基本计数技术

离散数学

马晓星

南京大学 · 计算机科学与技术系

回顾

- 自然数
- 集合的基数
- 归纳与递归
  - 数学归纳法与良序原理
  - 递归定义与结构归纳法
  - 证明程序正确性与复杂度

提要

- 排列、组合与多项式系数
- 带重复元素的排列与组合
- 集合分类计数与容斥原理

排列、组合与多项式系数

计数基本原则

- 乘法原则
  - 做一件事有两个步骤，第一步有 n 种完成方式，第二步 m 种完成方式，则完成这件事情共有 $m \times n$ 种方法
    - 例: A 是有限集合，$|A|=n$. A的幂集有几个元素？
      - $P(A) = 2^n$.
- 加法原则
  - 一件事情有两种做法，第一种做法有n种方式，第二种做法有m种方式，则完成这件事情共有$m+n$种方法
    - 例: 含数字1的小于10000的正整数个数?

计数基本原则

- 不重复, 不遗漏.
  - 例: 四人互换礼物, 每人一件, 不拿自己的, 几种换法?

排列

- 考察有 n 个元素的集合，有多少种不同的有序遍历？
  - $n!$

- 考察有 n 个元素的集合，有序取出 r 个元素,元素不重复，有多少种可能的取法？（即n个元素的 ***r*-排列** 有多少个？）

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

本质上，一个n-排列就是一个该集合上的双射

例题

- 从52张扑克牌中发5张牌，如果考虑发牌次序，共有多少种牌型？
- 密码是字母开头8位长字母和数字串，总共可以设计多少个密码？
- 密码是字母开头8位长字母和数字串，如果不允许字母或者数字重复，总共可以设计多少个密码？
- 将26个英文字母进行排列，有多少种排列以ABC开头？
- 将26个英文字母进行排列，有多少种排列中含有ABC串？

组合

- 考察有 n 个元素的集合，如果取 r 个元素出来，共有多少种取法（即 r-组合 的个数）？
  - 含有 r 个元素的子集的个数
  - $C(n,r) = P(n,r)/P(r,r)$

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}}$$

$C(n,r)$ 有时也写成 C_k^n C_n^k $\binom{n}{r}$ ${}_nC_k$ ${}_nC_k$ ${}^nC_k$

除了$C(n,r)$, 我们也经常会使用$\binom{n}{r}$ 这种记法.

组合

- $C(n,r) = C(n,n-r)$
- 代数运算
- Double Counting：同一问题不同计数法

例：

- 从52张扑克牌中发5张牌，如果不考虑发牌次序，共有多少种牌型？
- 从52张扑克牌中发47张牌，如果从大到小排好，共有多少种牌型？
- 从5个妇女和15个男性中选出一个包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能？
- 从5个妇女和15个男性中选出一个至少包含2名妇女的5人委员会，有多少种可能？
- 长度为n的01位串中，有多少个串恰好包含r个1？

组合与二项式的系数

- $x+y = x + y$ 　　　　　1 1
- $(x+y)^2=1x^2+2xy+1y^2$ 　　　　　1 2 1
- $(x+y)^3=1x^3+3x^2y+3xy^2+1y^3$ 　　　　　1, 3, 3, 1
- $(x+y)^4=?$

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

二项式定理推论 1

令n为非负整数. 则有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

如何用 Double Counting 直接证明这个结论?

证明: 利用二项式定理, 令$x = 1, y = 1,$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} =$$

■

二项式定理推论 2

令n为非负整数. 则有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

证明: 利用二项式定理, 令$x=-1, y=1$, 我们可以得到

$$0=0^n=((-1)+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k. \quad \blacksquare$$

这就是 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots.$

二项式定理推论 3

令n为非负整数. 则有

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

杨辉三角（Pascal Triangle）

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

$\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$

$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

$\binom{8}{0}$ $\binom{8}{1}$ $\binom{8}{2}$ $\binom{8}{3}$ $\binom{8}{4}$ $\binom{8}{5}$ $\binom{8}{6}$ $\binom{8}{7}$ $\binom{8}{8}$

...

By ... identity:

$\binom{6}{4}$ ... $\binom{7}{5}$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

... 1

... 1

... 6 1

... 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

...

