# 格

离散数学

马晓星
南京大学·计算机科学与技术系

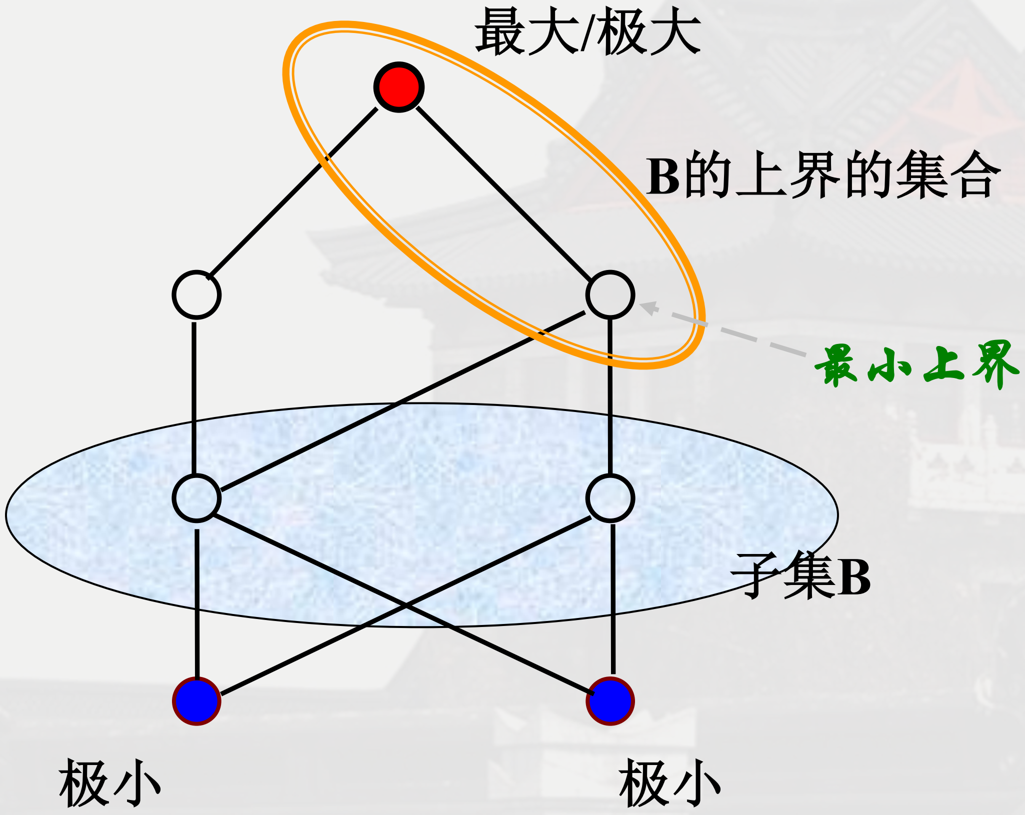
# 回顾

- 偏序与偏序集
  - 偏序关系,哈斯图
  - 极大(小)元,最大(小)元,上(下)界
  - 偏序,全序,良序
- 偏序集的划分
  - 链与反链,高与宽
  - 划分为反链
  - 划分为链

# 提要

- 偏序格
  - 在序理论下讨论一类“规整”的偏序集
- 代数格
  - 用抽象代数的视角来刻画上述结构
- 分配格与有补格
  - 满足一些特定运算性质的格,具有特定的结构特征

# 偏序里的特殊元素(回顾)



# 格(Lattice)

- **偏序格**:

  设$(L, \preccurlyeq)$是偏序集, 若

  - 对于任意的$x, y \in L$, 存在$\{x, y\}$的最小上界$\text{lub}\{x, y\}$,【记为$x \vee y$, 也称其为$x$与$y$的并(join)】
  - 对于任意的$x, y \in L$, 存在$\{x, y\}$的最大下界$\text{glb}\{x, y\}$,【记为$x \wedge y$, 也称其为$x$与$y$的交(meet)】

