中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期考试试卷

考试科目：数理逻辑　　　　　　　　得分：________

学生所在系：少年班学院　姓名：徐亦昶　学号：PB20000156

本试卷与答题纸同时上交方为有效

一（24）判断题（在题号前的括号里打√或×）

(√) 1. 谓词演算 K 的五条公理模式是相互独立的。

(×) 2. 若Γ 极大相容(即完备无矛盾)且公式 $p \notin \Gamma$，则$\Gamma \cup \{p\}$不相容。

(×) 3. 任何命题公式都有唯一的合取范式和析取范式。

(√) 4. 若$\Gamma \vDash p$，则每一个满足Γ 的一阶解释也满足 p。

(×) 5. $\Gamma \vdash p$ 是可判断定的。

√(×) 6. 不含否定词的公式都是可满足公式。

(√) 7. $(\neg r \wedge q \wedge (p \to (q \to r))) \to \neg p$ 是永真式。

(×) 8. 项 $f(a, x_1)$对公式$\forall x_1 (R_1(b, x_1) \to R_2(x_1, x_2))$中的 x_2 自由。

二（8）简要回答问题（不超过 200 字）：在应用逻辑系统中“假设”（非逻辑公理）有什么作用，请举例说明。

三 （16）设 $p, q \in L(X)$。分别用直接证明和简化证明的方法，证明下列 L 的内定理：

$(r\to r)\to p)$

$\to r)$

$(p\to(r\to r))$.

$\vdash p\to((p\to q)\to q)$ $\quad p\to((p\to q)\to p)$.

$p\to(q\to p)$.

$(p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q))$

四（16）在某次研讨会的休息时间，3 名与会者根据王教授的口音分别作出如下判断：(1) 甲说：王教授不是苏州人，是上海人；(2) 乙说：王教授不是上海人，是苏州人；(3) 丙说：王教授既不是上海人，也不是杭州人。王教授听后说：你们三人中有一个全说对了，有一人全说错了，还有一个人判断对一半。试根据以上情况判断王教授是哪里人？

$p,\ q$

$\neg p\wedge q\vee\neg q\wedge p$.

1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1

五（12）下列谓词公式是否为有效式？为什么？

$$\exists x_2\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\to\forall x_1\exists x_2R_1^2(x_1,x_2)$$

$\neg\forall x_1\neg\forall$.

$\neg x_1\wedge x_2\wedge(x_2\wedge\neg x_3\vee\neg x_2\wedge x_3)$

六（12）在谓词演算 K 中证明 $\{\forall x(F(x)\vee G(x))\}\vdash\forall xF(x)\vee\exists xG(x)$。

$\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3$

七（12）求与下述公式逻辑等值的前束合取范式：

$\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3$ $\quad\perp$

$$(\forall x_1)(\mathrm{P}(x_1,x_2)\vee(\forall x_2)\mathrm{R}(x_2,x_3))\to(\forall x_3)\mathrm{Q}(x_1,x_3)$$

$\neg\forall x\neg G$,

$\neg F\to G$.

$\neg\forall xF(x)\to\exists xG(x)$

$\forall x(\neg F\to G)$.

$\neg F\to G$ $\quad\neg F$

$\neg G$ $\quad\neg G\to F$.

F $\quad\forall xF$

$\neg$.

一、√ × × ~~√~~ × ~~×~~√ √ ×　　　21　　　　PB20001156

二、可以利用假设，人为地添加一些条件，使命题更容易证明.　　　6
比如在证明双重否定律时，利用反证律可得到$\{\neg\neg p, \neg p\}$的假定（多出一个$\neg p$），利用多出的$\neg p$即可构造原有条件推不出的东西，快速地证明命题. 又如本次考试的第三题，利用演绎定理可以得到$\{p, p\to q\}$的假定，用它来推待证结论，显然比从$\varnothing$推出$p\to((p\to q)\to q)$容易许多.

