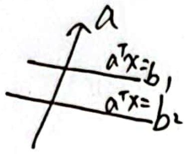
221900180 田永铭 凸优化第二章作业

2.5 超平面 $\{x\in R^n \mid a^Tx=b_1\}$ 与 $\{x\in R^n \mid a^Tx=b_2\}$ 的距离?

解:



设 x_0 为 $a^Tx=b_1$ 上一点,则 $a^Tx_0=b_1$.

由点到直线距离公式: $d=\dfrac{|a^Tx_0-b_2|}{\|a^T\|_2}=\dfrac{|b_2-b_1|}{\|a^T\|_2}=\dfrac{|b_2-b_1|}{\|a\|_2}$.

2.7 半空间的Voronoi描述.

解: 若 $\|x-a\|_2\le\|x-b\|_2$,则 $\|x-a\|_2^2\le\|x-b\|_2^2$,

即 $(x-a)^T(x-a)\le(x-b)^T(x-b)$,

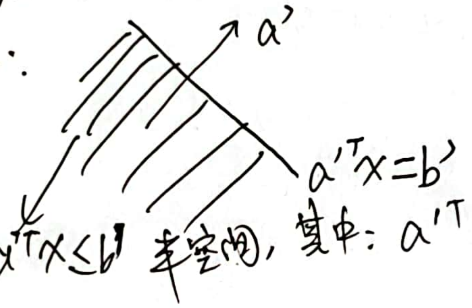
即 $x^Tx-2a^Tx+a^Ta\le x^Tx-2b^Tx+b^Tb$,

即 $2(b-a)^Tx\le b^Tb-a^Ta$. $\therefore \{x \mid \|x-a\|_2\le\|x-b\|_2\}\Leftrightarrow\{x \mid a'^Tx\le b'\}$.

令 $a'^T=2(b-a)^T$, $b'=b^Tb-a^Ta$,

这是一个由超平面构成的半空间.

图像:



半空间,其中: $a'^T=2(b-a)^T$, $b'=b^Tb-a^Ta$.

2.10 二次不等式的解集.

~~解~~ 证明: (a) 设 $\forall x_1,x_2\in C$,则 $x_1^TAx_1+b^Tx_1+c\le0$, $x_2^TAx_2+b^Tx_2+c\le0$,

则 $\forall\theta\in[0,1]$, $(\theta x_1+(1-\theta)x_2)^TA(\theta x_1+(1-\theta)x_2)+b^T(\theta x_1+(1-\theta)x_2)+c$

$=\theta^2x_1^TAx_1+\theta(1-\theta)x_1^TAx_2+\theta(1-\theta)x_1Ax_2^T+(1-\theta)^2x_2^TAx_2$

$+b^T\theta x_1+b^T(1-\theta)x_2+c$

此方法不太行

另证: 引理: 集合为凸集 iff 其与 $\forall$ 直线的交为凸集.

设 $\forall$ 直线为 ~~$a+bv\ (b\in R)$~~ $d+e\vec v\ (e\in R)$.

~~则 $(a+bv)^TA(a+bv)+b^T(a+bv)+c$~~

则 $(d+ev)^TA(d+ev)+b^T(d+ev)+c$

$=(\vec v^TAv)e^2+(b^Tv+2d^TAv)e+(c+b^Td+d^TAd)$ (*)

交集为 $\{d+ev \mid (*)式\le0\}$. 若 $A\succeq0$,则 $v^TAv\ge0$, $\therefore$ 二次式首项系数为正, $\therefore$ 为凸集.

反之,若 C 为凸集, A 可以是 $A\prec0$. 如: $A=-10086$, $b=0$, $c=-520$.

(b) 令 $\alpha=\vec v^TAv$, $\beta=b^Tv+2d^TAv$, $\gamma=c+b^Td+d^TAd$.

