2.6 当 $\{x \mid a^T x \le b\} \subseteq \{x \mid \hat{a} x \le b\}$ 时，$a^T$ 与 $\tilde{a}^T$ 应同向，

故 $a^T = \lambda \hat{a}^T \ (\lambda > 0)$

$a^T = \lambda \hat{a}^T$ 代入得 $\{x \mid \lambda \hat{a}^T x \le b\} \subseteq \{x \mid \hat{a}^T x \le b\}$

即对 $\forall x_1 \in \{x \mid \lambda \hat{a}^T x \le b\}$，$x_1 \in \{x \mid \hat{a}^T x \le \tilde{b}\}$ 也成立

① 故 $\{x \mid a^T x \le b\} \subseteq \{x \mid \tilde{a}^T x \le \tilde{b}\}$ 在 $a^T = \lambda \hat{a}^T$，$b \le \lambda \tilde{b}$ $(\lambda > 0)$ 的条件下成立

两个半空间相等，即 $\{x \mid a^T x \le b\} \subseteq \{x \mid \hat{a}^T x \le \tilde{b}\} \rightarrow \begin{cases} a^T = \lambda \tilde{a}^T \\ b \le \lambda \tilde{b} \end{cases}$

$\{x \mid \tilde{a}^T \le \tilde{b}\} \subseteq \{x \mid a^T x \le b\} \rightarrow \begin{cases} \tilde{a}^T \le \lambda a^T \\ \tilde{b} \le \lambda b \end{cases}$

对 $\forall \lambda > 0$ 成立，得 $\begin{cases} a^T = \lambda a^T \\ b = \tilde{b} \end{cases}$

② 故 2 个半空间相等在 $a^T = \lambda \hat{a}^T$，$b = \tilde{b}$ $(\lambda > 0)$ 的条件下成立

2.11 证明双曲集合$\{x\in R_+^2 \mid x_1x_2 \geq 1\}$是凸集.更一般的,证明

$\{x\in R_+^n \mid \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$ 是凸的.

证明:① 由 $-\log x$ 的凸性以及 Jensen 不等式,我们可以得到

$$a^{\theta} b^{(1-\theta)} \leq \theta a + (1-\theta) b, \quad (其中\ a, b \geq 0,\ \theta \in (0,1))$$

首先证明双曲集合是凸集,记 $S=\{x\in R_+^2 \mid x_1x_2 \geq 1\}$,

$\forall x, y \in S$,有 $x_1x_2 \geq 1$, $y_1y_2 \geq 1$,

对于 $\forall x_i, y_i$, $\theta x_i + (1-\theta) y_i \geq x_i^{\theta} y_i^{1-\theta}$

$\therefore \theta x + (1-\theta) y = (x_1^{\theta} y_1^{1-\theta}, x_2^{\theta} y_2^{1-\theta})^T$

其中 $x_1^{\theta} y_1^{1-\theta} \cdot x_2^{\theta} y_2^{1-\theta} = (x_1x_2)^{\theta}(y_1y_2)^{1-\theta} \geq 1$

$\therefore \theta x + (1-\theta) y \in S$

$\therefore$ 双曲集合是凸集.

② 记 $S' = \{x\in R_+^n \mid \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$.

$\forall x', y' \in S'$,有 $\prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1$, $\prod_{i=1}^{n} y_i \geq 1$,

对于 $\forall x_i, y_i$, $\theta x_i + (1-\theta) y_i \geq x_i^{\theta} y_i^{1-\theta}$

$\therefore \theta x' + (1-\theta) y' = (x_1^{\theta} y_1^{1-\theta}, x_2^{\theta} y_2^{1-\theta}, \ldots, x_n^{\theta} y_n^{1-\theta})^T$

$\because \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta} y_i^{1-\theta} = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta} \cdot (\prod_{i=1}^{n} y_i)^{1-\theta} \geq 1$.

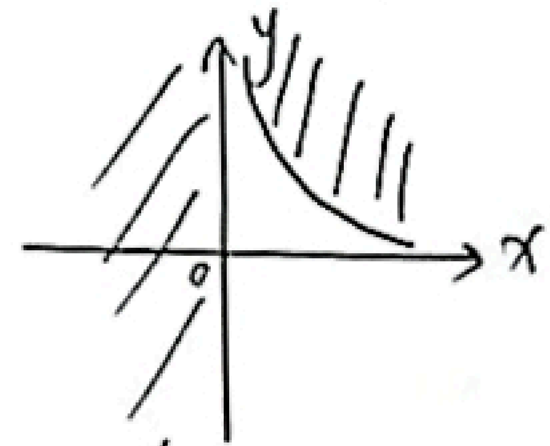
$\therefore \theta x' + (1-\theta) y' \in S'$

$\therefore \{x\in R_+^n \mid \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$ 是凸集.

