

作业 08 - 归纳与递归

离散数学教学组

Problem 1

求出阿克曼函数值 $A(3, 4)$ 。阿克曼函数的定义为：

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & m = 0 \\ A(m - 1, 1) & m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

答案： $A(3, 4) = 125$

Problem 2

给出下述集合的递归定义：

1. 正偶数集合
2. 整系数多项式的集合
3. 3 的正整数次幂的集合

答案：

1. 正偶数集合 S 可以定义为
 - 基础步骤： $2 \in S$
 - 递归步骤： 若 $x \in S$ ，则 $x + 2 \in S$
2. 整系数多项式的集合 S 可以定义为
 - 基础步骤： S 包含整数集合及所有可能的变元，即 $Z \subset S, \{x, y, z, \dots\} \subset S$
 - 递归步骤： 若 $a, b, c \in S$ ，则 $ab + c \in S$
3. 3 的正整数次幂的集合 S 可以定义为
 - 基础步骤： $3 \in S$
 - 递归步骤： 若 $x \in S$ ，则 $3x \in S$

Problem 3

设 $P(n)$ 是命题： $n! < n^n$ ，其中 n 是大于 1 的整数。

1. 命题 $P(2)$ 是什么？
2. 证明 $P(2)$ 为真，完成基础步骤的证明。
3. 归纳假设是什么？
4. 在归纳步骤中你需要证明什么？
5. 完成归纳步骤。
6. 解释为什么只要 n 是一个大于 1 的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

答案:

1. $2! < 2^2$ 。
2. 命题 $2! < 2^2$ 的不等式左侧值为 2, 右侧值为 4, $2 < 4$, 故 $P(2)$ 为真。
3. 对任意大于 1 的整数 k , $P(k)$ 为真。
4. 在归纳步骤中, 需要证明对任意大于 1 的整数 k , 如果 $P(k)$ 为真, 那么 $P(k+1)$ 为真。
5. 由归纳假设, 对任意大于 1 的整数 k , $k! < k^k$ 。不等式两边同时乘以 $k+1$, 得 $(k+1)! < (k+1)k^k$ 。而 $(k+1)k^k < (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{k+1}$, 因此 $P(k+1)$ 成立。
6. 因为我们已经证明了 $P(2)$, 又证明了对于大于 1 的整数 k , $\forall k (P(k) \rightarrow P(k+1))$, 由正整数集合的良序性公理 (或数学归纳法), 结论可以推广到所有大于 1 的正整数。

Problem 4

证明 $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, 其中 n 为正整数, $f(n)$ 为斐波那契函数。

答案: 证明:

- 基础步骤: $n=1$ 时显然成立, 因为 $f_2f_0 - f_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$ 。
- 归纳步骤: 假设 $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ 成立,

$$\begin{aligned} f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n)f_n - f_{n+1}^2 \\ &= f_{n+1}f_n + f_n^2 - f_{n+1}^2 \\ &= -f_{n+1}(f_{n+1} - f_n) + f_n^2 \\ &= -f_{n+1}f_{n-1} + f_n^2 \\ &= -(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

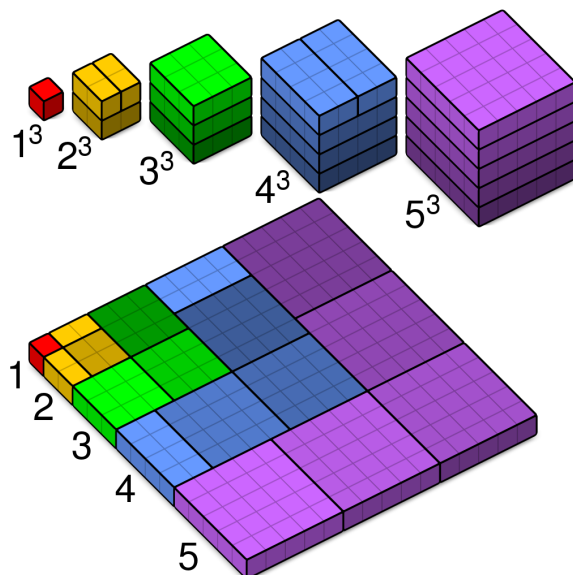
根据数学归纳法知, 命题成立。

Problem 5

证明 (亦可不用数学归纳法):

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

答案: 【证法一】



【证法二】设 $P(n)$ 表示命题: $\sum_{k=1}^n k^3 = (\sum_{k=1}^n k)^2$ 。

- 基础步骤: $P(1)$ 显然成立。
- 归纳步骤: 假设 $P(n)$ 成立, 可以推出 $(\sum_{k=1}^{n+1} k)^2 = (\sum_{k=1}^n k + (n+1))^2 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$, 即 $P(n+1)$ 成立。

