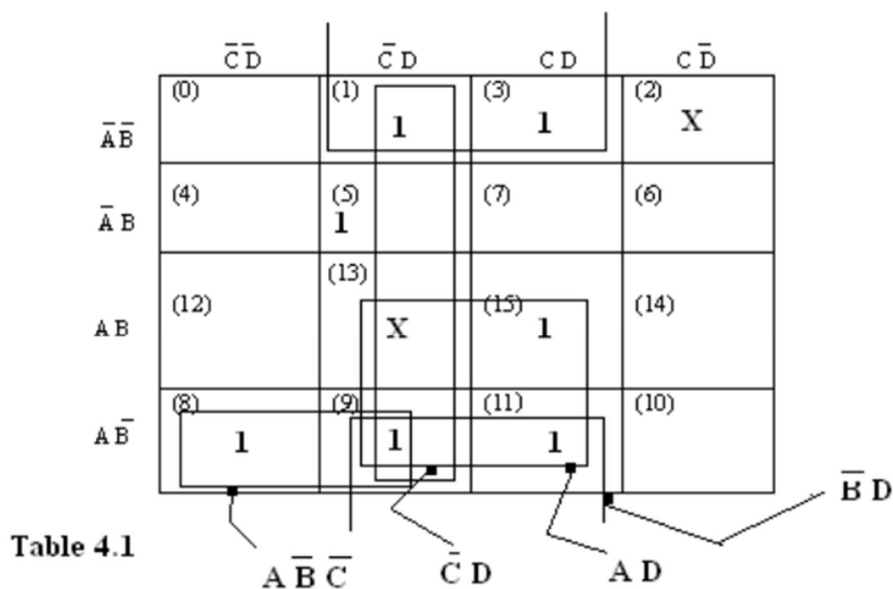
x	y	$x y$	$(x y) (x y)$	xy
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

c) 真值表。

x	y	$x x$	$y y$	$(x x) (y y)$	$x+y$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0

13. 用卡诺图化简以下逻辑函数(d 表示无关项)

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1,3,5,8,9,11,15) + d(2,13)$$



The minimized logic expression in SOP form is $F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{C}D + \bar{B}D + AD$

14. 构造 $F(x,y,z) = x \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z + y \cdot \bar{z}$ 的卡诺图。使用此卡诺图找出 $F(x,y,z)$ 的蕴含项、质蕴含项和实质蕴含项。

答案：

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
x	1	1	1	
\bar{x}		1		

蕴含项： $x \cdot y \cdot z, x \cdot y \cdot \bar{z}, x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}, \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}, x \cdot y, x \cdot \bar{z}, y \cdot \bar{z}$

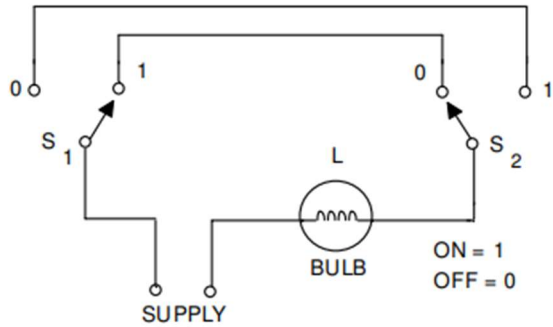
质蕴含项： $x \cdot y, x \cdot \bar{z}, y \cdot \bar{z}$

实质蕴含项： $x \cdot y, x \cdot \bar{z}, y \cdot \bar{z}$

15. 实现一个楼梯间的灯泡控制系统，灯泡可以分别用楼下和楼上的两个开关 S_1 和 S_2 控制：

(1) 写出这个系统的真值表。

(2) 写出 SOP 形式的逻辑表达式。



S_1	S_2	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

逻辑表达式： $L = \bar{S}_1 S_2 + S_1 \bar{S}_2$

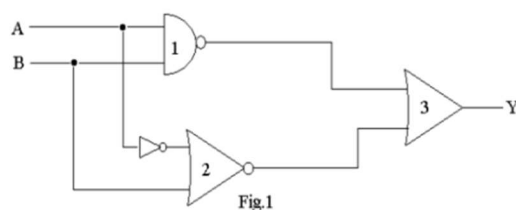
16.

题目16. 用尽量少的门电路实现异或函数: $Y = A\bar{B} + \bar{A}B$

解答. $Y = (A + B)\overline{AB}$

17.

