欧拉图

南京大学计算机科学与技术系

回顾

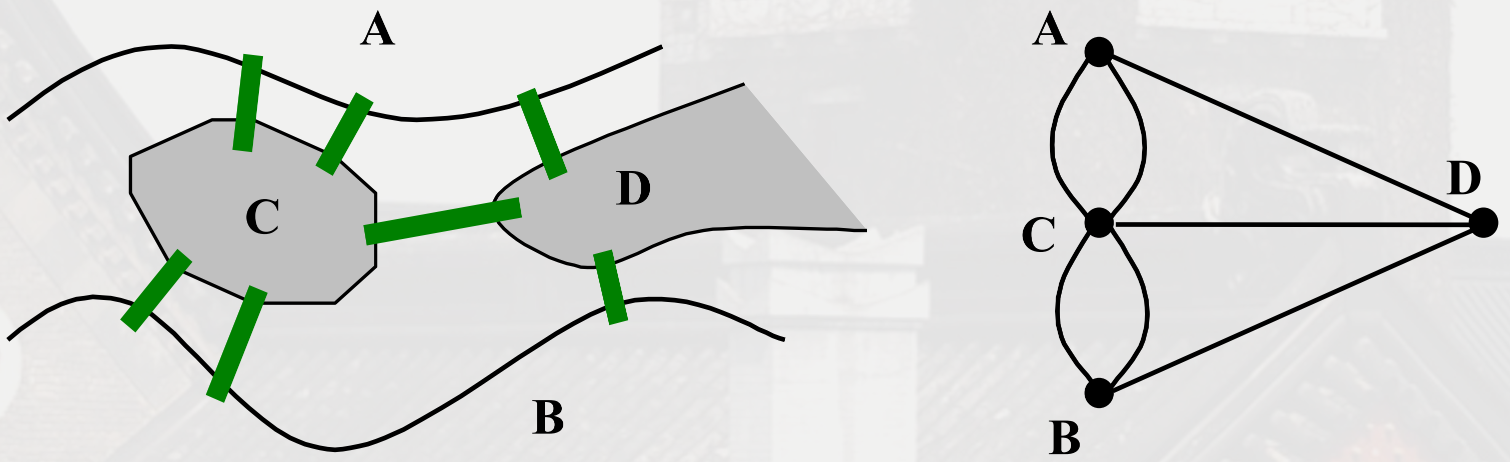
- 通路与回路
  - 通路与同构
- 无向图的连通性
  - 连通度
  - 2-连通图
- 有向图的连通性
  - 无向图的定向

提要

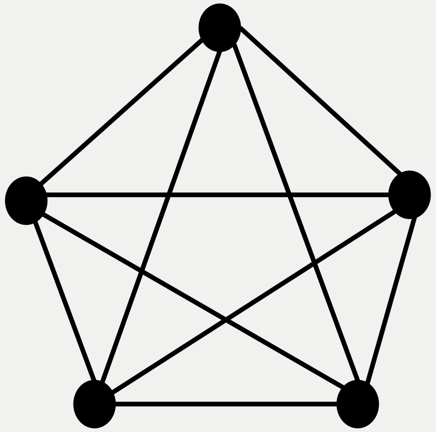
- 欧拉通路/回路
- 欧拉图的充要条件
- 构造欧拉回路的Fleury算法
- 哈密尔顿通路/回路
- 哈密尔顿图的必要条件与充分条件
- 哈密尔顿图的应用
- 竞赛图与有向哈密尔顿通路

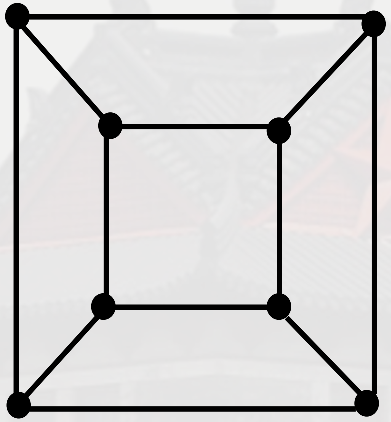
Königsberg七桥问题

- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”
  - 原问题等价于：“右边的图中是否存在包含每条边一次且恰好一次的回路？”



“一笔划”问题





欧拉通路和欧拉回路

- 定义：包含图（无向图或有向图）中每条边的简单通路称为欧拉通路。

注意：欧拉通路是简单通路（边不重复），但顶点可重复

- 定义：包含图中每条边的简单回路称为欧拉回路。
- 如果图G中含欧拉回路，则G称为欧拉图。如果图G中有欧拉通路，但没有欧拉回路，则G称为半欧拉图。

//备注：通常假设G是连通的。

欧拉图中的顶点度数

- 连通图G是欧拉图 当且仅当 G中每个顶点的度数均为偶数。
  - 证明：

$\Rightarrow$设C是G中的欧拉回路，则$\forall v \in V_G$, $d(v)$必等于v在C上出现数的2倍(起点与终点看成出现一次)。

$\Leftarrow$可以证明：

（1）G中所有的边可以分为若干条相互没有公共边的简单回路。

（2）这些回路可以串成一个欧拉回路。

全偶度图中的回路

- 定理：**若无向图G中任一顶点均为偶度点，则G中所有的边包含在若干条相互没有公共边的简单回路中。**
- 证明：根据G的边数m进行归纳证明。
  - 当m=1, G是环，结论成立。
  - 对于k≥1，假设当m≤k时结论成立。
  - 考虑m=k+1的情况：注意$\delta_G \geq 2$, G中必含简单回路，记为C，令G’=G-E_C, 设G’中含s个连通分支，显然，每个连通分支内各点均为偶数(包括0)，且边数不大于k。则根据归纳假设，每个非平凡的连通分支中所有边含于没有公共边的简单回路中，注意各连通分支以及C两两均无公共边，因此，结论成立。

若干小回路串成欧拉回路

- **定理：若连通图G中所有的边包含在若干条相互没有公共边的简单回路中，则G中含欧拉回路。**

  证明：对G中简单回路个数d施归纳法。当d=1时显然。

  - 假设$d \le k(k \ge 1)$时结论成立。考虑$d=k+1$.
  - 按某种方式对k+1个简单回路排序，令G’=G-E(C_{k+1})，设G’中含s个连通分支，则每个非平凡分支所有的边包含在相互没有公共边的简单回路中，且回路个数不大于k。由归纳假设，每个非平凡连通分支G_i均为欧拉图，设其欧拉回路是C_i'。因G连通，故C_{k+1}与诸C_i'都有公共点。
  - G中的欧拉回路构造如下：从C_{k+1}上任一点(设为v_0)出发遍历C_{k+1}上的边，每当遇到一个尚未遍历的C_i'与C_{k+1}的交点(设为v_i'), 则转而遍历C_i'上的边，回到v_i'继续沿C_{k+1}进行。

关于欧拉图的等价命题

- 设G是非平凡连通图，以下三个命题等价：

  (1) G是欧拉图。

  (2) G中每个顶点的度数均为偶数。

  (3) G中所有的边包含在若干个相互没有公共边的简单回路中。

半欧拉图的判定

定理：设G是连通图，G是半欧拉图当且仅当G恰有两个奇度点。

证明:

