221900180 田永铭 凸优化第五次作业

习题 4.2(a) log定义域

~~解~~ 证明：① 充分性：若 $\exists \nu \neq 0$, s.t. $A\nu \preceq 0$.

$\mathrm{dom} f_0 = \{x \mid Ax \prec b\}$. ∴ 取 $x_0 \in \mathrm{dom} f_0$, 即 $Ax_0 \prec b$.

则 $\forall t \geq 0$ 有 $x_0 + t\nu \in \mathrm{dom} f_0$, 即 $A(x_0+t\nu) = Ax_0 + tA\nu \prec b$.

这表明在某一射线方向上 $\mathrm{dom} f_0$ 无限延伸, ∴ $\mathrm{dom} f_0$ 无界.

② 必要性：若 $\mathrm{dom} f_0$ 无界：

反证法：假设不 $\exists \nu \neq 0$, s.t. $A\nu \preceq 0$, 即 $\forall \nu \neq 0$, $A\nu \succ 0$.

若 $\mathrm{dom} f_0$ 无界, 总得有一方向上 (终的向可变) $\mathrm{dom} f_0$ 无限延伸. 又 $\forall \nu \neq 0$, $A\nu \succ 0$, ∴ 延伸的过程中,

Ax 会越来越大至于 $\succ b$, 这表明 $\mathrm{dom} f_0$ 有界. 矛盾.

∴ $\mathrm{dom} f_0$ 无界.

4.4(a)(b)(c) 对称矩阵与凸优化

证明：(a) 要证 $\bar{x} \in F$, 即证 $Q_i \bar{x} = \bar{x}$, $i = 1,2\cdots k$.

即证 $Q_i \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Q_j x = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Q_j x$, 即证 $\sum_{j=1}^{k} Q_i Q_j x = \sum_{j=1}^{k} Q_j x$. $(i=1,2\cdots k)$ (*)

又由 ~~$Q \in G$~~ G 为群, ∴ $\forall i, j$, $\exists h$, s.t. $Q_i Q_j = Q_h \in G$ 且不重复.

∴ (*) 得证. ∴ $\bar{x} \in F$.

(b) 要证 $f(\bar{x}) \leq f(x)$, 即证 $f(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q_i x) \leq f(x)$.

∵ f 为凸函数, ∴ $f(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q_i x) \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(Q_i x)$.

又 ∵ f G-不变, ∴ $f(Q_i x) = f(x)$.

∴ 只需证: $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x) \leq f(x)$. 显然成立. (此步左式 = 右式)

(c) 设 x^* 为最优点. 由 (a): $\overline{x^*}$ 在 F 中. ∴ 欲证: $\overline{x^*}$ 仍最优. 证明如下:

$$f(\overline{x^*}) = f(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Q_i x) \text{ (由(2)) } \leq f(x^*).$$

∴ 若 x^* 最优, 必存 $\overline{x^*}$ 最优 且 $\overline{x^*} \in F$. ∴ 得证.

4.7. 凸凹分式问题 (a)(b)(c)

(a) 证明：只需证 $\frac{f_0(x)}{c^Tx+d}$ 拟凸, 即 $\forall \alpha$ 对 $\{\frac{f_0(x)}{c^Tx+d} \leq \alpha\}$ 为凸集, 即 $\forall \alpha$, $\{x \mid f_0(x) \leq \alpha(c^Tx+d)\}$ (题给 $c^Tx+d > 0$) 为凸集.

由题: $f_0(x)$ 凸, ∴ 问题定义域凸, 且 c^Tx+d 为仿射, ∴ 下水平集 亦凸.

∴ 为拟凸问题.

(b) ① 假设 x 在原问题中可行. 则设 $y = \frac{x}{c^Tx+d}$, $t = \frac{1}{c^Tx+d}$.

有 $t > 0$. 目标函数 $\frac{f_0(x)}{c^Tx+d} = g_0(y,t)$, 且 $c^Ty + dt = \frac{c^Tx}{c^Tx+d} + \frac{d}{c^Tx+d} = 1$.

$Ax = b \Rightarrow Ay = A\frac{x}{c^Tx+d} = bt$,

∴ y, t 在新问题中亦可行, 且目标函数可建立对应关系.

② 假设 y, t 在新问题中可行. 令 $x = \frac{y}{t}$. ∴ $Ay = bt \Rightarrow A\frac{y}{t} = \frac{bt}{t}$. $Ax = A\frac{y}{t} = \frac{bt}{t} = b$.

∵ $c^Ty + dt = 1$, ∴ $c^Tx + d = \frac{c^Ty+dt}{t} = \frac{1}{t}$, ∴ $\frac{f_0(x)}{c^Tx+d} = tf_0(x) = tf_0(\frac{y}{t}) = g_0(y,t)$. 即透视函数.

