221900180田永铭 数理逻辑作业5

Problem1 利用一阶逻辑证明二元关系中的相关结论

回忆你在《离散数学》中学过关于“二元关系”（relation）的知识，特别是关于传递性（transitive）、对称性（symmetric）、自反性（reflexive）和等价性（equivalent）的定义。在此基础上，对一个集合中的二元关系 R 来说：

• 如果当 R(a, b) 和 R(a, c) 成立则 R(b, c) 也成立，那么我们称 R 是一个欧几里得关系（Euclidean）
– 注：这里其实只定义了右欧几里得性（right-Euclidean），但不影响问题的理解和证明
• 如果只要 R(a, b) 成立则必有 R(b, a) 不成立，那么我们称 R 是非对称的（asymmetric）
• 如果任意一个元素与自己都不构成 R 关系，那么我们称 R 是反自反的（irreflexive）

请举例一个“既不自反也不反自反”的关系；再举例一个“既不对称也不非对称”的关系。

接下来，请判断它
们是否正确，并形式化为 FOL 来证明你的结论（六选三）。注意，若你认为命题是假的，那么举一个有效的反
例即可（不必要进行形式化证明）。

1. 若 R 是非对称的，那么它是反自反的
2. 若 R 是传递且反自反的，那么它是非对称的
3. 若 R 是传递且对称的，那么它是自反的
4. 若 R 是等价关系，那么它也是欧几里得关系
5. 若 R 是欧几里得关系且是非对称的，那么它是反自反的
6. 若 R 是欧几里得关系且是自反的，那么它是一个等价关系

举例：

1.“既不自反也不反自反”的关系：

这类关系满足关系矩阵中主对角线上既有1又有0，只需如此即可。一个形象的例子是：集合{1，2，3}上的“乘积为正偶数关系”——R(a,b) iff $\exists n \in N^*, a*b=2*n$. 则¬R(1,1),同时R(2,2).满足条件。

2.“既不对称也不非对称”的关系：

这类关系满足关系矩阵关于主对角线存在元素对称，也存在元素不对称，只需如此即可。一个形象的例子是：集合{3，4，6，8}上的“乘积为24且前者小于7关系”——R(a,b) iff a*b = 24 $\wedge a<7$.则 $R(3,8)$ 且 $\neg R(8,3)$,这不满足对称性质. 同时 $R(4,6)$ 且 $R(6,4)$，这不满足非对称性质。

证明：

注意! 为了简化，不妨在所有证明中认为关系R都定义在集合A上。在不引起歧义的情况下，略去$\in A$这个表达。

1. 若 R 是非对称的，那么它是反自反的

命题正确。

形式化为：
$\forall a \in A \quad \forall b \in A \quad R(a,b) \rightarrow \neg R(b,a) \vdash \forall x \in A, \neg R(x,x)$.

证明：

我们先假设前提成立，证明能推出后面结论（利用的是演绎定理）.

根据enderton教材中THEOREM 24I (EXISTENCE OF ALPHABETIC VARIANTS)(EAV) ,得知前提可以等价于:

$\forall x \in A \quad R(x,x) \rightarrow \neg R(x,x)$.

所以只需证：
$\forall x \in A \quad R(x,x) \rightarrow \neg R(x,x) \vdash \forall x \in A, \neg R(x,x)$.

利用反证法，假设 $\exists x_0, R(x_0,x_0)$.

则利用公理2.7.2作替换，得到 $R(x_0,x_0) \rightarrow \neg R(x_0,x_0)$.

利用MP规则得到 $\neg R(x_0,x_0)$.

这与假设中 $\neg R(x_0, x_0)$矛盾，所以假设不成立，即: $\forall x \in A, \neg R(x, x)$.

所以由演绎定理得:

$\forall a \in A \quad \forall b \in A \quad R(a, b) \rightarrow \neg R(b, a) \vdash \forall x \in A, \neg R(x, x)$.

证毕!

2. 若 R 是传递且反自反的，那么它是非对称的

命题正确。

(写法上略去"∈A")
形式化为: $\{1.\forall a \forall b \forall c\{R(a, b); R(b, c)\} \rightarrow R(a, c) \quad 2.\forall a \neg R(a, a)\} \vdash \{\forall a \forall b R(a, b) \rightarrow \neg R(b, a)\}$

证明:
我们先假设前提成立，证明能推出后面结论（利用的是演绎定理）.

利用反证法:

假设 $\exists a_0, b_0, R(a_0, b_0) \wedge R(b_0, a_0)$.(1)

将前提中的1利用公理2.7.2作替换 $\theta[a_0/c, a_0/a, b_0/b]$,(可替换性显然满足，前一次作业已经简要证明),得到:

$\{R(a_0, b_0); R(b_0, a_0)\} \rightarrow R(a_0, a_0)$.(2)

结合(1)(2),利用MP规则可得:

$R(a_0, a_0)$.(3)

将前提中的2利用公理2.7.2作替换 $\theta[a_0/a]$,得到:

$\neg R(a_0, a_0)$.(4)

(3)(4)构成矛盾，所以反证的假设不成立，所以原结论正确，利用演绎定理，即:

$\{1.\forall a \forall b \forall c\{R(a, b); R(b, c)\} \rightarrow R(a, c) \quad 2.\forall a \neg R(a, a)\} \vdash \{\forall a \forall b R(a, b) \rightarrow \neg R(b, a)\}$

证毕!