$\Rightarrow$ 设P是G中的欧拉通路(非回路)，设P的始点与终点分别是u,v, 则对G中任何一点x, 若x既非u也非v，则x的度数等于在P中出现次数的2倍，而u,v的度数则是它们分别在P中间位置出现的次数的两倍再加1。

$\Leftarrow$ 设G中两个奇度顶点是u,v, 则G+uv是欧拉图，设欧拉回路是C, 则C中含uv边，$\therefore$C-uv是G中的欧拉通路。

(这表明：如果试图一笔画出一个半欧拉图，必须以两个奇度顶点为始点和终点。)

有向欧拉图

- 有向图中含所有边的有向简单回路称为有向欧拉回路。
- 存在有向欧拉回路的有向图称为有向欧拉图。

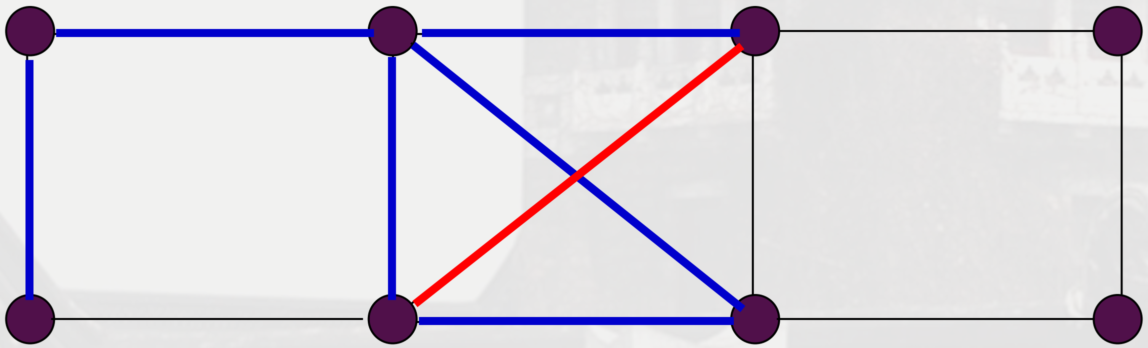
下面的等价命题可以用于有向欧拉图的判定：

- 若G是弱连通的有向图，则下列命题等价：
  - G中存在有向欧拉回路。
  - G中任一顶点的入度等于出度。
  - G中所有边位于若干条相互没有公共边的有向简单回路中。

(证明与无向欧拉图类似。)

构造欧拉回路

思想：在画欧拉回路时，画过的边不能再用。因此，在构造欧拉回路过程中的任何时刻，假设将画过的边删除，剩下的边必须仍在同一连通分支当中。



构造欧拉回路

- **Fleury（弗勒里）算法**
  - 输入：欧拉图G
  - 输出：简单回路$P = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$, 其中包含了$E_G$中所有的元素。

1. 任取$v_0 \in V_G$, 令$P_0=v_0$;
2. 设$P_i=v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_i$, 按下列原则从$E_G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选择$e_{i+1}$。
   (a) e_{i+1}与v_i相关联；
   (b) 除非别无选择，否则e_{i+1}不应是$G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的割边。
3. 反复执行第2步，直到无法执行时终止。

Fleury算法的证明

- 算法的终止性显然。
- 设算法终止时，$P_m = v_0e_1v_1e_2,\ldots,e_iv_ie_{i+1},\ldots,e_mv_m$, 其中诸$e_i$互异是显然的。只须证明：

(1) $v_0=v_m$。(即P_m是回路)

(2) P_m包括了G中所有的边。

令$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$

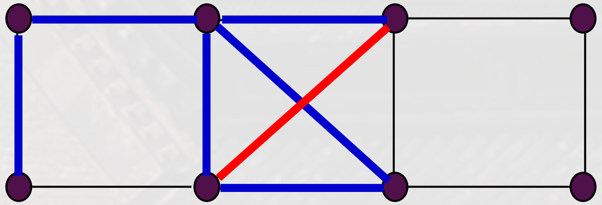
(1) 假设$v_0 \neq v_m$。由算法终止条件，在G_m中已没有边与v_m相关联。假设除最后一次外，v_m在P_m中出现k次，则v_m的度数是$2k+1$, 与G中顶点度数是偶数矛盾。

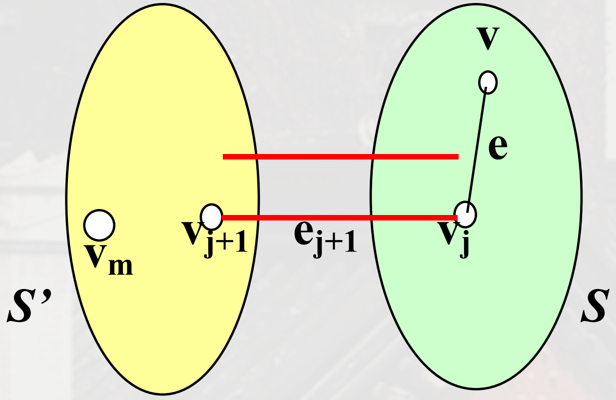
Fleury算法的证明(续)

(2) 假设P_m没有包括G中所有的边，令G_m中所有非零度顶点集合为S（非空），令$S'=V_G-S$, 则$v_m \in S'$。

考察序列$e_1,e_2,\ldots e_j,e_{j+1},\ldots,e_m$。假设j是满足$v_j \in S$, 而$v_{j+1} \in S'$的最大下标。 如果没有这样的j，G就不连通，矛盾。另外，e_{j+1}一定是G_j中的割边。

令e是在G_j中与v_j相关联的异于e_{j+1}的边(非零度点一定有)，根据算法选择e_{j+1}(割边)的原则，e也一定是割边。但是，G_m中任意顶点的度数必是偶数，e在G_m中的连通分支是欧拉图，e在G_m的某个欧拉回路中，不可能是G_j的割边。矛盾。

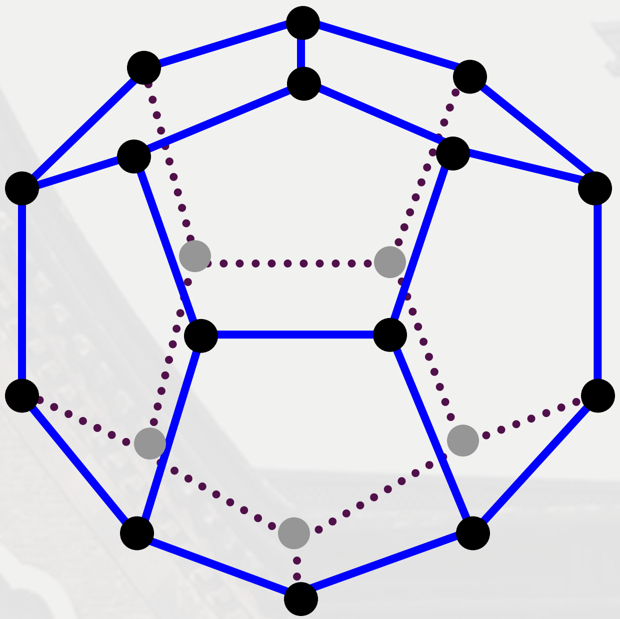




哈密尔顿图

周游世界的游戏

沿着正十二面体的棱寻找一条旅行路线，通过每个顶点恰好一次又回到出发点. (Hamilton 1857)