如何用 Double Counting 直接证明这个结论？

范德蒙恒等式
Vandermonde's Identity

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

如何用 Double Counting
直接证明这个结论？

多项式系数

- 可将二项式定理推广到多项式定理:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}\prod_{t=1}^{m}x_t^{k_t}\text{，其中}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_m}=\frac{n!}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!}$$

我们可以这样考虑: 从$n_1+n_2+\cdots+n_t=n$中选n_i 个x_i, 则有

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1}}{n_t}=$$

$$\frac{n!(n-n_1)!(n-n_1-n_2)!\cdots(n-n_1-n_2-\cdots-n_{t-1})!}{n_1!(n-n_1)!n_2!(n-n_1-n_2)!n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!\cdots n_t!(n-n_1-n_2-\cdots-n_t)!}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_t!}$$

用于证明费马小定理

- **费马小定理**. 设正整数 a 不是素数 p 的倍数，则

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

  - 证明概要:
    - $a^p = (1+1+\cdots+1)^p = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_a} \frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!}$, $\quad \sum_{i=1}^{a} k_i = p$
      (这是多项式系数)
    - 而考虑 $\frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!}$，若其中没有$k_i = p$，则 $\frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!} \equiv 0 \pmod{p}$，
      若有$k_i = p$，则其它$k_j = 0$，于是 $\frac{p!}{k_1!,k_2!\ldots k_a!} \equiv 1 \pmod{p}$；
    - 总共恰有a个$k_i = p$.

带重复元素的排列与组合

圆排列

- 从 n 个不同元素中，取 r 个不重复的元素排成一个圆圈，有 $P(n,r)/r$ 种排列方法

有不可区分物体的排列

- 把单词“mathematics”中的字母重新排列，可以得到多少个不同的“单词”？

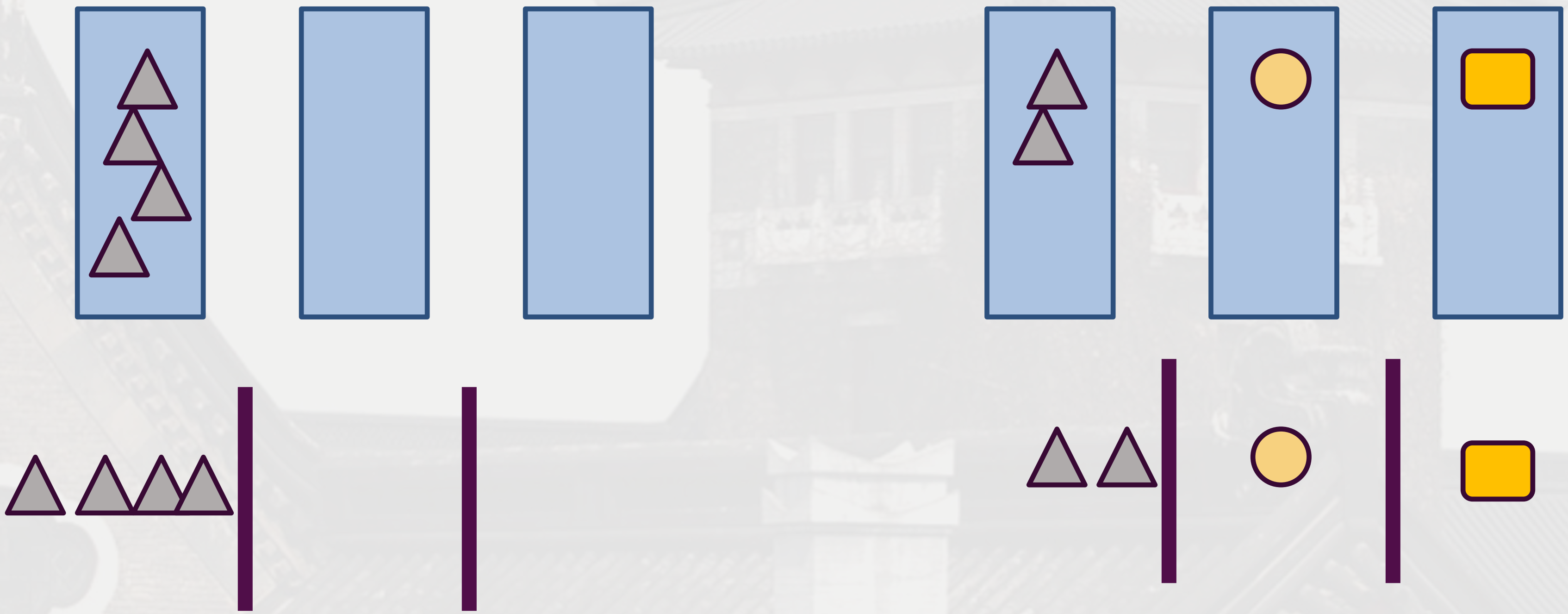
- 在n个有不可区分项的对象集中，得到不同的n-排列的个数是：
  - 令 m_i 是第 i 个重复项的重复次数

