

离散数学（2023）作业 14 - 偏序关系

离散数学教学组

Problem 1

下面哪些是偏序集？

1. $(\mathbb{Z}, =)$
2. (\mathbb{Z}, \neq)
3. (\mathbb{Z}, \geq)
4. (\mathbb{Z}, \mid)

答案：

1. 是
2. 不是
3. 是
4. 不是

Problem 2

在下面的偏序集中，找出两个不可比元素：

1. $(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$
2. $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, \mid)$

答案：

1. 例如： $\{0\}$ 和 $\{1\}$
2. 例如：4 和 6

Problem 3

集合 S 的幂集上的偏序 $\{(A, B) \mid A \subseteq B\}$ 的覆盖关系是什么？其中 $S = \{a, b, c\}$ 。

答案：

$(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{c\}),$
 $(\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}),$
 $(\{b\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{b, c\}),$
 $(\{c\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{b, c\}),$
 $(\{a, b\}, \{a, b, c\}), (\{a, c\}, \{a, b, c\}), (\{b, c\}, \{a, b, c\})$

Problem 4

证明：一个有穷偏序集可以从它的覆盖关系重新构造出来。

「提示：证明偏序集是它的覆盖关系的自反传递闭包。」

答案： 设 (S, \preceq) 是一个有穷偏序集。需要验证这个有穷偏序集是它的覆盖关系的传递闭包。即需要证明：1) 对于 (S, \preceq) 中的 $\forall(a, b) \in$ 它的覆盖关系的自反传递闭包；2) 对于覆盖关系的传递闭包中的 $\forall(a, b) \in (S, \preceq)$ 。

1. $\forall(a, b) \in (S, \preceq)$ ，则 $a = b$ ，则 $(a, a) \in$ 它的覆盖关系自反传递闭包；或 $a \prec b$ 且不存在 z ， $a \prec z \prec b$ ，在 $(a, a) \in$ 它的覆盖关系；或存在 a_1, a_2, \dots, a_n 使得 $a \prec a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n \prec b$ 且 $a \prec a_1 \in$ 它的覆盖关系。则 $(a, b) \in$ 它的覆盖关系自反传递闭包。对于 (S, \preceq) 中的 $\forall(a, b) \in$ 它的覆盖关系的自反传递闭包。
2. $\forall(a, b) \in$ 覆盖关系的自反传递闭包，则 $a = b$ ，则 $(a, a) \in (S, \preceq)$ ；或 $a \prec b$ ， $(a, a) \in (S, \preceq)$ ；或者 $a \prec a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_n \prec b$ ，因为 \preceq 是传递的，所以 $(a, b) \in (S, \preceq)$ 。

Problem 5

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq)$$

回答下述问题：

1. 求极大元素。
2. 求极小元素。
3. 存在最大元素吗？如果存在请求出。
4. 存在最小元素吗？如果存在请求出。
5. 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界。
6. 如果存在的话，求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界。
7. 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界。
8. 如果存在的话，求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界。

答案：

1. $\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
2. $\{1\}, \{2\}, \{4\}$
3. 不存在
4. 不存在
5. $\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$
6. $\{2, 4\}$
7. $\{3, 4\}, \{4\}$
8. $\{3, 4\}$

Problem 6

证明：一个有穷非空偏序集有一个极大元素。

答案： 反证法。假设有穷非空偏序集没有极大元素，那么 $\forall b$ ，存在 a 比它大，所以集合必然无穷，这与集合有穷矛盾。命题得证。

Problem 7

给定集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, 定义关系

$$xRy \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2^k,$$

其中 $k \geq 0$ 是某一个整数。证明: (A, R) 是一个偏序集。

答案: 为了证明 (A, R) 是一个偏序集, 我们需要证明关系 R 是自反性、反对称性和传递性的。

- 自反性: 对于任意 $x \in A$, 都有 $x/x = 1 = 2^0$, 因此 xRx 成立。
- 反对称性: 假设 xRy 且 yRx , 则存在整数 k 和 l 使得 $\frac{y}{x} = 2^k$ 和 $\frac{x}{y} = 2^l$, 所以 $2^k \cdot 2^l = 2^{k+l} = 1$, 这意味着 $k+l=0$, 即 $k=l=0$ 。因此, $\frac{y}{x} = 1$ 且 $\frac{x}{y} = 1$, 即 $x=y$, 证毕。
- 传递性: 假设 xRy 且 yRz , 则存在整数 k 和 l 使得 $\frac{y}{x} = 2^k$ 和 $\frac{z}{y} = 2^l$ 。因此, 我们有 $\frac{z}{x} = \frac{z}{y} \cdot \frac{y}{x} = 2^l \cdot 2^k = 2^{k+l}$ 。因为 k 和 l 都是非负整数, 所以 $k+l$ 也是非负整数, 因此, xRz 成立, 证毕。

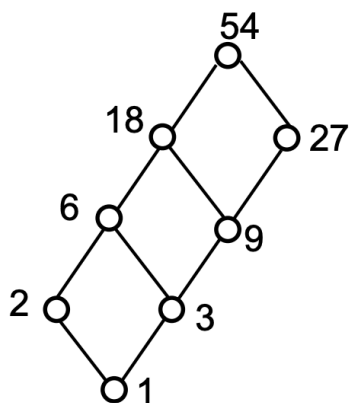
综上所述, 我们证明了关系 R 是自反性、反对称性和传递性的, 因此 (A, R) 是一个偏序集。

Problem 8

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系,

1. 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图。
2. 确定 A 中最长链的长度, 并按字典序写出 A 中所有最长的链。
3. A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链。

答案:



1.

2. 最长链长: 5。最长链: $\{1, 2, 6, 18, 54\}$, $\{1, 3, 6, 18, 54\}$, $\{1, 3, 9, 18, 54\}$, $\{1, 3, 9, 27, 54\}$
3. 至少划分成 5 个互不相交的反链: $\{54\}$, $\{18, 27\}$, $\{6, 9\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$

Problem 9

若 (A, \preceq) 是一个偏序集, 证明存在函数 $f: A \rightarrow 2^A$ (A 的幂集), 从而使得

$$f(a) \subseteq f(b) \Leftrightarrow a \preceq b$$

答案: 定义函数 $f(a) = \{x \mid x \leq a\}$ 。

Problem 10

证明: 长度为 $mn+1$ 的偏序集存在大小为 $m+1$ 的链或存在大小为 $n+1$ 的反链。

答案: 若 X 的高度为 r , 宽度为 s 。根据 Dilworth 定理, X 可以划分为 r 个反链 C_1, C_2, \dots, C_r , 并且有 $|C_1| + \dots + |C_r| = |X|$ 。因此 $|X| = |C_1| + \dots + |C_r| \leq sr$ 。若 $s \leq n$ 并且 $r \leq m$, 则 $|X| \leq mn < mn+1$ 矛盾。