Hamilton通路/回路

- G中**Hamilton通路**
  - 包含G中所有顶点
  - 通路上各顶点不重复
- G中**Hamilton回路**
  - 包含G中所有顶点
  - 除了起点与终点相同之外，通路上各顶点不重复。
- Hamilton通路问题可转化为Hamilton回路问题
  - $G' = G * K_1$

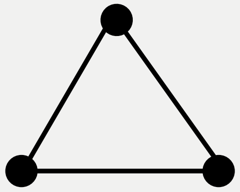
Hamilton回路的基本特性

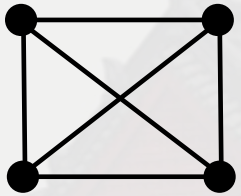
- Hamilton回路:无重复地遍历（游走）图中诸点,

  Euler回路:无重复地遍历（游走）图中诸边。
- 若图G中有一顶点的度为1, 则无Hamilton回路。
- 设图G中有一顶点的度大于2, 若有Hamilton回路, 则只用其中的两条边。
- 若图中有n个顶点, 则Hamilton回路恰有n条边。
- 注：Hamilton回路问题主要针对简单图。

Hamilton回路的存在性问题

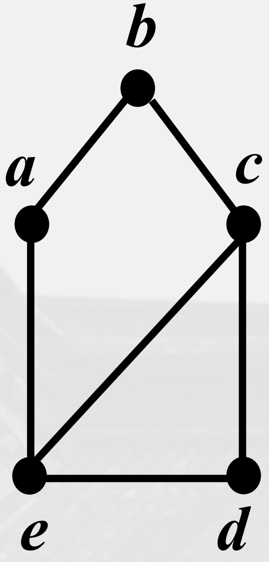
K_3

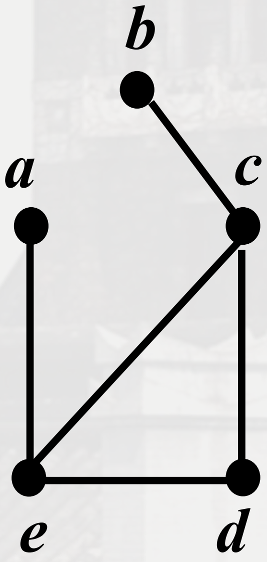


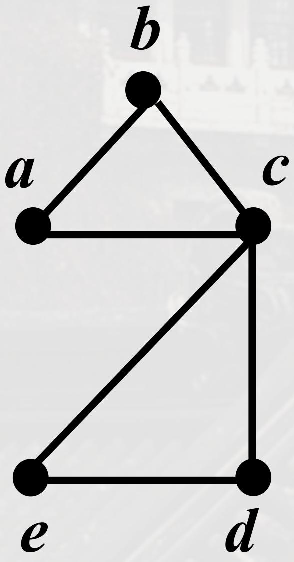


K_4

$K_n(n \geq 3)$有Hamilton回路







一个基本的必要条件

定理：如果图G=(V, E)是Hamilton图，则对V的任一非空子集S，都有

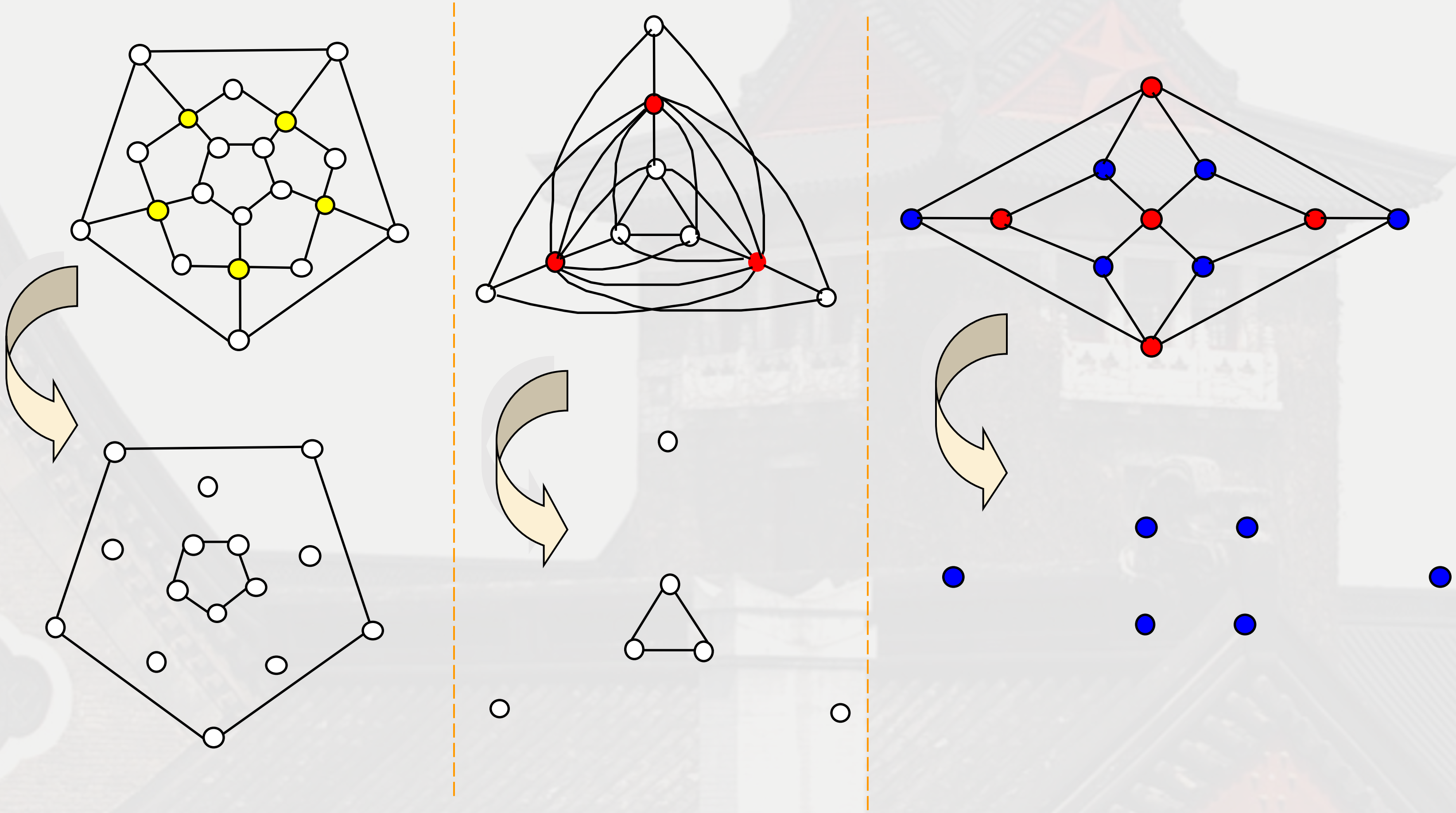
$$P(G-S)\le |S|$$

其中，P(G-S)表示图G-S的连通分支数.

