考试科目名称 离 散 数 学 （A 卷评分标准）

2020—2021 学年第 二 学期 教师 考试方式 闭 卷

系（专业） 计算机科学与技术系 年级 一 班级

学号 姓名 成绩

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得 分									

得分	

一、（本题满分 12 分）

设P, Q, R为命题，命题联结词IF ⋯ THEN ⋯ ELSE ⋯的真值表定义如下. 证明：

(1) IF A THEN B ELSE $C \Leftrightarrow$ IF $\neg A$ THEN C ELSE B；

(2) 命题联结词$\neg$、$\wedge$、$\vee$均可通过命题联结词IF ⋯ THEN ⋯ ELSE ⋯等效表达.

P	Q	R	IF P THEN Q ELSE R
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

【参考解答与评分标准】

(1) 证明：根据真值表，IF P THEN Q ELSE $R \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$【3 分】，因此IF A THEN B ELSE $C \Leftrightarrow$ IF $\neg A$ THEN C ELSE $B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (\neg A \to C)$.【3 分，直接证明相等也可得 6 分】□ 注：用真值表证明也可给 6 分

(2) 证明：将每个基本联结词构成的基本命题表达式写为IF ⋯ THEN ⋯ ELSE ⋯的命题形式即可. 如：$\neg P \Leftrightarrow$ IF P THEN $\boldsymbol{F}$ ELSE $\boldsymbol{T}$【2 分】；$P \wedge Q \Leftrightarrow$ IF P THEN Q ELSE P【2 分】；$P \vee Q \Leftrightarrow$ IF P THEN P ELSE Q【2 分】；注：用真值表证明也可给 6 分

得分	

二、（本题满分 10 分）

证明：对集合A,B若$\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$，则$A \in B$.　（注：$\mathcal{P}(A)$，$\mathcal{P}(B)$分别表示集合$A,B$的幂集）

【参考解答与评分标准】

$$\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B) \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq B \Longrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(A) \to X \in B \Longrightarrow obviously\ A \in \mathcal{P}(A) \to A \in B$$

【3 分】　【3 分】　【2 分】　【2 分】

其它证明方式也可给分，注意若混淆“∈”和“⊆”，全题最多给 3 分。

得分	

三、（本题满分 10 分）

设G为群，$x, y \in G$，$x \neq e$，y为二阶元；若$yxy^{-1} = x^2$，求x的阶.

【参考解答与评分标准】

$|x| = 3$ 【3 分】若无过程仅给 3 分；

证明： 首先，由于 y 是二阶元，所以有 $y^{-1} = y$。同时：

$$
\begin{aligned}
& yxy^{-1} = x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & yx = x^2 y && \text{(右乘 } y\text{)} \\
\Longleftrightarrow\ & x = y^{-1}x^2 y && \text{(左乘 } y^{-1}\text{)} \\
\Longrightarrow\ & x^2 = (y^{-1}x^2 y)(y^{-1}x^2 y) && \text{(两边取平方)} \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 = y^{-1}x^4 y && (yy^{-1} = e) \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 = yx^4 y^{-1} && (y = y^{-1})
\end{aligned}
$$

从而有 $yx^4y^{-1} = x^2 = yxy^{-1}$。由消去律知 $x^3 = e$。从而 $|x| \mid 3$。因为 x 不是单位元，所以 $|x| \neq 1$，因此只能有 $|x| = 3$。 □

【证明过程 7 分，不一定每一步都要写，大体思路正确即可给 7 分；从$x^3 = e$直接得到$|x| = 3$酌情扣 1—2 分。】

得分	

四、（本题满分 10 分）

证明：不大于自然数n且与n互素的自然数的计数为：$\varphi(n)=n\cdot\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

（注：$p|n$指素数p可被n整除，即$\{p\}$为n的全体素因子．提示：可考虑用容斥原理技术）

【参考解答与评分标准】

设$n(n\geq 2)$为自然数，$p_1,p_2,\cdots,p_m$是n的全部质因数，r是任一不大于n的自然数。r与n互质当且近当r不能被$p_1,p_2,\cdots,p_m$中的任一个整除。因此，$\varphi(n)$等于由 1 到n的n个整数中不能被$p_1,p_2,\cdots,p_m$中的任一个整除的整数个数。由容斥原理可直接得到