$$P(n,n)/\prod m_i!$$

在单词“mathematics”中只抽取4个字母，
可以组合出多少个不同的单词？

有重复的组合

- 厨房有三种水果，每样都超过4个。从厨房取4个水果，有多少种取法？



n个元素集合中允许重复的r-组合

- $C(n+r-1,r)$

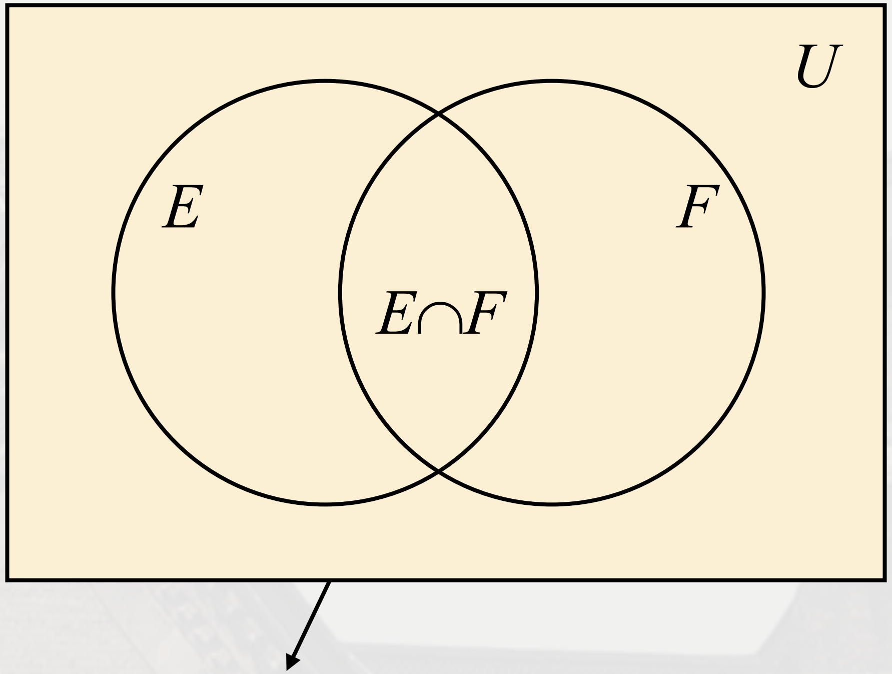
- 例：
  - 甜点店4种面包，有几种买6个面包的买法？
  - 方程$x+y+z=11$有多少组解？其中x,y,z非负整数
  - 如果$x>0, y>1, z>2$时，上述方程有多少组解？

允许重复的排列组合

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

集合分类计数与容斥原理

集合用于分类计数



既学英语，又学法语的同学

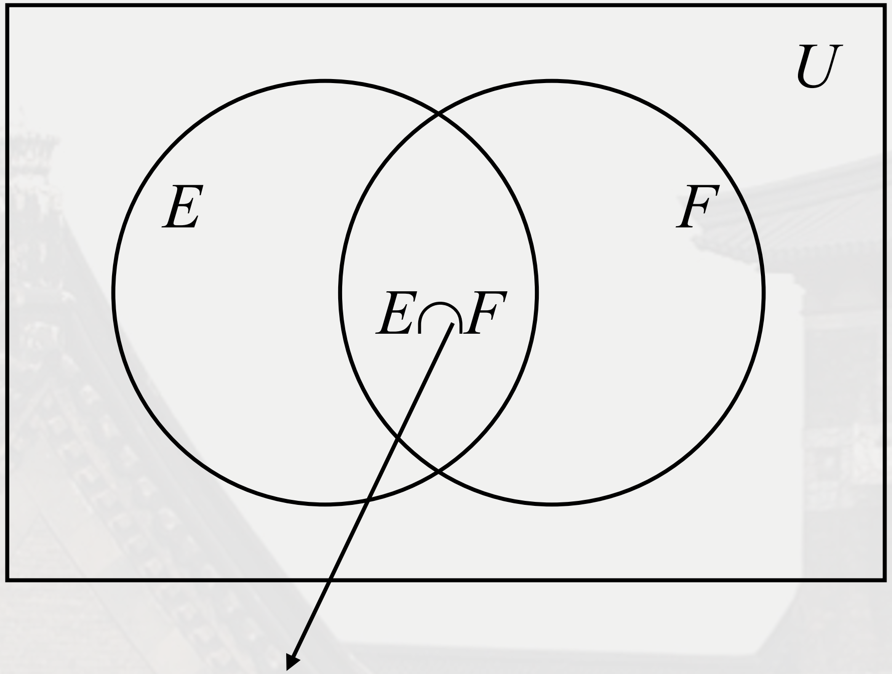
将属于某个集合的元素理解为“具有某种性质”的对象，则属于该集合的补集的元素则是“不具有某种性质”的对象。