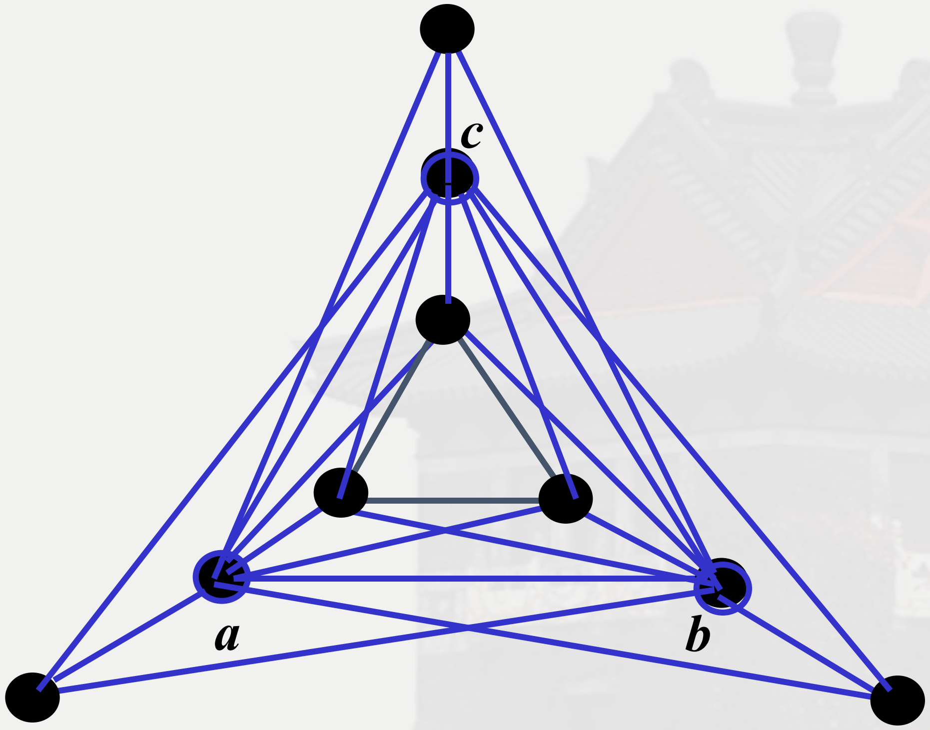
理由：设C是G中的Hamilton回路, P(G-S)≤ P(C-S)≤ |S|

向一个图中顶点之间加边不会增加连通分支。

必要条件的应用



举例

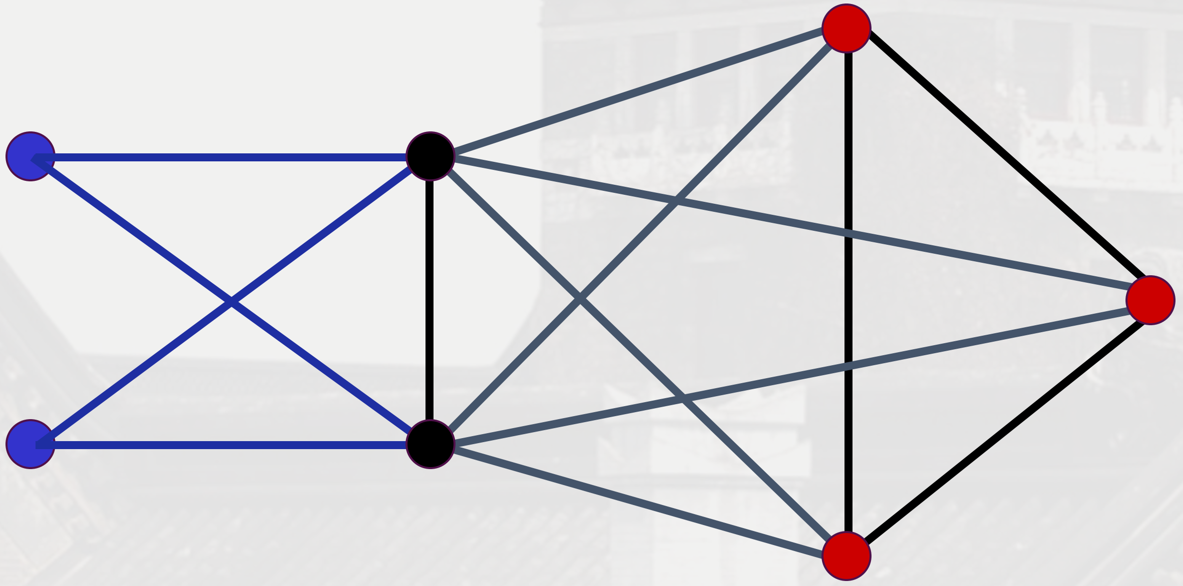


将图中点a, b, c的集合记为S, G-S有4个连通分支,而|S|=3. G不是Hamilton图.

举例

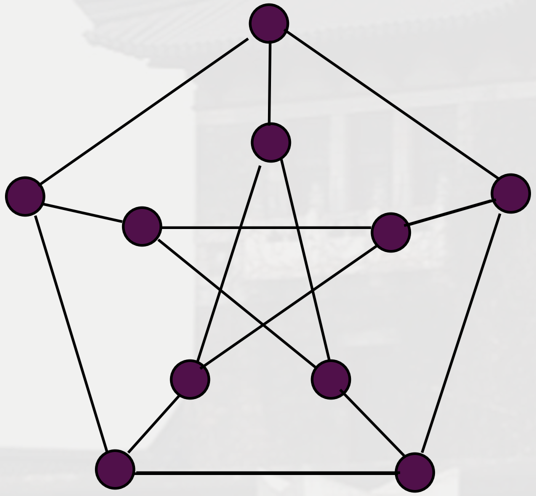
$$\overline{K_h} \longleftrightarrow K_h \longleftrightarrow K_{n-2h}$$

下图给出的是 $C_{2,7}$的具体图 (h=2,n=7)



必要条件的局限性

Petersen图满足上述必要条件，但不是哈密尔顿图。



哈密尔顿图的充分条件

Dirac定理（狄拉克, 1952）

设G是无向简单图，$|G| = n \geq 3$，若$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，则G有哈密尔顿回图.

