图的连通性

离散数学–图论初步

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 图的定义
- 用图建模
- 图的表示
- 图的运算
- 图的同构

提要

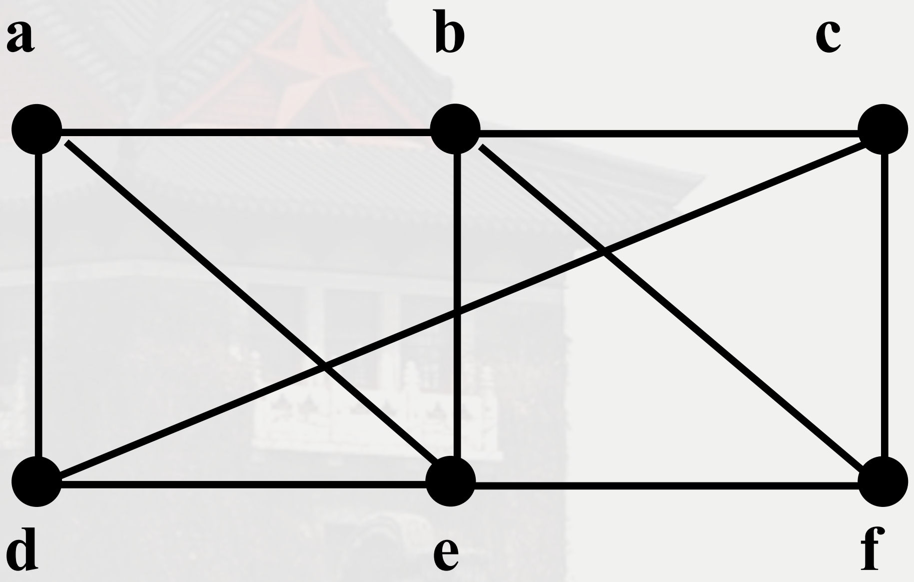
- 通路与回路
- 通路与同构
- 无向图的连通性
  - 连通度
  - 2-连通图
- 有向图的连通性
  - 无向图的定向

通路的定义

- 定义：【Walk，教材用Path】图G中从v_0到v_n的长度为n的通路是G的n条边$e_1,\ldots, e_n$的序列，满足下列性质
  - 存在$v_i \in V$ $(0<i<n)$, 使得v_{i-1}和v_i是e_i的两个端点 $(1\le i\le n)$。
- 相关点
  - 回路【Closed Walk，教材用Circuit或Cycle】：起点与终点相同，长度大于0。
  - 不必区分多重边时，可以用相应顶点的序列表示通路。
  - 长度为0的通路由单个顶点组成。
  - 简单通路【Trail，教材用Simple Path】：边不重复，即，$\forall i, j, i\ne j \Rightarrow e_i\ne e_j$
  - 初级通路【Path】：点不重复，亦称为“路径”

通路（举例）

- 简单通路：a, d, c, f, e。 长度为4。
- 回路：b, c, f, e, b。 长度为4。
- 通路：a, b, e, d, a, b。 长度为5。
- 不是通路：d, e, c, b。

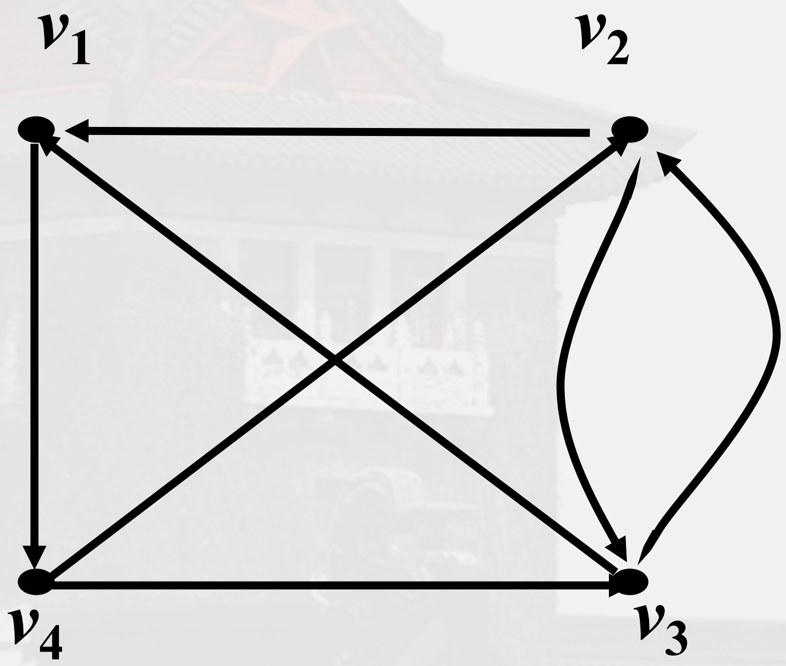


通路的定义（有向图）

- 定义：有向图G中从v_0到v_n的长度为n的通路是G的n条边$e_1,\ldots,e_n$的序列，满足下列性质
  - 存在$v_i \in V$ ($0<i<n$), 使得v_{i-1}和v_i分别是e_i的起点和终点 ($1 \le i \le n$)。
- 相关点
  - 回路：起点与终点相同，长度大于0。
  - 不必区分多重边时，可以用相应顶点的序列表示通路。
  - 长度为0的通路由单个顶点组成。
  - 简单通路：边不重复，即，$\forall i, j, i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$

通路（举例）

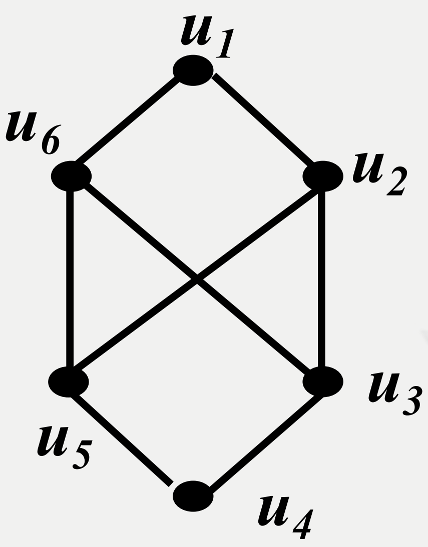
- 简单通路：v_1, v_4, v_2, v_3。 长度为3。
- 回路： v_2, v_1, v_4, v_2。长度为3。
- 通路： $v_2, v_3, v_1, v_4, v_2, v_3$ 。 长度为5。

