南京大学数学课程试卷 （商学院 19 级）

2020/2021 学年 第 二 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2021.1.4 系别 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

题号	一 36	二 10	三 12	四 10	五 10	六 12	七 10	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.38)=0.9162$, $\Phi(1.58)=0.943$, $\Phi(1.645)=0.95$,
$\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(2.33)=0.99$, $t_{0.025}(8)=2.306$, $t_{0.025}(9)=2.262$,
$t_{0.05}(8)=1.86$, $t_{0.05}(9)=1.83$, $t_{0.025}(16)=2.12$, $t_{0.05}(16)=1.746$, $t_{0.025}(17)=2.11$, $t_{0.05}(17)=1.740$,
$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$, $\chi^2_{0.025}(9)=19.023$, $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$, $\chi^2_{0.05}(9)=16.919$
$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$, $\chi^2_{0.975}(9)=2.70$, $\chi^2_{0.95}(8)=2.733$, $\chi^2_{0.95}(9)=3.325$

一．（6 分×6=36 分）

1．将 10 本书任意地放到书架上，其中有两套书,一套书有 3 本，另一套有 4 本，求下列事件的概率：(1) 3 本一套的书放在一起；（2）两套书各自放在一起.

2. 设随机变量X_i～$N(2, 3^2)$， i =1,2, ⋯ 10, 且相互独立, 求 $E[2X_1\sum_{i=1}^{10}X_i]$.

3．设$\{X_k\}$为相互独立的随机变量序列，且有 $P(X_k=\sqrt{\ln k})=P(X_k=-\sqrt{\ln k})=\frac{1}{2}$， k=1, 2, ⋯ .

试证：$\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right|\ge\varepsilon\right)=0$，即$\{X_k\}$服从大数定律.

4．设 $X_1, X_2, \cdots, X_9$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，设 $Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$，$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，求统计量 Z 的分布.（如有自由度需指出）

5． 随机抽取 9 发炮弹做试验,测得炮口速度的样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2}=11$，设炮口速度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，求炮口速度的标准差 σ 的 95%置信区间.

6．设总体 $X \sim N(\mu, 9)$，μ 未知，$X_1, X_2, \cdots\ X_{36}$ 为样本，如果以区间 $(\bar{X}-1, \bar{X}+1)$ 作为 μ 的置信区间，那么置信度是多少？(其中 $\bar{X}=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36}X_i$)

二．(10 分)设事件 A 在一次试验中发生的概率为 $\frac{1}{4}$．如果做了四次伯努利独立试验,事件 A 均未发生,则事件 B 也不发生；如果四次伯努利试验中事件 A 发生一次,则事件 B 发生的概率为 $\frac{2}{3}$；而四次试验中若事件 A 发生两次及两次以上,则事件 B 一定发生．试求：(1)P(B)； (2)若已知事件 B 已经发生，问四次试验中事件 A 至少发生两次及两次以上的概率.

三. (12 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$. (1) 求 EX ，DX；(2) 求 X 与 $Y=|X|$的协方差，并问 X 与 Y 是否相关? (3) 讨论 X 与 Y 是否相互独立? 为什么?

四. (10 分)设 $X_1, X_2, \cdots\ X_{200}$是取自总体 X 的一个简单随机样本. 总体 X 服从 0~1 分布，$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，试利用中心极限定理计算概率 $P\{\sum_{i=1}^{100}(X_{2i}-X_{2i-1})^2\le 60\}$.

五.(10分) 设X_1，X_2，…，X_n是来自总体X～N(μ,σ^2) 的简单随机样本,记 $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，

(1) 证明 T 是μ^2的无偏估计量； (2) 当 μ=0，σ^2=1 时，求 T 的方差 DT.

六. (12 分)设总体 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $(\lambda>0)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体 X 的一个简单随机样本(n>1). 令$\widehat{\lambda_1}=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\widehat{\lambda_2}=n\{min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}$,

(1)讨论λ的两个估计量$\widehat{\lambda_1}$ 与 $\widehat{\lambda_2}$的无偏性; (2) 比较 $\widehat{\lambda_1}$ 与 $\widehat{\lambda_2}$的有效性 .

七. (10 分) 已知某种罐头中维生素 C(Vc)的含量 X 服从正态分布，按照规定 Vc 的平均含量不得少于 21 毫克，现从一批罐头中取了 17 罐，算得 Vc 含量平均值$\bar{x}$=19，样本标准差 S=$\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{17}(x_i-\bar{x})^2}$ =3.98,(1)问该批罐头 Vc 的含量是否合格?(即对假设 H_0: $\mu\ge 21$; H_1: $\mu<21$ 进行检验) (α=0.05)（2）求μ=EX 的置信度为 95%的置信区间.