# 证明方法

马晓星

http://cs.nju.edu.cn/xxm

南京大学计算机科学与技术系

# 前情回顾

- 一阶谓词逻辑初步
  - 逻辑公式
    - 谓词
    - 量词
  - 常用逻辑等价式
  - 前束范式
  - 基于规则的推理
  - FOL的一些定论

# 内容提要

- 引言
- 证明方法
  - 直接证明
  - 逆否命题法/归谬法
  - 等价性证明
  - 分情形证明
  - 存在性证明
  - 唯一性证明
  - 寻找反例
- 数学与猜想

# 引言

- 定理（Theorem）
  - 能够被证明为真的陈述，通常是比较重要的陈述。
- 证明（Proof）
  - 表明陈述（定理）为真的有效论证。
  - 定理证明中可以使用的陈述
    - （当前）定理的前提
    - 术语的定义
    - 公理（假定）
    - 已经证明的定理（推论、命题、引理）

# 引言

- 定理的陈述（举例）
  - 如果$x>y$，其中$x$和$y$是正实数，那么 $x^2>y^2$。
- 形式化表示（逻辑公式）
  - 对所有正实数$x$和$y$，如果$x>y$，那么 $x^2>y^2$ 。
  - $\forall x \forall y((x>y) \rightarrow (x^2>y^2))$ //论域为正实数（若论域为全总个体域，如何改？）
- 如何证明
  - 定理的陈述为：$\forall x \forall y\left(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)\right)$
  - 先证明，对论域中的任一元素$a$和$b$, $P(a,b) \rightarrow Q(a,b)$
  - 再使用全称生成，得到$\forall x \forall y\left(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)\right)$

# 引言

- 更严格的证明
  - 对论域中的任一元素$a$ , 要证明 $\forall y\left(P(a,y) \rightarrow Q(a,y)\right)$
    - 对论域中的任一元素$b$, 给出 $P(a,b) \rightarrow Q(a,b)$的证明
    - 再使用全称生成，得到$\forall y\left(P(a,y) \rightarrow Q(a,y)\right)$
  - 再使用全称生成，得到$\forall x \forall y\left(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)\right)$
- 为了方便，通常我们更informal地写证明，但必须确保证明的**有效性**
  - 明确的证明框架，比如，反证法（广义）和数学归纳法
  - 严格的逻辑基础（遵循一阶谓词逻辑的有效论证）

# 引言

- 猜想（Conjecture）
  - 尚未被证明为真的陈述，通常是比较重要的陈述。
  - 尚未有效论证，也没有被证伪。例如：哥德巴赫猜想
    - 备注：一阶谓词逻辑是不可判定的

- 其他一些术语
  - 引理（Lemma）
  - 推论（Corollary）

# 直接证明

- 例如：
  - 定义
    - 对于整数$n$，如果存在一个整数$k$使得$n = 2k$，则称整数$n$是**偶数**，如果存在一个整数$k$使得$n = 2k + 1$，则称$n$是**奇数**。
      - 备注：一个整数要么是偶数，要么是奇数。
  - 定理：若$n$是奇数，则$n^2$是奇数。

$\forall n\ (Odd(n) \rightarrow Odd(n^2))$

任意给定一个奇数$n$，存在一个整数$k$，$n = 2k + 1$，

于是$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

于是$n^2$是奇数。

所以，对任意奇数$n$，$n^2$是奇数。

# 逆否命题法（Proof by contrapositive）

- 原理：
  - $\phi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\phi$

- 证明框架：

  要证明$\phi \to \psi$
  - 假设$\neg\psi$
  - 推出$\neg\phi$
  - 所以，$\phi \to \psi$成立

- 例：若$3n+2$是奇数，则$n$是奇数。

  //直接证明不好使：$3n+2 = 2k+1 \Rightarrow ?$
  - 假设结论不存立
  - $n$是偶数，存在一个整数$k$使得$n = 2k$
  - $3n+2 = 2(3k+1)$
  - $3n+2$是偶数
  - 因此，若$3n+2$是奇数，则$n$是奇数

