

南京大学数学课程试卷 (商学院 15 级)

2016/2017 学年 第 二 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2016.12.28 系别 _____ 学号 _____ 姓名 _____

题号	一 36	二 10	三 12	四 12	五 10	六 10	七 10	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.977$
 $\Phi(2.33)=0.99$, $t_{0.025}(8)=2.306$, $t_{0.025}(9)=2.262$, $t_{0.05}(8)=1.86$, $t_{0.05}(9)=1.83$
 $\chi^2_{0.025}(8)=17.535$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$, $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$, $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$

一. (6 分 \times 6 = 36 分)

1. 给定 $p=P(A)$, $q=P(B)$, $r=P(A \cup B)$, 求 $P(A\bar{B})$ 及 $P(\bar{A}\bar{B})$.

2. 设随机变量 $X_i \sim N(2, 3^2)$, $i=1, 2, \dots, 10$, 且相互独立, 求 $E[2X_1 \sum_{i=1}^{10} X_i]$.

3. 设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列, 且有 $P(X_k = \sqrt{\ln k}) = P(X_k = -\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{2}$, $k=1, 2, \dots$.

试证: $\forall \varepsilon > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0$. 即 $\{X_k\}$ 服从大数定律.



4. 设总体 X 与 Y 相互独立, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$, (X_1, X_2, X_3) 和 (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) 分别是来自 X 和 Y 的样本, 求统计量 $T = \frac{\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\sum_{i=1}^4 (Y_i - \bar{Y})^2}$ 的分布 (如有自由度, 须给出).

5. 设总体 X 的方差 $DX=1$, 根据来自 X 的容量为 100 的样本, 测得样本均值 $\bar{x}=5$, 求 X 的数学期望 $\mu=EX$ 的置信度为 95% 的置信区间.

6. 设总体 $X \sim N(\mu, 5^2)$, 在 $\alpha=0.05$ 的水平上检验 $H_0: \mu=0$ $H_1: \mu \neq 0$. 如果所选取的拒绝域为 $W=\{|\bar{X}| \geq 1.96\}$, 问样本容量 n 应取多大.

二. (10 分) 设事件 A 在一次试验中发生的概率为 $\frac{1}{4}$. 如果做了四次伯努利独立试验, 事件 A 均未发生, 则事件 B 也不发生; 如果四次伯努利试验中事件 A 发生一次, 则事件 B 发生的概率为 $\frac{2}{3}$; 而四次试验中若事件 A 发生两次及两次以上, 则事件 B 一定发生. 试求: (1) $P(B)$; (2) 若已知事件 B 已经发生, 问四次试验中事件 A 至少发生两次及两次以上的概率.



三. (12 分) 设 $(X, Y) \sim p(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 试求: (1) 边际密度 $p_x(x)$ 和 $p_y(y)$; (2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

四. (12 分) 试利用(1)切比雪夫不等式; (2)中心极限定理分别确定至少应投掷一枚均匀硬币多少次, 才能使得出现“正面向上”的频率在 $0.4 \sim 0.6$ 之间的概率不小于 0.9 .

五. (10 分) 设总体 X 的概率分布为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta & 1-2\theta \end{pmatrix}$, $\theta > 0$ 未知, 今有其容量为 16 的样本值, 其中 1 出现 7 次, 2 出现 6 次, 3 出现 3 次, 试求 θ 的矩估计值和极大似然估计值.



六. (10 分) 已知总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 为已知常数, X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的一个样本, 如果用统计量 $\hat{\sigma} = \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$ 作为 σ 的无偏估计, (1) 求常数 c ; (2) 此估计是一致估计吗? (说明理由).

七. (10 分) 用机器包装某种饮料, 已知重量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 要求每盒重量为 500 克, 均方误差 σ 不超过 10 克, 今抽查 9 盒, 测得平均重量为 $\bar{x} = 490$ 克, 标准差为 $s = 16$ 克, 问这台自动包装机工作是否正常 ($\alpha = 0.05$).

