南京大学计算机科学与技术系 2016—2017 学年

“离散数学”课堂测验

（2017 年 3 月 27 日）

请注意：测试时间 1 小时，请将所有答案写在答题纸上，要写清步骤。

1. （25 分）请定义谓词，用谓词逻辑表达式描述以下命题并推理结论的正确性：“没有一只猫不吃鱼，没有一只狗会吃鱼，大黄天天都吃鱼。因此狗不是猫，大黄也不是狗。”

（未用量词和/或谓词者本题最多得 5 分）

解：令P(x)表示“x是狗”；Q(x)表示“x吃鱼”；R(x)表示“x是猫”；c表示大黄；则前提可形式地表示为①$\neg\exists x(R(x)\wedge\neg Q(x))$ ②$\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ ③$Q(c)$. **（9 分）全部用合取写成一个也可以。**

而结论则为

$\neg\exists x(P(x)\wedge R(x))\wedge\neg P(c)$ **（4 分）分成两个写也可以。**

推理过程	**解释**
(1) $\neg\exists x(R(x)\wedge\neg Q(x))$	前提①
(2) $\forall x\neg(R(x)\wedge\neg Q(x))$	逻辑等价，用(1)
(3) $\forall x(\neg R(x)\vee Q(x))$	德摩根律，用(2)
(4) $\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))$	前提②
(5) $\forall x\neg(P(x)\wedge Q(x))$	逻辑等价，用(4)
(6) $\forall x(\neg P(x)\vee\neg Q(x))$	德摩根律，用(5)
(7) $\forall x(\neg R(x)\vee\neg P(x))$	消解律，用(3)(6)
(8) $\forall x\neg(P(x)\wedge R(x))$	德摩根律，用(7)
(9) $\neg\exists x(P(x)\wedge R(x))$	逻辑等价，用(8)
(10) $\neg P(c)\vee\neg Q(c)$	全称例示，用(6)
(11) $Q(c)$	前提③
(12) $\neg P(c)$	析取三段论，用(10)(11)
(13) $\neg\exists(P(x)\wedge R(x))\wedge\neg P(c)$	合取律，用(9)(12)

（12 分，可能有部分等价证明形式，若不全酌情给 3—11 分部分分；可以不写解释）

2. （25 分）请证明：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$，其中$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f|f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.

证明：$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f|f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$，先证明$\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \le \mathrm{card}(\mathbb{R})$，即构造单射函数$g:\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (0,1)$.（4 分）（以下为一种构造方式，亦可由其它的构造方式）设$f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，即$f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，对每个$i \in \mathbb{N}$，使$f(i)$的二进制形式为$x_i$．令$g:\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (0,1), g(f) = (0.x_0 2x_1 2x_2 \cdots 2x_n \cdots)$其中 2（或者其它不为 0、1 的数字）为分隔符. 易见g为单射（6 分），故$\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \le \mathrm{card}(\mathbb{N})$（1 分）. 再证$\mathrm{card}(\mathbb{R}) \le \mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$，即构造单射$h:(0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$（4 分）. 设$x \in (0,1), x$形如$0.\mathrm{x}_0 x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$（诸如 0.2 可统一写为$0.1999\cdots$之形式）. 定义$h(x) = f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得$f(0) = x_0$，$f(1) = x_1, \cdots$，$f(i) = x_i, \cdots$，显然$h$为单射函数（6 分），故$\mathrm{card}(\mathbb{R}) \le \mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.（1 分）

由 Cantor-Bernstein-Schröder 定理，$\mathrm{card}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \mathrm{card}(\mathbb{R})$，即$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$.（3 分）

□ 其它方式（如构造双射）也可以，但不易构造

3. （25 分）设正整数m与n互质，请证明：$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ mn)$，其中$\varphi(n)$和$\varphi(m)$分别是$n$和$m$的欧拉函数.

证明：由于正整数m与n互质，根据欧拉定理可得（6 分）：

$$n^{\varphi(m)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m) \text{ ①}$$

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n) \text{ ②}$$

根据整除的定义，显然有（6 分）：

$$m^{\varphi(n)} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ m) \text{ ③}$$

$$n^{\varphi(m)} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n) \text{ ④}$$

由同余运算的加法法则可以得到（6 分）：

$$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m)\ 由①③$$

$$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n)\ 由②④$$

因此$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}-1$既是$m$的倍数，又是$n$的倍数，从而是mn的倍数，即$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ mn)$，同余式两边同加 1，得到$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ mn)$。命题得证**（7 分）**。**有其它证明方式，合理即可给分。**

4. （25 分）麦卡锡 91 函数由人工智能奠基人之一 John McCarthy 定义：$\forall n\in\mathbb{N}$，

$$M(n)=\begin{cases}n-10 & (n>100)\\ M\big(M(n+11)\big) & (n\le 100)\end{cases}$$

(1) 求$M(99)$的值；

(2) 请证明：$M(k)=91\ (0\le k\le 100)$.

(1) **解：** $M(99)=M\big(M(110)\big)=M(100)=M\big(M(111)\big)=M(101)=91$ **（8 分）**

(2) **证明：**

i）首先用数学归纳法证明当$90\le k\le 100$时，命题成立**（2 分）**。

基础步骤： $M(100)=M\big(M(111)\big)=M(101)=91$。**（3 分）**

归纳步骤： 归纳假设：假设$91\le k\le 100$时$M(k)=91$。此时$k-1+11>100$，

从而有$M(k-1)=M\big(M(k+10)\big)=M(k)=91$。归纳步骤完成。**（3 分）**

因此，当$90\le k\le 100$时，命题成立。

ii）再证明$0\le k\le 100$时，命题成立。**（2 分）**

基础步骤： 利用 i)中结论，当$90\le k\le 100$时，命题成立。**（3 分）**

归纳步骤： 归纳假设：假设$k\le 100$时，$M(k)=91$。**（1 分）**

由归纳假设，$M(k-11)=M\big(M(k)\big)=M(91)=91$。

因此当归纳假设成立时，$M(k-11)=91$成立。归纳步骤完成。**（3 分）**

综上，因为基础步骤和归纳步骤均已完成，由数学归纳法，命题$M(k) = 91\ (k \le 100)$成立。**(1 分)**