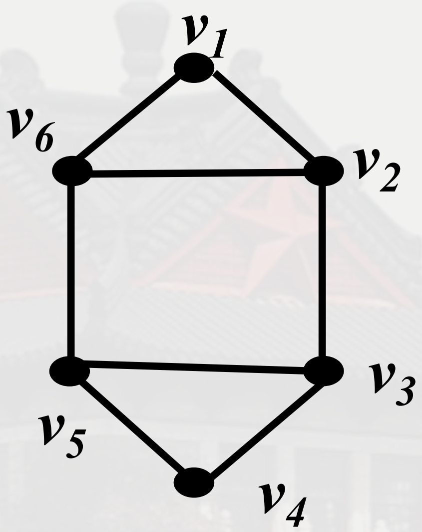


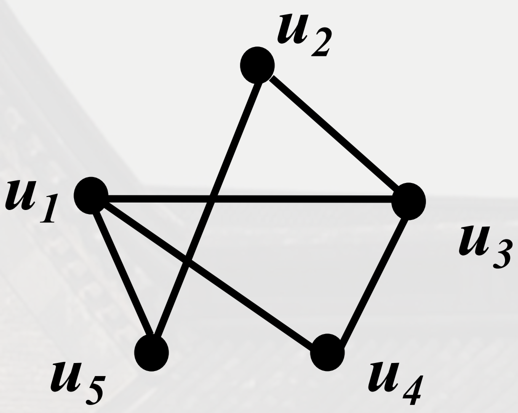
通路与同构

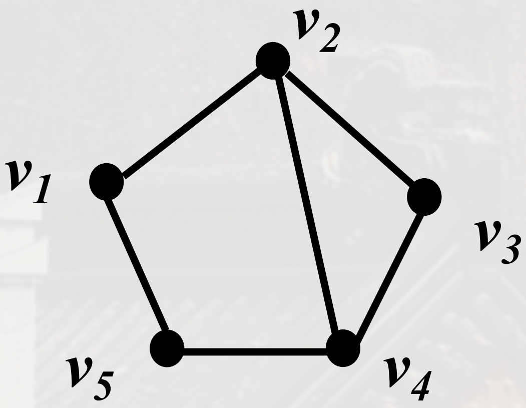
- 设图G的邻接矩阵为A
  - $(A^k)_{i,j}$: v_i到v_j的长度为k的通路个数
  - $(A^k)_{i,i}$: v_i到v_i的长度为k的回路个数
- 同构图的不变量：长度为k的回路的存在性。

通路与同构



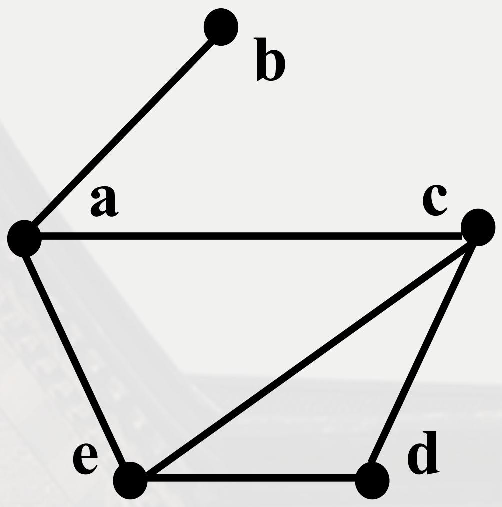




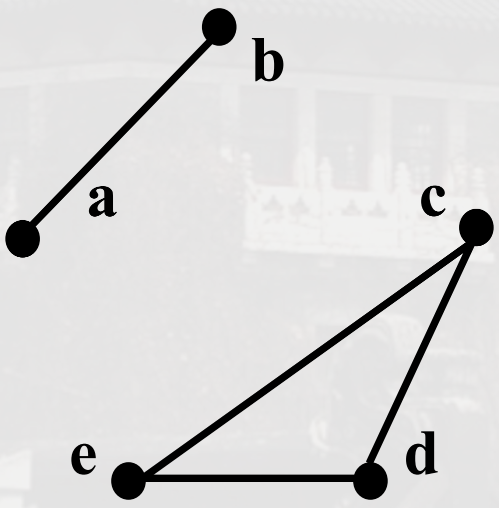


无向图的连通性

- 定义：如果G中任意两个不同顶点之间都有通路，则称无向图G称为是**连通（Connected）**的。



G_1



G_2

连通分支

- 连通分支
  - 极大连通子图

- 每个无向图是若干个互不相交的连通分支的并。
  - “顶点之间存在通路”是一个等价关系，任一等价类上的导出子图即为一个连通分支。

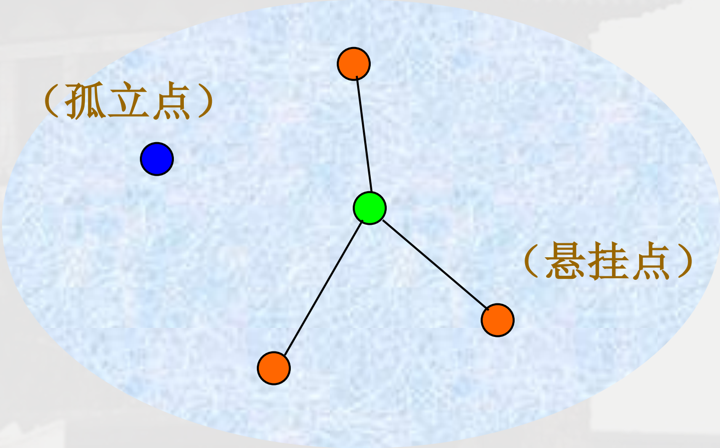
- 若图G中存在从u到v的通路，则一定有从u到v的简单通路。
  - 证明：最短通路必是简单的，事实上，它没有重复顶点。