~~$g^Tx+h=0$~~ 设 $g^Td+h=0$,即设 d 在 $\{g^Tx+h=0\}$ 集合中,该集合记为D.

$\therefore C\cap D=\{d+e\vec v \mid \alpha^2e^2+\beta e+\gamma\le0\}$. 要为凸集.

由 $g^Tx+h=0$, 有 $g^T(d+ev)+h=0$, 即 $(g^Td+h)+g^Tev=0$, $\because g^Td+h=0$, $\therefore g^Tev=0$.

~~由(a): $A\succeq0$ 时才为凸集~~

①若 $g^Tv\ne0$,则 $e=0$. $C\cap D$ 为单点集,必凸. ②若 $g^Tv=0$,

则 $C\cap D$ 若为凸,需由 $A\succeq0$ 保证. 即 $g^Tv=0\Rightarrow v^TAv\ge0$ $g^Tv=0$.

若 $\exists\lambda$ s.t. $A+\lambda gg^T\succeq0$,则 $v^TAv=v^T(A+\lambda g g^T)v\ge0$,则 $v^TAv\ge0$. 得证

反之,由(a)同理, $A=-10086$, $b=0$, $c=-520$, 反之不成立.

2.14 扩展和限制集合.

证明: (a) 设 $\forall x_1, x_2 \in S_a$, $\theta \in [0,1]$,
则 $\mathrm{dist}(\theta x_1+(1-\theta)x_2, S) = \inf_{y\in S} \|\theta x_1+(1-\theta)x_2 - y\|$.

~~inf~~ 设 $\forall y_1, y_2 \in S$, ∵ S为凸集, ∴ $\theta y_1+(1-\theta)y_2 \in S$.

∴将 $\mathrm{dist}(\theta x_1+(1-\theta)x_2, S)$ 表示为 $\inf_{y_1\in S, y_2\in S} \|\theta x_1+(1-\theta)x_2 - \theta y_1 - (1-\theta)y_2\|$

$= \inf_{y_1\in S, y_2\in S} \|\theta(x_1-y_1)+(1-\theta)(x_2-y_2)\|$

$\le \inf_{y_1\in S, y_2\in S} \left(\theta\|x_1-y_1\| + (1-\theta)\|x_2-y_2\|\right)$. ∵ $x_1, x_2 \in S_a$, ∴ $\begin{cases}\inf_{y\in S}\|x_1-y\| \le a, \\ \inf_{y\in S}\|x_2-y\| \le a.\end{cases}$

∴上式 $= \theta \inf_{y_1\in S}\|x_1-y_1\| + (1-\theta)\inf_{y_2\in S}\|x_2-y_2\| \le \theta a + (1-\theta)a = a$. 证毕.

(b) 设 $\forall x_1, x_2 \in S_{-a}$, $\theta \in [0,1]$. 则 $B(x_1, a) \subseteq S$, $B(x_2, a) \subseteq S$.
~~则 $B(\theta x_1+(1-\theta)x_2, a)$~~
由B的意义知: $\forall u$ 满足 $\|u\| \le a$, $x_1+u \in S$, $x_2+u \in S$.
∵S为凸集, ∴ $\theta(x_1+u)+(1-\theta)(x_2+u) \in S$,
即 $\theta x_1+(1-\theta)x_2+u \in S$.
∴ $B(\theta x_1+(1-\theta)x_2, a) \subseteq S$.
∴ $\theta x_1+(1-\theta)x_2 \in S_{-a}$.
证毕.

2.16 部分和.

