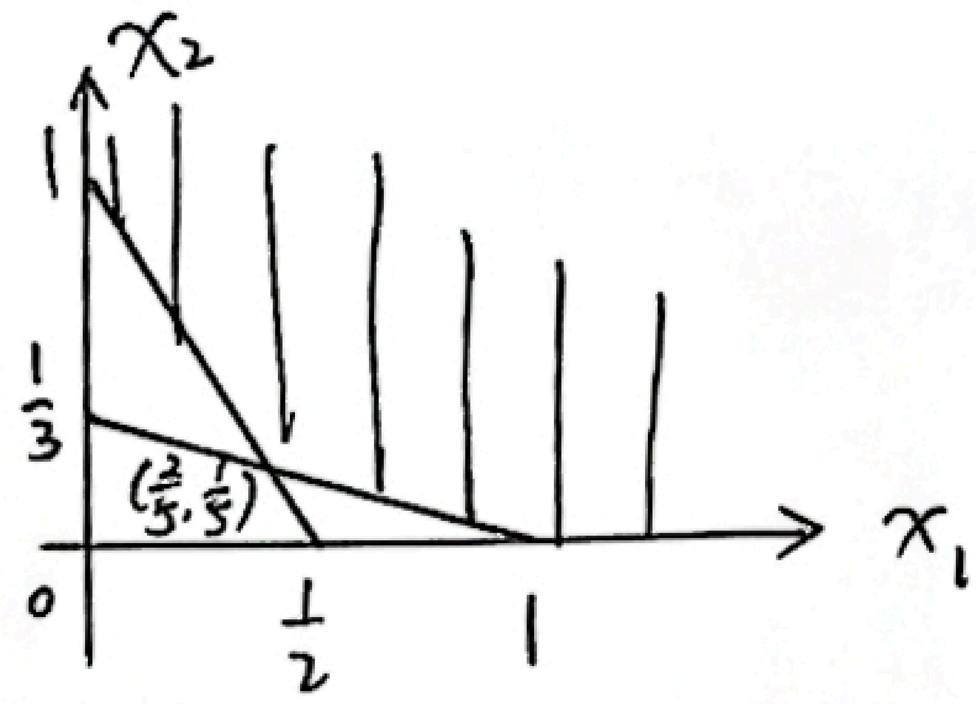
4.1 凸包的边界上为 $(0,1),(1,0),(\frac{2}{5},\frac{1}{5}),$
$(0,\infty),(\infty,0).$



(a)、 $f_0(x_1,x_2)=x_1+x_2$

①. $x_1\in[0,\frac{2}{5}]$ 时. $x_2\in[1-2x_1,+\infty)$.

要求 $f_0(x_1,x_2)$ 的最小值, 即 $x_2=1-2x_1$

$$f_0(x_1,x_2)=x_1+1-2x_1=1-x_1$$

当 $x_1=\frac{2}{5}$ 时, $\min f_0(x_1,x_2)=\frac{3}{5}$.

②. $x_2\in[0,\frac{1}{5}]$ 时, $x_1\in[1-3x_2,+\infty)$.

要求 $f_0(x_1,x_2)$ 的最小值, 即 $x_1=1-3x_2$,

$$f_0(x_1,x_2)=1-3x_2+x_2=1-2x_2.$$

当 $x_2=\frac{1}{5}$ 时, $\min f_0(x_1,x_2)=\frac{3}{5}$.

综上. $x^*=(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$. $\min f_0(x_1,x_2)=\frac{3}{5}$.

(b). 假设存在 (x_1,x_2) 使得 $f_0(x_1,x_2)$ 最小,
则必存在 (x_1+1,x_2+1) 得得 $f_0(x_1+1,x_2+1)<f_0(x_1,x_2)$
$\therefore$ $f_0(x_1,x_2)$ 不存在边界.

(c). $f_0(x_1,x_2)=x_1$

$\because$ $x_1\geq 0$.
$\therefore$ $f_0(x_1,x_2)\geq 0$.
$\therefore \min f_0(x_1,x_2)=0$.
当 $x_1=0$ 时, $x_2\geq 0$
$\therefore$ $X_{opt}=\{(0,x_2)\mid x_2\geq 1\}$.

(d). $f_0(x_1,x_2)=\max\{x_1,x_2\}$.

①. $x_1\geq x_2$ 时. $x_1=x_2$ 与 $2x_1+x_2=1$ 的交点为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$\therefore$ $f_0(x_1,x_2)=x_1$
而此时 $x_1\in[\frac{1}{3},+\infty)$.
因此 $x^*=(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. $\min f_0(x_1,x_2)=\frac{1}{3}$

②. $x_1 \le x_2$ 时.

$f_0(x_1,x_2) = x_2$.

而此时 $x_2 \in [\frac{1}{3}, +\infty)$

因此 $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\min f_0(x_1, x_2) = \frac{1}{3}$

综上. $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\min f_0(x_1, x_2) = \frac{1}{3}$.

(e). $f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2$

①. 当 $x_1 \in [0, \frac{2}{5}]$ 时, $x_2 \in [1-2x_1, +\infty)$.

要求 $f_0(x_1, x_2)$ 的最小值, $x_2 = 1-2x_1$.

