考试科目名称　　离散数学（A 卷）

考试方式：闭 卷　考试日期 2015 年 6 月 26 日 教师________

系（专业）计算机科学与技术系　　年级_____ 班级________

学号__________________　姓名__________________　成绩________

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分	

一、（本题满分 10 分）

所有整系数一元二次方程的根的集合是否可数？请证明你的结论.

答： 所有整系数一元二次方程的根的集合**是可数的**。(4 分)

这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。(2 分)

一个整系数一元二次方程可以表示成 $ax^2+bx+c=0$，其中 a、b、c 均是整数。这样，对应到 Z×Z×Z 中的元素（a, b, c）。这个对应是**单射**。(2 分)

由于 Z 是可数的，不难证明 Z×Z×Z 是可数的。(1 分)

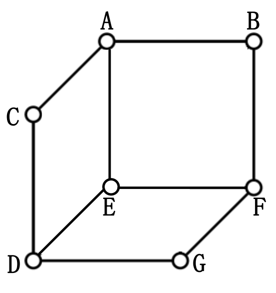
因此，整系数一元二次方程最多有可数个。(1 分)

得 分	

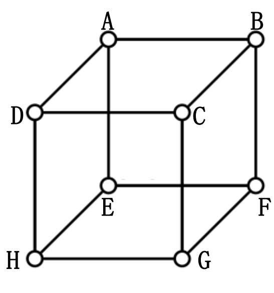
二、（本题满分 10 分）

以下两图是否为哈密尔顿图？若是，请给出哈密尔顿回路；若不是，请说明理由.

答：



(图 1)



(图 2)

图 1 不是哈密尔顿图，因为删除 A, D, F 三个顶点，形成 4 个连通分支。(3+2 分)

图 1 是哈密尔顿图，一条哈密尔顿回路：A, B, C, G, F, E, H, D, A.（3+2 分）

得 分	

三、（本题满分 10 分）

设n阶图G的边数为m，试证明：若$m > C_{n-1}^{2}$，则G为连通图.

证明. 假设G不连通，有 2 个或以上连通分支。 （2 分）

设其中一个连通分支中顶点数为$n1 \geq 1$，其余顶点数为$n2 \geq 1$. $n1 + n2 = n$

$$m \leq C_{n1}^{2}+C_{n2}^{2} \qquad （4 分）$$

可以验证：$C_{n1}^{2}+C_{n2}^{2} \leq C_{n-1}^{2}$. 即 n1(n1-1)+n2(n2-1) $\leq$ (n-1)(n-2) （4 分）

验证中用到关键等式： $0 \leq$ (n1-1)(n2-1)

因此 $m \leq C_{n-1}^{2}$. 矛盾. 所以 G为连通图.

得 分	

四、（本题满分 12 分）

假设集合A非空，集合B至少有两个元素. 令$B^{A} = \{f \mid f{:}A \to B\}$，即所有从$A$到$B$的函数组成的集合. 试证明：不存在从$A$到$B^{A}$的满射.

证明（方法一）.

因为$|B| \geq 2$，所以 $|B^{A}| \geq |2^{A}|$ （4 分）

因为$|A| < |2^{A}|$，所以$|A| < |B^{A}|$ （4 分）

所以不存在从A到 B^{A}的满射。 （4 分）

证明（方法二）. //难度大

使用反证法来证明。假设 G 是一个从A到 B^{A}的满射。(2 分)

因为集合B至少有两个元素，任取B中 2 个不相等的元素，记为 a 和 b。

那么，定义$h \in B^{A}$如下：

$\mathrm{h(x)} = b$ 若$\big(\mathrm{G(x)}\big)\mathrm{(x)} = a$

$\mathrm{h(x)} = a$ 若$\big(\mathrm{G(x)}\big)\mathrm{(x)} \neq a$ （4 分）

因为 G 是满的，所以存在$\mathrm{x}_0 \in A$，使得 $\mathrm{G(x_0)=h}$。 （2 分）

若 $\mathrm{G(x_0)(x_0)} = a$，则 $\mathrm{h(x_0)} = b \neq a$

若 $\mathrm{G(x_0)(x_0)} \neq a$，则 $\mathrm{h(x_0)} = a$ （2 分）

无论哪种情形，均有 $\mathrm{h(x_0)} \neq \mathrm{G(x_0)(x_0)}$ （2 分）

这与 $\mathrm{G(x_0)=h}$ 矛盾。因此，不存在从A到 B^{A}的满射。

得 分	

五、（本题满分 12 分）

给定一个非空集合A及定义在A上的偏序关系$\preccurlyeq$，试证明：存在某个集合B的某些子集S（*i.e.* $S \subseteq P(B)$），使得偏序集$\langle A, \preccurlyeq\rangle$同构于$\langle S, \subseteq\rangle$.