证明: 设 $(x_1, y_1+y_2) \in S$, $(x_2, y_1+y_2) \in S$, $\theta \in [0,1]$,
欲证: $(\theta x_1+(1-\theta)x_2, y_1+y_2) \in S$. (*)
其中: $(x_1, y_1) \in S_1$, $(x_1, y_2) \in S_2$, $(x_2, y_1) \in S_1$, $(x_2, y_2) \in S_2$.
由 S_1, S_2 为凸集得: $(\theta x_1+(1-\theta)x_2, y_1) \in S_1$ ①, $(\theta x_1+(1-\theta)x_2, y_2) \in S_2$ ②,
而由于S被定义为 $\{(x, y_1+y_2) \mid x \in R^m, y_1, y_2 \in R^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$,
∴由①②: (*)式成立. 即S是凸的. 证毕

~~2.20~~ 22190080 田永铭

2.20 证明：

(1) 先证引理：

1° 充分性：设 $\exists \lambda$, $c = A^T\lambda$, $d = b^T\lambda$，则 $c^Tx = \lambda^T A x = \lambda^T b = d$（$d$ 为数字）.

2° 必要性：取向量 x_0 s.t. $Ax_0 = b$，则对于满足 $Ax = b$ 的所有 x，$\exists$ 向量 y, s.t.
$x = x_0 + Fy$，其中：$F \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$，$r = \mathrm{rank}(A)$，且 $R(F) = N(A)$.

注意：① $Ax = b$ 的 x 是特解 x_0 与 A 零空间的某向量线性组合之和. 这里 $Fy \in R(F) = N(A)$，Fy 是 A 零空间中的某个向量；
② 取 $F_{n\times(n-r)}$，是因为 $R(F)$ 与 $N(A)$ 中向量维数要相等；又因为 $R(F)$ 与 $N(A)$ 维数要相等，而 $\dim N(A) = n - \mathrm{rank}(A)$，$\therefore F$ 列数至少为 $n-r$，不妨取为 $n-r$.

将 x 与 x_0 代入 $c^Tx = d$ 中，

$$\therefore \begin{cases} c^Tx_0 + c^TFy = d \\ c^Tx_0 = d \end{cases} \Rightarrow c^TFy = 0, \text{ for } \forall y \in \mathbb{R}^{n-r}.$$

$\therefore c^TF = 0^T$，$\therefore F^Tc = 0$. 即 $c \in N(F^T)$.

又 $\because N(F^T) = R(F)^\perp = N(A)^\perp = R(A^T)$，

$\therefore c \in R(A^T)$. $\therefore \exists \lambda$, s.t. $c = A^T\lambda$. $\therefore d = c^Tx = \lambda^T A x = \lambda^T b = b^T\lambda$.

$\therefore$ 引理证毕.

(2) 再证题目：

证该结论等价于证：不 $\exists x$ subject to $x \succ 0$ 且 $Ax = b$ 的充要条件是 $\exists \lambda$ s.t.
$A^T\lambda \succeq 0$, $A^T\lambda \neq 0$, $b^T\lambda \le 0$.

证明如下：

1° 先证：不 $\exists x$ s.t. $x \succ 0$ 且 $Ax = b \Leftrightarrow \exists c \succeq 0$ 且 $c \neq 0$, $d \le 0$，对于所有满足 $Ax = b$ 的 x 有 $c^Tx = d$. (*)

由引理：$\exists c \succeq 0$ 且 $c \neq 0$ 和 $d \le 0$，对 $\forall$ 有 $Ax = b$ 的 x，有 $c^Tx = d$
$\Leftrightarrow \exists \lambda$, s.t. $c = A^T\lambda$ 且 $d = b^T\lambda$.

~~下证：不 $\exists x$ s.t. $x \succ 0$ 且 $Ax = b$~~

下证 (*)：

令 $C = \mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \succ 0\}$，$D = \{x \mid Ax = b\}$.

不 $\exists x$ s.t. $x \succ 0$ 且 $Ax = b \Leftrightarrow C$ 和 D 不相交.

由超平面分离定理得：

$\exists c \neq 0$ 和 d s.t. $\forall x \in C$, $c^Tx \ge d$,
$\forall x \in D$, $c^Tx \le d$.

