221900180田永铭 数理逻辑作业7

Problem1 证明（二选一）

1. [Enderton, pp.145]（语义 EI 规则）假设常数符 c 在 wffφ 和 ψ 以及 wff 集 Γ 中从未出现，且 Γ∪{φ_c^x } ⊨ ψ，证明（不使用可靠性与完备性定理）Γ ∪ {∃x φ} ⊨ ψ.

证明：

$$
\begin{aligned}
& \Gamma \cup \{\varphi_c^x\} \vDash \psi \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi_c^x[s]\text{,则}\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s] \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]\text{,则}\nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi_c^x[s] \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]\text{,则}\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\varphi_c^x[s] \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]\text{,则}\vDash_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s(x|c^{\mathfrak{A}})] \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]\text{,则} \\
& \forall d \in |\mathfrak{A}|, \vDash_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s(x|d)] \\
& (\text{这步用到了常数符}c\text{在}wff\varphi\text{和}\psi\text{以及}wff\text{集}\Gamma\text{中从未出现}) \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\nvDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]\text{,则}\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\neg\varphi[s] \\
iff\quad & \text{对}\forall\mathfrak{A}\forall s\text{，它们若满足}\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]\text{和}\nvDash_{\mathfrak{A}} \forall x\neg\varphi[s]\text{,则}\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s] \\
iff\quad & \{\Gamma \cup \exists x\varphi\} \vDash \psi
\end{aligned}
$$

证毕！

2. [Enderton, pp.145] 假设 Γ ⊢ φ，且 P 是一个从未出现在 Γ 和 φ 中的谓词符号。问：是否存在一个从 Γ 出发到 φ 的证明，其中 P 不出现？

证明：

存在。理由如下：

由 $\Gamma \vdash \varphi$ 以及可靠性定理，得 $\Gamma \vDash \varphi$.

(1)先定义不含有谓词符号P的结构和指派：

$\forall\mathfrak{A}\forall s: V \to |\mathfrak{A}|$，其中$s$满足 $\vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]$.

(2)再定义含有谓词符号P的结构和指派，它由上面定义的引申出来得到：

具体地，它定义$P^{\mathfrak{A}} = \emptyset$.

(3)于是有：

因为Γ中没有用到P，所以有：

$\vDash_{\mathfrak{A}'} \Gamma[s]$.

又因为含有P谓词的结构一定能有Γ⊢φ，所以有$\Gamma \vDash \varphi$，所以有：

$\vDash_{\mathfrak{A}'} \varphi[s]$.

同样地,因为φ中没有用到P,所以有：

$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$.

所以，在没有谓词符号P的语言中，有：

$\Gamma \vDash \varphi$.

又由完备性定理，知道：

$\Gamma \vdash \varphi$.

证毕！

Problem2 证明（二选一）

1. [Enderton, pp.146] 令 $\Gamma = \{\neg\forall v_1 Pv_1, Pv_2, Pv_3 \ldots\}$**请问 Γ 是一致的吗？它是可满足的吗？请证明你的结论。**

证明：

由于完备性和一致性的定理，所以Γ可满足即一致，一致即可满足。下面证明它是可满足的，那么它自然也就是一致的：

证明可满足性质：

只需要考虑以下这一个结构，即可说明它的可满足性：

考虑自然数结构 $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, P)$. P这个谓词表示前驱存在。那么对于v = 1，2，3，4· · ·这些元素Pv都是成立的,但是0没有前驱，所以$\neg\forall v_1 Pv_1$. 所以Γ是可满足的，同时也是一致的.

另一个更严谨的写法是：

考虑 $\mathfrak{A} = (0, 1; P)$, 其中$P^{\mathfrak{A}} = \{< 1 >\}$.

s指派为$s : V \to |\mathfrak{A}|$ 满足 $s(v_i) = 1$.

因此有 $\vDash_{\mathfrak{A}} Pv_i[s], \vDash_{\mathfrak{A}} Pv_1[s(v_1|1)], \nvDash_{\mathfrak{A}} Pv_1[s(v_1|0)]$.