Ore定理（奥尔, 1960）

设G是无向简单图，$|G| = n \geq 3$，若G中任意不相邻的顶点对u, v均满足：$d(u) + d(v) \geq n$，则G有哈密尔顿回图。

命题：设G是无向简单图，$|G| = n \geq 2$，若G中任意不相邻的顶点对u, v均满足：$d(u) + d(v) \geq n - 1$，则G是连通图。

- 假设G不连通，则至少含2个连通分支，设为G_1，G_2。取$x \in V_{G1}$，$y \in V_{G2}$，则：$d(x)+d(y) \leq (n_1-1)+(n_2-1) \leq n-2$ (其中n_i是G_i的顶点个数)，矛盾。

Ore定理的证明

Ore定理（奥尔, 1960）

设G是无向简单图，$|G| = n \geq 3$，若G中任意不相邻的顶点对u, v均满足：

$d(u) + d(v) \geq n$ （*）

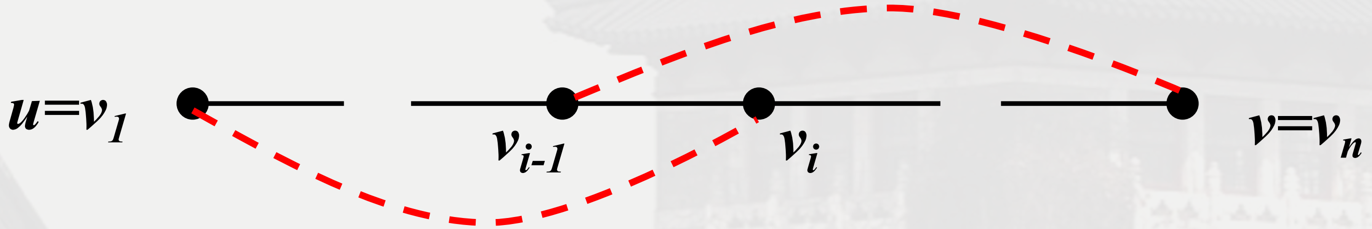
则G有哈密尔顿回图。

证明. 反证法, 若存在满足（*）的图G，但没有Hamilton回路.

不妨假设G是**边极大**的非Hamilton图，且满足（*）。若G不是边极大的非Hamilton图，则可以不断地向G增加边，把G变成边极大的非Hamilton图G'，G'依然满足（*），因为对$\forall v \in V(G). d_{G'}(v) \geq d_G(v)$。

Ore定理的证明

设u, v是G中不相邻的两点，于是G+uv是Hamilton图，且其中每条Hamilton回路都要通过边uv. 因此，G中有起点为u，终点为v的Hamilton通路:



不存在两个相邻的顶点 v_{i-1}和v_i,使得v_{i-1}与v相邻且v_i 与u相邻. 若不然, $(v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, v_n, \ldots, v_i, v_1)$是G的Hamilton回路. 设在G中$u$与$v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}$相邻, 则$v$与$v_{i1-1}, v_{i2-1}, \ldots v_{ik-1}$都不相邻, 因此$d(u)+d(v) \le k+[(n-1)-k]<n$. 矛盾.

Ore定理的延伸

- 引理. 设G是有限图，u, v是G中不相邻的两个顶点，且满足：$d(u)+d(v) \geq |G|$，则

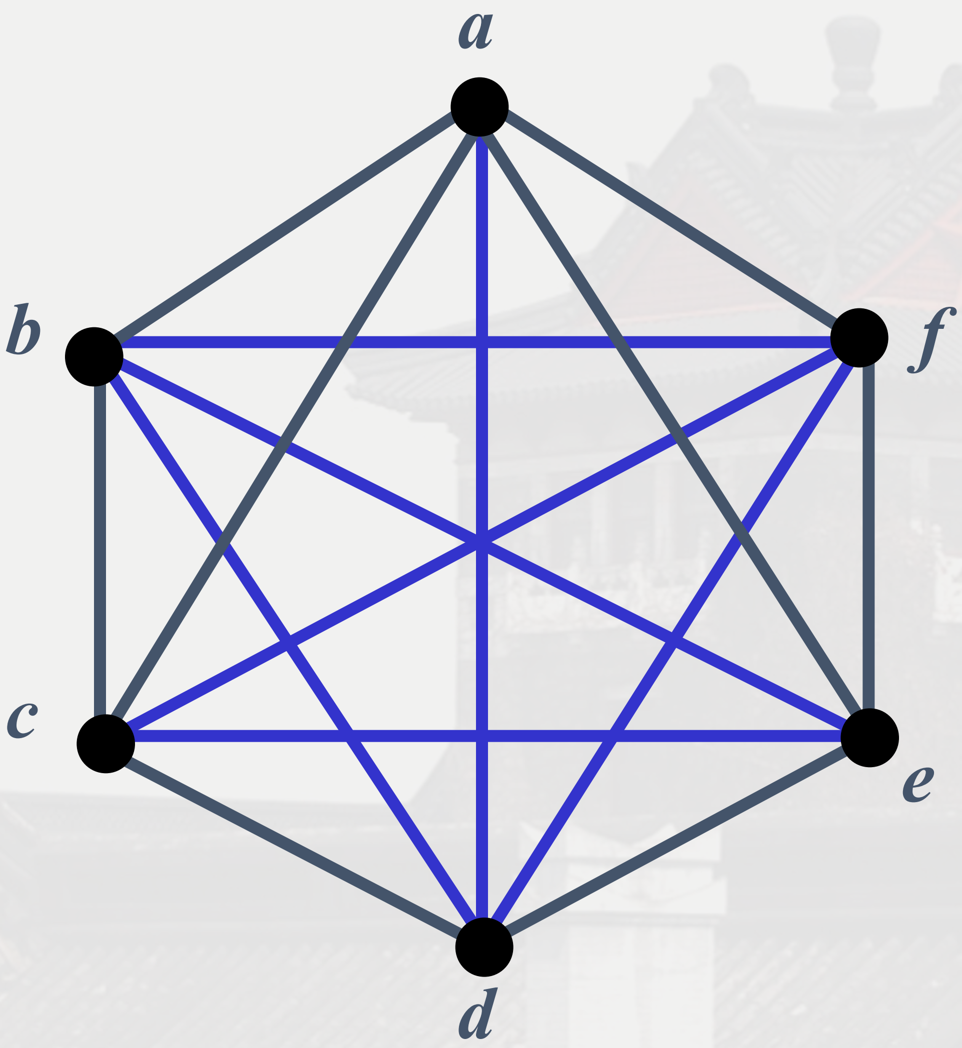
$$G\text{是Hamilton图} \Leftrightarrow G\cup\{uv\}\text{是Hamilton图}.$$

证明：类似于Ore定理的证明.

- **G的闭合图**, 记为**C(G)**: 连接G中不相邻的并且其度之和不小于 |G| 的点对, 直到没有这样的点对为止.

定理：有限图G是Hamilton图充分必要其闭合图$C(G)$是Hamilton图.

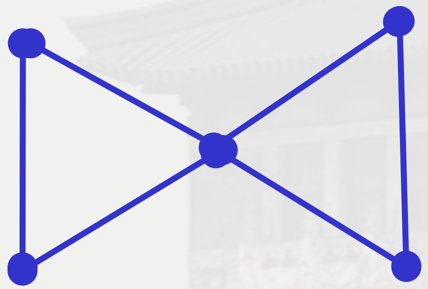
闭合图(举例)



充分条件的讨论

- Dirac定理“ $\delta(G) \geq n/2$ ”不能减弱为：$\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$

  举例，n=5，δ (G)=2 . G不是Hamilton图.