三、直接证明:　　　16

(1) $(p\to q)\to(((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to q))$　(L1)

(2) $((p\to q)\to(((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to q)))\to(((p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q)))\to((p\to q)\to(p\to q)))$.　(L2)

(3) $((p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q)))\to((p\to q)\to(p\to q))$　(1), (2), MP

(4) $(p\to q)\to((p\to q)\to(p\to q))$　~~(3), (4), MP~~　(L1)

(5) $(p\to q)\to(p\to q)$　(3), (4), MP.

~~(6) $((p\to q)\to(p\to q))\to(p\to((p\to q)\to(p\to q)))$　(L1)~~

~~(7) $p\to((p\to q)\to(p\to q))$.　(5), (6), MP~~

~~(8) $(p\to((p\to q)\to(p\to q)))\to$~~

(6) $((p\to q)\to(p\to q))\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))$　(L2)

(7) $((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)$　(5), (6), MP

(8) $(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))\to(p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))$　(L1)

(9) $p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q))$　(7), (8), MP

(10) $(p\to(((p\to q)\to p)\to((p\to q)\to q)))\to((p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q)))$

(11) $(p\to((p\to q)\to p))\to(p\to((p\to q)\to q))$　(9), (10), MP

(12) $p\to((p\to q)\to p)$　(L1)

(13) $p\to((p\to q)\to q)$　(11), (12), MP.

简化证明：

~~先证~~

根据演绎定理，只用证 $\{p, p\to q\}\vdash q$，下面是所需要的一个证明．

(1) p （假定）

(2) $p\to q$ （假定）

(3) q (1), (2), MP.

16

四．用 x_1, x_2, x_3 分别表示王教授是苏州人、上海人、杭州人，于是题中的论证可形式化为

$$\{(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge(\neg\neg x_2\wedge\neg x_3\vee\neg x_2\wedge\neg\neg x_3))\vee$$

$$(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg\neg x_3\wedge(\neg\neg x_2\wedge x_1\vee\neg x_2\wedge\neg x_1))\vee$$

$$(\neg x_2\wedge x_1\wedge\neg\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge(\neg\neg x_2\wedge\neg x_3\vee\neg x_2\wedge\neg\neg x_3))\vee$$

$$(\neg x_2\wedge x_1\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg\neg x_3\wedge(\neg\neg x_1\wedge x_2\vee\neg x_1\wedge\neg x_2))\vee$$

$$\cancel{(\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge\neg\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge(\neg\neg x_2\wedge x_1\vee\neg x_2\wedge\neg x_3))}$$

$$(\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge\neg\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge(\neg\neg x_2\wedge x_1\vee\neg x_2\wedge\neg x_1))\vee$$

$$(\neg x_2\wedge\neg x_3\wedge\neg\neg x_2\wedge\neg x_1\wedge(\neg\neg x_1\wedge x_2\vee\neg x_1\wedge\neg x_2))\}=\{P\}.$$

解方程使~~P=0~~ $P=1$

P 可化简为 $(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee 0\vee(\neg x_2\wedge x_1\wedge x_3)\vee 0\vee 0\vee 0.$

~~由 P=1 可得 (x1, x2, x3~~ $=(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3)\vee(\neg x_2\wedge x_1\wedge x_3)$

~~解~~ 解 $\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3=1$ 得 $x_1=0, x_2=1, x_3=0$.

解 $\neg x_2\wedge x_1\wedge x_3=1$ 得 $x_1=1, x_2=0, x_3=1$.

又由实际情况知 x_1、x_2、x_3 至多1个为1

$\therefore (x_1, x_2, x_3)=(0,1,0)$.

将它代入原方程验证知符合要求．

$\therefore$ 王教授是上海人．

五、是有效式. 先证明:

$\{\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)\} \vdash \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$.