$\forall x \in C$, $c^Tx \ge d \Leftrightarrow c \succeq 0$ 且 $d \le 0$.

$\forall x \in D$, $c^Tx \le d \Rightarrow c^Tx$ 为 const 值.

$\therefore c^Tx \le d$ 且 c^Tx 为定值，$\therefore$ 不妨令 $d = c^Tx$, $x \in D$.

$\therefore$ 不 $\exists x$ s.t. $x \succ 0$ 且 $Ax = b \Rightarrow \exists c \succeq 0$ 且 $c \neq 0$ 和 $d \le 0$, for all x satisfying $Ax = b$，有 $c^Tx = d$.

2° 另一方面，$\exists c \geq 0$ 且 $c \neq 0$ 和 $d \leq 0$，对所有满足 $Ax=b$ 的 x，有 $c^T x = d$

$\Rightarrow \forall x \in C,\ c^T x > 0 \geq d$，

$\forall x \in D,\ c^T x \leq d$

由超平面分离定理逆定理 $\therefore$ C与D不相交.

$\therefore$ 不 $\exists x$ 满足 $x \succeq 0$ 且 $Ax=b \Leftrightarrow$ C,D不相交

$\therefore$ 不 $\exists x$ 满足 $x \succeq 0$ 且 $Ax=b \Leftarrow \exists c \succeq 0$ 且 $c \neq 0$ 和 $d \leq 0$，对 $\forall$ 满足 $Ax=b$

$\therefore$ 不 $\exists x$ s.t. $x \succeq 0$ 且 $Ax=b \Leftarrow \exists c \succeq 0$ 且 $c \neq 0$ 和 $d \leq 0$，对 $\forall$ 满足 $Ax=b$ 的 x，有 $c^T x = d$.

$\therefore$ 原结论得证.

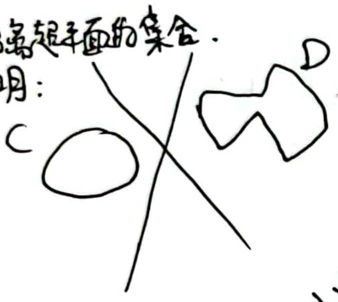
Q.E.D.

221900180 田永铭 凸优化第三章作业②

~~[illegible]~~:

2.21 分离超平面的集合.

证明:



首先有 $0x_C \le 0$，$0x_D \ge 0$ 恒成立.

∴ 该集合包含 $\{0\}$.

而 (a,b) 满足 $a^T x_C \le b$, $a^T x_D \ge b$，这是齐次线性不等式，限制了一系列半空间，而其交集即为该集合.

显然，交出来的是一个凸锥，满足 $\forall \theta \in [0,1]$, $\forall x_1, x_2 \in set$, $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in set$.

特别地，若无超平面可分离 C、D， 类似此图，而 $\{0\}$ 满足在集合内，其它皆不可. 此时集合为单点集 $\{0\}$. 证毕.

2.31 对偶锥的性质 K^* 为 K 对偶锥.

证明：(a) $K^* = \{y \mid x^T y \ge 0, \forall x \in K\}$

设 $\forall y_1, y_2 \in K^*$，对 $\theta \in [0,1]$，则 $\theta y_1 + (1-\theta) y_2$ 对 $\forall x \in K$ 有：

$x^T(\theta y_1 + (1-\theta) y_2) = \underbrace{\theta x^T y_1}_{\ge 0} + \underbrace{(1-\theta) x^T y_2}_{\ge 0} \ge 0$. ∴ K^* 确实是凸锥.

(b) 设 $\forall y \in K_2^*$，则 $\forall x \in K_2$, $x^T y \ge 0$，∵ $K_1 \subseteq K_2$，∴ $\forall x \in K_1$, $x^T y \ge 0$，∴ $y \in K_1^*$.

∴ $K_2^* \subseteq K_1^*$.

(c) ∵ K^* 是半空间的交(包含原点这个边界点)，∴ K^* 是闭集.