点的删除与连通分支数量的增减

- p(G-v)(其中v是G中任意一个顶点)的情况比较复杂

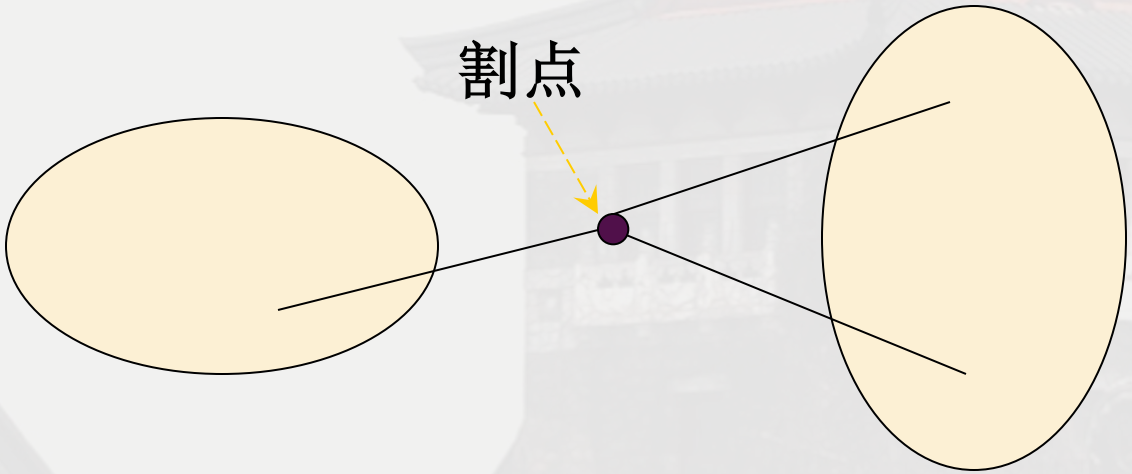
（注意：删除顶点意味着同时删除该点关联的边）

- 可能会……
  - 减少 (删除孤立点)
  - 不变 (例如：删除悬挂点)
  - 增加很多个 (例如：star)



割点（cut vertex, articulation vertex）

- 定义：G是图, $v \in V_G$, 若$p(G-v) > p(G)$, 则称v是**割点**.



- (注意：只需考虑割点所在的连通分支，以下讨论不妨只考虑连通图)

关于割点的三个等价命题

- 以下三个命题等价：

  (1) v是割点。

  (2) 存在V-{v}的分划{V_1, V_2}, 使$\forall u\in V_1$, $w\in V_2$, uw-通路均包含v。

  (3) 存在顶点u,w($u\neq v$, $w\neq v$)，使得任意的uw-通路均包含v。

- 证明：

  (1)⇒(2): ∵v是割点，G-v至少存在两个连通分支，设其中一个的顶点集是V_1。令$V_2=V-(V_1\cup\{v\})$, 则$\forall u\in V_1$, $w\in V_2$, u,w一定在G-v的不同的连通分支中。∴在G中，任何uw-通路必含v。

  (2)⇒(3): 注意：(3)是(2)的特例。

  (3)⇒(1): 显然，在G-v中已不可能还有uw-通路，∴G-v不连通，∴v是割点。

边的删除与连通分支数量的增加

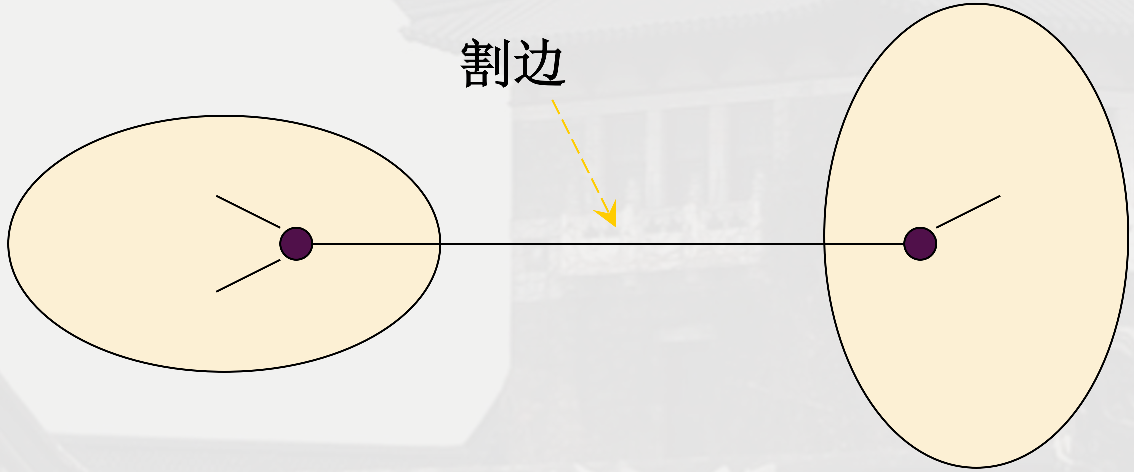
- 设$p(G)$表示图G中连通分支数，则：

$p(G) \le p(G-e) \le p(G)+1$， 其中$e$是$G$中任意一条边

- 第一个“不大于”显然成立(删除e只会影响e所在的那一个连通分支)。
- 第二个“不大于”成立: 注意在图中任意两点之间加一条边，最多只能将*两个*连通分支连成一个。

割边（桥；cut edge, bridge）

- 定义：设G是图，$e \in E_G$, 若$p(G-e) > p(G)$, 则称e是G中的割边。



- (注意：只需考虑割边所在的连通分支，以下讨论不妨只考虑连通图)

割边与回路

- e是割边当且仅当e不在G的任一简单回路上。

(注意：割点没有相应结论)

- 证明：

⇒：假设C是包含e=xy的初级回路，令C-e=P，P是不含e的xy-路径。对G中任意顶点u,v, 若uv-通路中不含e, 则该通路也是G-e中的uv-通路；若uv-通路中含e, 则将所有的e均替换为P，得到G-e中的uv-通路，∴G-e仍连通，与e是割边矛盾。

⇐：假设e=xy不是割边。则G-e仍连通，设P是G-e中的xy-路径，P中不含e，则：P+e是G中的简单回路，矛盾。

有关割边的四个等价命题

- 以下四个命题等价：

  (1) e是割边。

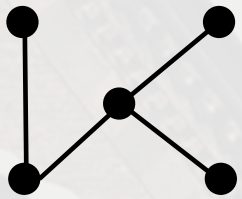
  (2) e不在G的任一简单回路上。(注意：割点没有相应结论)

  (3) 存在V的分划$\{V_1, V_2\}$, 使得$\forall u \in V_1$, $w \in V_2$, uw-通路均包含e。

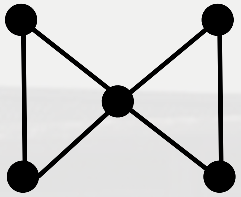
  (4) 存在顶点u,w，使得任意的uw-通路均包含e。

连通图“连接的牢固度”不一样

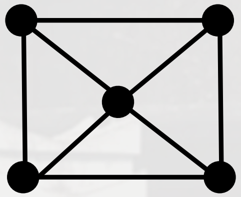
- 图G_1中删除任意一条边都不连通了。
- 图G_2则至少删除两条边，或删除中间那个顶点，才不连通。
- 图G_3删除任意一个点依然连通。
- 图G_4至少要删除四条边才可能不连通，且不可能通过删除顶点使其不连通。



