

离散数学（2023）作业 12 - 二元关系

离散数学教学组

Problem 1

设集合 $A = \{a, b, c\}$, 判断以下结论是否正确。

1. $\emptyset \subseteq A \times A$
2. $\{a, c\} \in A$
3. $\{a, b\} \in A \times A$
4. $(c, c) \in A \times A$

答案:

1. 正确
2. 错误
3. 错误
4. 正确

Problem 2

设 A, B 为任意集合, 证明: 若 $A \times A = B \times B$, 则 $A = B$ 。

答案: 任取 x ,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in A \times A \Leftrightarrow (x, x) \in B \times B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

Problem 3

证明 $A \times B \neq B \times A$ 除非 $A = B$, 其中 A 和 B 均为非空集合。

答案: 证明: 当 $A \neq B$ 时, 有以下两种情形:

1. $\exists x \in A (x \notin B)$, 则在 $A \times B$ 中第一个元素为 x 的序偶不存在于 $B \times A$ 中, 因此 $A \times B \neq B \times A$ 。
2. $\exists x \in B (x \notin A)$, 由对称性, $A \times B \neq B \times A$ 。

因此, 当 $A \neq B$ 时, $A \times B \neq B \times A$ 。当且仅当 $A = B$ 时, $A \times B = A \times A = B \times A$ 。

Problem 4

设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系, 从集合 B 到集合 A 的逆关系 (记作 R^{-1}) 是有序对集合 $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$; 而补关系 \bar{R} 是有序对集合 $\{(a, b) \mid (a, b) \notin R, a \in A, b \in B\}$ 。若 R 是正整数集合上的关系: $R = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b\}$, 求:

1. R^{-1}
2. \bar{R}

答案:

1. $R^{-1} = \{(a, b) \mid a \text{ 被 } b \text{ 整除}\}$
2. $\bar{R} = \{(a, b) \mid a \text{ 不能整除 } b\}$

Problem 5

设

$$A = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$$

$$B = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}$$

求

1. $A \cup B, A \cap B$
2. $\text{dom } A, \text{dom } B, \text{dom } (A \cup B)$
3. $\text{ran } A, \text{ran } B, \text{ran } (A \cap B)$
4. $\text{fld } (A - B)$

答案:

1. $A \cup B = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle\}, A \cap B = \{\langle 2, 4 \rangle\}$
2. $\text{dom } A = \{1, 2, 3\}, \text{dom } B = \{1, 2, 4\}, \text{dom } (A \cup B) = \{1, 2, 3, 4\}$
3. $\text{ran } A = \{2, 3, 4\}, \text{ran } B = \{2, 3, 4\}, \text{ran } (A \cap B) = \{4\}$
4. $\text{fld } (A - B) = \{1, 2, 3\}$

Problem 6

设 R 是关系 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$, S 是关系 $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$, 求 $S \circ R$.

答案: $S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Problem 7

设 R_1 和 R_2 分别是整数集合上的“模 3 同余”和“模 4 同余”关系, 即 $R_1 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod } 3)\}$ 和 $R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod } 4)\}$ 。求

1. $R_1 \cup R_2$
2. $R_1 \cap R_2$
3. $R_1 - R_2$
4. $R_2 - R_1$
5. $R_1 \oplus R_2$

答案:

1. $R_1 \cup R_2 = \{(a, b) \mid (a \equiv b(\text{mod } 3)) \vee (a \equiv b(\text{mod } 4))\}$
2. $R_1 \cap R_2 = \{(a, b) \mid a \equiv b(\text{mod } 12)\}$
3. $R_1 - R_2 = \{(a, b) \mid (a \equiv b(\text{mod } 3)) \wedge \neg(a \equiv b(\text{mod } 4))\}$
4. $R_2 - R_1 = \{(a, b) \mid (a \equiv b(\text{mod } 4)) \wedge \neg(a \equiv b(\text{mod } 3))\}$
5. $R_1 \oplus R_2 = \{(a, b) \mid ((a \equiv b(\text{mod } 3)) \vee (a \equiv b(\text{mod } 4))) \wedge \neg(a \equiv b(\text{mod } 12))\}$

Problem 8

问

1. 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个不同的关系?
2. 在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上有多少个关系包含有序对 (a, a) ?

答案:

1. 有 $2^{4^2} = 65536$ 个不同的关系。
2. 有 $2^{4^2-1} = 32768$ 个不同的关系包含有序对 (a, a) 。

Problem 9

设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系, 试证明:

1. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
2. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

答案:

1. 任取 $\langle x, y \rangle$,

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cup R_2 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \vee \langle y, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}\end{aligned}$$

2. 任取 $\langle x, y \rangle$,

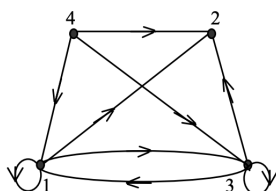
$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1} &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \cap R_2 \\ &\Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in R_1 \wedge \langle y, x \rangle \in R_2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle x, y \rangle \in R_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}\end{aligned}$$

Problem 10

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, R 是 X 上的二元关系, $R = \{(1, 1), (3, 1), (1, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 1), (4, 2), (1, 2)\}$ 。

1. 画出 R 的关系图;
2. 写出 R 的关系矩阵;
3. 说明 R 是否是自反、反自反、对称、传递的。

答案:



- 1.
2. R 的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 由于对角线上不全为 1, R 不是自反的; 由于对角线上存在非零元素, R 不是反自反的; 由于矩阵不对称, R 不是对称的; 经计算可得 $R^2 = R$, 可知 R 是传递的。