221900180田永铭 数理逻辑作业2

Problem 证明命题(5选3)

Solution

1.证明：

必要性：若 $\emptyset \models \alpha$, 则在任意真值指派下都能够满足 $\emptyset$ 的条件 ,这是因为 $\emptyset$ 里面本身就没有条件。由语义蕴涵的意义知道能推出 α，所以 α 在任何的情况下都成立，所以 α 是重言式，必要性成立；

充分性： 若 α 是重言式，则任何一个真值指派下，α 都成立， $\emptyset$ 中没有任何结构，所以在这种空的指派下，α 也必然成立，所以 $\emptyset \models \alpha$ 成立，充分性成立。

证毕！

2.证明：

假设对于使得 Γ 中每个wff都成真的结构，则 $\because \Gamma \models \alpha$ ，$\therefore \alpha$ 成立; $\because \Gamma \models \beta$, $\therefore \alpha \to \beta$ 成立;又由假言推理规则，知 β 成立。由此知道 $\Gamma \models \beta$, 所以原命题成立。

证毕！

3.证明：

定义：若 Γ 的任意有限子集均可满足，则称其为有限可满足的。 证明分为两步:

（1）保持有限可满足性质的前提下将 Γ 扩展到最大；

（2）利用最大的该集合找出满足要求的真值指派

（1）首先构造一个集合 Δ:由于命题集合可数，表达式集合可数，所以我们先设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ 是wff的一个枚举。令$\Delta_0 = \Gamma$,

$\Delta_{n+1} = \Delta n \cup \alpha_{n+1}$,如果加上后仍有限可满足；

$\Delta_{n+1} = \Delta n \cup \neg\alpha_{n+1}$ 其它情况

这种方法下能保持每个 Δ_n 都是有限可满足的，这很显然。记 Δ_n 的极限为 $\Delta = \cup_n \Delta_n$.它有性质：（1）$\Gamma \in \Delta$ (2)对于 $\forall$ 合适公式 α,要么属于Δ, 要么不属 （3）Δ 是有限可满足的

（2）定义一个由所有命题符号组成的集合上的真值指派 v: 对任意的命题符号 $A, v(A)=T$ iff $A \in \Delta$.则对于任何wff, v 满足 ϕ iff $\phi \in \Delta$. 这等价是由以上的三个性质保证.又因为 $\Gamma \in \Delta$, 所以真值指派 v 一定可以满足 Γ 的每个wff。

证毕!

4.证明:

采用**反证法**：假设在 $\Gamma \subseteq \Delta$ 和 $\Gamma \models \alpha$ 成立的情况下， $\Delta \models \alpha$ 不成立，即 Δ 中的wff在某一真值指派 v 下不能使得 α 成立，又因为 $\Gamma \subseteq \Delta$，所以 任何一个wff要么在 Δ 中不在 Γ 中，要么同在两者之中或同不在两者之中，我们只关心同在两者之中的，给这些公式与 v 一样的真值指派，则 Γ 中的这些wff一定不能推出 α ，这与前提 $\Gamma \models \alpha$ 矛盾. 故假设不成立，原结论成立. **证毕!**

5.证明:

因为 $\Gamma \models \alpha$，所以对于任何使得 Γ 中的每个公式为真的一种真值指派，α 也为真。因为 $\Delta \cup \alpha \models \beta$ ，所以对于任何使得 $\Delta \cup \alpha$ 中的每个公式为真的结一种真值指派，β 也为真。 故若我们考虑使得 $\Gamma \cup \Delta$ 中的每个公式为真的真值指派，因为它满足了 Γ 中的所有公式以及 $\Delta \cup \alpha$ 中的所有公式，所以有 β 为真 ，所以 $\Gamma \cup \Delta \models \beta$ 成立.

证毕!