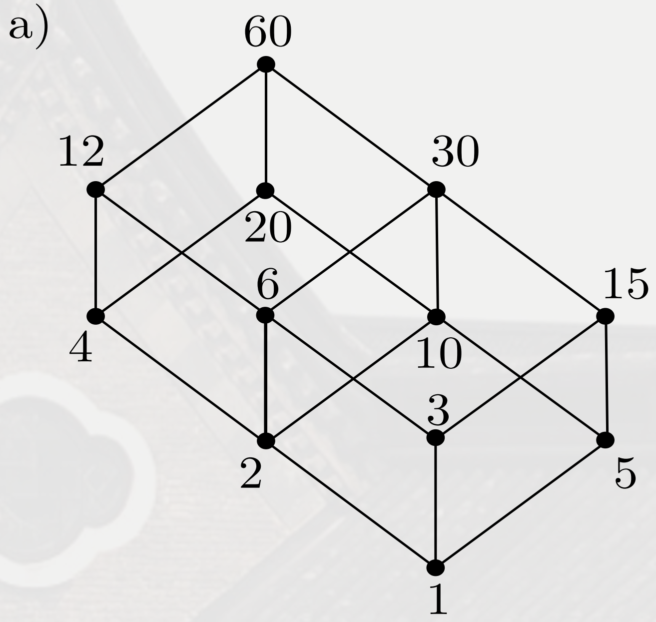
  则称$L$关于$\preccurlyeq$构成一个格。

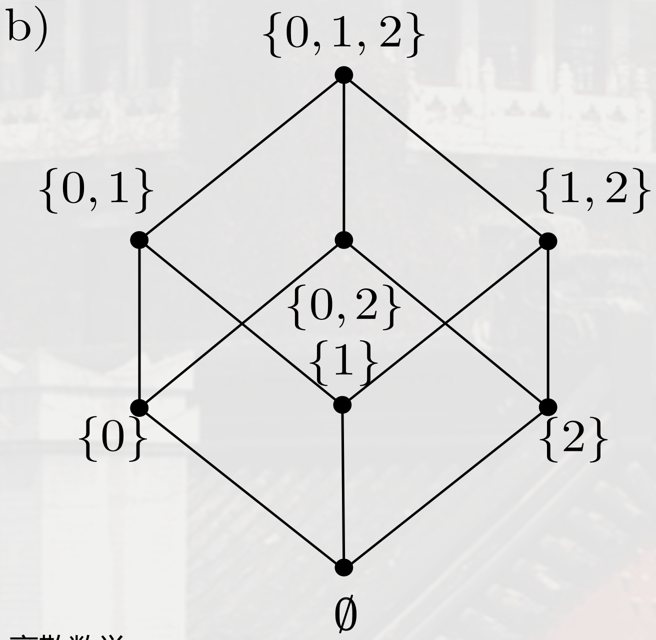
# 格的例子

a) $(\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x|60\}, |)$ ，60的正因子集合及整除关系

$$x \wedge y = \gcd(x, y), \qquad x \vee y = \mathrm{lcm}(x, y)$$

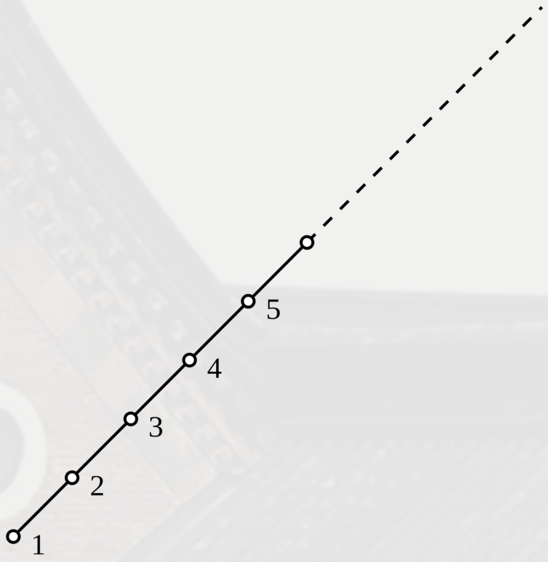
b) $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. $x \wedge y = x \cap y$, $x \vee y = x \cup y$