因此 $\nvDash_{\mathfrak{A}} \forall v_1 Pv_1[s]$.

同样这也证明了Γ是可满足的，所以也是一致的.

证毕!

2. [Enderton, pp.146] 证明：一张无穷的地图（有无穷个国家）能用四种颜色着色，当且仅当它的每一个有穷的子地图可以。

我不选。

Problem3 证明（四选二）

[Enderton, pp.146] 完备性定理告诉我们，每个语句要么是有效的，即存在一个证明（从 ∅ 出发）；要么就有一个结构令其为假。请判断下面的语句是否有效，并证明你的结论

(a) $\forall x(Qx \to \forall y Qy)$

证明：

句子是无效的，存在结构使其为假，比如结构如下：

$\mathfrak{A} = (0, 1, Q)$, 谓词Qx成立 iff $x = 1$.
所以对于$x = 1$, Qx 成立，但是却不能得到 $\forall y Qy$,这是因为Q0不成立，因为$0 \neq 1$.

所以句子无效。

证毕!

(b)$(\exists x Px \to \forall y Qy) \to \forall z(Pz \to Qz)$

证明：

该句子成立，证明如下：

首先利用演绎定理和概括定理，得知只需要证明：

$(\exists x Px \to \forall y Qy) \vdash (Pz \to Qz)$.

由演绎定理，只需要证明：

$\{\exists x Px \to \forall y Qy; Pz\} \vdash Qz$.

利用公理"替换规则" $\forall x \neg Px \to \neg Pz$, 结合一次逆否得：

$Pz \to \exists x Px.$

所以由前提，利用两次MP规则，可以推出：

$\forall y Qy.$

再利用一次公理"替换规则"，将上式替换为z, 即得：

$Qz.$

所以$(\exists x Px \to \forall y Qy) \to \forall z(Pz \to Qz)$ 成立.

证毕!

(c)$\forall z(Pz \to Qz) \to (\exists x Px \to \forall y Qy)$

证明:

句子是无效的，存在结构使其为假，比如考虑实数集上的结构如下：

$\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, P，Q)$, 谓词Px成立 iff $x < 2$,谓词Qx成立 iff $x < 3$.

在这种结构下，$\forall z(Pz \to Qz)$ 显然是成立的，因为若x < 2 则 必有x < 3.

但是后件是不成立的，即 $(\exists x Px \to \forall y Qy)$不成立，因为显然有小于2的x，但是不是任意y都小于3.

所以句子无效。

证毕!

(d) $\neg\exists y \forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$

证明:

命题正确，证明如下：

先消去存在量词，原题等价于：

$\forall y \neg \forall x(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx).$

首先利用一个重言式：

$\alpha \leftrightarrow \beta$ 重言等价于 $\neg((\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha)).$

再利用概括定理消去y,所以只需要证明：

$\vdash \neg \forall x \neg((Pxy \to \neg Pxx) \to \neg(\neg Pxx \to Pxy)).$

记$\alpha表示((Pxy \to \neg Pxx) \to \neg(\neg Pxx \to Pxy)).$

所以原命题表示为：

$\vdash \neg \forall x \neg \alpha.$

断言：只需要证明$\vdash \exists t \alpha_t^x$成立,就能证明结论，理由如下:

若有其成立，则由公理"替换规则" 有：

$\vdash \forall x \neg \alpha \to \neg \alpha_t^x.$

上式利用逆否，等价于:

$\vdash \alpha_t^x \to \neg \forall x \neg \alpha.$

这就有了结论.

下面证明$\vdash \exists t \alpha_t^x$成立：

事实上，我们令t为y即可，即以下式子成立:

$((Pyy \to \neg Pyy) \to \neg(\neg Pyy \to Pyy)).$

这个式子成立非常显然，列真值表即可，或者更简单地，讨论Pyy的真值，若为真，则式子为真；若为假，式子也为真.所以式子成立.

证毕！