例如：

将全班同学的集合视为全集。

其子集**E是学英语的同学的集合**，或理解为满足性质E的对象的集合。类似地，**F是学法语的同学的集合**，即满足性质F的对象的集合。

两个有限集合并集的计数



既学英语，又学法语的同学

假设全班共100人，记为

$$|U| = 100$$

学英语的50人，学法语的30人，分别记为：

$$|E| = 50;\ |F| = 30$$

显然，只要$E\cap F \neq \emptyset$，不学英语，也不学法语的人数就并非20人。

$$|E\cup F| = (|E|+|F|) - |E\cap F|$$

例如：多少种排法?

- 将0,1,2,...,9排成一列，要求第1个数字大于1，最后一个数字小于8，共有多少种排法？
  - 这10个数字所有的排法构成全集U, $|U|$=10!
  - 第1个数字不大于1的排法构成子集A(即所有以0或者1开头的排法), $|A|=2 \cdot 9!$
  - 最后一个数字不小于8的排法构成子集B(即所有以8或者9结束的排法), $|B|=2 \cdot 9!$
  - $|A \cap B|=2 \cdot 2 \cdot 8!$
  - 题目要求的排法构成子集$(\sim A \cap \sim B)$

$$|(\sim A \cap \sim B)| = |U| - |A \cup B| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$$
$$= 10! - 4 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2,338,560$$

三个有限集合并集的计数

- 假设定义全集的三个子集A,B,C。则：

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

证明：

$$|A\cup B\cup C|=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$$

$$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$$

$$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)|-|(B\cap C)|+|(A\cap B\cap C)|$$

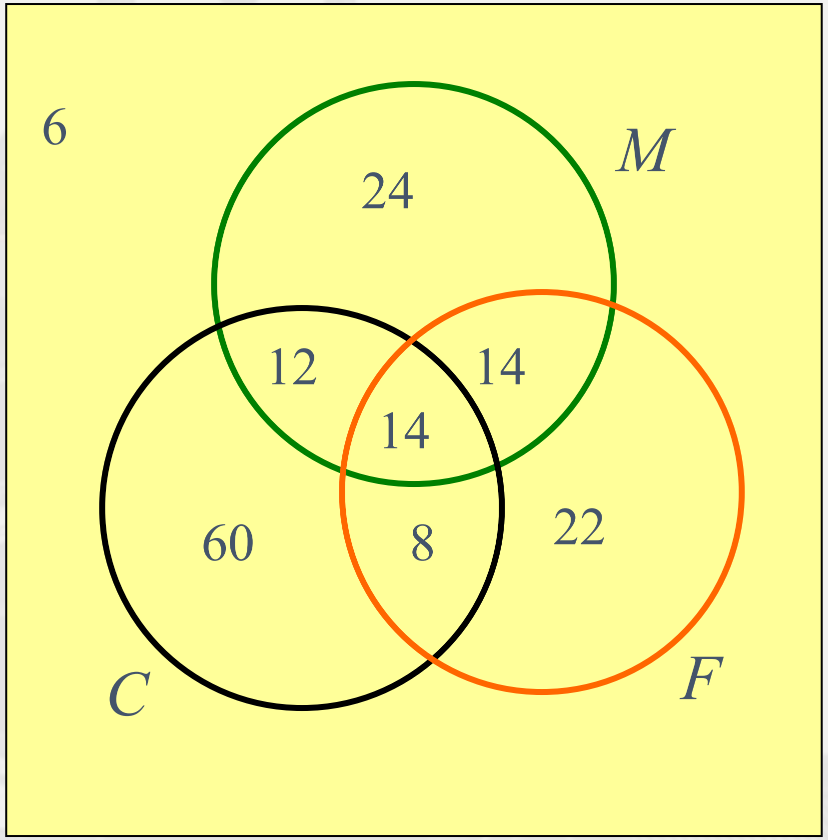
$$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

关于选课的例子

- 全班共有160个学生
  - 选数学课64人，选计算机课94人，选金融课58人
  - 选数学与金融的28人，选数学与计算机的26人，选计算机与金融的22人
  - 三种课全选的14人。
- 问：这三种课都没选的是多少？只选一门计算机的有多少？