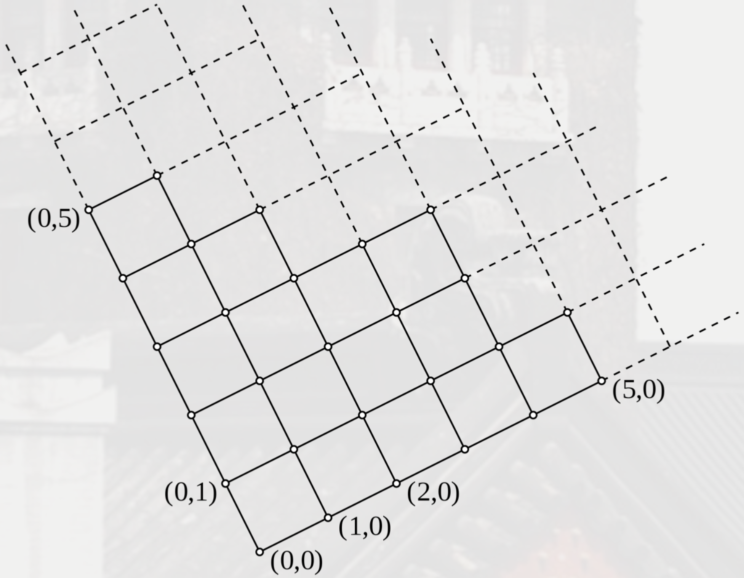


# 格的例子

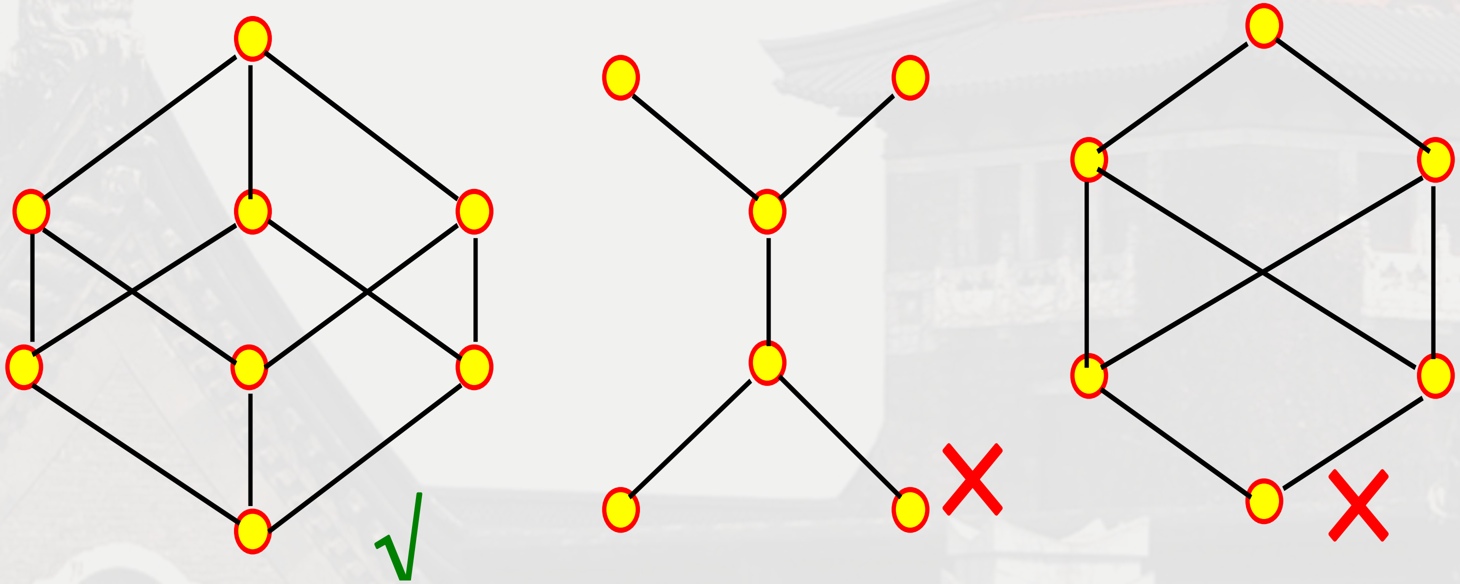
- $(\mathbb{Z}^+, \leq)$.　　$x \wedge y = \min\{x, y\}$,　$x \vee y = \max\{x, y\}$
- $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preccurlyeq)$, $(a, b) \preccurlyeq (c, d)$iff. $a \leq c$ and $b \leq d$.