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m}\left[\frac{n}{\mathrm{lcm}(p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_k})}\right]\\&=n+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m}\left[\frac{n}{p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_k}}\right]\\&=n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_m}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-1}p_m}\right)+\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\end{aligned}$$

【只要能说明用容斥原理并写出容斥原理基本交替式给 4 分，述文字说明 2 分，过程 4 分】

得分	

五、（本题满分 12 分）

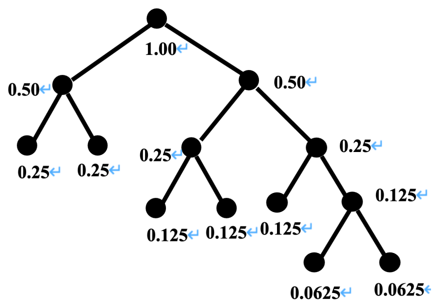
(1) 请给出在通信中以对应频率出现的下列字符的最优二元前缀编码树（即 Huffman 树），给出各字符对应的最优二元前缀编码码字（例如 01011 为一个码字），并求出按所求得的码字传输 100 个按给定频率出现的字符所需要的总比特数（二进制位数）；

$$a(25\%),b(25\%),c(12.5\%),d(12.5\%),e(12.5\%),f(6.25\%),g(6.25\%)$$

(2) 若某 Huffman 树共有 215 个顶点，则其最优二元前缀编码共应包含多少个不同的码字？

【参考解答与评分标准】

(1) 按照 Huffman 编码算法构造最优二叉树如下图所示【5 分】。



传输 100 个字符的总码长为：100*(0.25*2+0.25*2+0.125*3+0.125*3+0.125*3+0.0625*4+0.0625*4) = **262.5**（bits）

【2 分】只要数对上述树即为正确【直接给 7 分】。

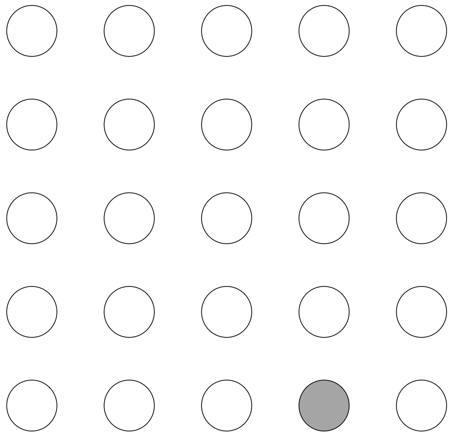
(2) 根据 Huffman 树的构造算法，Huffman 树必为满二叉树（即除叶顶点外无 1 度分支点）【2 分】，而每个码字必被编码在叶顶点上，因此所求即为此 Huffman 树的也顶点计数。设此 Huffman 树中的叶顶点数、分支顶点数分别为n_1和n_2，则有$n_1=n_2+1$【2 分】。因此叶顶点数为 （215 + 1）/ 2 = 108 个【1 分】，因此共有 **108** 种不同的码字。注：只要数对即可给 5 分。

得分	

六、 （本题满分 12 分）

(1) 证明：一个非平凡图是二部图当且仅当其无奇圈（即长度为奇数的初级回路）.

(2) 下图中是否存在仅通过水平、垂直的笔画（不可斜向行走）不重复地经过所有白色圆且不经过灰色圆的一笔画法？若存在请给出具体方案，若不存在请证明原因.



第六（2）题图

【参考解答与评分标准】

(1)

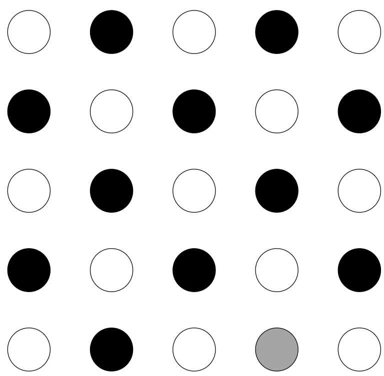
证明：必要性是显然的，因为如果存在奇圈就不可能完成上述染色。充分性：不妨设图是连通图，否则对每个连通分支分别考虑即可。设 u 是图中任意一点，设 $S=\{v\in V|d(u,v)\text{为奇数}\}, T=\{v\in V|d(u,v)\text{为偶数}\}$，其中 $d(u,v)$ 是从 u 到 v 的最短路径的长度。现在证明S和T即为该二分图的划分，即证明不存在这样的边：它的端点都在 S 内或者 T 内。假设存在这样的边 e，设其端点为 m,n，那么图中就存在这样一个圈：$u->...->m->n->...->u$,并且 u 到 m 和 n 到 u 的距离同为奇数或者偶数，因此这是一个奇圈，从而矛盾。证毕。