2.23. 给出两个不相交的闭凸集不能被严格分离的例子。

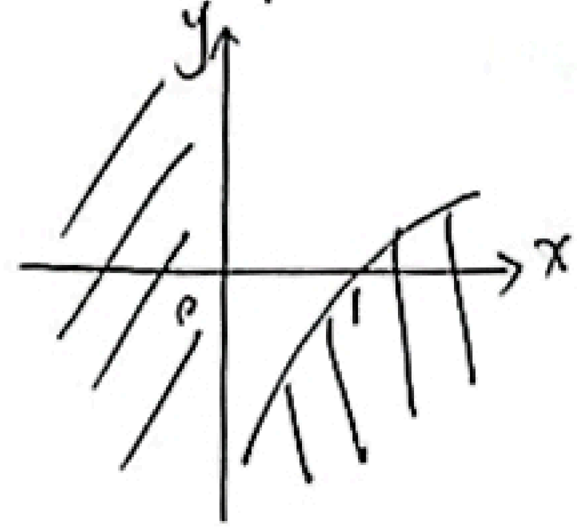
① $C=\{(x,y)\mid xy\geq 1,\ x,y>0\}$

$D=\{(x,y)\mid x<0\}$




② $C=\{(x,y)\mid x>0,\ y<\ln x\}$

$D=\{(x,y)\mid x<0\}$




2.33. 我们定义单调非负锥为 $K_{m+}=\{x\in R^n \mid x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0\}$.
即所有分量按非增排序的非负向量。

(a). 说明 $K_{m+}$ 是正常锥.

(b). 找到对偶锥 $K_{m+}^*$.

证明：(a). $\forall x,y\in K_{m+}$，有 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0$，$y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n\geq 0$.

$\forall \theta\in[0,1]$，$\theta x_1+(1-\theta)y_1\geq \theta x_2+(1-\theta)y_2\geq\cdots\geq \theta x_n+(1-\theta)y_n\geq 0$.

故 $\theta x+(1-\theta)y\in K_{m+}$，所以 $K_{m+}$ 是凸集.

由定义可知，$K_{m+}$ 是实的，且是闭的.

$\forall x\in K_{m+}$，$-x\in K_{m+}$，有 $x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0$. $-x_1\geq -x_2\geq\cdots\geq -x_n\geq 0$.

$\therefore\ x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

$\therefore$ $K_{m+}$ 是尖的.

综上所述，$K_{m+}$ 是正常锥.

(b). $\forall y\in K_{m+}^*$，$\forall x\in K_{m+}$

$$x^Ty=\sum_{i=1}^n x_iy_i=(x_1-x_2)y_1+(x_2-x_3)(y_1+y_2)+\cdots\cdots$$

要使 $x^Ty\geq 0$，有 $y_1\geq 0$，$y_1+y_2\geq 0$，…，$y_1+y_2+\cdots+y_n\geq 0$.

故 $K_{m+}^*=\{y\mid \sum_{i=1}^n y_i\geq 0\}$.

3.1. 假设 $f: R \to R$ 是凸的，并且 $a, b \in \mathrm{dom}\, f$，其中 $a < b$.

(a). 证明 $f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$，其中 $x \in [a, b]$.

解：$\because$ $f(x)$ 为凸函数，

$\therefore$ $\forall \theta \in [0,1]$，有 $f(\theta a + (1-\theta) b) \le \theta f(a) + (1-\theta) f(b)$.

令 $\theta = \frac{x-a}{b-a}$，有 $1-\theta = \frac{b-x}{b-a}$，且 $x = \theta a + (1-\theta) b$.

$\therefore$ $f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$，证毕.

(b). 证明 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$，对 $\forall x \in (a, b)$. 画一张图解释.

解：由 (a) 可知，$f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$

$$= f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right)$$

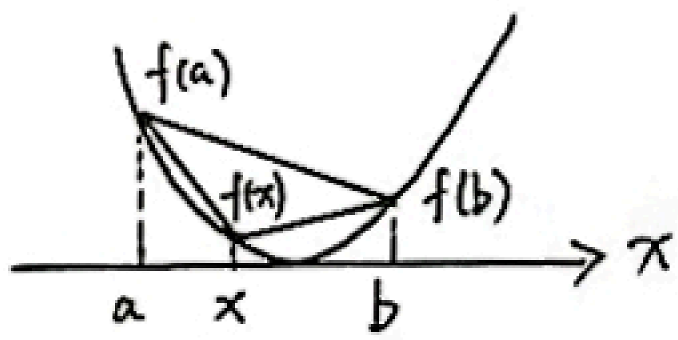
即 $f(x) - f(a) \le \frac{x-a}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right)$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

同理：$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$

综上所述．$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$

如下图所示：




(c). $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ge \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$

$\therefore$ $f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le f'(b)$

(d). 由 (c) 可得．$f'(a) \le f'(x) \le f'(b)$

$\therefore$ $f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \ge 0$. 同理：$f''(b) \ge 0$.

3.5. 假设 $f: R\to R$ 是凸的，其中 $R_+ \subseteq \mathrm{dom} f$.

证明 f 的滑动平均 F 也是凸的，其中，

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad \mathrm{dom}\,F = R_{++},$$

其中 f 是可微的.

解：令 $p=\frac{t}{x}$，当 $t\in[0,x]$ 时. $p\in[0,1]$.