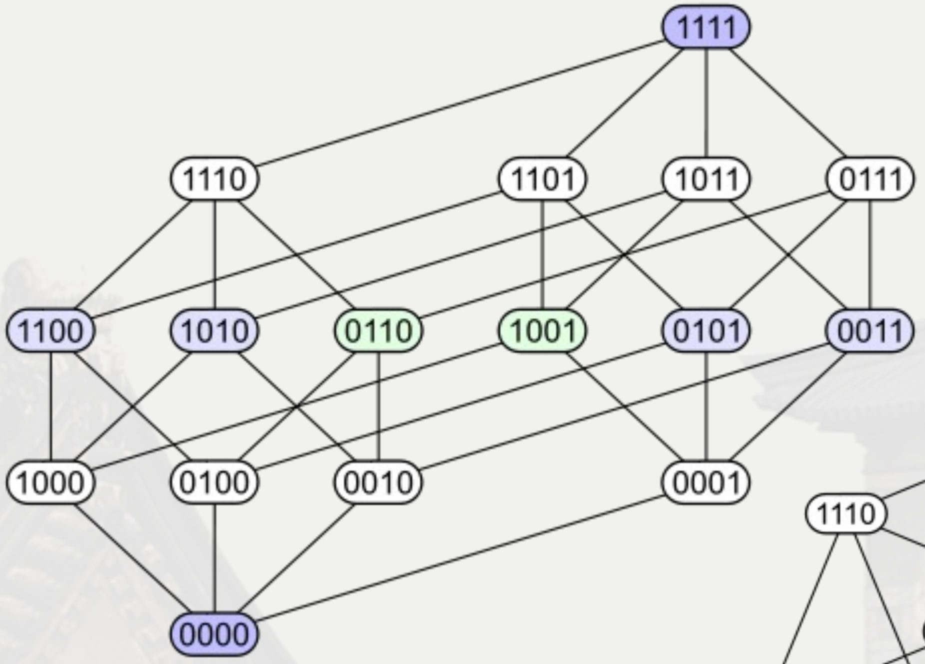



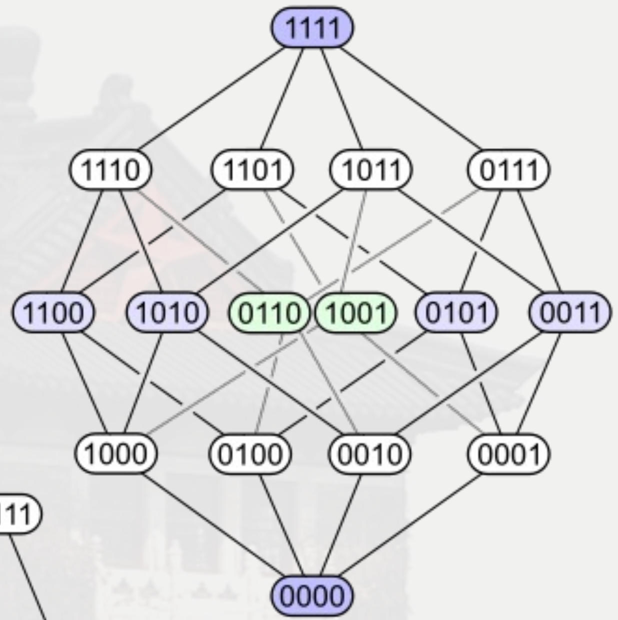
# 格与哈斯图

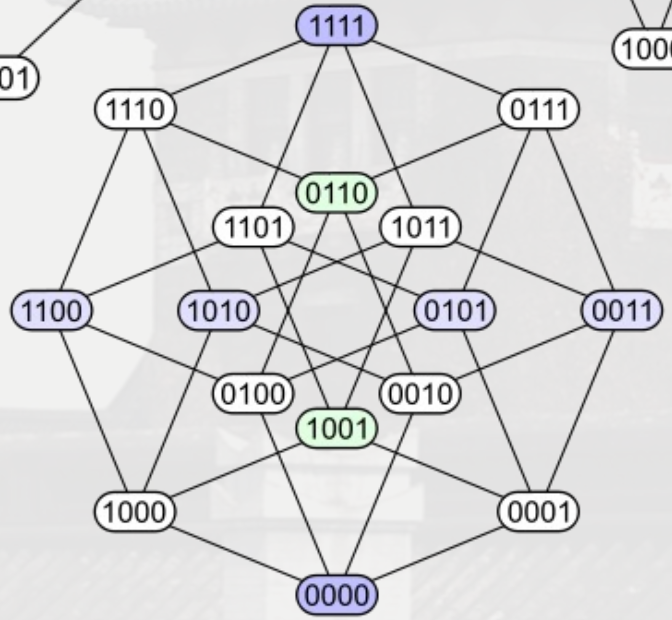
- 右边两个哈斯图所表示的偏序集不是格



# 格与哈斯图（续）


1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000


1111
1110
1101
1011
0111
1100
1010
0110
1001
0101
0011
1000
0100
0010
0001
0000


1111
1110
0111
0110
1101
1011
1100
1010
0101
0011
0100
0010
1001
1000
0001
0000

# 格的基本关系式

- 根据“最小上界”和“最大下界”的定义，有如下关系式：
  - $a \preccurlyeq c,\ b \preccurlyeq c \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c$
  - $c \preccurlyeq a,\ c \preccurlyeq b \Rightarrow \mathrm{c} \preccurlyeq a \wedge b$
  - $a \preccurlyeq c,\ b \preccurlyeq \mathrm{d} \Rightarrow a \vee b \preccurlyeq c \vee d,\ a \wedge b \preccurlyeq c \wedge d$

# 格的性质

- 若$(L, \preccurlyeq)$是格，则：$\forall a, b \in L$:

$$a \preccurlyeq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b$$

可以采用循环证明

- $a \preccurlyeq b \Rightarrow a \wedge b = a$
- $a \wedge b = a \Rightarrow a \vee b = b$
- $a \vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$

# 格的性质

- 设$(L,\preccurlyeq)$是格， 则$\wedge, \vee$ 可看作$L$上的二元运算, 它们具有下列运算性质:
  - 结合律：$(a\wedge b) \wedge \mathrm{c} = a \wedge (b\wedge c)$, $(a\vee \mathrm{b}) \vee \mathrm{c} = a \vee (b\vee c)$
  - 交换律：$a\wedge b = b\wedge a$, $a\vee b = b\vee a$
  - 吸收律：$a \wedge (a\vee b) = a$, $a \vee (a\wedge b)=a$
  - 幂等律：$a \wedge a = a$, $a \vee a = a$

# 关于格的对偶命题

- **对偶命题:**
  设$P$是含有格中元素以及符号=, ≼, ≽,∨,∧的命题.若$P^*$是将$P$中的≼, ≽,∨,∧分别替换为≽, ≼,∧,∨所得到的命题, 则称$P^*$是$P$的对偶命题.