【基本思路对即可给 6 分，一般用反证法，直接证明能说清楚也可以】

（2）

不存在所要求的一笔画画法【2 分】。

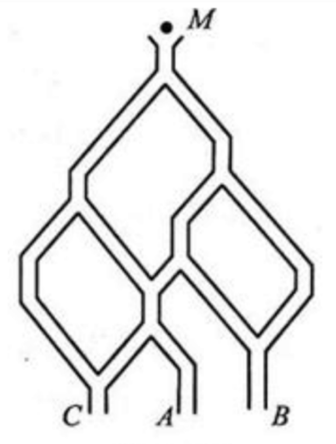
证明：建立二部图模型【1 分】：根据要求的一笔画方式，连线必将以或纵或横的方式穿过每个白点，因此每个白点对应的可能经过的邻接点着色为黑色，将顶点按照着色方式分为V_1（白色），V_2（黑色）两个集合，连线可以经过两个圆圈则对应两个点（分属V_1与V_2）之间有边。下图为一种着色方式【1 分】。如存在一笔画的方案，则路径中必须黑白顶点交替，这样要么黑点数和白点数一样，要么黑点数仅比白点数少 1【1 分】，但由于灰色圆为孤立顶点（不在二部图中），因此二部图中共有 13 个白点和 11 和黑点【1 分】，不满足上述条件，因此不存在所要求的一笔画方案。



得分	

七、（本题满分 10 分）

教育超市举行投球游戏促销活动，如右图所示：一个小球从M处投入，通过管道必然自上而下落在A或B或C三处之一；若小球落在A处，则获得 50%折扣率，即只要付款实际货品价格的 50%；若落B处，付款 70%（折扣率为 70%）；落C处付款 90%（折扣率为 90%）．假设小球从每个交叉口落入左右两个管道的可能性均等，同学甲购物后投球一次，求甲预期获得的购物折扣率。



第七题图

【参考解答与评分标准】

首先设置获得（$k_1=50\%$、$k_2=70\%$、$k_3=90\%$）折扣率的离散随机变量为K【2 分】，则根据图易见$p(k_1)=\frac{3}{16}, p(k_2)=\frac{3}{8}, p(k_3)=\frac{7}{16}$，【4 分】 因此可以求出：

$$E(K)=\frac{3}{16}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{16}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{4}$$

【4 分，答案正确即可给 10 分】

得分	

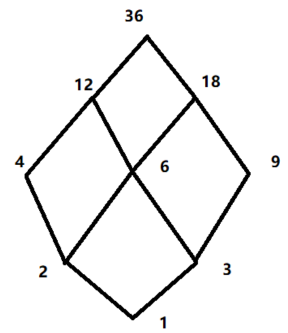
八、（本题满分 12 分）

给定由集合$S=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$及整除关系“$|$”构成的偏序集$(S,|)$，

(1) 画出$(S,|)$的哈斯图，并判定集合$A=\{2,3,4,6\}$的上确界、下确界是否存在，如存在请给出；

(2) 判定该偏序集$(S,|)$是否构成格；若是格，是否构成分配格、有补格；

(3) 若$(S,|)$为格，请判定$(\{1,2,4,36\},|)$和$(\{3,6,9,36\},|)$是否为$(S,|)$的子格.



【参考解答与评分标准】

(1) 如图右，集合 A 的上下确界均存在。

$\sup(A)=12$, $\inf(A)=1$【图 2 分，上下确界各 1 分】

(2) 偏序集$(S,|)$构成偏序格，（可通过格公理说明，也可说明每两个因子都存在上下确界，无需严格证明）【2 分】；不是有补格：如 2 没有补元【1 分】；是分配格，因为上下确界运算（lcm，gcd）相互满足分配律，或者说明不含有与M_3与N_5同构的子格均可。【1 分，或者说明如果S为有补格，则其为布尔代数，但不符合布尔代数的基数特性，因此非有补格亦可】

(3) $(\{1,2,4,36\},|)\leq(S,|)$【2 分】，但$(\{3,6,9,36\},|)$并非$(S,|)$的子格，因为$6\vee 9=18\notin\{3,6,9,36\}$【2 分】