则 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^1 f(px)\,dpx = \int_0^1 f(px)\,dp$.

∵ $f(x)$ 为凸函数.

∴ $F(x)$ 也是凸函数.

3.7. 设函数 $f: R^n\to R$ 是凸函数，其中定义域为 $\mathrm{dom} f = R^n$，

函数在 $R^n$ 上有上界. 证明函数 f 是常数.

解：假设 f 不是常数，则存在 $f(y)>f(x)$，$x,y\in \mathrm{dom} f$.

令 $x<y$，则有 $f'(x)\le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y)$，则 $f'(y)>0$.

$$\therefore \frac{f'(y)-f'(x)}{y-x}\geq 0. \quad 即\ f''(y)\geq 0.$$

当 $t>y$ 时，$f'(t)\geq f'(y)>0$. $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=+\infty$

这与 f 有上界矛盾. ∴ f 是常数.

3.11. 单调映射，称函数 $\psi: R^n\to R^n$ 是单调的. 若 $\forall x,y\in \mathrm{dom}$，下式成立.

$$(\psi(x)-\psi(y))^T(x-y)\geq 0.$$

假设 $f: R^n\to R$ 是一个可微凸函数. 证明其梯度 $\nabla f$ 是单调的.

该结论反之成立吗？即单调映射都对应凸函数的梯度.

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f^T(y)(x-y) \quad ①.$$

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y-x) \quad ②.$$

①+② 可得∴ $\nabla f^T(y)(x-y) + \nabla f^T(x)(y-x) \leq 0$.

整理可得 $(\nabla f^T(x) - \nabla f^T(y))(x-y) \geq 0$.

由此可知. $\nabla f$ 单调.

反之, 则不一定成立. 见反例:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

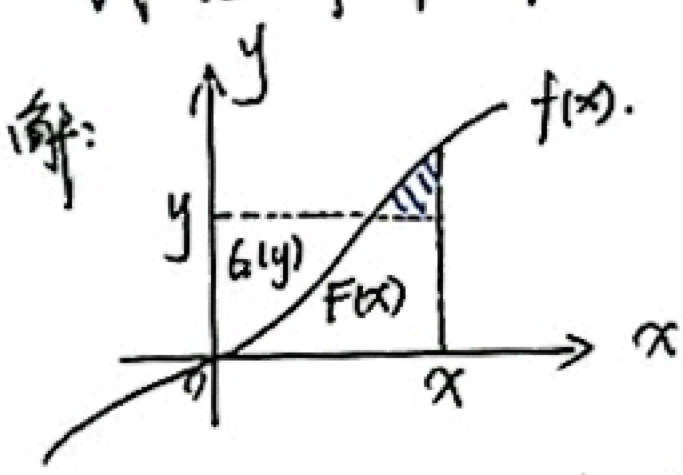
$\nabla f(x)$ 是单调增的, 但 $f(x)$ 不是凸的.

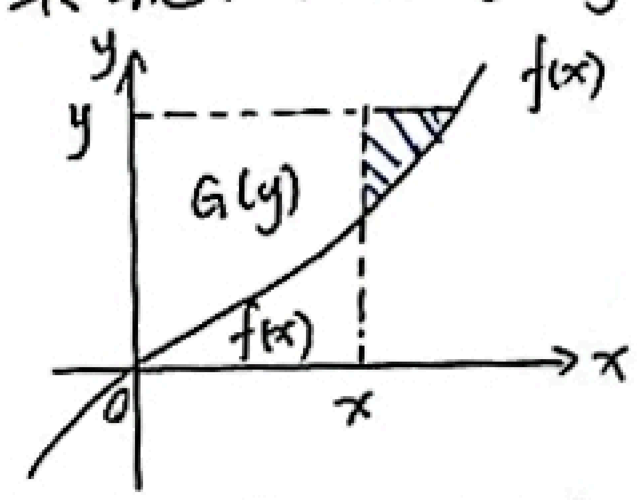
3.38. Young 不等式. 令 $f: R \to R$ 是一个单调增函数, $f(0)=0$, 令 $g$ 为 $f$ 的反函数. 定义 $F$ 与 $G$ 为:

$$F(x) = \int_0^x f(a)\,da, \quad G(x) = \int_0^x g(a)\,da.$$

试证明 $F$ 和 $G$ 是共轭, 给出 young 不等式的图象解释.

解:




设 $F$ 的共轭函数为 $F^*(y) = \sup(yx - F(x))$

令 $\frac{d(yx - F(x))}{dx} = y - f(x) = 0$.

得 $y = f(x)$. i.e. $x = f^{-1}(y) = g(y)$

$\therefore F^*(y) = x f(x) - F(x)$. ①.

设 $G$ 的共轭函数为 $G^*(x) = \sup(yx - G(y))$.

令 $\frac{d(yx - G(y))}{dy} = x - g(y) = 0$. 得 $x = g(y)$ $\therefore y = g^{-1}(x) = f(x)$.

$\therefore G^*(x) = y g(y) - G(y)$. ②. 由①②可得, $F$ 与 $G$ 互为共轭函数.