南京大学数学课程试卷 （商学院12级）

2013/2014 学年 第 二 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A卷)

考试时间 2014.1.2 系别 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

题号	一 36	二 10	三 10	四 12	五 10	六 12	七 10	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.64)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.977$

$\Phi(2.33)=0.99$, $t_{0.025}(48)=2.0$, $t_{0.025}(49)=1.98$, $t_{0.05}(48)=1.66$, $t_{0.05}(49)=1.64$

一.（6分×6=36分）

1．将7本中文书和3本外文书随机地排列在书架上，求3本外文书相邻排列在一起的概率．

$$P=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15} \quad \text{------}6'$$

2．有三个箱子，第一个箱子中有3个黑球1个白球，第二个箱子中有2个黑球3个白球，第三个箱子中有3个黑球2个白球，现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出一个球，试求这球为白球的概率．

设 $A=\{$取出一球为白球$\}$, $B_i=\{$取到第i只箱子$\}$ $i=1,2,3$

$$\therefore P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{12} \quad \text{------}6'$$

3．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{15}$ 相互独立且都是总体 $\xi\sim N(20,3)$ 的样本，求 $P(|\bar{X}-\bar{Y}|>\sqrt{2})$.

$\bar{X}\sim N(20,\frac{3}{10})$, $\bar{Y}\sim N(20,\frac{3}{15})$, 且 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立.

$\therefore \bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\frac{1}{2})$ ------$3'$

故 $P\{|\bar{X}-\bar{Y}|>\sqrt{2}\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right|>2\right\}=2(1-\Phi(2))=0.046$ ------$3'$

4．设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本 ($n>2$)，$\bar{X}$ 是样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是样本方差, 求统计量 $Y=\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2}$ 的分布（如有自由度，须给出）.

$$\because t=\frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{\tilde{S}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1) \quad \text{------}3'$$

$$\text{于是 } Y=t^2=\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S^2}\sim F(1,n-1) \quad \text{------}3'$$

5．设总体 X 的方差 DX=1，根据来自 X 的容量为 100 的样本，测得样本均值 $\bar{x}=5$， 求 X 的数学期望 μ=EX 的置信度为 95%的置信区间．

$n=100$ ， $\sigma=1$， $\bar{x}=5$． $1-\alpha=0.95$ ， $\alpha=0.05$． $u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$

$(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})=(5-\frac{1}{10}\times1.96,\ 5+\frac{1}{10}\times1.96)=(4.804,\ 5.196)$ ------6'

6 设总体 X 的概率密度为 $p(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$，其中 θ>0 为未知参数，又设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是 X 的一组样本，求参数 θ 的极大似然估计量．

$L(\theta)=\begin{cases}2^n e^{2n\theta}\cdot e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>\theta,\ i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$

$\ln L(\theta)=n\ln 2+2n\theta-2\sum_{i=1}^{n}x_i$， $\because \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0$ ------3'

故 $L(\theta)$ 单调上升．又 $x_i>\theta$，$i=1,2\cdots,n$．于是当 $\hat{\theta}=\min\{x_1,\cdots,x_n\}$ 时，$L(\hat{\theta})$ 最大．$\therefore \hat{\theta}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的极大似然估计量． ------3'

二．(10 分)设两个随机变量 X，Y 相互独立，且都服从正态分布 N（0，$\frac{1}{2}$），求方差 D$|X-Y|$．

令 $Z=X-Y$ 则 $Z\sim N(0,1)$

于是 $E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}z e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ------5'

$\therefore D|X-Y|=D(|Z|)=EZ^2-(E|Z|)^2=DZ+(EZ)^2-(E|Z|)^2$

$=1+0-\frac{2}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}$ ------5'

三．(10 分)设随机变量 ξ 与 η 相互独立, 且 $\xi\sim E(3)$， $\eta\sim E(4)$，求 Z=3ξ+4η 的概率密度．

$p_\xi(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$， $p_\eta(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$

令 $X=3\xi$，由 $y=3x$，$x=\frac{1}{3}y$，$x'_y=\frac{1}{3}$

故 $p_X(y)=3e^{-3(\frac{1}{3}y)}\frac{1}{3}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le0\end{cases}$ 即 $X\sim E(1)$ ------5'

同理，$Y=4\eta\sim E(1)$ 又 $Z=X+Y$

$\therefore p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_0^z e^{-x}\cdot e^{-(z-x)}dx=\begin{cases}z e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le0\end{cases}$

------5'

四. (12 分)一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量 X 是随机的，假设 EX=50 kg, 标准差 $\sqrt{DX}$=5 kg，若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试求：(1) 若每辆车装 99 箱，汽车不超载的概率；(2) 每辆车最多可装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977？

(1) 记 X_i={第i箱的重量} $i=1,2,\cdots$ 则 $X_1,\cdots,X_{99}$ 独立同分布，

$EX_i=50$, $\sqrt{DX_i}=5$. 于是 $P\left\{\sum_{i=1}^{99}X_i\le 5000\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{99}X_i-99\times50}{\sqrt{99}\times5}\le\frac{5000-99\times50}{\sqrt{99}\times5}\right\}$