∴ x 在原问题中亦可解. 由①②: 得证.

~~4.11 涉及l_1和l_∞范数的问题~~

(c) 应用: $\frac{f_0}{h(x)} = \frac{tr(F(x))/m}{\det(F(x))^{\frac{1}{m}}}$ 故.

由(b)可知: 可令 $y = \frac{x}{h(x)}$, $t = \frac{1}{h(x)}$,

$\left[\left|\frac{1}{|F^{\frac{1}{m}}|}\right|^{\frac{1}{m}}\right]^m \cdot |F^{\frac{1}{m}}|$

则问题⟺ minimize $tf_0(\frac{y}{t})$

subject to ~~$h(x)\geq 0$~~ $tf_i(\frac{y}{t}) \leq 0$. (无)

~~代入可得~~ ⟺ minimize $\frac{1}{m} tr(tF_0 + y_1F_1 + \cdots + y_nF_n)$

~~subject to~~

存隐含关系: $\det(tF)^{\frac{1}{m}} = \det\left(\frac{1}{\det F^{\frac{1}{m}}} F\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{\det F^{\frac{1}{m}}}{\det F^{\frac{1}{m}}} = 1$.

$h(x)>0$ 又给出了问题定义域.

综上: 问题⟺ minimize $(\frac{1}{m}) tr(tF_0+y_1F_1+\cdots+y_nF_n)$

subject to $\det(tF_0+y_1F_1+\cdots+y_nF_n)^{\frac{1}{m}} = 1$. (等式)

定义域为: $\{(y,t) \mid t>0$ 且 ~~$tF \succeq 0$~~ $tF_0+y_1F_1+\cdots+y_nF_n \succeq 0\}$.

4.11 l_1、l_∞范数问题

解: (a) ∵ $\|x\|_\infty = \max$ x分量.

∴ 等价于 minimize t

subject to $Ax-b \preceq t$, $Ax-b \succeq -t$ } 即 $Ax-b-t \preceq 0$, $-t-Ax+b \preceq 0$.

注 这里不等号为分量不等式. 限制了 $-t\leq (\forall k)\, a_k^T x - b_k \leq t$. ∴ $t \geq \max|Ax-b|$分量.

(b) ∵ $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$.

∴ 等价于 minimize $1^T t$

subject to $Ax-b\preceq t$, $Ax-b \succeq -t$ } 即 $Ax-b-t\preceq 0$, $-t+b-Ax\preceq 0$.

说理同(a), 这样保证了每一分量上 $-t \leq a_k^Tx-b_k\leq t$. 即 $t\geq|a_k^Tx-b_k|$.

4.22 QCQP

证明: 若无限制, 则最优解满足 $\frac{\partial(\frac{1}{2} x^TPx+q^Tx+r)}{\partial x} = Px+q=0$.

∴若x为该问题最优解, 则 $Px+q=0$ 且 $x^Tx<1$ (内点) 或 $x^Tx=1$ 且 $Px+q=-\lambda x$ (边界点,

由Lagrange数乘法可得) (此λ需存在且$\lambda\geq 0$).

①若 $\bar{\lambda}<0$, 则欲证: $x = -P^{-1}q$ 为最优解. 证明: 其满足 $Px+q=0$. 而 $x^Tx = (P^{-1}q)^TP^{-1}q = q^T(P^{-1})^TP^{-1}q$

~~此时在 $x^Tx\leq$~~ $x^Tx\leq 1$ 在 $\|P^{-1}q\|_2\leq 1$ 时成立.

现重新分类: ①若 $\|P^{-1}q\|_2\leq 1$, 则由上述可知成立. ($\exists\lambda\geq 0$) ∴ $\|(P+\lambda)^{-1}q\|_2=1$

②若 $\|P^{-1}q\|_2>1$: 若要最优, 必有 $x^Tx=1$ 且 $(P+\lambda)x = -q$. 其中$\lambda_i>0$为P的特征值. (线代知识)

令 $f(\lambda) = \|(P+\lambda)^{-1}q\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{(\lambda+\lambda_i)^2}$, 其中$\lambda_i>0$ 且$f(\lambda)$在$(0,+\infty)$随λ增大而递减.

令 $f(\lambda)=1$, ∴ $\sum_{i=1}^n \frac{q_i^2}{(\lambda+\lambda_i)^2}=1$. 又 $f(0)=\|P^{-1}q\|_2>1$, 且$f(\lambda)$在$(0,+\infty)$随λ增大递减.

∴ $\exists\lambda_0$(唯一的), s.t. $f(\lambda_0)=0$. ($\lambda_0>0$). 即$\bar{\lambda}$. 有 $x^* = -(P+\bar{\lambda}I)^{-1}q$.

∴得证.

扫描全能王 创建