第五次作业参考答案

By 梁文艺 朱映

---

1. **分析下列事实："早饭我吃面包或蛋糕；如果我吃面包，那么我还要喝牛奶；如果我吃蛋糕，那么我还要喝咖啡；但我没有喝咖啡，所以早饭我吃的是牛奶和面包。"写出前提和有效结论并证明之。**
   解：设 P：早饭吃面包，Q：早饭吃蛋糕，R：喝牛奶，S：喝咖啡。
   前提：$P \vee Q, P \to R, Q \to S, \neg S$
   结论：$P \wedge R$
   证明：

$$
\begin{array}{lr}
(1) Q \to S & \text{前提引入} \\
(2) \neg S & \text{前提引入} \\
\text{前提引入} & \\
(3) \neg Q & (1)，(2)\ \text{拒取式} \\
(4) P \vee Q & \text{前提引入} \\
(5) P & (3)，(4)\ \text{析取三段论} \\
(6) P \to R & \text{前提引入} \\
(7) R & (5)，(6)\ \text{假言推理} \\
(7) P \wedge R & (5)，(7)\ \text{合取引入}
\end{array}
$$

---

1. **设前提条件 T={P→(Q→S)，¬R∨P，Q}，公式 G=R→S，利用附加前提证明法证明 T╞ G。**
   解：由题意得，利用附加前提证明法，只需证明 $T \cup R \vDash S$
   前提：$T \cup \{R\} = \{P \to (Q \to S), \neg R \vee P, Q, R\}$
   结论：S
   证明：

$$
\begin{array}{lr}
(1) R & \text{附加前提引入} \\
(2) \neg\neg R & (1)\ \text{置换} \\
(3) \neg R \vee P & \text{前提引入} \\
(4) P & (2)，(3)\ \text{析取三段论} \\
(5) P \to (Q \to S) & \text{前提引入} \\
(6) Q \to S & (4)，(5)\ \text{假言推理} \\
(7) Q & \text{前提引入} \\
(8) S & (6)，(7)\ \text{假言推理}
\end{array}
$$

$T \cup R \vDash S$ 得证，由附加前提证明法可知，$T \vDash G$ 得证。

1. **利用归谬法证明下面论述的有效性：在意甲比赛中，假如有四只球队，其比赛情况如下：如果国际米兰夺冠，则 AC 米兰或尤文图斯获亚军；若尤文图斯获亚军，国际米兰不能获得冠军，若拉齐奥获得亚军，则 AC 米兰不能获得亚军；最后，国际米兰夺冠。所以拉齐奥不能获得亚军。**

   解：设

   P_1：国际米兰夺冠，P_2：国际米兰是亚军；

   Q_1：AC米兰夺冠，Q_2：AC米兰是亚军；

   R_1：尤文图斯夺冠，R_2：尤文图斯是亚军；

   S_1：拉齐奥夺冠，S_2：拉齐奥是亚军；

   前提：$T = T_1 \cup T_2$

   题给前提：$T_1 = \{P_1 \to (Q_2 \vee R_2), R_2 \to \neg P_1, S_2 \to \neg Q_2, P_1\}$

   常识前提：$T_2 = \{S_2 \to (\neg Q_2 \wedge R_2)\}$

   结论：$\neg S_2$

   用归谬法证明 $T \vDash \neg Q_2$ 只需证明 $T \cup \{\neg\neg S_2\} \vDash 矛盾式$

   证明：

$$
\begin{array}{lr}
(1) P_1 & 题给前提引入 \\
(2) P_1 \to (Q_2 \vee R_2) & 题给前提引入 \\
(3) Q_2 \vee R_2 & (1)，(2)\ 假言推理 \\
(4) \neg\neg S_2 & 假设前提引入 \\
(5) S_2 & (4)\ 置换 \\
(6) S_2 \to (\neg Q_2 \wedge R_2) & 常识前提引入 \\
(7) \neg Q_2 \wedge R_2 & (5)，(6)\ 假言推理 \\
(8) \neg(Q_2 \vee R_2) & (7)\ 置换 \\
(9) (Q_2 \vee R_2) \wedge \neg(Q_2 \vee R_2) & (3)，(8)\ 合取引入
\end{array}
$$

   利用归谬法得证；

   也可以只用题给前提推出:

   用归谬法证明 $T_1 \vDash \neg Q_2$ 只需证明 $T_1 \cup \{\neg\neg S_2\} \vDash 矛盾式$

$$
\begin{array}{lr}
(1) P_1 & 题给前提引入 \\
(2) P_1 \to (Q_2 \vee R_2) & 题给前提引入 \\
(3) Q_2 \vee R_2 & (1)，(2)\ 假言推理 \\
(4) \neg\neg S_2 & 假设前提引入 \\
(5) S_2 & (4)\ 置换 \\
(6) S_2 \to \neg Q_2 & 题给前提引入 \\
(7) \neg Q_2 & (5)，(6)\ 假言推理 \\
(8) R_2 & (3)，(7)\ 析取三段论 \\
(9) R_2 \to \neg P_1 & 题给前提引入 \\
(10) \neg P_1 & (8)，(9)\ 假言推理 \\
(11) P_1 \wedge \neg P_1 & (1)，(10)\ 合取引入
\end{array}
$$

利用归谬法得证；