- 对偶命题的例子
  - $a \wedge b \preccurlyeq a$和$a \vee b \succcurlyeq a$互为对偶命题
- 对偶命题构成规律
  - 格元素名不变
  - ≼与≽，∧与∨全部互换。

# 格的对偶原理

- 如果命题$P$对一切格为真，则$P$的对偶命题$P^*$也对一切格为真。

  证明思路：证明$P^*$对任意格$(S, \preccurlyeq)$为真
  - 定义$S$上的二元关系$\preccurlyeq^*$, $\forall a,b \in S$, $a \preccurlyeq^* b \Leftrightarrow b \preccurlyeq a$, 显然$\preccurlyeq^*$是偏序。
  - $\forall a,b \in S$, $a \wedge^* b = a \vee b$, $a \vee^* b = a \wedge b$ 所以$(S, \preccurlyeq^*)$也是格
    - 这里$a \wedge^* b$, $a \vee^* b$分别是$a,b$关于偏序$\preccurlyeq^*$的最大下界和最小上界。
  - $P^*$在$(S, \preccurlyeq)$中为真当且仅当 $P$在$(S, \preccurlyeq^*)$中为真。
  - $P$在一切格中为真，$\therefore$ $P^*$在一切格中为真。

# 代数格

# 格的代数性质

结合律　交换律　吸收律　幂等律

吸收律 ⇒ 幂等律

$x \wedge \underline{x} = x \wedge (\underline{x \vee (x \wedge x)}) = x$ （两次应用吸收律）

同理可证：$x \vee x = x$

# 代数格（定义）

- **代数格**: 设$L$是一个集合， $\wedge$和$\vee$是$L$上的二元运算，且满足结合律、交换律、吸收律，则称$(L, \wedge, \vee)$是代数格。

| 等 式 | 名 称 |
|---|---|
| $x\wedge(y\wedge z) = (x\wedge y)\wedge z$<br>$x\vee(y\vee z) = (x\vee y)\vee z$ | 结合律 |
| $x\wedge y = y\wedge x$<br>$x\vee y = y\vee x$ | 交换律 |
| $x\vee(x\wedge y) = x$<br>$x\wedge(x\vee y) = x$ | 吸收律 |

# 代数格中的偏序关系

- $(L, \wedge, \vee)$为一个代数格, 则有
  - $\forall x, y \in L, x \wedge y = x \;\; iff \;\; x \vee y = y$
    - 若 $x \wedge y = x$, 则 $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ //吸收律
    - 若 $x \vee y = y$, 则 $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ //吸收律
  - $\forall x, y \in L$, 定义 $x \preccurlyeq y \;\; iff \;\; x \wedge y = x$ (即 $x \vee y = y$)
    - 证明这个关系满足自反性、反对称性、传递性。
    - 这个偏序构成一个格。
      - lub{x,y} 即为 $x \vee y$ 。
      - glb{x,y} 即为 $x \wedge y$ 。
- 代数格等同于（偏序）格

# 子格

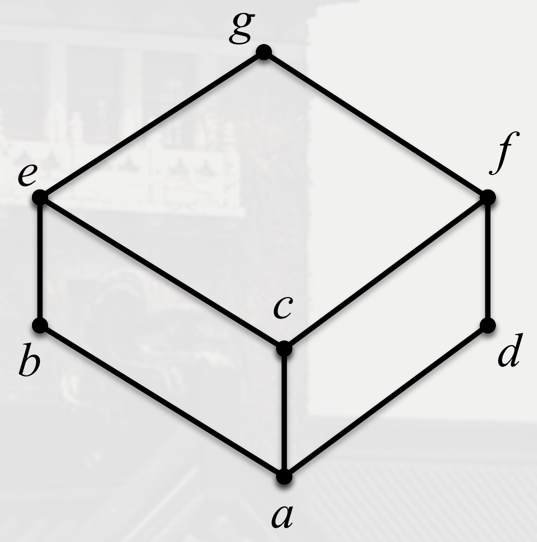
- **子格(sublattice)**是格的子代数。设$(L,\wedge,\vee)$是格， 非空集合$S \subseteq L$，若$S$关于$L$中的运算$\wedge,\vee$ 仍构成格,称$(S,\wedge,\vee)$是$L$的子格。
  - 例如, 设$L$为如图所示的格,

$$S_1 = \{a, e, f, g\}, S_2 = \{a, b, e, g\}$$

$S_1$不是$L$的子格, 因为

$e, f \in S_1$, 但$e \wedge f = c \notin S_1$.