证明：

证明. 设（A, $\preccurlyeq$）是一个偏序集。

对 $x \in A$，$f(x)=\{ y\in A \mid y\preccurlyeq x\}$是$A$的一个子集。(2 分)

以下证明 $x_1 \preccurlyeq x_2$ iff $f(x_1) \subseteq f(x_2)$ (2 分)

不难证明必要性和充分性 (4+4 分)

得 分	

六、（本题满分 12 分）

对于任意一个十进制数，其各位数字之和与其本身模 9 同余。例如：

$$763 \equiv 7+6+3 \pmod 9$$

但对于十六进制表示则不然，例如：

$$(763)_{16} \equiv 7 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16 + 3 \equiv 1 \neq 7+6+3 \pmod 9$$

(1) 十六进制下，对于哪些大于 1 的正整数k，满足任意数各位相加之和与该数模k同余?

(2) 将你的结论推广到任意b进制数，并给出证明.

解.

a) 若 16=1 (mod k)，则 $16^n = 1$ (mod k)

从而 $a_n 16^n \equiv a_n$ (mod k)

因此，于 k=3, 5, 15 满足要求。 （6 分）

b) 对于 b-1 的不等于 1 的正因子 k，b 进制数的各位相加之和与该数模 k 同余。

（2 分）

证明要点如下：

b=1 (mod k) （2 分）

$a_n b^n \equiv a_n$ (mod k) （2 分）

得 分	

七、（本题满分 12 分）

定义(正规子群)： 群G的子群H称为**正规子群**当且仅当$\forall a \in G. Ha = aH$.

定义（同态映射的核）： 群$\langle G_1,\cdot\rangle$ 同态于群$\langle G_2,\star\rangle$当且仅当存在函数 $f: G_1 \to G_2$使$\forall x, y \in G_1. f(x \cdot y) = f(x) \star f(y)$, 这里 f 称为**同态映射**. 设G_2的单位元为e_2，称G_1的子集 $\ker f = \{\, x \in G_1 \mid f(x) = e_2\}$ 为上述同态映射f的**核**.

(1) 试证明：群G的子群N是正规子群当且仅当$\forall g \in G, n \in N. gng^{-1} \in N$；

(2) 试证明：从G_1到G_2的同态映射 f 的核 $\ker f$是G_1的一个正规子群.

证明：

a).必要性：

由于N是G的正规子群，对于任意的$g \in G, n \in N$，有$gN = Ng$,于是必有$n_1 \in N$使得$gn = n_1 g$，于是$gng^{-1} = n_1 \in N$ 。（3 分）

充分性：

先证明$gN \subseteq Ng$：对于任意的$gn \in gN$，我们有$gng^{-1} \in N$，令$gng^{-1} = n_1$，有$gn = n_1 g \in Ng$，于是$gN \subseteq Ng$。类似可证$Ng \subseteq gN$。（3 分）

证毕。

b). 首先，$\ker f$非空，因为我们知道G_1的单位元e_1必在其中；

其次证明它是G_1的一个子群：对于任意的$a, b \in \ker f$，$f(a) = f(b) = e_2$；

于是$f(a \cdot b^{-1}) = f(a) \star f(b^{-1}) = f(a) \star [f(b)]^{-1} = e_2$，即$a \cdot b^{-1} \in \ker f$。

（3 分）

最后证明它是正规的：对于任意的$a \in \ker f, x \in G_1$，我们有$f(a) = e_2$，故

$$f(x \cdot a \cdot x^{-1}) = f(x) \star f(a) \star f(x^{-1}) = f(x) \star f(a) \star [f(x)]^{-1} = e_2$$

证毕。（3 分）

得 分	

八、（本题满分 12 分）

(1) 设G为某带权无向连通图，假设G包含回路. 试证明：对于G中的任意一个回路，若其中有一条权重**严格**最大的边（即其权重大于该回路上任何一条其他的边），则该边不在任何一个最小生成树中.

