221900180 田成铭 计算方法作业7

7. 由复化梯形公式的余项形式 $I-T_n=R_T=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$ 知：

只需令 $\left|-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\right|\le\varepsilon$，则 $h\le\sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)f''(\eta)}}$，又 $n\overset{近似}{=}\frac{1}{h}$，

$\therefore n>\sqrt{\frac{(b-a)M}{12\varepsilon}}$，$M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$ 即可.

（此题书后答案有误，请斟酌！）

11. (1) Romberg：求 $\int_1^3\frac{1}{y}dy$.

由
$$\begin{cases} T_0^{(0)}=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ T_0^{(l)}=\frac{1}{2}T_0^{(l-1)}+\frac{b-a}{2^l}\sum\limits_{i=1}^{2^{l-1}}f\left[a+(2i-1)\frac{b-a}{2^l}\right],\ l=1,2\cdots, \\ T_m^{(k)}=\frac{4^mT_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1},\ k=0,1\cdots l-m;\ m=1,2\cdots l \end{cases}$$

由计算机编程计算（程序将会在上机作业中展示、提交），

得：

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	1.333333	1.111111	1.099258	1.098630
1	1.166667	1.099999	1.098640	
2	1.116666	1.098725		
3	1.103210			

$\therefore\int_1^3\frac{1}{y}dy\approx1.098630.$

(2) ① 三点 Gauss-Legendre公式. 其中：$a=1,b=3$.

令 $y=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$，$\because y\in[1,3]$，$\therefore t\in[-1,1]$. $dy=dt$.

$$\therefore\int_1^3\frac{1}{y}dy=\int_{-1}^1\frac{1}{t+2}dt$$
$$\approx0.5555556\times\left(\frac{1}{2+0.7745967}+\frac{1}{2-0.7745967}\right)+0.8888889\times\frac{1}{2}$$
$$=1.098039283.$$

② 五点 Gauss-Legendre 公式，

同①：$\int_1^3\frac{1}{y}dy=\int_{-1}^1\frac{1}{t+2}dt$
$$\approx0.2369269\times\left(\frac{1}{2-0.9061798}+\frac{1}{2+0.9061798}\right)$$
$$+0.4786289\times\left(\frac{1}{2-0.5384693}+\frac{1}{2+0.5384693}\right)$$
$$+0.5688889\times\frac{1}{2}\approx1.098609289.$$

(3) 将[1,3]四等分，得：

$$\int_1^3\frac{1}{y}dy=\int_1^{1.5}\frac{1}{y}dy+\int_{1.5}^2\frac{1}{y}dy+\int_2^{2.5}\frac{1}{y}dy+\int_{2.5}^3\frac{1}{y}dy$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{dt}{2.5+0.5t}+\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{dt}{3.5+0.5t}+\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{dt}{4.5+0.5t}+\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{dt}{5.5+0.5t}$$
$$\approx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.5+0.5\times\frac{-1}{\sqrt3}}+\frac{1}{2.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}+\frac{1}{3.5+0.5\times\frac{-1}{\sqrt3}}+\frac{1}{3.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}+\frac{1}{4.5+0.5\times\frac{-1}{\sqrt3}}+\frac{1}{4.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}+\frac{1}{5.5+0.5\times\frac{-1}{\sqrt3}}+\frac{1}{5.5+0.5\times\frac{1}{\sqrt3}}\right]$$
$$\approx1.098537573.$$

而 $I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{y}dy$ 的有效值为 $I=1.098612289$,

∴比较以上结果知:

复化梯形公式和五点Gauss公式有效位数最多,

而三点Gauss公式和复化两点Gauss公式较差(此题上情况),因前者更差.