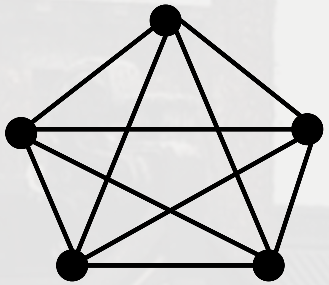
G_1



G_2



G_3



G_4

图的(点)连通度

(注意：若G是顶点数不少于2的非完全图，删除足够数量的点一定能使图变成不连通图或者平凡图。)

- 定义：使非平凡连通图G成为**不连通图或者平凡图**需要删除的**最少**顶点数称为图G的**(点)连通度**，记为$\kappa(G)$。(注意：这不意味着任意删除$\kappa(G)$个点就一定会使该图不连通)
- 约定：不连通图或平凡图的连通度为0，而$\kappa(K_n) = n - 1$
  - 若图G的连通度**不小于** k, 则称G是k**-连通图**；

    (k-连通图，即 $\kappa(G) \geq k$：删除少于k个顶点，它依然连通。)

    ($\kappa(G)=k$： k-连通图，且有k个顶点，删除它们就不连通。)

图的边连通度

(注意：若G是顶点数不少于2的连通图，删除足够数量的边使得图变成不连通。)

- 类似地，使非平凡连通图G**变成不连通**需要删除的**最少**边数称为图G的**边连通度**。记为$\lambda(G)$。 (注意：这不意味着任意删除λ(G)条边就一定会使该图不连通)

约定：不连通图或平凡图的边连通度为0。$\lambda(K_n)=n-1$

若图G的边连通度**不小于**k, 则称G是**k-边连通图**。

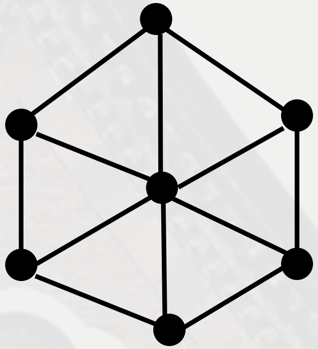
(k-边连通图，即 $\lambda(G)\geq k$：删除少于k条边，它依然连通。)

($\lambda(G)=k$： k-边连通图，且有k条边，删除它们就不连通。)

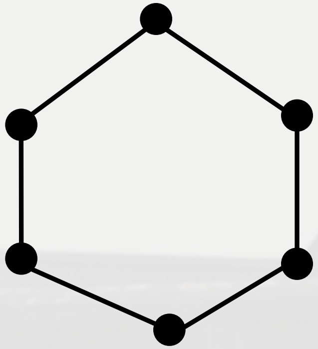
关于连通度的例子

- W_6(轮)： $\kappa=\lambda=3=\delta$
- C_6(圈)： $\kappa=\lambda=2=\delta$
- $K_{2,3}$(完全二部图)： $\kappa=\lambda=2=\delta$
- G： $\kappa=1$， $\lambda=2$， $\delta=3$

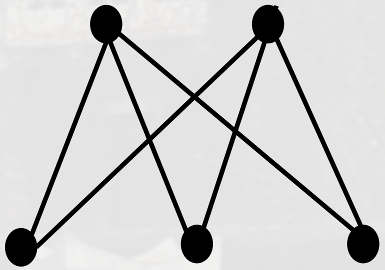
δ表示图中最小顶点度



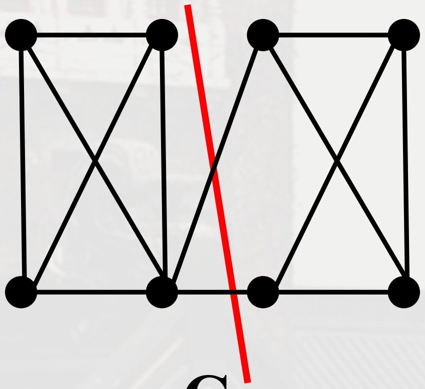
W_6



C_6



$K_{2,3}$

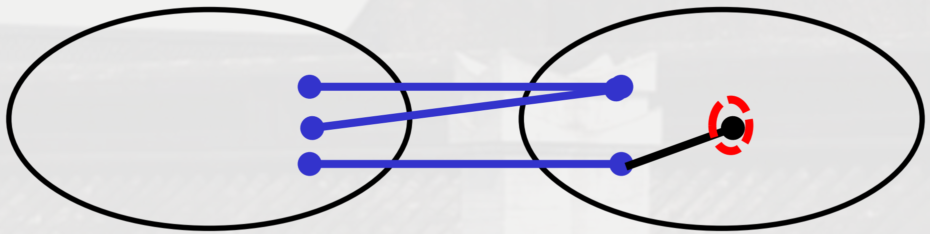


G

连通度的上限

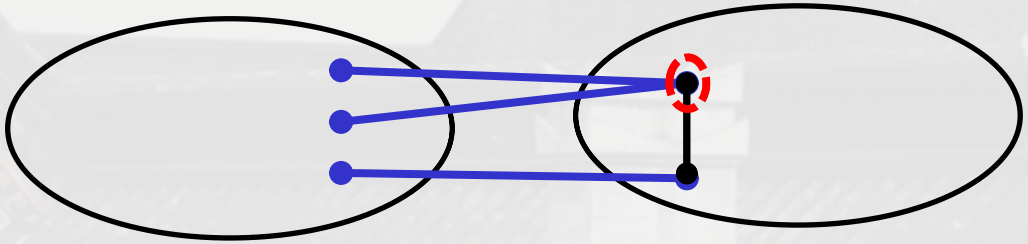
定理：若图G是非平凡的, 则 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

- 易证$\lambda(G) \le \delta(G)$ 。设F为E的极小子集使得$G-F$不连通，只需证明$\kappa(G) \le |\mathrm{F}|$。
- 若G中存在不与F中的边相关联的点，设为v。令C为$G-F$中v所在的连通分支。F中的任一边，其两个端点不会都在C中（F的极小性）。C中与F中边相关联的顶点（集合）分隔v与$G-C$，于是 $\kappa(G) \le |\mathrm{F}|$ 。



连通度的上限（续）

- 若G中的各顶点均和F中的某条边关联。对任意顶点v,令C是G-F中包含v的连通分支。考虑v的任一邻居w。若w在C中，则w必定和F中的某条边关联；若w在G-C中，则边vw属于F。因此，$|N(v)| \le |F|$, 即$d_G(v) \le |F|$.
  - 若$V-N(v)-v \neq \Phi$, 则删除N(v)后, v和V-N(v)-v不连通,从而$\kappa(G) \le |F|$。
  - 若$V-N(v)-v=\Phi$,则取其它节点以满足1）的条件。若所有节点均有$V-N(u)-u=\Phi$，则图G为完全图，有$\kappa(G)=\lambda(G)=|G|-1$。