$f_0(x_1,x_2) = x_1^2 + 9(1-2x_1)^2$ 求导得. $74x_1 - 36 = 0$. $x_1 = \frac{36}{74} > \frac{2}{5}$ (舍).

~~当 $x_1 = \frac{2}{5}$ 时. $\min f_0(x_1, x_2) = \frac{13}{25}$~~ 当 $x_1 = \frac{2}{5}$ 时. $\min f_0(x_1,x_2) = \frac{13}{25}$.

②. 当 $x_2 \in [0, \frac{1}{3}]$ 时. $x_1 \in [1-3x_2, +\infty)$.

要求 $f_0(x_1,x_2)$ 的最小值, $x_1 = 1-3x_2$.

$f_0(x_1,x_2) = (1-3x_2)^2 + 9x_2^2 = 18x_2^2 - 6x_2 + 1$.

求导得 $36x_2 - 6 = 0$.

$x_2 = \frac{1}{6}$

$x_1 = 1-3x_2 = \frac{1}{2}$.

此时 $\min f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}$

综上所述. $\frac{13}{25} > \frac{1}{2}$. 即选②.为最优.

$x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. $\min f_0(x_1,x_2) = \frac{1}{2}$.

4.3. 欲证 $x^* = (1; \frac{1}{2}; -1)$ 为最优解，等同于证明

$$\nabla f_0(x)^T (y-x) \geq 0 \quad \text{对于所有} \ y \in X$$

$$\nabla f_0(x) = x^T P + q^T$$

将 x^* 代入可得 $\nabla f(x^*) = (-1; 0; 2)$.

因此，最优化的条件为 $-(y_1-1) + 2(y_3+1) \geq 0$.

$\because y_1, y_2, y_3 \in [-1, 1]$.

$\therefore \nabla f(x^*)(y-x) \geq 0$ 必然成立，证毕.

4.9. 设计变量 $y = Ax$，则此题中问题可以改写为

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad c^T A^{-1} y \\ &\text{subject to} \quad y \leq b. \end{aligned}$$

若 $A^{-T} c \leq 0$，则最优解为 $y = b$，则 $p^* = c^T A^{-1} b$，

反之，则该问题无下界.

4.12. 题中所述可以表现为以下线性优化问题：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad C = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ &\text{subject to} \quad b_i + \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \\ &\qquad\qquad\quad l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}. \end{aligned}$$

4.13.

题中所述问题等同于

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad c^T x\\ &\text{subject to} \quad \bar{A}x + V|x| \preceq b.\end{aligned}$$

其中 $|x| = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

上述问题反过来也等同于

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad c^T x\\ &\text{subject to} \quad \bar{A}x + Vy \preceq b\\ &\qquad\qquad\quad -y \preceq x \preceq y\end{aligned}$$

其中 $x \in R^n$, $y \in R^n$.

4.19.

(a). 若题中问题为拟凸优化问题，

则可以等价为 $f_0(x) \leq \alpha$. 为凸.

也即 $\|Ax-b\|_1 - \alpha(c^T x + d) \leq 0$ 为凸.

显然，$\|Ax-b\|_1 - \alpha(c^T x + d) \leq 0$ 为一个凸约束.

(b). 由于 $\|x\|_\infty \leq 1$, $d > \|c\|_1$，可以推导出 $c^T x + d > 0$.

定义 $y = \dfrac{x}{c^T x + d}$，$t = \dfrac{1}{c^T x + d}$.

则在凸问题中 y 和 t 是可行的. 其中

$$\|Ay - bt\|_1 = \frac{\|Ax - b\|_1}{c^T x + d}.$$

相反，假设 ~~y, t~~ 对于凸问题 y 和 t 是可行的。

由于当 $t = 0$ 时，$y = 0$，这与 $c^T y + dt = 1$ 矛盾，因此，$t > 0$.

定义 $x = \dfrac{y}{t}$。

由于 $\|y\|_\infty \leq t$，$\therefore \|x\|_\infty \leq 1$，且 $c^T x + d = \dfrac{1}{t}$. 因此，

$$\frac{\|Ax - b\|_1}{c^T x + d} = \|Ay - bt\|_1.$$

4.23. 题中所述的问题可以写为以下二次约束二次规划问题:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} z_i^2 \\
\text{subject to} \quad & a_i^T x - b_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, m. \\
& y_i^2 \le z_i, \quad i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

4.33.

(a). 题中所述问题等同于几何规划问题:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & t \\
\text{subject to} \quad & \frac{p(x)}{t} \le 1, \quad \frac{q(x)}{t} \le 1.
\end{aligned}$$

对 $x_i = e^{y_i}$ 进行对数变换.

(b). 题中所述问题等同于.

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \exp(t_1) + \exp(t_2). \\
\text{subject to} \quad & p(x) \le t_1, \quad q(x) \le t_2.
\end{aligned}$$

对 $x_i = e^{y_i}$ 进行对数变换.

(c). 题中所述问题等同于

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & t \\
\text{subject to} \quad & p(x) \le t(r(x) - q(x)),
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & t \\
\text{subject to} \quad & \frac{(p(x)/t + q(x)/t)}{r(x)} \le 1.
\end{aligned}$$

这也是一个几何规划问题.