221900180 田永铭 计算方法作业第六章(1)

1.(1) 令~~f(x)=1, x~~ ∵有3个待定参数，∴先尝试令 $f(x)=1, x, x^2$ 分别代入求解，

得：$\begin{cases} 2h = A_{-1}+A_0+A_1, \\ 0 = -hA_{-1}+hA_1, \\ \frac{2}{3}h^3 = h^2A_{-1}+h^2A_1. \end{cases}$ 解得：$\begin{bmatrix} A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h}{3} \\ \frac{4}{3}h \\ \frac{h}{3} \end{bmatrix}$.

∴公式至少2次代数精度。$\boxed{\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}f(-h) + \frac{4}{3}hf(0) + \frac{h}{3}f(h).}$ → 求积公式

令 $f(x)=x^3$，左式 $=0$，右式 $= \frac{h}{3}(-h^3) + 0 + \frac{h}{3}\cdot h^3 = 0 =$ 左式.

令 $f(x)=x^4$，左式 $= \frac{2}{5}h^5 \neq \frac{h}{3}\cdot h^4 + 0 + \frac{h}{3}\cdot h^4 =$ 右式（不吻合）.

∴该公式具有3次代数精度.

(2) 将 $f(x)=1, x, x^2$ 分别代入令左右相等，得：

$\begin{cases} 4h = A_{-1}+A_0+A_1, \\ 0 = -hA_{-1}+hA_1, \\ \frac{2}{3}(2h)^3 = h^2A_{-1}+h^2A_1. \end{cases}$ 解得：$\begin{bmatrix} A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}h \\ \frac{4}{3}h \\ \frac{8}{3}h \end{bmatrix}$.

令 $f(x)=x^3$，左式 $=0$，右式 $= \frac{8}{3}h[(-h)^3+h^3] = 0 =$ 左式，

令 $f(x)=x^4$，左式 $= \frac{64}{5}h^5 \neq \frac{8}{3}h[(-h)^4+h^4] =$ 右式（不吻合）.

∴该公式具有3次代数精度.

(3) 将 $f(x)=1$ 代入，得：

左式 $=2$，右式 $= \frac{f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)}{3} = \frac{6}{3} = 2 =$ 左式.

将 $f(x)=x, x^2$ 代入，得：

$\begin{cases} -1+2x_1+3x_2=0, \\ 1+2x_1^2+3x_2^2=2. \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x_1=-0.2898979 \\ x_2=0.5265986 \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} x_1=0.6898979 \\ x_2=-0.1265986 \end{cases}$ ②.

令 $f(x)=x^3$，则左式 $=\frac{1}{2}$，右式 $= \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)] = \frac{1+2x_1^3+3x_2^3}{3} \neq \frac{1}{2}$

（无论是①还是②）.

∴代数精度为2.

求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(-0.2898979)+3f(0.5265986)]$

或 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(0.6898979)+3f(-0.1265986)]$.

2.(2)

①梯形: $h=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}$, $f(x)=\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}$, $x_k=0+\frac{1}{10}k=\frac{1}{10}k\,(k=1,2\ldots9)$.

$$T_{10}=\frac{h}{2}[f(0)+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+f(1)]=\frac{1}{20}\left[\lim_{x\to0}\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+(1-\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}}\right]$$

∵ $\lim_{x\to0}\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}$ 不存在(为$+\infty$), 而 $\int_0^1\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}dx$ 实际上存在 (可由其它方法说明).

∴将 $f(0)$ 认为是0以此来计算.

∴ $T_{10}\approx1.391477663\,9\approx1.39148$.

② simpson: 同理:

$$S_{10}=\sum_{k=0}^{9}\frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}[f(0)+4\sum_{k=0}^{9}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+f(1)]$$

$$\overset{认为}{=}\frac{1}{6}\times\frac{1}{10}\times[\text{“}0\text{”}+4\sum_{k=0}^{9}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{9}f(x_k)+(1-\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}}]$$

≈1.45471. (实际上本题函数是pathological的, 所以很难有好的数值, S_{10}还可能算出1.57088出来).

(4) ①梯形: $h=\frac{\frac{\pi}{6}}{6}=\frac{\pi}{36}$, $f(\varphi)=\sqrt{4-\sin^2\varphi}$, $x_k=0+\frac{\pi}{36}k=\frac{\pi}{36}k\,(k=1,2\ldots5)$.

$\cancel{x_{k+\frac{1}{2}}}$

∴ $T_6=\frac{\frac{\pi}{36}}{2}[f(0)+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(\frac{\pi}{6})]$ ~~1.035684~~ ≈1.03562.

② simpson: $x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{36}k+\frac{\pi}{72}$, $k=0,1\cdots5$.

∴ $S_6=\frac{h}{6}[f(0)+4\sum_{k=0}^{5}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{5}f(x_k)+f(\frac{\pi}{6})]\approx1.03577$.