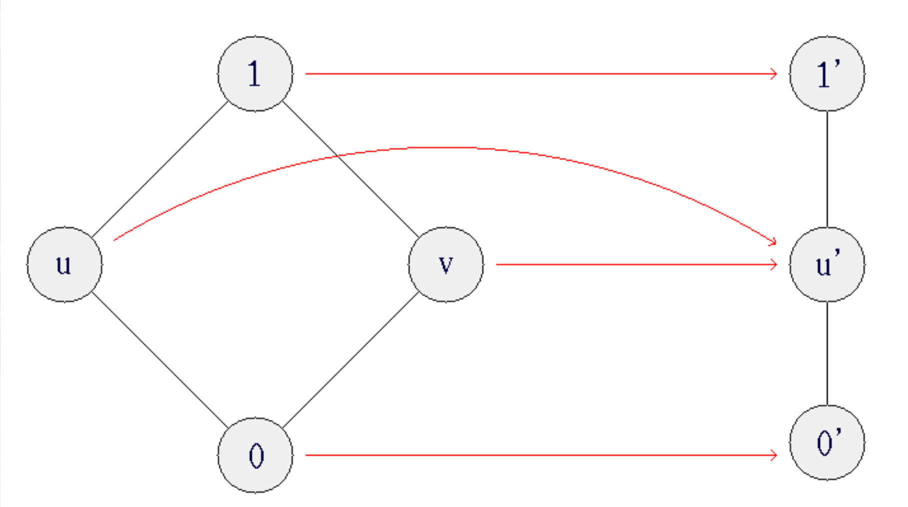
$S_2$是$L$的子格.



# 格同态

- 设$(L_1,\wedge_1,\vee_1)$和$(L_2,\wedge_2,\vee_2)$是格, 若有函数$f: L_1 \to L_2$使得对于任意的$a, b \in L_1$,有
$$f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b)$$
$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b)$$
成立, 则称$f$为从$L_1$到$L_2$的同态映射,简称**格同态**.

- 格同态是保序的:$\forall x, y \in L_1\ \left(x \preccurlyeq_1 y \to f(x) \preccurlyeq_2 f(y)\right)$
  - 一般情况下逆命题不成立. 例如
  - 在一些特定条件下成立.



# 格同构

- **格同构:**若从格$(L_1,\wedge_1,\vee_1)$到$(L_2,\wedge_2,\vee_2)$的同态映射$f$为一个双射,则称其为格同构.

- 若$f$为$L_1$到$L_2$的双射，则$f$为格同构映射当且仅当

$$\forall x,y\in L_1\left(x\preccurlyeq_1 y\Leftrightarrow f(x)\preccurlyeq_2 f(y)\right)$$

  - [充分性概要]
    - 由于$x\wedge_1 y\preccurlyeq_1 x$, 由保序性, $f(x\wedge_1 y)\preccurlyeq_2 f(x)$; 同理, $f(x\wedge_1 y)\preccurlyeq_2 f(y)$; 于是$f(x\wedge_1 y)\preccurlyeq_2 f(x)\wedge_2 f(y)$
    - 由于逆映射$f^{-1}$仍然保序, $f(x)\wedge_2 f(y)\preccurlyeq_2 f(x)$, $f^{-1}\left(f(x)\wedge_2 f(y)\right)\preccurlyeq_1 x$; 同理$f^{-1}\left(f(x)\wedge_2 f(y)\right)\preccurlyeq_1 y$;于是$f^{-1}\left(f(x)\wedge_2 f(y)\right)\preccurlyeq_1 x\wedge_1 y$; 再由$f$保序, $f(x)\wedge_2 f(y)=f\left(f^{-1}\left(f(x)\wedge_2 f(y)\right)\right)\preccurlyeq_2 f(x\wedge_1 y)$.
    - 于是$f(x\wedge_1 y)=f(x)\wedge_2 f(y)$. 同理可证$f(x\vee_1 y)=f(x)\vee_2 f(y)$