问题的解

- M-数学、C-计算机、F-金融
- $|M\cup C\cup F|=|M|+|C|+|F|-|M\cap F|$
  $-|M\cap C|-|C\cap F|+|M\cap C\cap F|$
  $=64+94+58-28-26-22+14$
  $=154$
- 因此, 6人未选课。
- 只选了计算机课的60人



容斥原理(Inclusion-Exclusion Principle)

假设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个有限集合，则它们的并集的元素个数是：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$$

其中，$S_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \qquad k = 1,2,\ldots,n$

例如：4个子集的公式为：

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$

$$- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)$$

$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)$$

$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

容斥原理的证明

- 公式： $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 【概要】我们证明在上述公式中并集中的元素在右边式子中恰好被计数1次：
  - 设并集中对象a出现在m个集合中，则它在S_1中被计数m 次，S_2中$C(m, 2)$ 次, …, 在S_k中$C(m, k)$次:
    - 以n=4，m=3为例 (假设a出现在A_1, A_2和A_3中)：

$$|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|$$

$$-(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|)$$

$$+(|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|)$$

$$-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

容斥原理的证明

- 公式： $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{k-1} S_k + \ldots + (-1)^{n-1} S_n$
- 【概要】我们证明在上述公式中并集中的元素在右边式子中恰好被计数1次：
  - 设并集中对象a出现在m个集合中, 则它在S_1中被计数m 次, S_2中$C(m, 2)$ 次, ..., 在S_k中$C(m, k)$次:
  - 将上述分析带入计数公式可得：

$$C_1^m - C_2^m + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_m^m$$

该计算式值为1，因为当x=1时下式为0：

$$(1-x)^m = 1 - C_1^m x + C_2^m x^2 + \ldots + (-1)^k C_k^m x^k + \ldots + (-1)^m C_m^m x^m$$

于是a恰好被计数1次.

埃拉托色尼的筛子(Eratosthenes’ Sieve)

- 用筛法求质数（以25以内的为例）

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[2] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[3] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

[5] 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25

100以内有多少质数?

- 100以内的任意合数必有不大于其平方根的质数为其因子。这样的质数只有4个：{2, 3, 5, 7}
- 设A_2, A_3, A_5, A_7 分别是可被相应质数整除的100以内大于1的自然数的集合。则100以内质数的数量为：

$$
\begin{aligned}
N(\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_5}\,\overline{A_7}) &= 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor \\
&+ \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5\cdot 7} \right\rfloor \\
&- \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7} \right\rfloor + \underline{4} \\
&= 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 + 4 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

why?

粗心的衣帽间管理员

- 剧场的衣帽管理间新来了一个粗心的管理员,他忘了给每个客人的帽子夹上号码牌。散场时他只好随意地将帽子发还给客人。没有任何人拿到自己的帽子的概率是多少?
- 这可以看作一个排列问题：对标号为1,2,3,…,n的n个帽子重新排列，新的序号为i_1, i_2, i_3,…,i_n。上述问题即：满足对任意k ($1\le k\le n$), $i_k\ne k$的排列出现的概率是多少?
- 这样的排列称为"**错位排列**"(derangement)。
- 适当的集合模型使问题得到简化。

错位排列的个数 － 推导

- 我们将$i_k=k$称为“性质A_k”。满足性质A_k的排列构成所有排列的一个子集A_k。

错位排列的个数为：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中：$N = n!$

S_k如前面的定义,即 $\sum\limits_{1\le i_1 \le i_2 \ldots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$

注意:保持k项不变的置换，即其余$n-k$项可任意排列。

所以：

$$S_1 = \binom{n}{1}(n-1)!;\ S_2 = \binom{n}{2}(n-2)!;\ \ldots,\ S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$$

错位排列的个数 － 计算

我们已经知道错位排列的个数为：

$$N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = N - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^k S_k + \ldots + (-1)^n S_n$$

其中：$N = n!$

将诸$S_k = \binom{n}{k}(n-k)! = \dfrac{n!}{k!}(k = 1,2,3,\ldots,n)$代入上面的式子：

$$\therefore N(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!};\ \therefore 要求的概率是: \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

注意：$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$，所以这概率值与$e^{-1} \approx 0.367879\ldots$的差小于$\frac{1}{n!}$；

换句话说，除了较小的n，所求概率约为0.368，且与n无关。

错位排列的应用

- 回到开头的问题:
  - 例: 四人互换礼物, 每人一件, 不拿自己的, 几种换法?

小结

- 计数的基本要求: “不重复, 不遗漏”
- 加法原理、乘法原理、排列组合、容斥原理
- 不同方式计数及二(多)项式系数的灵活应用
- 带重复元素的排列组合的基本技巧