题目17. 写出Fig.1所示逻辑电路的布尔表达式, 并将其化简。



解答. $Y = (AB)' + (A' + B)' = A' + B'$

18. 用卡诺图找出下列关于变元 w 、 x 、 y 和 z 的函数的一个极小展开式, 且此展开式具有积之和的形式。

- a) $w \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
 b) $w \cdot x \cdot y \cdot \bar{z} + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{w} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
 c) $w \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot y \cdot \bar{z} + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z$
 $+ \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
 d) $w \cdot x \cdot y \cdot z + w \cdot x \cdot y \cdot \bar{z} + w \cdot x \cdot \bar{y} \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot x \cdot y \cdot z$
 $+ \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot z + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{w} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$

答案:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx	1		1	1
$w\bar{x}$		1		1
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

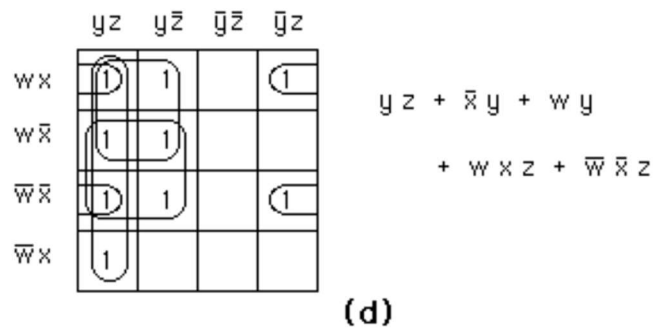
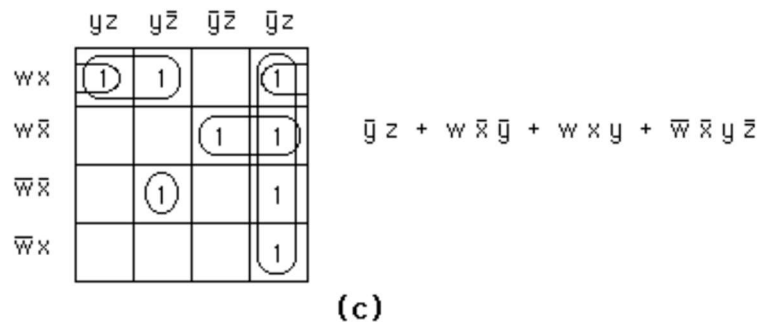
$$w\bar{x}y\bar{z} + wxz + w\bar{x}\bar{y} + w\bar{y}z$$

(a)

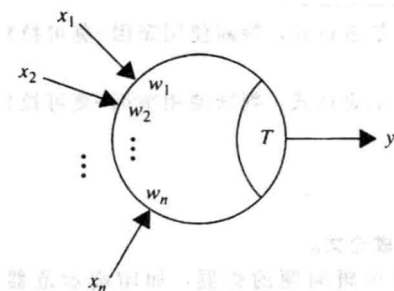
	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
wx		1		1
$w\bar{x}$	1			
$\bar{w}\bar{x}$		1		1
$\bar{w}x$				1

$$wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{y}z + x\bar{y}z$$

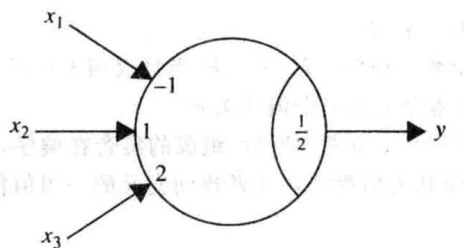
(b)



19. 给定布尔变元 x_1, x_2, \dots, x_n 的一组输入值, 阈值门产生输出 y , 其中 y 为 0 或 1。每个阈值门都有一个**阈值** T 以及一组权 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 其中 T 和 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 都是实数。阈值门的输出 y 是 1 当且仅当 $\omega_1x_1 + \omega_2x_2 + \dots + \omega_nx_n \geq T$ 。具有阈值 T 和权 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 的阈值门如下入所示:



阈值门表示了一个布尔函数。试找出由下面阈值门表示的布尔函数的布尔表达式。



答案: $x_3 + x_2 \cdot \bar{x}_1$

20. 在 n 个输入变量上可以定义多少个逻辑函数?

答案: 2^{2^n}