考试科目名称 离 散 数 学 （A 卷）

2018—2019 学年第 二 学期　　教师__________　　考试方式 闭 卷

系（专业）计算机科学与技术系　　年级__________　　班级__________

学号__________　　姓名__________　　成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

得分	

一、（本题满分 10 分）

请自定义谓词，用谓词逻辑表示下列各语句并推理论证结论是否成立：

“每位大一的同学都需要修读离散数学。每位修读离散数学又对概率论特别感兴趣的同学都将会修读博弈论。小花是大一的同学并且对概率论特别感兴趣。所以，小花同学将会修读博弈论。”

参考解答：

设论域为某高校的全体学生，设谓词$F(x)$表示x是大一的同学，$D(x)$表示x修读离散数学，$P(x)$表示x对概率论特别感兴趣，$G(x)$表示x修读博弈论.小花同学用个体a表示.（1 分）

将上述 3 个事实和 1 个结论语句转化成谓词逻辑表达式（各 1 分）：

事实：(1) $\forall x\big(F(x) \rightarrow D(x)\big)$，(2) $\forall x\big(D(x) \wedge P(x) \rightarrow G(x)\big)$，(3)$F(a) \wedge P(a)$

结论：(4) $G(a)$.

推理过程（4 分，未标明依据不扣分，跳过若干步酌情给分）：

1. $F(a) \rightarrow D(a)$ （全称例示 from (1)）
2. $F(a)$ （化简 from (3)）
3. $D(a)$ （假言推理 from 1、2)
4. $P(a)$ （化简 from (3)）
5. $D(a) \wedge P(a)$ （附加 from 3、4)
6. $D(a) \wedge P(a) \rightarrow G(a)$ （全称例示 from (2)）

7. $G(a)$ （假言推理 from 5、6）

综上，结论逻辑有效（或结论正确）．(1 分)

得分	

二、（本题满分 10 分）

试证明：质数阶群皆为可交换群.

参考解答：

证明：设有限群$\langle G,*\rangle$，且$|G|=p$为质数．对任意$a\in G$令$\langle a\rangle=\{a^n|n\in\mathbb{Z}\}$，易见$\langle\langle a\rangle,*\rangle\leq\langle G,*\rangle$，(2 分)由拉格朗日定理，$|\langle a\rangle|$为$p$的因子(2 分)．由于$p$为质数，故$\exists a\in G,a\neq e,|\langle a\rangle|=p$，(2 分)即$\exists a\in G(G=\langle a\rangle)$，即$\langle G,*\rangle$为有限循环群(2 分)．因为$n$阶有限循环群皆同构于模$n$剩余加群，后者为 Abel 群，故结论成立。(2 分)

注：如果直接用结论：“有限群元素的阶为群的阶的因子”，或者“质数阶群皆为循环群”也可给分。

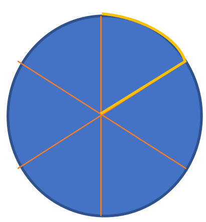
得分	

三、（本题满分 10 分）

在单位圆盘（半径为 1 的圆盘，包含圆周）内随机放置 7 个点，要求任意 2 点之间的距离均不小于 1．试证明：此 7 点中必有一点为圆心.

参考解答：

证明：将圆盘面六等分为 6 个扇面（每个扇面顶角都为$\pi/6$）(2 分)，定义每个扇面边界均为包含圆周和右边半径但不含左边半径（如图所示）(2 分).假设在此分割后的圆盘内放置 7 个点，两两距离不小于 1，且没有任一点为圆心(2 分)，根据鸽笼原理，必有至少 2 点在同一个扇面内，此 2 点或诸点之间的距离小于 1，与已知条件矛盾(2 分)．故假设错误，原命题得证．(2 分)



得分	

四、（本题满分 10 分）

试证明：每个竞赛图均包含一条有向哈密顿通路.

注：竞赛图（tournament）是指底图（将有向图的方向信息去掉之后的无向图）为完全图的有向图.

