南京大学数学课程试卷　（14 级）

2015/2016 学年 第 一 学期　考试形式 闭卷　课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2016.1.6　系别 ____________　学号 __________　姓名 ____________

题号	一 36	二 12	三 10	四 12	五 10	六 10	七 10	合计
得分								

$\Phi(1.33)=0.9802$，$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(0.35)=0.6406$，$t_{0.025}(8)=2.306$，$t_{0.025}(9)=2.262$，$t_{0.05}(8)=1.859$，$t_{0.05}(9)=1.833$，$t_{0.025}(15)=2.131$，$t_{0.05}(16)=1.746$，$t_{0.025}(16)=2.12$，$t_{0.05}(15)=1.753$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.023$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.70$，$\chi^2_{0.9}(15)=8$，$\chi^2_{0.005}(15)=32$，$\chi^2_{0.95}(16)=8$，$\chi^2_{0.01}(16)=32$，$\chi^2_{0.025}(15)=27.49$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.26$，$\chi^2_{0.025}(16)=278.85$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.91$

一.（6 分×6=36 分）

1．掷两枚骰子 6 次，求至少得到一次双 6 的概率。

2．设随机变量 X 密度函数为 $f(x)=Ce^{-6|x|}$，$-\infty<x<+\infty$．（1）确定常数 C；
（2） 求随机变量 X 的分布函数 F(x)．

3. 若有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁。现每次任取一把钥匙试开，试开后除去，求试开次数 X 的数学期望。

4．设 $\{X_k\}$ 为相互独立的随机变量序列，且 $P(X_k=\pm\sqrt{k})=\dfrac{1}{k}, P(X_k=0)=1-\dfrac{2}{k}\ (k=2,\cdots)$

证明 $\{X_k\}$ 服从大数定律。

5. 设总体X服从两点分布B(1, p)，即P{X=1}=p, P{X=0}=1-p, 其中p为未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_6)$是来自X的简单随机样本.

（1）写出$(X_1, X_2, \cdots, X_6)$的联合概率分布；

（2）指出X_1+X_2，$\max\limits_{1\le i\le 6} X_i$，$X_5+2p$，$(X_6-X_1)^2$之中哪些是统计量，哪些不是统计量？为什么？

6. 设$X_1, X_2, \cdots, X_{15}$是来自正态总体N(0,4)的样本，求$Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2+\cdots X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$的分布。

二. (12分)雷达的圆形屏幕半径为R，设目标点（X,Y）在屏幕上服从均匀分布。

（1）求X与Y的边缘概率密度函数，X与Y是否相互独立？

（2）求X与Y的相关系数ρ_{XY}，X与Y是否相关？

三．(10 分)计算机进行数字计算时遵从四舍五入的原则。为简单计，现对小数点后面第一位进行舍入运算，则误差可以认为服从[-0.5, 0.5]上的均匀分布。假定各次运算误差是相互独立。试求：

（1）若进行 27 次运算，误差总和的绝对值不超过 2 的概率；

（2）最多进行多少次运算可使误差的绝对值不超过 10 的概率不小于 95%

四．（12 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x;\mu,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geq\mu \\ 0, & 其他\end{cases}$，其中 $\theta>0,\mu,\theta$ 为未知参数。

$X_1,X_2,\cdots,X_n$。试求参数 μ，θ 的矩估计和极大似然估计。

五．（10 分）已知 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单样本，其中 σ^2 未知。已知 $\widehat{\sigma_1^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，$\widehat{\sigma_2^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，(1) 证明：$\widehat{\sigma_1^2}$，$\widehat{\sigma_2^2}$ 都是 σ^2 的无偏估计；(2) 比较 $\widehat{\sigma_1^2}$，$\widehat{\sigma_2^2}$ 哪个更有效；(3) 证明 $\widehat{\sigma_1^2}$，$\widehat{\sigma_2^2}$ 都是 σ^2 的相合估计。

六．（10 分）随机抽取 9 个清漆样品做试验，测得平均干燥时间为 6 小时，样本均方差 $s=\sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{8}(\sum_{i=1}^{9}x_i^2-9\overline{x}^2)}=0.5745$。设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。

（1）若由以往经验知 $\sigma=0.6$（小时），求 μ 的置信水平为 **0.95** 的置信区间；

（2）若 σ 未知，求 μ 的置信水平为 **0.95** 的置信区间；

（3）求 σ^2 的置信水平为 **0.95** 的置信区间；

七．(10 分) 按规定 100g 罐头番茄汁中的平均维生素 C 含量不得少于 21 mg/g。现从工厂的产品中抽取了 16 个罐头，其中 100g 的番茄汁中，测得维生素 C 的平均含量 $\overline{x}=20$ mg/g，$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{15}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2)}=3.984$。设维生素含量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，显著性水平 $\alpha=0.05$。

（1）问这批罐头维生素 C 含量是否符合要求？

（2）能否认为这批罐头的标准差 $\sigma=3$ mg/g