# 格同构

- 例: 设$L_1 = (\{1,2,3,4,6,12\},|)$, $L_2 = (\{1,2,3,4,6,12\},\leq)$,

$$f(x) = x$$

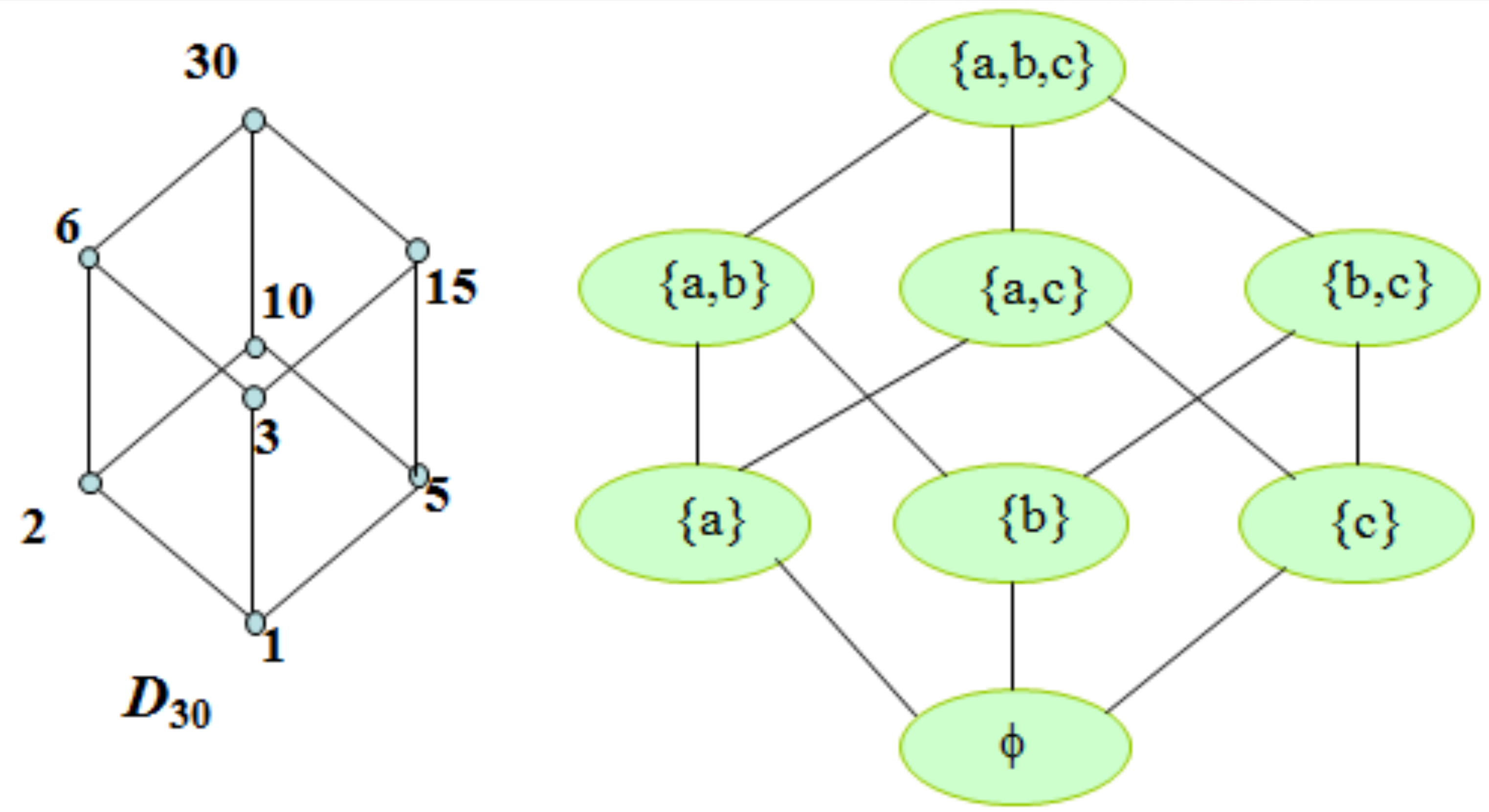
则$f$是双射,但不是同构映射, 因为$f(2) \leq f(3)$,

但2不整除3.