参考解答：

用数学归纳法证明：

Basis: 对应于底图为K_1、K_3的竞赛图显然都包含有向哈密顿通路（1 分）;

I.H.: 假设任一k阶竞赛图均包含一条有向哈密顿通路;（1 分）

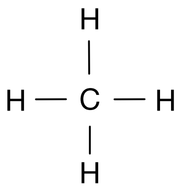
I.S.: 对于某一$k+1$阶竞赛图G，由于其底图为K_{k+1}，某一顶点v与图$G-v$的其余k个顶点都有一条有向边(1 分);由归纳假设,$G-v$存在一条有向哈密顿通路Γ，那么：(1)若$\forall u \in V(G-v)$存在有向$u-v$通路，则$\Gamma+(u,v)$即为G中的一条有向哈密顿通路（2 分）；(2)若$\forall u \in V(G-v)$存在有向$v-u$通路，则$(v,u)+\Gamma$即为G中的一条有向哈密顿通路（2 分）；(2)若对于$\exists u \in V(G-v)$存在$u-v$有向通路且$\exists w \in V(G-v)$, 存在$v-u$有向通路, 则Γ中必存在相邻的顶点(不妨设为u,w)，存在$u-v$有向通路和$v-w$有向通路，那么Γ中u之前的一段$+(u,v)+(v,w)+\Gamma$中w之后的一段即为G中的一条有向哈密顿通路.（2 分）由数学归纳法，任意竞赛图均包含一条有向哈密顿通路.（1 分）

得分	

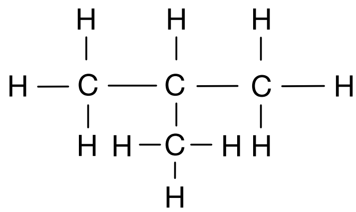
五、（本题满分 10 分）

烷烃（saturated hydrocarbon）是指一类分子式为C_nH_m的有机化合物，其每个碳原子（C）均有 4 个单键（单键是原子与原子之间力的作用，可看作两个原子之间的一个"连接"），每个氢原子（H）均有 1 个单键，烷烃仅允许碳原子与碳原子之间或者碳原子与氢原子之间通过单键连接，每个碳原子与氢原子的键数均饱和，且不允许任何环（cycle）的存在．例如CH_4和C_4H_{10}可形成为如图所示的形态（图中的连线表示单键），它们都是烷烃．

试证明：对任意正整数n，若分子C_nH_m为烷烃则必有$m = 2n + 2$.



甲烷：CH_4



2-甲基丙烷（异丁烷）：C_4H_{10}

参考解答：

证明：

将烷烃中的碳原子和氢原子看作图的顶点，将单键看作无向边，由条件可知图中无回路（烷烃中不允许任何环的存在），故任意烷烃的结构均为树（2 分）.对于任意烷烃对应的树T，用C表示碳原子数，H表示氢原子数，由树的边、点数关系和握手定理（2 分），有：(1) $C + H = |T|$（2 分），(2) $4C + H = 2(|T| - 1)$（2 分）；将(1)(2)联立得到$2C = H - 2$（2 分），即C_nH_m为烷烃则必有$m = 2n + 2$.

得分	

六、（本题满分 12 分）

对于布尔代数$\langle B,\cap,\cup,\overline{\ },0,1\rangle$，若$a,b,x\in B$，试证明：

(1) 若$a\cup x=b\cup x$ 且 $a\cup\bar{x}=b\cup\bar{x}$，则 $a=b$；

(2) 若$a\cap x=b\cap x$ 且 $a\cup x=b\cup x$，则 $a=b$.

参考解答：

证明：

(1) 证法 1：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}\vee \mathbf{0}\\
&= \boldsymbol{a}\vee(\boldsymbol{x}\wedge\sim\mathbf{x})\\
&= (\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{x})\wedge(\boldsymbol{a}\vee\sim\mathbf{x})\\
&= (\boldsymbol{b}\vee\boldsymbol{x})\wedge(\boldsymbol{b}\vee\sim\mathbf{x})\\
&= \boldsymbol{b}\vee(\boldsymbol{x}\wedge\sim\mathbf{x})\\
&= \boldsymbol{b}\vee\mathbf{0}\\
&= \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

证法 2:

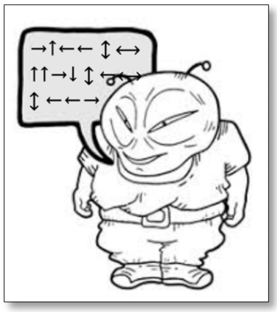
(1).
$$
\begin{aligned}
a &= a\cup a\cup 0\\
&= (a\cap a)\cup(a\cap(x\cup\bar{x}))\cup(x\cap\bar{x})\\
&= (a\cup x)\cap(a\cup\bar{x})\\
&= (b\cup x)\cap(b\cup\bar{x})\\
&= b
\end{aligned}
$$

(2).
$$
\begin{aligned}
a &= a\cap(a\cup x)\\
&= a\cap(b\cup x)\\
&= (a\cap b)\cup(a\cap x)\\
&= (a\cap b)\cup(b\cap x)\\
&= b\cap(a\cup x)\\
&= b\cap(b\cup x)\\
&= b
\end{aligned}
$$

（各 6 分）

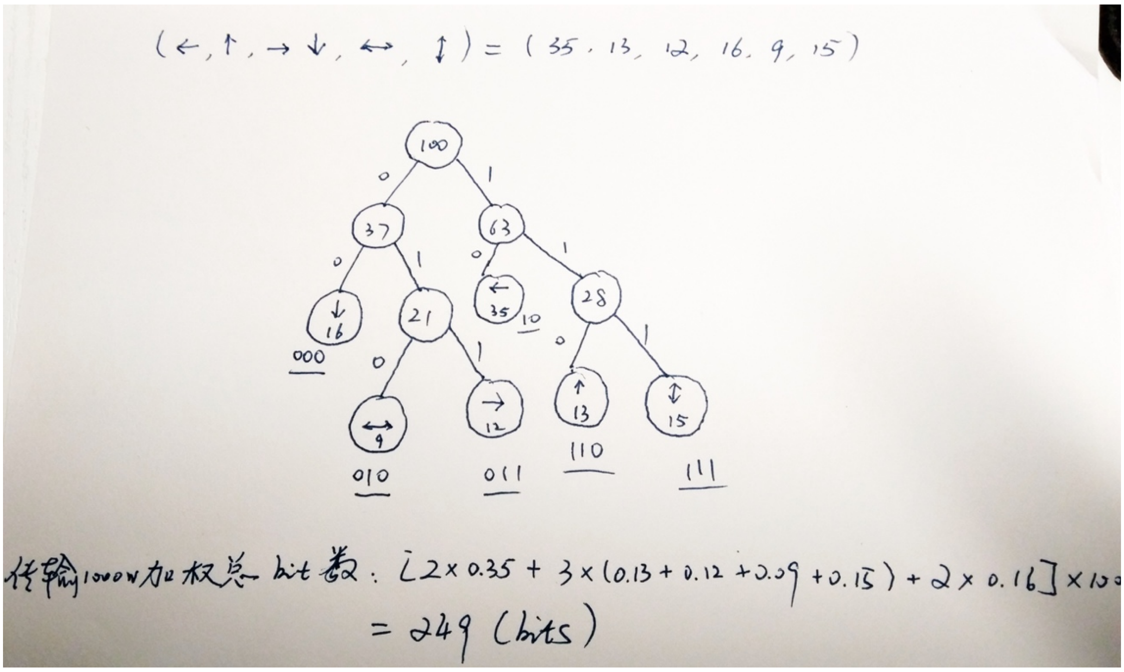
得分	

七、（本题满分 12 分）



某外星人的文字只涉及 6 种符号：←、↑、→、↓、↔ 和 ↕，经统计这些符号在外星人通信中出现的频率如下：←占 35%，↑占 13%，→占 12%，↓占 16%，↔占 9%，↕占 15%. 试用 Huffman 算法求出传输它们的最优二进制前缀编码. 请画出编码树，给出各符号的编码并求传输 100 个按上述频率出现的符号需要的二进制位（bit）数.

参考解答：



哈夫曼树画正确（可不标定）（8 分），求出各符号的正确编码（总长度最优即视为正确，如按照左分支为 1、右分支为 0 进行编码只要总长度最优也算正确）（2 分），求出正确的传输比特数（249）（2 分）.