(2) 考虑某种“聚类”问题. 假设有n个对象，表示为n个顶点；对象之间有不同的距离，表示为顶点之间边的权重. 我们希望把距离较近的对象归为同一类，而使不同类的对象之间距离较远. 这有时称为“聚类”. 可用计算最小生成树的 Kruskal 算法来做聚类，但只运行其前k步（即选出k条边），而不必一定要将其运行结束. 试问：

① 若只考虑选出的边，此时整个图有几个连通分支（即几个类）？

【注：在第一步开始之前，选出的图是n个孤立点.】

② 对于这种“聚类”，我们可以保证哪些性质？

a).证明：

记这个回路为C，其中权重**严格**最大的边为e。假设e在某个最小生成树T中。考虑从T中删除e，$T\backslash\{e\}$必包含两个连通分支，但在G中回路C内必存在另外一条边e'连接这两个连通分支，于是这两个连通分支加上e'构成一个生成树T'。

$w(e') < w(e)$。于是$w(T') < w(T)$，与T是最小生成树矛盾。(6 分)

b). 解：

（1）每一步加一条边，且不会与已选边构成回路，则必连通两个分支，即分支数减 1。故运行其前k步后，有$n-k$个连通分支。(3 分)

（2) 若第k步所选边权重为c，则所有 Kruskal 算法未选择的边要么是会与已选边构成回路，要么权重不低于c。故每个聚类内的已选边权重不高于c，聚类之间的边的权重不低于c。 (3 分)

得 分	

九、（本题满分 10 分）

所谓命题逻辑公式中的一个“**文字**”（*literal*）是指一个命题变元或者其否定．一个“$\boldsymbol{k-}$**子句**”（*k-clause*）是k个文字的析取，其中每个变元都不重复出现。例如：$P\vee\bar{Q}\vee\bar{R}\vee V$ 是一个$4-$子句，而$\bar{Q}\vee\bar{R}\vee V\vee Q$ 则不是子句（因为 Q 重复出现了）．令$\mathcal{S}$ 为n个k-子句组成的集合，这些子句中的变元取自v个变元的集合，满足$k\le v\le nk$．注意不同子句涉及的变元可以相同也可以不同．先对这v个变元各自独立地、随机等可能地赋值以真或假．现在我们逐一考察$\mathcal{S}$ 中子句的真值．

(1) 最后一个k-子句取值为真的概率是多少?

(2) $\mathcal{S}$中取值为真的子句的个数的期望值是多少?

(3) 用上一步的结论证明：若 $n<2^k$ 则 $\mathcal{S}$ 是**可满足**的（即：存在某种变元赋值方案，使得$\mathcal{S}$中所有子句取值都为真）．

解：a). 这里每个k-子句取值为真的概率是一样的。对于$\mathcal{S}$ 中任一个k-子句中的每个文字，不论是肯定或否定，其为假的概率是$\frac{1}{2}$，且由于每个变元都不重复出现，它们相互独立；整个子句为假的概率就是每个文字均为假的概率，即$\left(\frac{1}{2}\right)^k$，于是该子句为真的概率是$1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$。　　　　　**（3 分）**

b). 令随机变量 $X_i=\begin{cases}0, & 若第i个子句取值为假\\ 1, & 若第i个子句取值为真\end{cases}$，$i=1\cdots n$，则

$$\mathrm{Ex}(X_i)=0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

令t为$\mathcal{S}$ 中取值为真的子句的个数，则$t=\sum_{i=1}^{n}X_i$

$$\mathrm{Ex}(t)=\mathrm{Ex}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ex}(X_i)=n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

注意这里各个X_i无需相互独立。　　　　　**（4 分）**

c). 证明：若 $n<2^k$ 则$\mathcal{S}$ 中取值为真的子句的个数的期望值

$$\mathrm{Ex}(t)=\mathrm{Ex}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)=n-\frac{n}{2^k}>n-1$$

而我们知道$\mathcal{S}$ 中子句的个数只有n个，若$\mathcal{S}$不是可满足的，则其中取值为真的子句最多为$n-1$个，根据期望值的定义$\mathrm{Ex}(t)\le n-1$，矛盾。故$\mathcal{S}$是可满足的。证毕。　　　　　**（3 分）**

草　　稿　　纸

草　　稿　　纸