(d) 若 $K^* = \{y \mid x^T y \ge 0, \forall x \in K\}$，∵ $(x^T y)^T = y^T x \ge 0$.

题目等价于证 $y^T x = 0$ 即为 K^* boundary.

① 若 $y^T x > 0$ 对 $\forall x \in \mathrm{cl}\,K$ 成立，则取任意小的正数 ε，有 $(y+\varepsilon)^T x > 0$ 对 $\forall x \in \mathrm{cl}\,K$ 成立，

∴ $y \in \operatorname{int} K^*$.

② 若 $y^T x = 0$，则无论 ε 多么小，有 $(y+\varepsilon)^T x < 0$ 对某些 x 成立，$(\varepsilon < 0)$

即不满足 $y \in \operatorname{int} K^*$.

∴ K^* 的内部由 $\operatorname{int} K^* = \{y \mid y^T x > 0, \forall x \in \mathrm{cl}\,K\}$ 给出.

(e) 反证法：假设 K^* 不尖，则 $\exists y_0 \ne 0$, s.t. $y_0 \in K^*$, $-y_0 \in K^*$.

由 K^* 的定义知：$\forall x \in K$, $x^T y_0 \ge 0$, $x^T y_0 \le 0$. ∴ $x^T y_0 = 0$ 对 $\forall x$ 成立 (*)

(*) 成立 与 K 有非空内部.

∴ 若 K 有非空内部，则 K^* 是尖的.

(f) ~~$K^{**}=\bigcap_{y\in K^*}\{x\mid y^Tx\geq 0\}$~~

$K^{**}=\bigcap_{y\in K^*}\{y\mid y^Tx\geq 0\}$ 可以写成 $\bigcap_{y\in K^*}\{x\mid y^Tx\geq 0\}$

而此式意义可表示所有~~半空间~~包含K的半空间的交，即K的闭包 ∴ $\text{cl}K=K^{**}$.

若K闭，显然有 $K^{**}=K$.

(g) 由(f):

K尖即 K^{**}尖，反设 K^*内部为空，

则 $\exists x_0$, s.t. $x_0^Ty=0$ 对 $\forall y\in K^*$ 成立. $\{x^Ty\mid y\in K\}$

即有这样的x，$x\neq 0$, $x\in K^{**}$, $-x\in K^{**}$.

与 K^{**}尖矛盾.

∴假设不成立. ∴ K^*有非空内部.

2.39 锥的分离.

证明：设 $a^Tx=b$ 为能将 K 与 $\tilde{K}$ 分离的超平面 $(a\neq 0)$

法向量为a. 不妨设：若 $x\in K_1$，则 $a^Tx\leq b$；若 $x\in K_2$，则 $a^Tx\geq b$.

∵ K_1, K_2 为锥，∴原点 $0\in K_1, K_2$.

∴ $b=0$.

∴ $a^T0\leq b$，且 $a^T0\geq b$，

∴若 $x\in K_1$，则 $a^Tx\leq 0$. 则 $a^T(tx)\leq 0$ 对 $\forall t>0$ 成立，

即若 $x\in K_1$，则 $\forall t>0$, $tx\in K_1$.

对 K_2 亦如此.

$K_1^*=\{y\mid x^Ty\geq 0, x\in K_1\}$.

$x^T(-a)=(-a^Tx)^T\geq 0$，∴ $-a\in K_1^*$.

$K_2^*=\{y\mid x^Ty\geq 0, x\in K_2\}$.

~~$x^T(-a)=-(a^Tx)\leq 0$~~

$x^Ta=(ax^T)^T\geq 0$，∴ $a\in K_2^*$.

又 $a\neq 0$，∴找到了这样的y，即a，s.t. $a\in \underset{K_1^*}{K^*}$, $-a\in \underset{K_2^*}{\tilde{K}^*}$.

证毕.