得分	

八、（本题满分 12 分）

定义： 集合族$(A_1, A_2, \cdots, A_m)$的一个相异代表系（system of distinct representatives, SDR）是指集合$A_1, A_2, \cdots, A_m$中包含的对每个正整数$i(1 \le i \le m)$都满足$x_i \in A_i$（称元素x_i为集合A_i的代表元素）的互异的代表元素组$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

例如，对集合$\{a, b, c, d\}$的一个子集族$\mathcal{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$，其中$A_1 = \{a, b, c\}$，$A_2 = \{b, d\}$，$A_3 = \{a, b, d\}$，$A_4 = \{b, d\}$，可见$\mathcal{A}$存在一个 SDR：$(c, b, a, d)$，但$(a, b, b, d)$则不是$\mathcal{A}$的 SDR，因其不满足代表元素的互异性.

试证明：集合族$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$存在 SDR 当且仅当该集合族满足：对所有$k \le n$，集合族中任意k个集合$A_i(1 \le i \le n)$的并集中至少包含k个元素.

注：集合族是指由集合构成的序列，序列中的元素（即集合）可以相同.

参考解答：

证明：将集合族中的各元素（集合）视为V_1中的元素（2 分），将集合族中各元素的并集中的各元素（集合中的元素）视为V_2中的元素（2 分），若V_2中的元素a属于集合族中的某元素（集合）A，则顶点A与a存在边（2 分）；此模型可构成一个二部图$G = \langle V_1, V_2, E \rangle$（2 分）. 求集合族的 SDR 即为求$G$的完备匹配（2 分）. 易见待证问题即 Hall 条件（2 分），命题得证.

注：如果用集合论的方式证明（不易证明），如果正确给满分.

得分	

九、（本题满分 14 分）

定义（友谊图）：简单图F（$|F|>2$）中任意 2 个顶点（可视为“人”）有且仅有 1 个共同的相邻顶点（可视为“朋友”）．

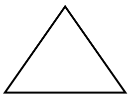
(1) 请给出任意 2 个友谊图的例子；

(2) 试证明：友谊图F中必不含C_4子图（C_4指 4 阶圈图）；

(3) 试证明：对友谊图F中任意不相邻的顶点u和v，必有$d(u)=d(v)$.

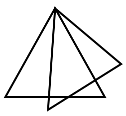
参考解答：

(1) 例子之一：K_3



（2 分）

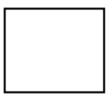
例子之二：只有一个相同顶点的两个 K_3 合成（或者由若干K_3共同一顶点合成均可）



（3 分）

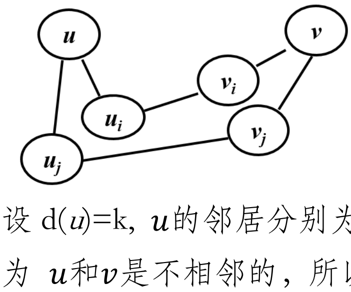
一个例子给 2 分，2 个给 5 分.

（2）证明：反证法，假设友谊图F包含C_4子图。（2 分）



那么，对角的两个顶点有 2 个共同的朋友（相邻顶点），矛盾！（2 分）
所以，友谊图F不会包含C_4子图。

（3）假设u和v是友谊图F中任意两个不相邻的顶点。



假设 d(u)=k, u的邻居分别为 $u_1,\dots,u_k$.

因为 u和v是不相邻的，所以，$u_i\neq v$, 从而 u_i 与 v 有 1 个共同的邻居 v_i（i=1,…, k）。（2 分）

因为 u与v是不相邻的，而 v_i 与 v 是相邻的，因此，$v_i\neq u$。

$v_1,\ldots,v_k$一定互不相同，否则，若有 $v_i = v_j$，则 $u\,u_j\,v_j\,u_i\,u$ 构成一个C_4子图，矛盾。
因此 v 至少有 k 个邻居，我们有 $d(v) \ge d(u)$。（2 分）
同理可证，$d(u) \ge d(v)$，因此，$d(u) = d(v)$ （1 分）