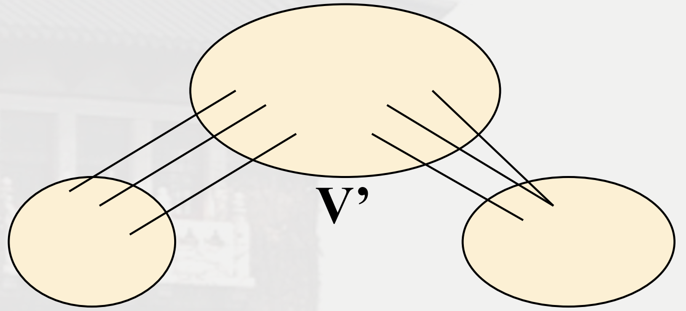
$d_G(v) \le |F|$

达到连通度上限的图

定理：设G是简单图，$|G|=n\geq 3$, 且$\delta_G\geq n-2$, 则$\kappa(G)=\delta_G$

(注意：任一点最多与一个点不相邻，此时$\lambda(G)$也必为δ_G)

证明：设$V'\subseteq V_G$, 使得G-V'含两个连通分支G_1, G_2,
不妨设$|G_1|\leq|G_2|$，则$|G_1|\leq(n-|V'|)/2$。



$|G_1|\cdot\delta_G\leq\Sigma_{v\in G1}d(v)\leq|G_1|\cdot(|G_1|-1)+|G_1|\cdot|V'|$

$\delta_G\leq|G_1|-1+|V'|\leq(n-|V'|)/2+|V'|-1$

$2\delta_G\leq n-2+|V'|\leq\delta_G+|V'|$, 所以 $|V'|\geq\delta_G$

所以 $\kappa(G)\geq\delta_G$

连通度与点不相交的通路

(现象：对图G中任意两点u,v，如果点不相交的uv-通路有k条，显然，要使u,v不连通， 至少须删除k个顶点。)

- **Whitney定理**：

图$G(|G|\geq 3)$是2-连通图 **当且仅当** G中任意两点被至少2条除端点外顶点不相交的路径所连接。

注意： “G中任意两点被至少2条除端点外顶点不相交的路径所连接”等价于“任意两点均处在同一初级回路中” 。

Whitney定理的证明

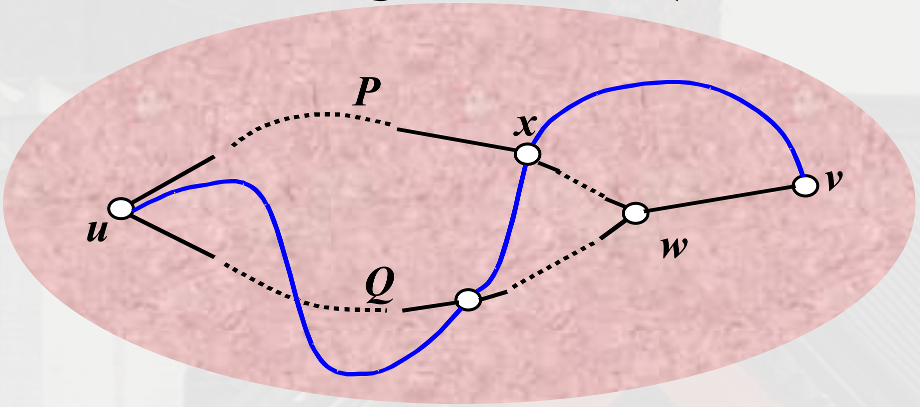
- ⇐显然
- ⇒:设u,v是图G中的任意两点。下面对距离d(u,v)进行归纳。

当d(u,v)=1, uv∈E_G, 因为G是2-连通图，G-uv仍连通，则G中除边uv外，必有另一条不含uv的路径。

假设当d(u,v)<k时，至少存在两条中间点不相交的通路。

若d(u,v)=k, 设u,v间的一条最短路径是u...wv, w是与v相邻的顶点。则d(u,w)<k, 由归纳假设u,w之间存在两条中间点不相交的路径，设为P, Q。因为G是2-连通图，G-w中仍有(不含w的)uv-路径P’，且它一定与P, Q有公共点(u就是一个)。

假设这样的公共点中距离v最近的是x(不妨假设它在P上)，则Q+wv边以及P上的ux-段+P'上的xv-段是u,v之间两条中间点不相交的通路。



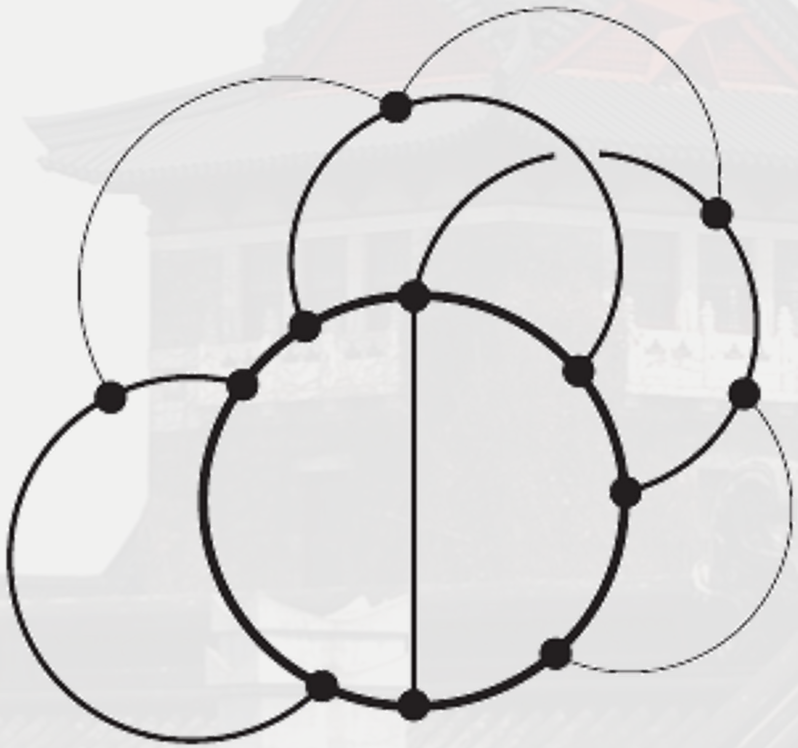
连通性的一般性质

- Menger定理（Whitney定理的推广）
  - 图G是k-连通图 **当且仅当** G中任意两点被至少k条除端点外顶点不相交的路径所连接。
  - 图G是k-边连通图 **当且仅当** G中任意两点被至少k条边不相交的路径所连接。

2-连通图

- 命题：一个图是2-连通的 ⇔ 它是一个回路(cycle), 或者可在已有的2-连通图上依次增加 **H-path**而得.