3. 若 R 是传递且对称的，那么它是自反的

命题错误。

反例：集合{1，2，3}上的相加为负数关系——R(a,b) iff $a + b < 0$. 实际上这就是一个空关系，它满足是传递和对称的（这两者的FOL中都体现为有 $\rightarrow$，而空关系前件都为假，所以恒满足）。但它不是自反的关系，因为没有任何一个元素和它自身和为负数，即属于这个关系R，即该关系不是自反的。所以该命题错误。

证毕!

4. 若 R 是等价关系，那么它也是欧几里得关系

命题正确。

事实上，我们可以证明这个问题的子集都正确，即只需要用到等价关系是传递和对称的即可.

形式化为:
$\{1.\forall a \forall b \forall c\{R(a, b); R(b, c)\} \rightarrow R(a, c) \quad 2.\forall a \forall b R(a, b) \rightarrow R(b, a)\} \vdash \{\forall a \forall b \forall c\{R(a, b); R(a, c)\} \rightarrow R(b, c)\}$.

证明:

我们先假设前提成立，证明能推出后面结论（利用的是演绎定理）.

利用概括定理和字母替换，只需证明:

$\{1.\forall a \forall b \forall c\{R(a, b); R(b, c)\} \rightarrow R(a, c) \quad 2.\forall a \forall b R(a, b) \rightarrow R(b, a)\} \vdash \{\{R(a_0, b_0); R(a_0, c_0)\} \rightarrow R(b_0, c_0)\}$.

再利用演绎规则，可得只需证明：

$$\{1.\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(b,c)\}\rightarrow R(a,c)\quad 2.\forall a\forall bR(a,b)\rightarrow R(b,a)\quad 3.\{R(a_0,b_0);R(a_0,c_0)\}\}\vdash R(b_0,c_0).$$

利用公理2.7.2对前提2作替换 $\theta[a_0/a,b_0/b]$,得到：

$$R(a_0,b_0)\rightarrow R(b_0,a_0).$$

结合前提3中$R(a_0,b_0)$ 利用MP规则得到：

$R(b_0,a_0)$.(1)

利用公理2.7.2对前提1作替换 $\theta[a_0/a,b_0/a,c_0/c]$,得：

$$\{R(a_0,b_0);R(b_0,c_0)\}\rightarrow R(a_0,c_0).$$

结合(1)式和前提3的第一个式子，利用MP规则可得：

$$R(b_0,c_0).$$

所以利用演绎定理可得：

$$\{1.\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(b,c)\}\rightarrow R(a,c)\quad 2.\forall a\forall bR(a,b)\rightarrow R(b,a)\}\vdash\{\{R(a_0,b_0);R(a_0,c_0)\}\rightarrow R(b_0,c_0)\}.$$

证毕!

5. 若 R 是欧几里得关系且是非对称的，那么它是反自反的

命题正确。

证明：注意到，这个命题完全是第一题的子集，即不需要满足欧几里得关系就能成立，由命题1的证明知，命题正确。我们不用管命题条件是否一致(实际上不一致)。

证毕!

6. 若 R 是欧几里得关系且是自反的，那么它是一个等价关系

命题正确。

因为等价关系即满足自反性、传递性、对称性的关系。此处已有自反性，所以需要有传递性和对称性才可。

对称性证明:

只需证明：{1.$\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(a,c)\}\rightarrow R(b,c)\quad 2.\forall aR(a,a)\}\vdash\forall a\forall bR(a,b)\rightarrow R(b,a).$

我们先假设前提成立，证明能推出后面结论（利用的是演绎定理）.

利用概括定理，只需要证明由前提能推出 $R(a_0,b_0)\rightarrow R(b_0,a_0)$.

再利用演绎规则，只需证明前提并上$R(a_0,b_0)$(1)能推出R(b_0,a_0).

利用公理2.7.2将前提实例化并作字母替换得到:

$\{R(a_0,b_0);R(a_0,a_0)\}\rightarrow R(b_0,a_0)$.(2)

由自反性前提利用公理2.7.2作替换得到:

$R(a_0,a_0)$.(3)

综合(1)(2)(3)式，利用MP规则的到R(b_0,a_0).

最终由演绎规则得:

{1.$\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(a,c)\}\rightarrow R(b,c)\quad 2.\forall aR(a,a)\}\vdash\forall a\forall bR(a,b)\rightarrow R(b,a).$

传递性证明:

只需证明：{1.$\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(a,c)\}\rightarrow R(b,c)\quad 2.\forall a\forall bR(a,b)\rightarrow R(b,a)\}\vdash\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(b,c)\}\rightarrow R(a,c).$

与对称性证明同理，我们只需要证明:

{1.$\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(a,c)\}\to R(b,c)\quad 2.\forall a\forall bR(a,b)\to R(b,a)\quad 3.\{R(a_0,b_0);R(b_0,c_0)\}\quad\}\vdash R(a_0,c_0)$.

利用公理2.7.2可将前提2替换为：

$R(a_0,b_0)\to R(b_0,a_0)$.

由前提3和MP规则得：

$R(b_0,a_0)$.(1)

利用公理2.7.2可将前提1替换为：

$\{R(b_0,a_0);R(b_0,c_0)\}\to R(a_0,c_0)$.(2)

由前提3的2和公式(1)以及公式(2)，利用MP规则得到：

$R(a_0,c_0)$.

所以{1.$\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(a,c)\}\to R(b,c)\quad 2.\forall a\forall bR(a,b)\to R(b,a)\}\vdash\forall a\forall b\forall c\{R(a,b);R(b,c)\}\to R(a,c)$.得证.

证毕!