$=\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{99}}\right)\approx\Phi(1)=0.8413$ ------5'

(2) 设每辆车最多可装 n 箱，则 $P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le5000\right\}=$

$=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-50n}{\sqrt{n}\times5}\le\frac{5000-50n}{\sqrt{n}\times5}\right\}=\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)\ge0.977$

$\therefore\ \frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\ge2.\Rightarrow 10n+2\sqrt{n}-1000\le0$

$\Rightarrow\sqrt{n}\le\frac{-2+\sqrt{4+40000}}{20}=9.9$. 故 $n\le98.01$ 取 $n=98$ ------5'

五. (10 分)设总体 X～N(μ, σ^2), 从中抽取容量为 2n 的样本 $X_1,X_2,\cdots X_{2n}$,其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望.

记 $Z_i=X_i+X_{n+i}$, $i=1,2,\cdots,n$. 则 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 独立同 $N(2\mu,2\sigma^2)$

分布，于是 $Z_1,\cdots,Z_n$ 可以认为是取自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的样本 ------2'

且它的样本均值 $\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\overline{X}$ ------2'

而它的样本方差 $S^2(Z)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$

$=\frac{Y}{n-1}$ ------3' 故 $Y=(n-1)S^2(Z)$.

$\therefore EY=(n-1)ES^2(Z)=(n-1)\cdot2\sigma^2=2(n-1)\sigma^2$. ------3'

六．(12 分)设总体 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \theta^2, & 2\theta(1-\theta), & \theta^2, & 1-2\theta \end{pmatrix}$，其中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 是未知参数，现有总体 X 的容量为 8 的样本值如下：3，1，3，0，3，1，2，3，试求：（1）θ 的矩估计量和矩估计值；（2）θ 的极大似然估计值；（3）θ 的矩估计量是否为 θ 的无偏估计和一致估计？（须说明理由）.

(1) $EX = 2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta) = 3-4\theta$ 令 $3-4\theta=\bar{X}$

$\therefore \hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}(3-\bar{X})$ 为矩估计量，又 $\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_1^8 x_i = 2$

$\therefore \theta$ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}(3-2) = \frac{1}{4}$ ------4'

(2) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{8} P\{X=x_i\} = P\{X=0\}\cdot(P\{X=1\})^2\cdot(P\{X=2\})(P\{X=3\})^4$

$= \theta^2[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2(1-2\theta)^4 = 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$

$\ln L(\theta) = \ln 4 + 6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)$

$\therefore \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{6}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} = 0$ 即 $12\theta^2 - 14\theta + 3 = 0$

$\because 0<\theta<\frac{1}{2}$ 故 极大似然估计值 $\hat{\theta}_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$ ------4'

(3) $E\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}(3-E\bar{X}) = \frac{1}{4}(3-EX) = \theta$ $\therefore \hat{\theta}_1$ 为 θ 的无偏估计

又 $EX^2 = 2\theta(1-\theta)+4\theta^2+9(1-2\theta) = 2\theta^2-16\theta+9$

$\therefore DX = EX^2-(EX)^2 = 2\theta^2-16\theta+9-(3-4\theta)^2 = 8\theta-14\theta^2$

$\therefore D\hat{\theta}_1 = \frac{1}{16}D\bar{X} = \frac{1}{16}\frac{1}{n}DX = \frac{1}{16}\frac{1}{n}(8\theta-14\theta^2) \to 0\ (n\to\infty)$ $\therefore \hat{\theta}_1$ 为一致估计 ------4'

七．(10 分)某市居民的月伙食费 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，已知 EX=235.5，现随机抽取 49 个居民，他们本月的伙食费平均值为 $\bar{x}$=236.5 元，样本标准差 $s=\sqrt{\frac{1}{48}\sum_{i=1}^{49}(x_i-\bar{x})^2}$ =3.5 元，（1）试问是否可以认为本月居民平均伙食费有显著上升？(α=0.05)（2）求 μ=EX 的置信度为 95%的置信区间.

(1) $H_0: \mu \le 235.5$，$H_1: \mu > 235.5$ (2)

$n=49$ $\bar{x}=236.5$ $s=3.5$

$t = \frac{\bar{x}-235.5}{s/\sqrt{49}} = \frac{236.5-235.5}{3.5/7} = 2.$

$\alpha=0.05$ $t_\alpha(48)=1.66$ $W_R=[1.66, +\infty)$

拒绝 H_0，即平均伙食费有显著上升. ---------5'

(2) $\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(48)=2$ $\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$=\left(236.5-\frac{3.5}{\sqrt{49}}\times 2, 236.5+\frac{3.5}{\sqrt{49}}\times 2\right)$

$=(235.5, 237.5)$ -------5'