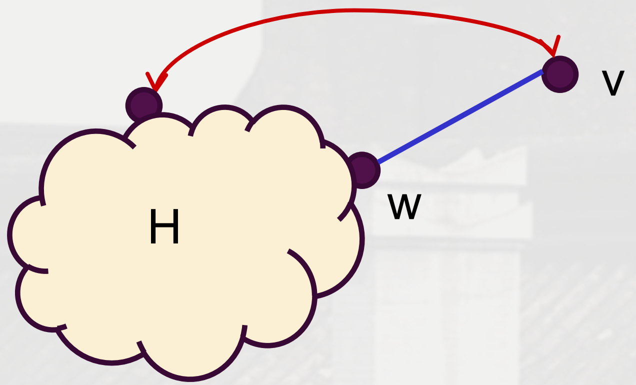
该通路有两个端点，且仅仅这两个端点在原图上。



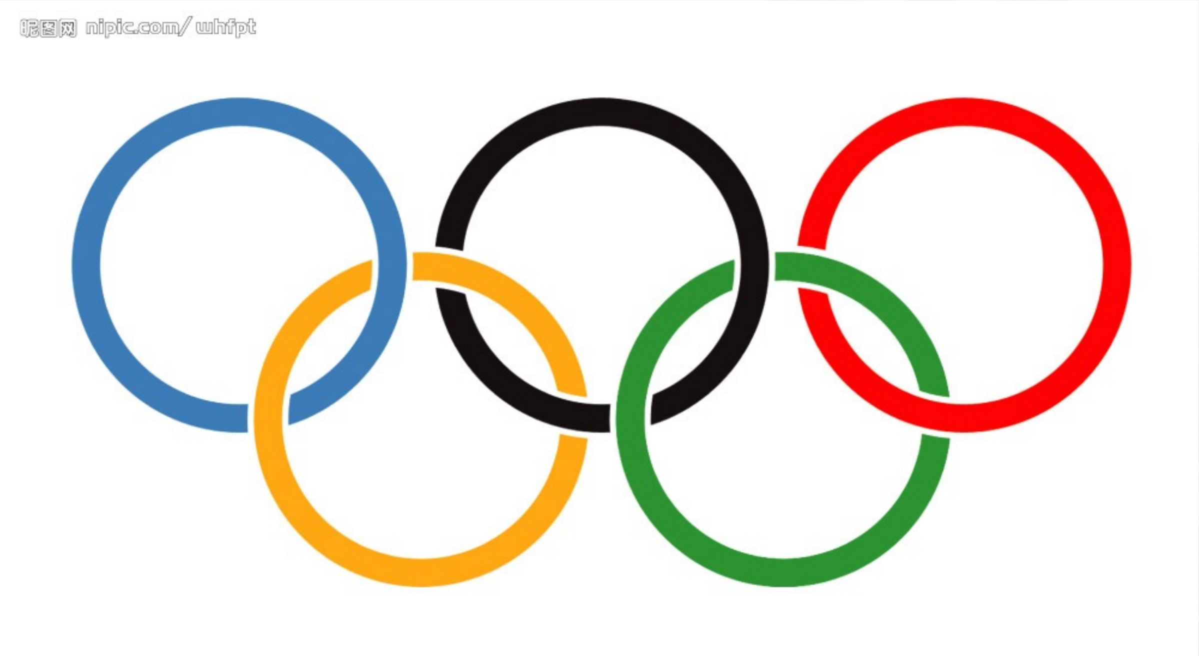
2–连通图

- 证明. 充分条件显然成立. 下证必要条件.

设G是2-连通的. G 必包含回路C, 设 H 是包含C， 依次增加H-Path得到的极大子图. H必是G的生成子图. （倘若$V_H \neq V_G$, 则存在$v \in V_G - V_H$, $w \in V_H$, $vw \in E_G$. G是 2-连通的, G-w连通, v到H有路径P, wvP是H-Path, 矛盾.）

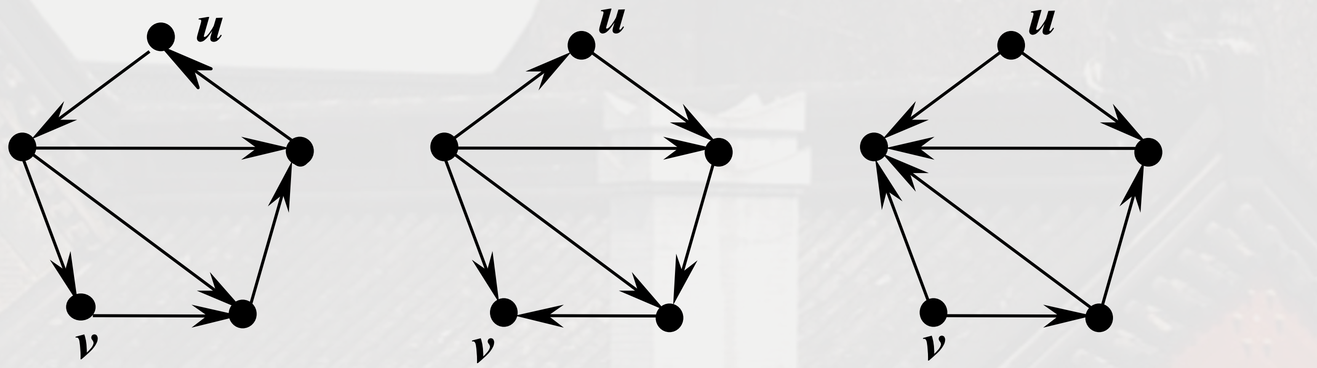


2-连通图



有向图的连通性

- 若将有向图D各边的方向去掉，所得的无向图(称为D的*底图*)连通，则D称为**弱连通**有向图。(见下右图: 既无uv-, 又无vu- 有向通路)
- $\forall u,v \in V_D$, *存在一条* (u,v)-有向通路或者(v,u)-有向通路，则D称为**单连通**有向图。 (见下中图: 有uv-, 但无vu-有向通路)
- $\forall u,v \in V_D$, *均存在* (u,v)-有向通路和(v,u)-有向通路，则D称为**强连通**有向图。 (见下左图)