得分	

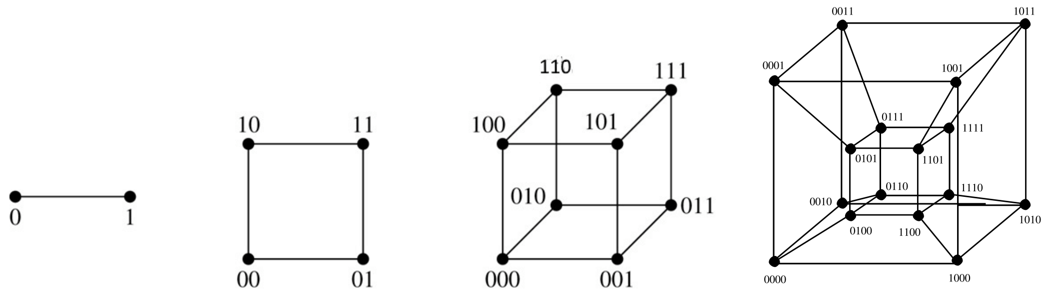
九、 （本题满分 12 分）

n维超立方体图（Q_n）的顶点是长度为n的$0-1$序列，两个顶点之间有边当且仅当$0-1$序列之间恰好只有一位不同.

如下图所示.

(1) 具有$k(k \geq 1)$个原子的布尔代数B_k的 Hasse 图若视为无向图是否与超立方体图Q_k同构?

(2) 证明：$Q_k(k \geq 1)$的点连通度等于k.



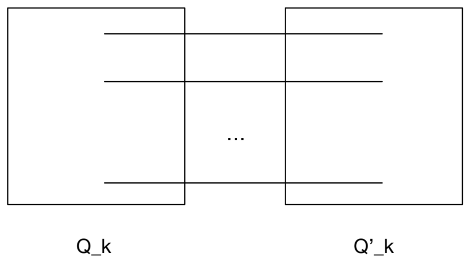
Q_1 Q_2 Q_3 Q_4

第九题图

【参考解答与评分标准】

(1) $B_k \simeq Q_k$【3 分】

(2) 证明：证法一：对维度k进行归纳【2 分】:



Basis: 对$k=1$，$Q_1 = L_2$,显然$\kappa(Q_1)=1$;

I.H.:对$k \geq 2$，假设$\kappa(Q_k)=k$;

I.S.: 对Q_{k+1}，因为$\delta(Q_{k+1})=k+1$，故显然有$\kappa(Q_{k+1}) \leq k+1$(Whitney)【2 分】，根据超立方体图的结构，Q_{k+1}即为 2 个Q_k中的顶点通过一个完美匹配M中的边相邻【1 分】，如右图所示. 假设S为Q_{k+1}的一个点割集，根据超立方体图的结构，假设$V(Q_{k+1})-S$至少在Q_k和Q'_k中各留有一个顶点（否则$|S| \geq 2^{k+1} \geq k+1$），那么：

Case 1: 若$Q_k - S$与$Q'_k - S$均连通：除非S中包含M中各边的至少一个端点，则在$Q_k - S$与$Q'_k - S$之间必有一条边使得$Q_{k+1}-S$连通，那么$|S| \geq |M| = 2^{k+1} \geq k+1\ (k \geq 1)$;【2 分】

Case 2: 若$Q_k - S$与$Q'_k - S$中至少有一个不连通，不妨设$Q_k - S$非连通，由归纳假设，$|S \cap V(Q_k)| \geq k$;如若$|S \cap Q'_k| = 0$，那么$Q_{k+1}-S$将包含所有Q'_k，因此连通，此时有$|S \cap Q'_k| \geq 1$，因此$|S| \geq k+1$.【2 分】

综合以上两种情况，$\kappa(Q_{k+1}) \geq k+1$，又由 Whitney 定理$\kappa(Q_{k+1}) \leq k+1$，因此$\kappa(Q_{k+1}) = k+1$，由归纳法得证.

证法二：直接证明法（证明梗概）：只需证明对于$|S| \leq k$，$Q_{k+1}-S$均连通即可【2 分】。也是分两种情形：1）S是其中一个Q_k的割集【证法与上述类似，2 分】 2）证明两个$Q_k - S$都连通。注意Q_{k+1}中两个Q_k之间的边有2^k条边（$k \geq 1$）。【2 分】