(1) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$ (假定)

~~(2) $R_1^2(x_1,x_2)$ (K~~

(2) $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to R_1^2(x_1,x_2)$ (K4)

(3) $R_1^2(x_1,x_2)$ (1),(2),MP

(4) $R_1^2(x_1,x_2) \to \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ ($\exists_1$规则)

(5) $\exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (3),(4),MP

(6) $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ (5),Gen

12

由于Gen变元 x_1 不在 $\forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$ 自由出现, ~~由∃~~ 也不在 $\forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$ 自由出现, 由 $\exists_2$ 规则, 有

$\{\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)\} \vdash \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$, 且除了 x_2 不增加其他Gen变元.

由于 x_1, x_2 均不在 $\exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2)$ 自由出现, 由演绎定理, 有: $\vdash \exists x_2 \forall x_1 R_1^2(x_1,x_2) \to \forall x_1 \exists x_2 R_1^2(x_1,x_2)$.

六、由 $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$, 可将原命题等价转化成

$\{\forall x(\neg F(x) \to G(x))\} \vdash (\neg \forall x F(x) \to \exists x G(x))$.

又 $\exists x G(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg G(x)$

可继续化成

$\{\forall x(\neg F(x) \to G(x))\} \vdash (\neg \forall x F(x) \to \neg \forall x \neg G(x))$.

由演绎定理, 只要证 $\{\forall x(\neg F(x) \to G(x)), \neg \forall x F(x)\} \vdash \neg \forall x \neg G(x)$.

我们保证证明过程中只用到 x 作为Gen变元, 而它在 $\neg \forall x F(x)$ 中不自由出现.

由归谬律, 只要证 $\{\forall x(\neg F(x) \to G(x)), \neg \forall x F(x), \forall x \neg G(x)\} \vdash \forall x F(x)$,

$\{\forall x(\neg F(x) \to G(x)), \neg \forall x F(x), \forall x \neg G(x)\} \vdash \neg \forall x F(x)$,

从而完成证明.

接下来的证明将包含上面两式的证明:

(2) $\forall x \neg G(x)$ （新假定）

(3) $\cancel{\neg G(x)}$ $\forall x \neg G(x) \to \neg G(x)$ (K4)

(4) $\neg G(x)$ (2), (3), MP

(5) $\forall x(\neg F(x) \to G(x))$ （假定）

(6) $\forall x(\neg F(x) \to G(x)) \to (\neg F(x) \to G(x))$ (K4)

(7) $\neg F(x) \to G(x)$ (5), (6), MP

(8) $(\neg F(x) \to G(x)) \to (\neg G(x) \to \neg\neg F(x))$ （换位律）

(9) $\neg G(x) \to \neg\neg F(x)$ (7), (8), MP

(10) $\neg\neg F(x) \to F(x)$ （双重否定律）

(11) $\cancel{F(x)}$ $\neg G(x) \to F(x)$ (9), (10), HS

(12) $F(x)$ (4), (11), MP

(13) $\forall x F(x)$ (12), Gen

至此完成证明.

七、适当改变原公式中的约束变元得到等价的q_1:（利用 $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \to q)$）

9.

q_1: $\forall x_6(\neg P(x_6, x_2) \to \forall x_4 R(x_4, x_3)) \to \forall x_5 Q(x_1, x_5)$.

由q_1出发，反复利用课本77页命题 2-2°与2-3°，得到以下的等价公式：

q_2: $\forall x_5(\forall x_6(\neg P(x_6, x_2) \to \forall x_4 R(x_4, x_3)) \to Q(x_1, x_5))$

q_3: $\forall x_5 \exists x_6((\neg P(x_6, x_2) \to \forall x_4 R(x_4, x_3)) \to Q(x_1, x_5))$

q_4: $\forall x_5 \exists x_6(\forall x_4(\neg P(x_6, x_2) \to R(x_4, x_3)) \to Q(x_1, x_5))$

q_5: $\forall x_5 \exists x_6 \exists x_4((\neg P(x_6, x_2) \to R(x_4, x_3)) \to Q(x_1, x_5))$.

q_5即为所求.