强连通的充分必要条件

- 有向图D是强连通的**当且仅当**D中的所有顶点在同一个有向回路上。
- 证明：

$\Leftarrow$ 显然

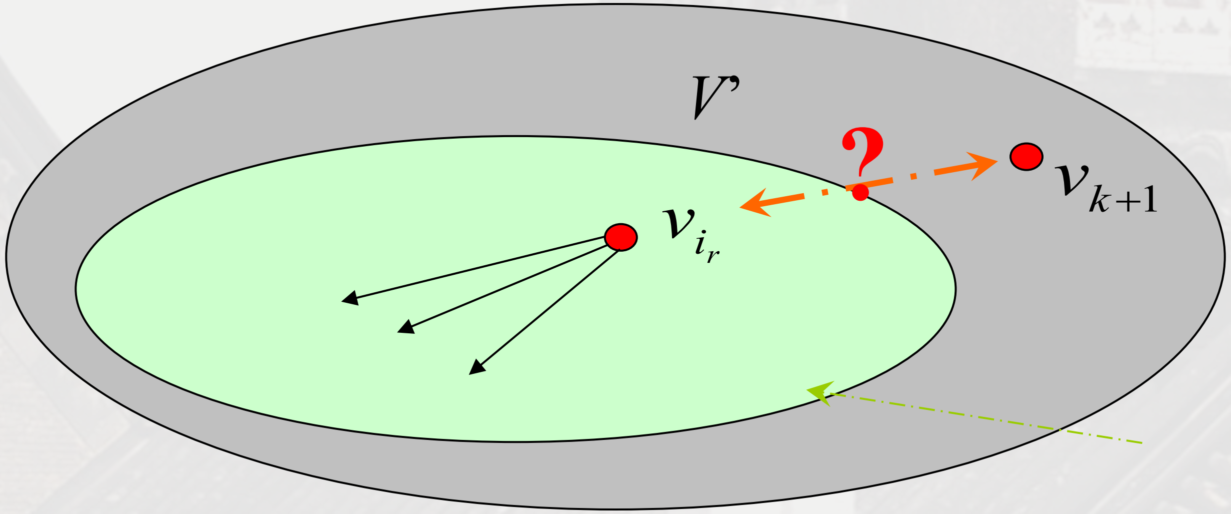
$\Rightarrow$ 设$V_D=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$，令$\Gamma_i$是$v_i$到$v_{i+1}$的有向通路$(i=1,\dots,n-1)$，令$\Gamma_n$是$v_n$到$v_1$的有向通路，则$\Gamma_1$，$\Gamma_2,\dots\Gamma_n$依次连接是包含$D$中一切顶点的回路。

单向连通图中处处可达的顶点

- 若有向图D是单向连通，则$\forall$非空集$V' \subseteq V_D$，$\exists v' \in V'$，使得v'可达V'中的所有顶点(规定顶点到其自身是可达的)。

  注意：当V'足够小，上述条件一定成立。

- 证明：（注意：按照非空子集的大小进行归纳证明）



单向连通的充分必要条件

- 有向图D是单向连通的**当且仅当**D中的所有顶点在同一个有向通路上。

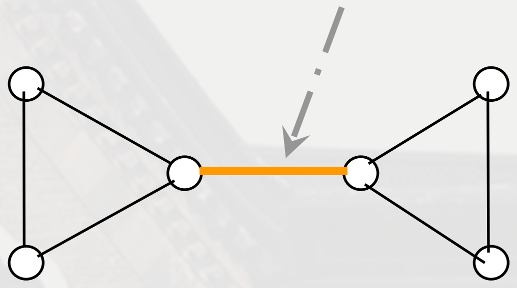
  充分性显然，下面证明必要性

- 设$V_D=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$, 令$V_1=V_D$, 则$V_1$中存在可达所有顶点的顶点，不妨假设它就是$v_1$, 令$V_{i+1}=V_i-\{v_i\}$， 其中i=1,2,...,n-1; 而且诸$V_i$中均有可达该子集中所有顶点的顶点(不妨假设其就是$v_i$), 于是：将诸$v_iv_{i+1}$-通路连接起来即包含$D$中所有顶点的有向通路。

无向图的边定向

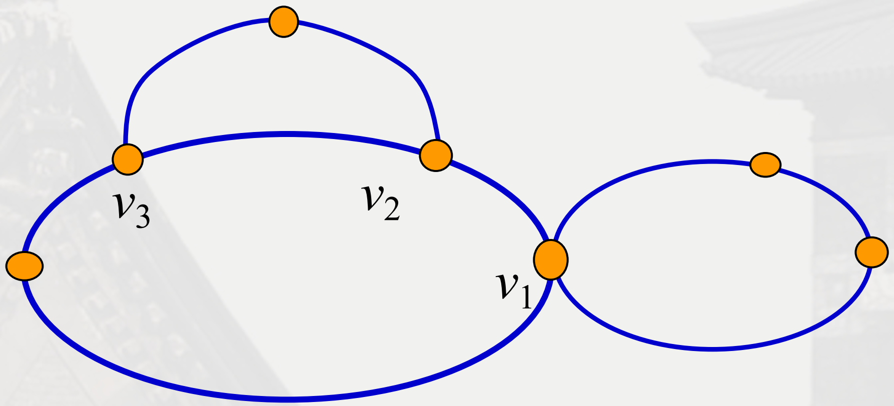
问题：何种道路网可以用规定单行道的办法来改善交通？

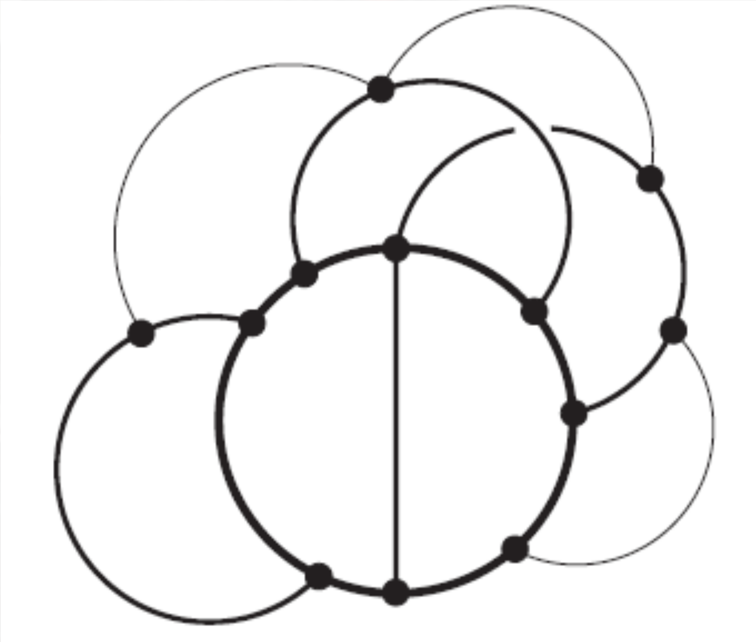
- 在图模型中，该问题表述为：什么样的无向图G可通过**边定向**成强连通有向图 .
  - 显然G中不能有割边，否则定向后，割边端点之间不能双向可达。