根据数学归纳法知, 命题成立。

Problem 6

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域。

答案: 设 $P(n)$ 表示命题: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域。

- 基础步骤: $P(1)$ 为真, 因为 1 条直线可以将平面分为 2 个区域。
- 归纳步骤: 假设 $P(k)$ 为真, 即过同一点的 k 条直线将平面分为 $2k$ 个区域。在归纳假设的情形的基础上, 添加一条过交点的直线, 恰将原来的 2 个区域分为了 4 个区域。因此共有 $2k+2=2(k+1)$ 个区域, $P(k+1)$ 为真。

根据数学归纳法知, 命题成立。

Problem 7

一个字符串的逆是字符串内字符的反序排列, 记为 w^R 。如 $w = 1010, w^R = 0101$ 。

1. 给出 w^R 的递归定义 (假设空字符串为 λ)。
2. 用结构归纳证明 $(w_1w_2)^R = w_2^Rw_1^R$ 。

答案:

1. 基础步骤: $\lambda^R = \lambda$; 递归步骤: 令 $w = ux$, 其中 x 为最右边的字符, u 为除了 x 之外的字符串, $(ux)^R = xu^R$ 。
2. 设命题 $P(w_1w_2)$ 为: $(w_1w_2)^R = w_2^Rw_1^R$:
 - 基础步骤: $(w_1\lambda)^R = w_1^R = \lambda w_1^R = \lambda^R w_1^R$ 。
 - 归纳步骤: 假设命题 $P(w_1w_2)$ 为真。 $(w_1w_2x)^R = x(w_1w_2)^R = xw_2^Rw_1^R = (w_2x)^Rw_1^R$ 。

综上, 当 $P(w_1w_2)$ 为真时, 可推出 $P(w_1w_2a)$ 为真, 由结构归纳法, 命题得证。

Problem 8

1. 对于表示十进制数字的非空字符串 s , 给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义。
2. 用结构归纳法证明 $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$ 。(其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接)

答案:

1. 基础步骤: $m(a) = a$ (a 为表示一个数字的单个字符); 递归步骤: $m(s \cdot a) = \min(m(s), a)$ 。
2. 设命题 $P(st)$ 为: 当 s, t 均为十进制数字的非空字符串时, $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$ 。
 - 基础步骤: $m(\lambda \cdot a) = \min(m(\lambda), m(a)) = a$ (a 为表示一个数字的单个字符, λ 表示空串), 此时 $P(\lambda a)$ 为真。
 - 归纳步骤: 假定命题 $P(xy)$ 为真, 即 $m(x \cdot y) = \min(m(x), m(y))$ 成立。根据 m 函数的递归定义:

$$m(x \cdot y \cdot a) = \min(m(x \cdot y), a) = \min(m(x), m(y \cdot a))$$

综上, 当 $P(xy)$ 为真时, 可推出 $P(xya)$ 为真, 由结构归纳法, 命题得证。

Problem 9

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式。例如, $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ 是 7 的拆分。设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数。

1. 证明: $P_{m,m} = P_m$ 。
2. 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的。

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 1 & n = 1 \\ P_{m,m} & m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & m > n > 1 \end{cases}$$

3. 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

答案:

1. m 无法用于大于 m 的数参与分拆, 因此 $P_{m,m} = P_m$ 。
2. 对定义逐条证明:
 - $m = 1$ 时, 只有一种拆分方法, 即 1 本身, 因此 $P_{1,n} = 1$ 。
 - $n = 1$ 时, 只有一种拆分方法, 即拆成 m 个 1 的和, 因此 $P_{m,1} = 1$ 。
 - $m < n$ 时, 由第一问证明可知, 此时 n 的大小不影响结果, 因此等于 $P_{m,m}$ 。
 - $m = n > 1$ 时, 存在 $m = (m-1) + 1$ 这种拆分方式, 以及其他 $P_{m,m-1}$ 种拆分方式, 因此等于 $1 + P_{m,m-1}$ 。
 - $m > n > 1$ 时, 存在不含 n 的拆分 $P_{m,n-1}$ 和包含 n 的拆分 $P_{m-n,n}$ 两种情况, 因此等于 $P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$ 。
3. $P_5 = 7, P_6 = 11$ 。

Problem 10

1. 利用数学归纳法证明:
 - (i) $\sum_{k=1}^n k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$ 。
 - (ii) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。
2. 尝试说明: $\sum_{k=1}^n k^m$ 是关于 n 的 $m+1$ 阶多项式 (即, 式中 n 的最高次幂为 $m+1$)。

答案:

1. 略, 写清基础步骤与归纳步骤。
2. 由递归式

$$\begin{aligned} (n+1)^{m+1} &= \sum_{k=0}^n (k+1)^{m+1} - \sum_{k=0}^n k^{m+1} \\ &= \binom{m+1}{1} \sum_{k=0}^n k^m + \binom{m+1}{2} \sum_{k=0}^n k^{m-1} + \dots \end{aligned}$$

因此, 有

$$\binom{m+1}{1} \sum_{k=0}^n k^m = (n+1)^{m+1} - \binom{m+1}{2} \sum_{k=0}^n k^{m-1} - \binom{m+1}{3} \sum_{k=0}^n k^{m-2} + \dots$$