南京大学工程管理学院___级_____专业

2018—2019学年第一学期

《概率论》期末试卷A（闭）

学号________ 姓名_______得分_______

以下每题10分，共100分。

得分

1. 从n双不同的鞋子中任取$2r$（$2r<n$）只，求下列事件发生的概率：（1）没有成对的鞋子；（2）恰有两对鞋子；（3）有r对鞋子。

(1) $$\frac{C_n^{2r}\times(C_2^1)^{2r}}{C_{2n}^{2r}}$$

(2) $$\frac{C_n^2\times C_{n-2}^{2r}\times(C_2^1)^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}$$

(3) $$\frac{C_n^r}{C_{2n}^{2r}}$$

$P(AAAA|ABCA)$

$P(ABCA|AAAA)$

$\alpha^2\times\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$

得分

2.将A、B、C三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为α，而输出为其他一字母的概率都是$(1-\alpha)/2$。今将字母串$AAAA$，$BBBB$，$CCCC$之一输入信道，输入它们的概率分别为p_1，p_2，p_3（$p_1+p_2+p_3=1$），已知输出为$ABCA$，问输入的是$AAAA$的概率是多少？（设信道传输各个字母的工作是相互独立的）

(1) $P(A|D) = \dfrac{P_1 \times P(D|A_1)}{P_1 \times P(D|A_1) + P_2 \times P(D|B_1) + P_3 \times P(D|C_1)}$

$P(D|A) = \alpha^2 \times \frac{(1-\alpha)^2}{2}$

$P(D|B) = \alpha \times (\frac{1-\alpha}{2})^3 = P(D|C)$

$= \dfrac{2\alpha P_1}{(3\alpha-1)P_1 + 1-\alpha}$

得分

3.随机变量 X 服从泊松分布，分布律为 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$\lambda>0$，$k=0,1,2,\cdots$。问 k 为何值时 $P\{X=k\}$ 达到最大。

$\frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{(k+1)!} - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1} - k\lambda^k}{(k+1)!}$

$= e^{-\lambda}\lambda^k \frac{(\lambda-k)}{(k+1)!}$

$\boxed{k=\lambda}$

得分

4. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0, y>0\\ 0, & 其\end{cases}$，（1）$X$ 和 Y 是否相互独立?（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy$$

$$=-\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(x+y)}dy$$

$$=\frac{x+1}{2}e^{-x}\quad f_Y(y)=\frac{y+1}{2}e^{-y}$$

$$(2)\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{z}z\,e^{-z}dy$$

得分

5. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_{m+n}$ （$n>m$）相互独立，同分布且均值为零，方差有限非零，记 $S=X_1+\cdots+X_n$，$T=X_{m+1}+\cdots+X_{m+n}$，求 S 和 T 的相关系数 ρ_{ST}。

$$E(X_k)=0,\ D(X_k)=\sigma^2=E(X_k^2)$$

$$E(X_kX_l)=E(X_k)\cdot E(X_l)=0$$

$$D(S)=D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=n\sigma^2$$

$$D(T)=D\left(\sum_{k=m+1}^{m+n}X_l\right)=n\sigma^2$$

$$\mathrm{cov}(S,T)=(n-m)\sigma^2$$

$$\rho=\frac{(n-m)\sigma^2}{n\sigma^2}$$

得分

6. 从一副52张牌（不含大小王）内抽取3张牌（无放回），记 X 表示选中A的张数，求 $E[X|\text{黑桃}A\ldots]$. => $E(X|\text{黑桃}A\text{选中})$

$$\frac{3}{13}$$

$$\underline{E(X)}=E(X|A)\cdot P(A)+E(X|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$$

?　　$\frac{3}{52}$　　$\underline{\quad 11\quad}$　　$\frac{49}{52}$

$$E(X_i)=P\{X_i=1\}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

$E(x_i|\bar{A}) = \frac{3}{51}$

得分

7. 设某箱子中有两种灯泡，第i种灯泡的寿命均值为μ_i，标准差为σ_i，i=1,2.现从箱中随机抽取一灯泡，抽到第一种的概率为p,抽到第二种的概率为1-p,记抽出的灯泡寿命为X，求(1)E[X],(2)Var[X].

(1) $E(x) = p\cdot\mu_1 + (1-p)\mu_2$

(2) $Var(x) = E(Var(x|I)) + Var(E(x|I))$

$E(x|I) = \mu_2$

$Var(x|I) = \sigma_2^2$

$\lambda = \sigma_1^2 p + \sigma_2^2(1-p) + p\mu_1^2 + (1-p)\mu_2^2$

得分

8. 设X_1, X_2 ? X_n相互独立，服从相同的分布$N(0,\sigma^2)$，求$X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$的特征函数。

$\varphi_k(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}$

$\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \varphi(t) = e^{-n\sigma^2 t^2/2}$

$\varphi(t) = \varphi(t/n) = e^{-\theta^2 t^2/(2n)}$

$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx$

$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{x(it-\lambda)} \cdot dx \quad \underline{(\lambda > 0)}$

$= \lambda \cdot \frac{e^{x(it-\lambda)}}{it-\lambda} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$

$E(X) = i^{-1} \varphi'(0) = \frac{1}{\lambda}$

$E(X^2) = -\varphi''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$

10

(1) $P\{\bar{X} < 2\} = P\{n\bar{x} < 2n\}$

$= P\left\{ \frac{n\bar{x} - 2.2n}{1.4\sqrt{n}} < \frac{2n - 2.2n}{1.4\sqrt{n}} \right\}$

$= \Phi(-1.030) = 1 - \Phi(1.030) = 0.1515$

(2) $p = P\left\{\sum_{i=1}^{52} X < 100\right\}$

$= P\{\bar{x} < 100/52\} \approx \Phi(-1.426)$

$= 1 - \Phi(1.426) = 0.077$