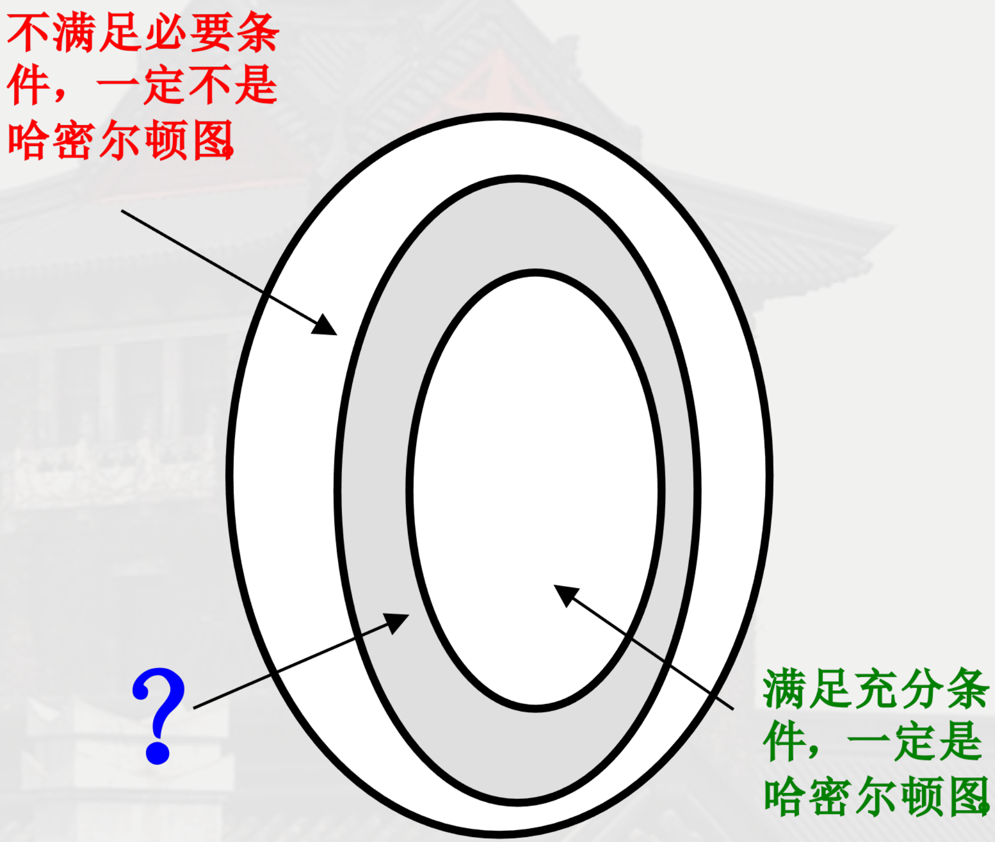
存在哈密尔顿通路的充分条件

- 存在哈密尔顿通路的充分条件（Ore定理的推论）

  设G是无向简单图，$|G| = n \geq 2$，若G中任意不相邻的顶点对u, v均满足：$d(u) + d(v) \geq n - 1$，则G有哈密尔顿通路。

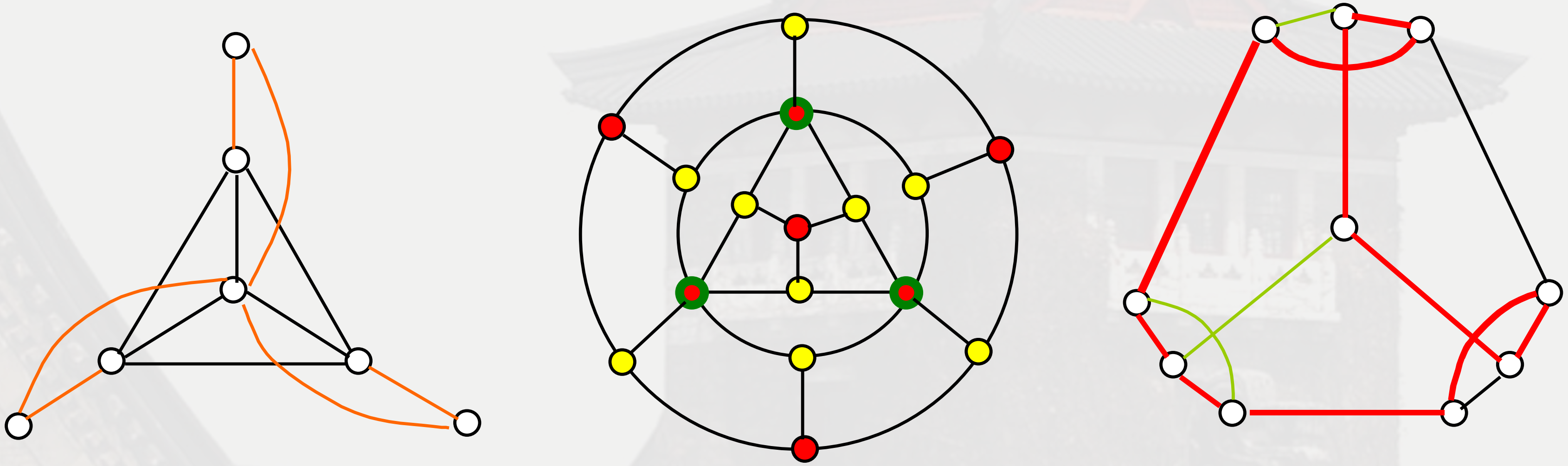
判定定理的盲区

- 从“常识”出发个案处理
  - 一顶点关联的边中恰有两
  - 　条边在哈密尔顿回路中。
  - 哈密尔顿回路中不能含
  - 　真子回路。
  - 利用对称性
  - 利用二部图特性
  - …



