221900180 田永铭 计算方法作业 10

计算方法作业10 221900180 田永铭

习题六：

7. 求 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 在 $x_0=2$ 附近的根：

解：(1) Newton 法：∵ $f(x)=x^3-3x-1=0$，∴ $f'(x)=3x^2-3$，$f''(x)=6x>0$．∴ $f(x)$ 为单根．

公式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-3x_k-1}{3x_k^2-3}=\frac{2x_k^3+1}{3(x_k^2-1)}$，$k=0,1,2\cdots$

∵ $x_0=2$，∴ $x_1=1.888888889$，$x_2=1.879451567$，∵ $|x_2-x^*|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，

∴ $x^*\approx x_2=1.879451567$．

(2) 弦截法：

公式为：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)(x_k-x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$

$=\frac{x_k^2x_{k-1}+x_kx_{k-1}^2+1}{x_k^2+x_kx_{k-1}+x_{k-1}^2-3}$，$k=1,2\cdots$

∵ $x_0=2$，$x_1=1.9$，∴ $x_2=1.981093936$，$x_3=1.880840630$，$x_4=1.879489903$．

∵ $|x_4-x^*|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，∴ $x^*\approx x_4=1.879489903$．

(3) 抛物线法：

公式为：
$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega+\mathrm{sign}(\omega)\sqrt{\omega^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}, \\ \omega=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1}). \end{cases}$$

∵ $x_0=1$，$x_1=3$，$x_2=2$，∴ $x_3=1.953967549$，$x_4=1.87801539$，$x_5=1.879386866$．

∵ $|x_5-x^*|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$，∴ $x^*\approx x_5=1.879386866$．

12. 应用 Newton 法于 $x^3-a=0$：

解：$x^3-a=0$ 的根为 $x^*=\sqrt[3]{a}$．

∴ 应用 Newton 法产生的公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}=\frac{2}{3}x_k+\frac{a}{3x_k^2}$，$k=0,1,2\cdots$

迭代函数 $\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3x^2}$．

$\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{a}{x^3}$．$\varphi(x^*)=x$，$\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\neq0$．

∴ 由定理知：该迭代法二阶收敛．

同时它也是整体收敛的，证明如下：

设 $a>0$（$a\le0$ 同理），设 $\forall x_0>0$，

$x_1=\frac{2}{3}x_0+\frac{a}{3x_0^2}=\frac{3x_0^3+a}{3x_0^2}=\frac{x_0^3+2x_0^3+a}{3x_0^2}\geq\frac{3\sqrt[3]{x_0^3\cdot2x_0^3+a}}{3x_0^2}=\frac{\sqrt[3]{2a}\,x_0^2}{x_0^2}=\sqrt[3]{2a}\geq\sqrt[3]{a}$．

∴ 若 $x_k>0$，则 $x_{k+1}>\sqrt[3]{a}$．∴ $\{x_k\}$ 序列有下界．

又 ∵ $x_{k+1}-x_k=-\frac{x_k^3-a}{3x_k^2}$，∴ $x_{k+1}-x_k\leq0$．∴ $\{x_k\}$ 序列单调减．

∴ 由单调有界原理知：$\{x_k\}$ 全局收敛于 $\sqrt[3]{a}$．

习题七：

2. Gauss消元法：

(1) 证明：

记消元前 $A=(a_{ij}^{(1)})$. 消元后 $A=(a_{ij}^{(2)})$.

由Gauss消元法原理知：$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}}a_{1j}^{(1)}$ $(j=2,3\cdots n)$.

∵A对称，∴ $a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}$，$a_{i1}^{(1)}=a_{1j}^{(1)}$.

∴ $a_{ij}^{(2)}=a_{ji}^{(1)}-\dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}}a_{j1}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}-\dfrac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}}a_{1i}^{(1)}=a_{ji}^{(2)}$.

∴ A_2是对称矩阵. □

(2) 解：

表示消元因子(加引号)(实质为0)

增广阵 $=\begin{pmatrix} 0.6428 & 0.3475 & -0.8468 & 0.4127 \\ 0.3475 & 1.8423 & 0.4759 & 1.7321 \\ -0.8468 & 0.4759 & 1.2147 & -0.864 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.6428 & 0.3475 & -0.8468 & 0.4127 \\ \text{"}0.5406\text{"} & 1.6544 & 0.9336 & 1.50[illegible]90 \\ \text{"}-1.3173\text{"} & 0.9337 & 0.0992 & -0.3184 \end{pmatrix}$

依次类推得到 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4.58669 \\ -0.631523 \\ 2.73520 \end{pmatrix}$.

(具体计算过程我利用自己编的matlab程序依次计算，与这里展示的步骤相同).

化为上三角阵后，依次代出x_3、x_2、x_1).

补充习题：

1. Gauss消去：

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$:

解：$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 1 \\ -2 & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & 8 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

∴ $x_3=1$，$x_2=\dfrac{-5-x_3}{3}=-2$，$x_1=\dfrac{3-2x_2-3x_3}{2}=2$.

∴解得：$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Gauss列主元消去：$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$.

解：$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 27 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -38 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{需换一下}]{\text{第一轮主元}} \begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 27 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -38 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消去}} \begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\text{需换一下}]{\text{第二轮主元为-11}} \begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消去}} \begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} & \frac{37}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{10}{11} & -\frac{18}{11} \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{bmatrix}$ 约一下 系数最后一行的4为主元 $\begin{bmatrix} 6 & -4 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & -22 & 15 & 1 & 37 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \end{bmatrix}$

221900180 田子锐 计算方法作业10(续)

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -4 & 3 & 5 & 17 \\ 0 & -22 & 15 & 1 & 37 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right].$$

$$\therefore x_4 = 1,\ x_3 = \frac{-21+13x_4}{4} = -2,$$

$$x_2 = \frac{37-15x_3-x_4}{-22} = -3,$$

$$x_1 = \frac{17+4x_2-3x_3-5x_4}{6} = \frac{17-12+6-5}{6} = 1.$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$