# 归谬法（Proof by contradiction）

- 原理
  - $\phi \equiv \neg\phi \to \perp$

- 证明框架

  要证明$\phi$
  - 假设$\neg\phi$
  - 推出矛盾$\perp$（亦即$\psi$且$\neg\psi$）
  - 所以，$\phi$成立

- There is no rational number whose square is 2.
- Proof
  - Extra hypothesis: $(p/q)^2=2$, and $p,q$ are integers which have no common factors except for 1.
  - Then, $p^2=2q^2 \Rightarrow p^2$ is even $\Rightarrow p$ is even $\Rightarrow p^2$ is multiple of 4 $\Rightarrow q^2$ is even $\Rightarrow q$ is even $\Rightarrow p, q$ have 2 as common factor $\Rightarrow$ *contradiction*

# 等价性证明

- 原理：
  - $\bigwedge_{1\le i<j\le n}(\phi_i \leftrightarrow \phi_j) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1}(\phi_i \rightarrow \phi_{i+1})\right) \wedge (\phi_n \rightarrow \phi_1)$
- 证明框架
  - $\phi_1 \vdash \phi_2$
  - …
  - $\phi_{n-1} \vdash \phi_n$
  - $\phi_n \vdash \phi_1$
- 因此， $\phi_1, \dots, \phi_n$这$n$个命题中任意两个都等价。

# 分情形证明

- 原理
  - $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n \to \psi \equiv (\phi_1 \to \psi) \wedge \cdots \wedge (\phi_n \to \psi)$

- 证明框架
  - $\phi_1 \vdash \psi$
  - …
  - $\phi_n \vdash \psi$
  - 因此，$\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n \to \psi$

$$\cfrac{\phi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{matrix}\phi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}}{\chi} \ \vee\mathrm{e}$$

# 分情形证明（举例）

- 当$n$是一个正整数，且$n$≤4时，$(n+1)^3 \geq 3n$ 。
  - $n = 1, 2, 3, 4.$（穷举）

- 当$n$是一个整数时，有$n^2$≥$n$。
  - $n \leq 0$
  - $n \geq 1$

- $(x+y)^r < x^r + y^r$, 这里$x, y$是正实数, $r$是$0 < r < 1$的实数.
  - 不失一般性，假设$x + y = 1.$ 否则，令$x' = x/(x+y), y' = y/(x+y)$
  - $x < x^r$， $y < y^r \Rightarrow x + y < x^r + y^r \Rightarrow (x+y)^r < x^r + y^r$

# 存在性证明

- 证明目标 $\exists x P(x)$
  - 构造性证明，例如
    - 存在这样的正整数，有两种方式表示为正整数的立方和。

      $1729=10^3+9^3=12^3+1^3$
  - 非构造性证明
    - 存在无理数$x$和$y$ 使得$x^y$是有理数

      $y^2=2$，$x=y^y$，$x^y=(y^y)^y=y^2=2$

      若$x$是无理数，$x$和$y$即为所求；否则，$y$和$y$即为所求。

# 唯一性证明

- 存在一个且仅有一个$x$，使得$P(x)$。有时记作 $\exists!\, xP(x)$。
- 证明目标
  - $\exists x\left(P(x) \land \forall y(y \neq x \to \neg P(y))\right)$
  - $\exists x\, P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z) \to y = z)$
  - 举例，设$a$≠0，$ax + b = c$有唯一的解。

# 寻找反例

- 原理
  - $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

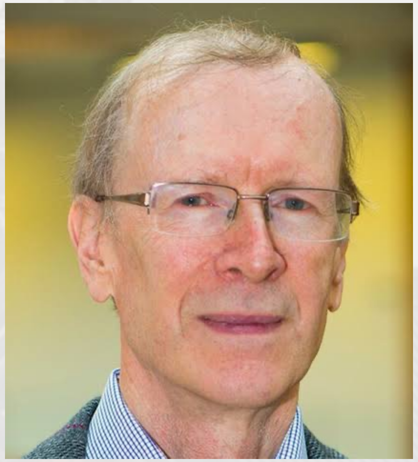
- 举例
  - 每个正整数都是两个整数的平方和
    **3?**
  - 每个正整数都是三个整数的平方和
    **7?**
  - 每个正整数都是四个整数的平方和？