因此，*G*的“2-边连通”是个**必要**条件，但它是否也是**充分**条件呢？

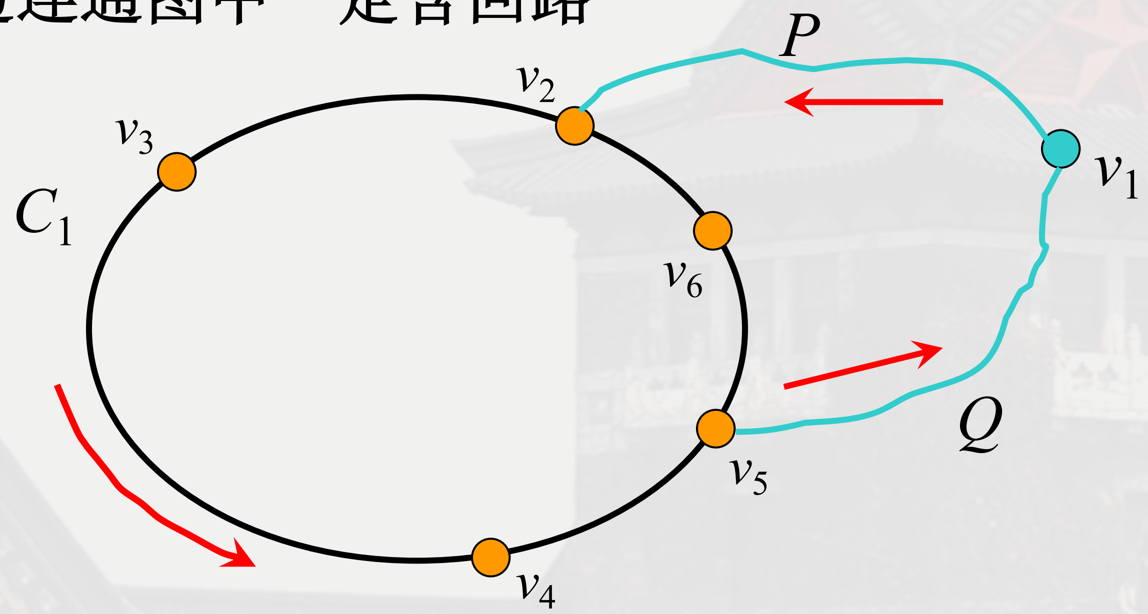
2-边连通与2-连通（无向图）





2-边连通无向图的边定向

2-边连通图中一定含回路



构作有向通路C_2=C_1+QP,..., 总会得到包括图中所有点的强连通有向图。仍未包括的边可以任意定向。

无向图边定向算法

- 输入：无环2-边连通无向图G（设$V_G=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$）
- 输出：以G为底图的强连通有向图
- 过程：

(1) 令$V_1=\{v_1\}$, i=1。

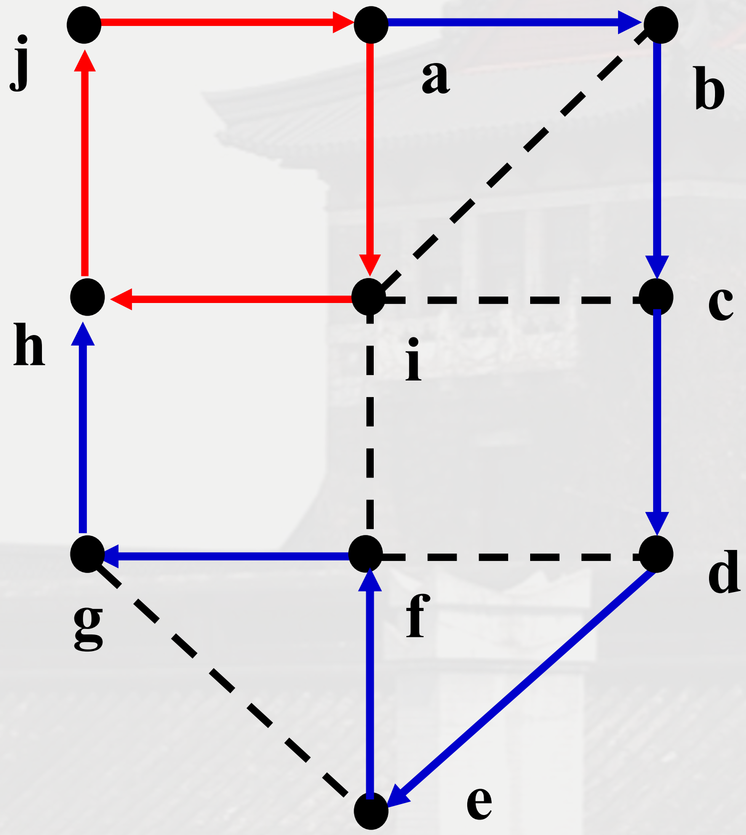
(2) 若$V_i=V_G$, 对未定向边任意定向，算法结束。否则转3。

(3) 取边$v_{i_0}v_{i_1}$, 使得$v_{i_0}\in V_i, v_{i_1}\in V_G-V_i$ (一定可取到所要的边)。
从$v_{i_0}v_{i_1}$开始找一条初级通路或回路，满足始点和终点在V_i中，
而中间点均在V_G-V_i中, 加方向使之成为有向通路。

(4) $V_{i+1}=V_i\cup$ {**上述通路或回路中所有中间点**}，转2。

无向图边定向算法(续)

- 示例



参考文献

- Reinhard Diestel. Graph Theory. Springer, Heidelberg, 2005

  Section 1.3 and section 3.1

连通度的应用

- 问题: 将n个计算机连成一个通信网络以共享资源，如果要以最小的代价保证在故障节点少于k个的条件下所有计算机能保持互连，网络应该如何连接？
- 数学模型：找出n个结点的完全图的一个边最少的k-连通子图。

（注意：含n个顶点的k-连通图至少有$nk/2$条边，因为该图中最小顶点度不能小于k）

这个问题的一般形式:

"若G是带权图, 对给定的正整数k, 确定G的最小k-连通生成子图"

被认为是一个NP-完全问题。

小结

- 通路与回路
- 无向图的连通性
  - 连通度
  - 2-连通图
- 有向图的连通性
  - 无向图的定向