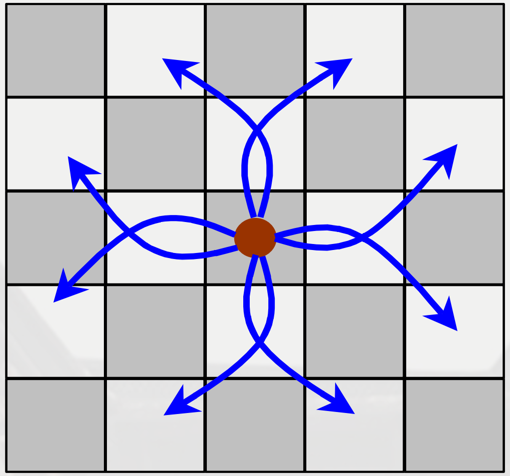
判定哈密尔顿图的例子

下列图中只有右图是哈密尔顿图。

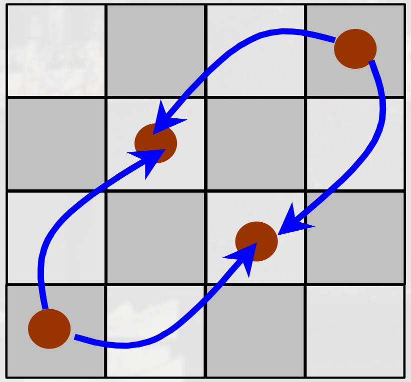


棋盘上的哈密尔顿回路问题

- 在4×4或5×5的缩小了的国际象棋棋盘上，马(Knight)不可能从某一格开始，跳过每个格子一次，并返回起点。



灰（13个） VS 白（12个）

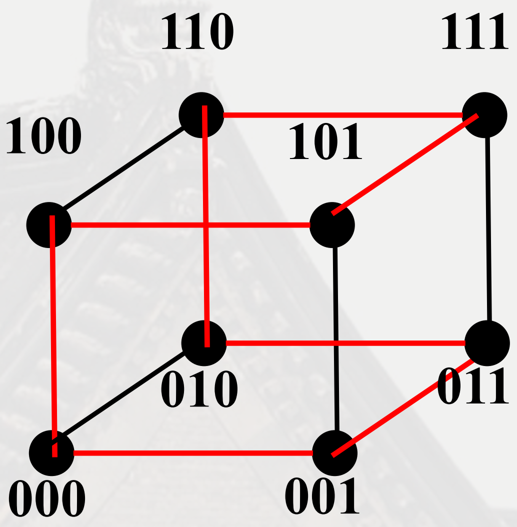


哈密尔顿图问题

- 基本问题
  - 判定哈密尔顿回路的存在性
  - 找出哈密尔顿回路/通路 （NP完全的）
- 尚未找到时间复杂性为多项式的算法

哈密尔顿图的应用（格雷码）

- 给定一个立方体图，求出哈密尔顿回路



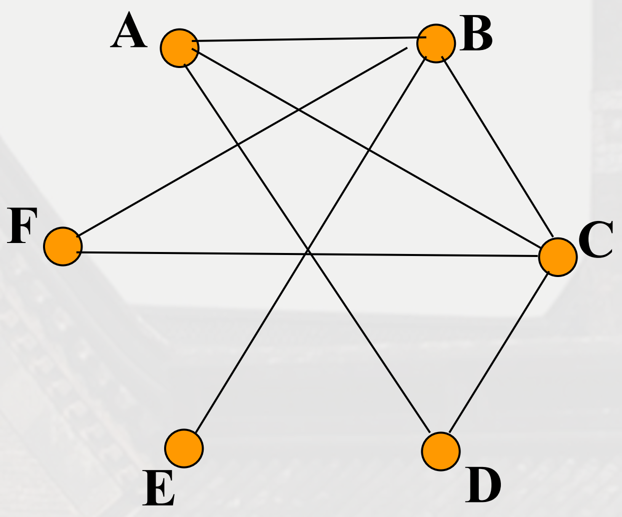
Q_3

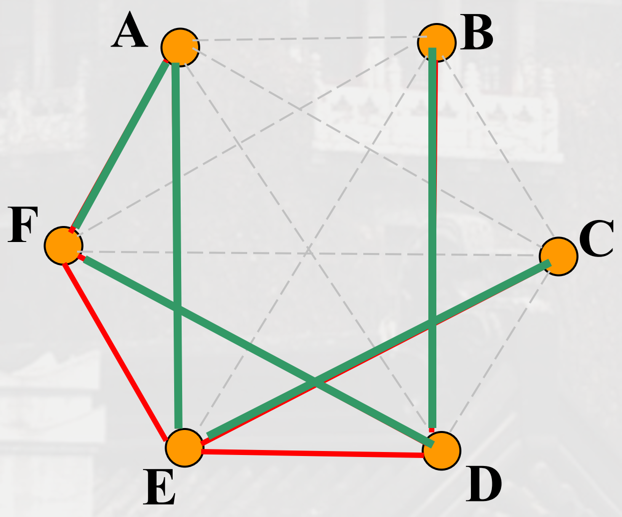
格雷码（循环二进制单位距离码）是任意两个相邻数的代码只有一位二进制数不同的编码。

传统二进位系统数字3的表示为011，要切换为邻近的数字4（100）时，装置中的三个位元都得要转换，因此于未完全转换的过程时装置会经历短暂的，010,001,101,110,111等其中数种状态，也就是代表著2、1、5、6、7，因此此种数字编码方法于邻近数字转换时有比较大的误差可能范围。格雷码的发明即是用来将误差之可能性缩减至最小，编码的方式定义为每个邻近数字都只相差一个位元，因此也称为最小差异码，可以使装置做数字步进时只更动最少的位元数以提高稳定性。

安排考试日程（哈密尔顿通路）

- 问题: 在6天里安排6门课 – A,B,C,D,E,F -的考试，每天考1门。假设课程选修的情况有4类：DCA，BCF，EB，AB。如何安排日程，使得没有人连续两天有考试?





