离散数学（2023）作业 13 - 关系闭包与等价关系

离散数学教学组

Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系 R 是否是自反的，对称的，反对称的和传递的，其中 $(a,b)\in R$ 当且仅当

1. a 比 b 高
2. a 和 b 同名
3. a 和 b 在同一天出生
4. a 和 b 有共同的祖父母

答案：

1. 反对称的，传递的
2. 自反的，对称的，传递的
3. 自反的，对称的，传递的
4. 自反的，对称的，传递的

Problem 2

由 n 个元素组成的集合上,有多少个关系是：

1. 对称的？
2. 反对称的？
3. 非对称的？
4. 反自反的？
5. 自反的和对称的？
6. 既不是自反的也不是反自反的？

答案：

1. $2^{n(n+1)/2}$
2. $2^n 3^{n(n-1)/2}$
3. $3^{n(n-1)/2}$
4. $2^{n(n-1)}$
5. $2^{n(n-1)/2}$
6. $2^{n^2}-2^{n^2-n+1}$

Problem 3

设 $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$，定义 A 上的关系

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \land x + y = 10\}$$

说明 R 具有哪些性质，并说明理由。

答案:

- 只有对称性。
- 不具有自反性，例如 $\langle 1, 1\rangle \notin R$。
- 也不是反自反的，例如 $\langle 5, 5\rangle \in R$。
- 也不是反对称的，因为 $\langle 1, 9\rangle, \langle 9, 1\rangle$ 都属于 R。
- 不是传递的，否则可得出 $\langle 1, 1\rangle \in R$。

Problem 4

证明：集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的。

答案: 首先证明若 R 是自反的则其逆关系 R^{-1} 是自反的。任取元素 $a \in A$，因为 R 是自反的，故 $(a, a) \in R$。由逆关系 R^{-1} 的定义可知，必有 $(a, a) \in R^{-1}$。充分条件同理可证。综上，命题得证。

Problem 5

设 R 是集合 A 上的二元关系，试证明：R 是反对称的当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

答案: 首先证明若 R 是反对称的则 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。假设 $(x, y) \in R \cap R^{-1}$，则 $(x, y) \in R \land (x, y) \in R^{-1}$，即 $(x, y) \in R \land (y, x) \in R$。因 R 是反对称的，故 $x = y$，故 $(x, y) = (x, x) \in I_A$，即 $R \cap \bar{R} \subseteq I_A$。充分条件同理可证。综上，命题得证。

Problem 6

设 R 是非空集合 A 上的二元关系，且 R 是自反和传递的。证明：$R^n = R$，其中 n 为大于 1 的整数。

答案:

- 根据 R^n 的定义可知,对于 $\forall (a, b) \in R^n$,存在 $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in A$,满足 $(a, t_1), (a, t_2), \ldots, (a, t_{n-1}), (t_{n-1}, b) \in R$，由 R 的传递性可知，$(a, b) \in R$，故 $R^n \subseteq R$。
- 对于 $\forall (a, b) \in R$，取 $(b, b) \in R$，则 $(a, b), (b, b), \ldots, (b, b) \in R$（共 $n - 1$ 个 (b, b)），从而有 $(a, b) \in R^n$，故 $R \subseteq R^n$。

综上，命题得证。

Problem 7

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系的传递闭包。

1. $\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$
2. $\{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$
3. $\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$
4. $\{(a,e),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$

答案：

1.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix},W_5=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(a,c),(c,c),(d,b),(d,d),(e,b),(e,d)\}$.

2.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix},W_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(b,b),(b,c),(b,e),(c,b),(c,c),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$.

3.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}W_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{a,b,c,d\}\times\{a,b,c,d\}$.

4.

$$W_0=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},W_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},W_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$W_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},W_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},W_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{a,b,c,d\}\times\{a,b,c,d\}$.

Problem 8

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系，$((a,b),(c,d)) \in R$ 当且仅当 $a+d=b+c$。证明 R 是等价关系。

答案：

- 任意正整数的有序对 (a,b) 满足 $a+b=a+b$，故 $(a,b)R(a,b)$，因此 R 是自反的。
- 假设正整数的有序对 (a,b) 和 (c,d) 满足 $(a,b)R(c,d)$，则 $a+d=b+c$，也即 $c+b=d+a$，故 $(c,d)R(a,b)$，因此 R 是对称的。
- 假设正整数的有序对 $(a,b),(c,d)$ 和 (e,f) 满足 $(a,b)R(c,d)$ 且 $(c,d)R(e,f)$，那么 $a+d=b+c$，故 $d=b+c-a$，代入 $c+f=d+e$ 中得 $c+f=b+c-a+e$，从而 $a+f=b+e$，故 $(a,b)R(e,f)$。因此 R 是传递的。

综上所述，R 是等价关系。

Problem 9

设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R 是 A 上的关系，且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$，设 $R^*=t(s(r(R)))$，则 R^* 是 A 上的等价关系。

1. 给出 R^* 的关系矩阵。
2. 写出商集 A/R^*。

答案：

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $A/R^*=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$

Problem 10

设 R 是非空有限集合 A 上的一个等价关系，A/R 是 A 关于 R 的商集，$|A|=n,|R|=r,|A/R|=t$。

1. 设 $A/R=\{A_1,A_2,\dots,A_t\}$，证明：$\bigcup_{i=1}^{t}(A_i\times A_i)=R$；
2. 证明：$r\cdot t\geq n^2$。

答案：

1. $A/R=\{A_1,A_2,\dots,A_t\}$，设 $|A_i|=n_i$，任取序偶 (x,y)，有：
$$\begin{aligned} &(x,y)\in\bigcup_{i=1}^{t}(A_i\times A_i) \\ \Leftrightarrow&\exists i(i\in\{1,2,\dots,t\}\wedge(x,y)\in A_i\times A_i) \\ \Leftrightarrow&\exists i(i\in\{1,2,\dots,t\}\wedge x\in A_i\wedge y\in A_i) \\ \Leftrightarrow&(x,y)\in R \end{aligned}$$
2. 根据商集的定义，商集中各等价类 $A_1,A_2,\dots,A_t$ 均两两不相交，于是 $\forall_{1\leq i<j\leq t}(A_i\times A_i)\cap(A_j\times A_j)=\emptyset$。结合第一问结论，有 $\sum_{i=1}^{t}n_i^2=r$。由 Cauchy-Schwarz 不等式，有 $(\sum_{i=1}^{t}n_i)^2\leq t\cdot\sum_{i=1}^{t}n_i^2=r\cdot t$。又因 $\sum_{i=1}^{t}n_i=n$，即得到：$r\cdot t\geq n^2$。