# 证明中的错误

- 以下证明“2=1”，错在哪里？
  - $a=b$ 假设a和b是两个相等的正整数
  - $a^2=ab$ 两边乘以a
  - $a^2-b^2=ab-b^2$ 两边减去b2
  - $(a-b)(a+b) = (a-b)b$
  - $(a+b) = b$ 两边除以(a-b)
  - $2b = b$
  - $2 = 1$

# 数学与猜想（费马大定理）

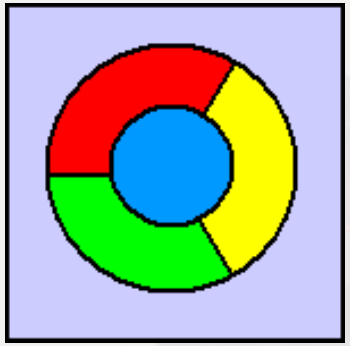
- Pierre de Fermat (1601-1665), France
  - Fermat’s Last Theorem (1637)（费马大定理）
  - $x^n+y^n=z^n$ (n>2, $xyz\neq0$)没有整数解
- Andrew Wiles (1953- ), Oxford, England
  - 1994/1995完成了费马大定理的证明（约10年时间）
  - 椭圆曲线理论



# 数学与猜想（哥德巴赫猜想）

- Goldbach Conjecture（1742年给欧拉的信中）
  - 任一大于2的整数都可写成三个质数之和。
- 欧拉版本（在给哥德巴赫的回信中）
  - 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
  - $\forall n(even(n)\wedge(n>2)\rightarrow\exists m\exists k(p(m)\wedge p(k)\wedge(n=m+k)))$
- “$a+b$”猜想
  - 任一充分大的偶数都可以表示成为一个素因子个数不超过$a$个的数与另一个素因子不超过$b$个的数之和。
- 1966年陈景润（1933－1996）证明了“1+2”猜想

# 数学与猜想（四色猜想）



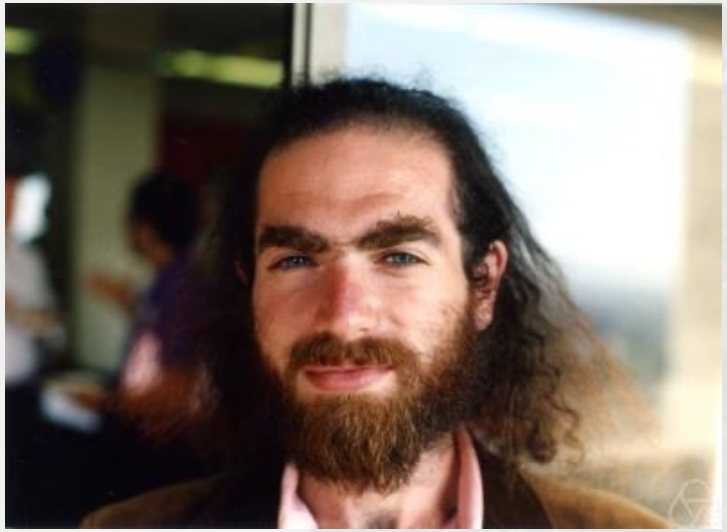
- Four Color Theorem
  - Proposed by Francis Guthrie in 1852
  - Proven in 1976 by Kenneth Ira Appel (1932-2013) and Wolfgang Haken (1928- )
    - Percy John Heawood (1861-1955, Britain) proved the five color theorem in 1890

# 世界数学难题

- Hilbert’s problems (23), ICM’1900, Paris
- Millennium Prize Problems (7) by the Clay Mathematics Institute in 2000

1. P versus NP problem
2. Hodge conjecture
3. Poincaré conjecture (solved by Perelman)
4. Riemann hypothesis
5. Yang–Mills existence and mass gap
6. Navier–Stokes existence and smoothness
7. Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

# Grigori Perelman (1966-, Russian)



In November 2002, Perelman posted the first of a series of eprints to the arXiv, ...

He declined to accept

Fields Medal award in 2006

Millennium Prize award in 2010

# 小结

- 定理与证明
- 证明方法的重要性
- 基本的证明方法
- 有难度的证明
  - 分情形证明法
  - 数学归纳法
- 猜想的重要性

# Q&A