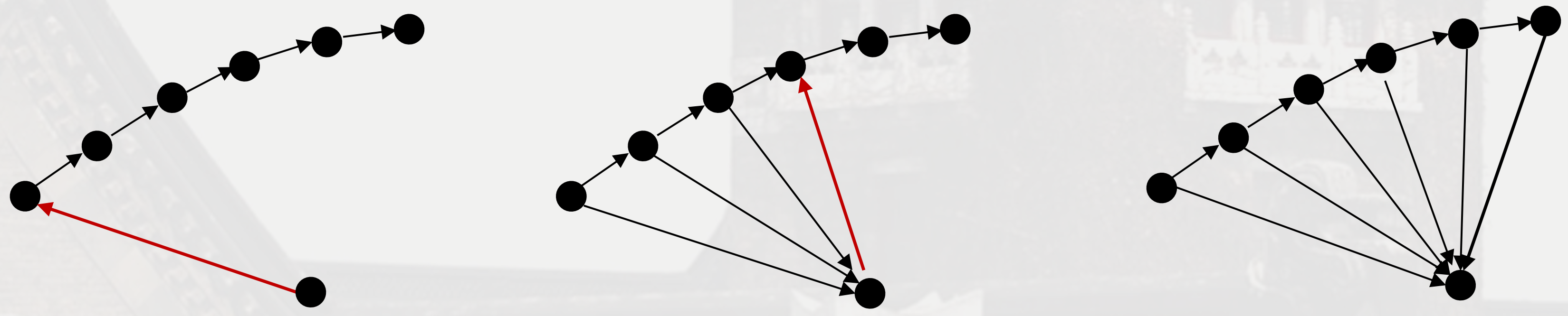
竞赛图

底图为K_4的竞赛图：

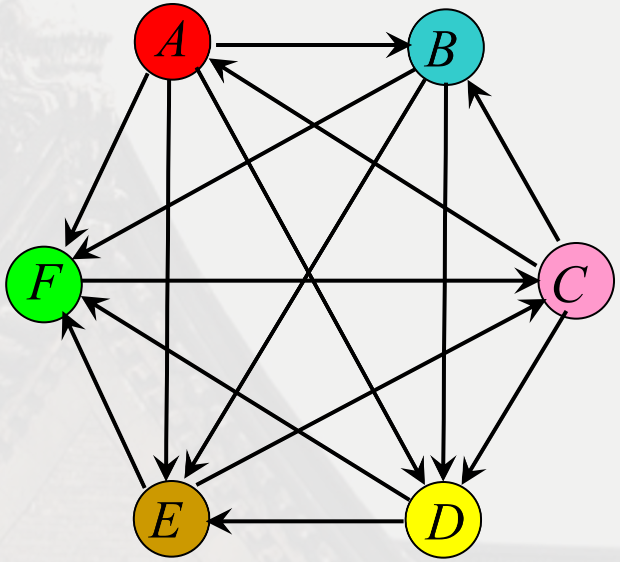
以上每个图可以看作4个选手参加的循环赛的一种结果

竞赛图与有向哈密尔顿通路

- 底图是完全图的有向图称为竞赛图。
- 利用归纳法可以证明竞赛图含有向哈密尔顿通路。



循环赛该如何排名次



按照某条有向Hamilton通路(一定存在)上的顺序排名：

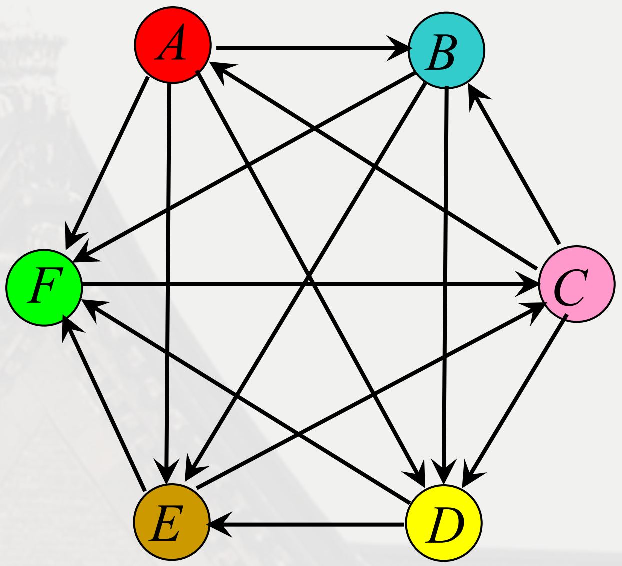
$$C\ \ A\ \ B\ \ D\ \ E\ \ F$$

问题：Hamilton通路路不是唯一的，例如：也可以得到另一排名

$$A\ \ B\ \ D\ \ E\ \ F\ \ C$$

C 从第一名变成了最后一名

循环赛该如何排名次

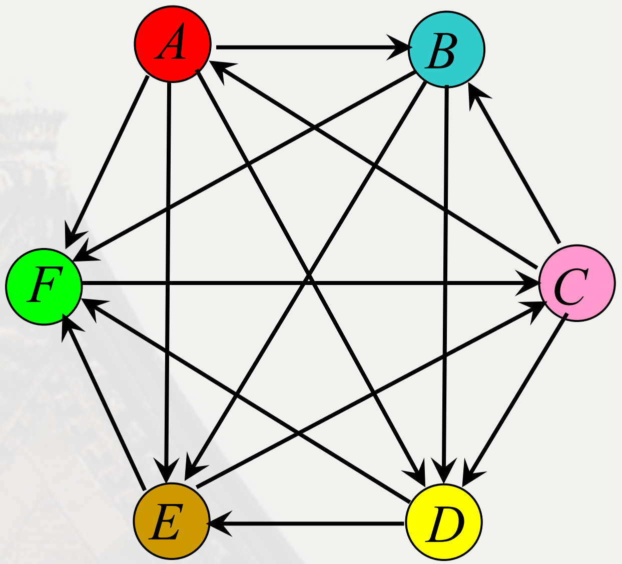


按照得胜的竞赛场次(得分)排名：

A(胜4) B,C(胜3) D, E(胜2) F(胜1)

问题：很难说B,C并列第二名是否公平，毕竟C战胜的对手比B战胜的对手的总得分更高(9比5)。

循环赛该如何排名次



建立对应与每个对手得分的向量

$$s_1 = (a_1, b_2, c_3, d_4, e_5, f_6)$$

然后逐次求第k级的得分向量s_k, 每个选手的第k级得分是其战胜的对手在第k-1级得分的总和。

对应于左图所示的竞赛结果，得分向量：

s_1=(4,3,3,2,2,1) s_2=(8,5,9,3,4,3)
s_3=(15,10,16,7,12,9) s_4=(38,28,32,21,25,16)
s_5=(90,62,87,41,48,32) ……

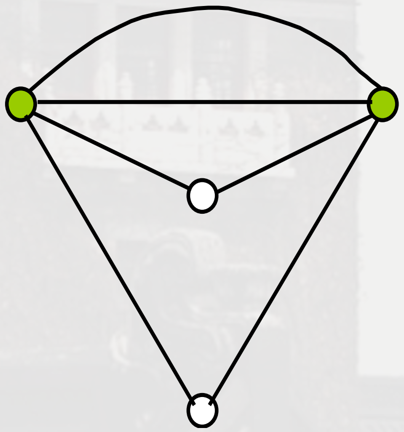
当问题竞赛图是强连通且至少有4个选手时，这个序列一定收敛于一个固定的排列，这可以作为排名：A C B E D F。

小结

- 欧拉通路/回路
  - 欧拉图的充要条件
  - 构造欧拉回路的Fleury算法
- 哈密尔顿通路/回路
  - 哈密尔顿图的必要条件与充分条件
  - 哈密尔顿图的应用
  - 竞赛图与有向哈密尔顿通路

附：随机欧拉图

- 设G是欧拉图，$v \in V_G$，从v开始，每一步从当前点所关联边中随机选边，均可构造欧拉回路，则G称为以v为始点的随机欧拉图。
- 注意，若G是以v为始点的随机欧拉图，则任何一个以v为始点的不包含G中所有边的回路都应该能扩充成欧拉回路。反之，若G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路。



随机欧拉图的判定

- 欧拉图G是以v为始点的随机欧拉图*当且仅当*G中任一回路均包含v。

$\Rightarrow$ 若G是以v为始点的随机欧拉图，*假设有回路C不包含v*. 令G‘=G-C, (G’可能不连通)，G’中包含v的那个连通分支一定是欧拉图，相应的欧拉回路包含了v关联的所有边，但不包含G中的所有边，与G是以v为始点的随机欧拉图矛盾。

$\Leftarrow$ 若欧拉图G中任意回路均包含v。假设G不是以v为始点的随机欧拉图，则一定存在已经包含了v所关联的所有边，却未包含G中所有边的简单回路C，假设e是不在C中的一条边，e的端点必异于v，设一个是u。令从G中删除C中所有边的图为G‘，显然在G’中v是孤立点。而包含u的连通分支是欧拉图，因此u必包含在一回路中，但此回路不含v，矛盾。

(易推知：欧拉图G是以任一顶点为始点的随机欧拉图 当且仅当G本身是一个初级回路)