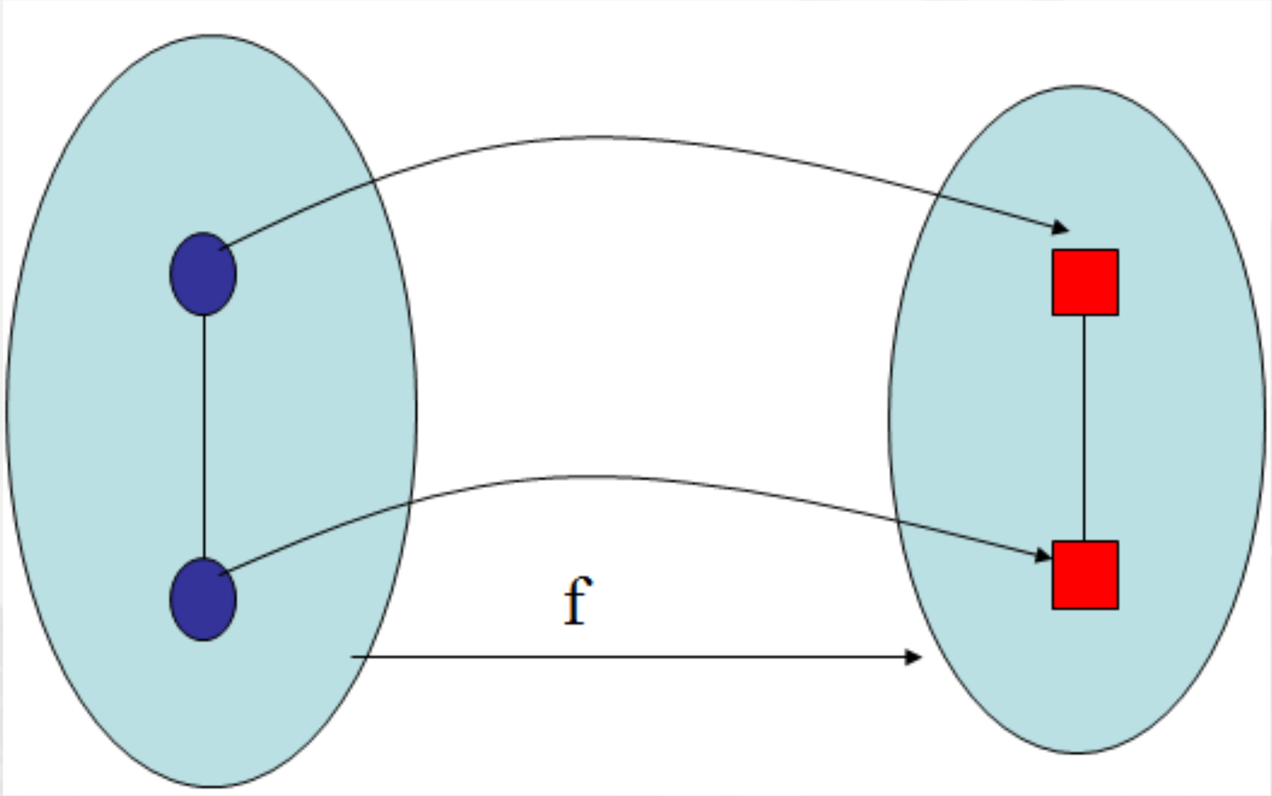
于是$f$不是同构映射.

# 格同构的直观特征

- 观察以下两个格的哈斯图：



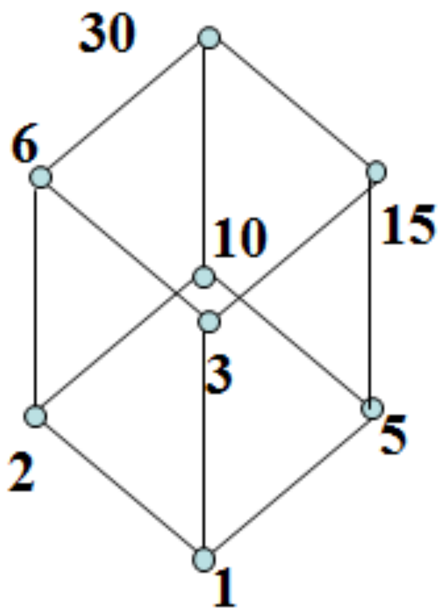
# 格同构的直观特征（续）

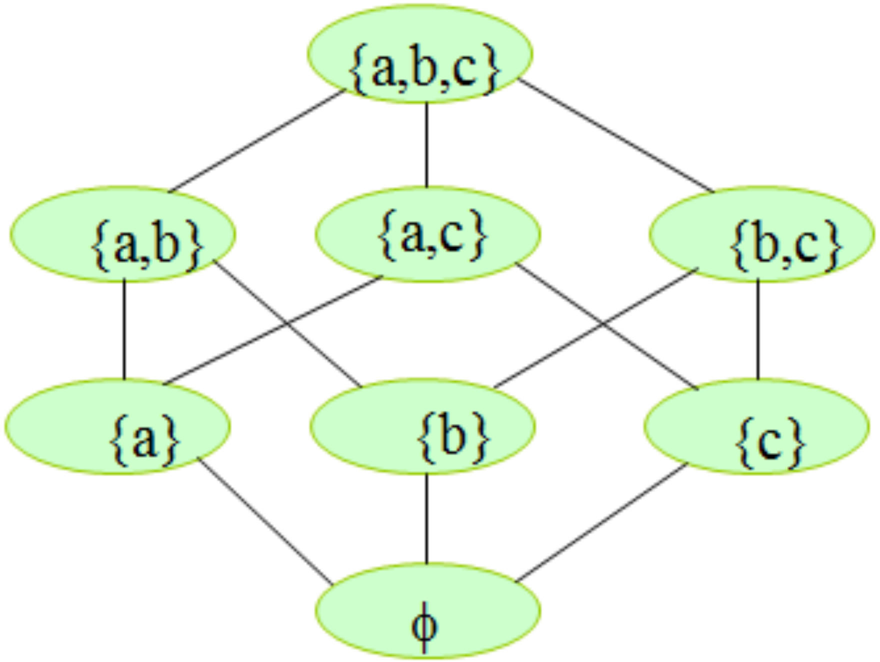


# 格同构的直观特征（续）

- Iso ⇨ same
- Morph ⇨ shape

⇨ Isomorphic lattices have same Hasse diagrams' shape

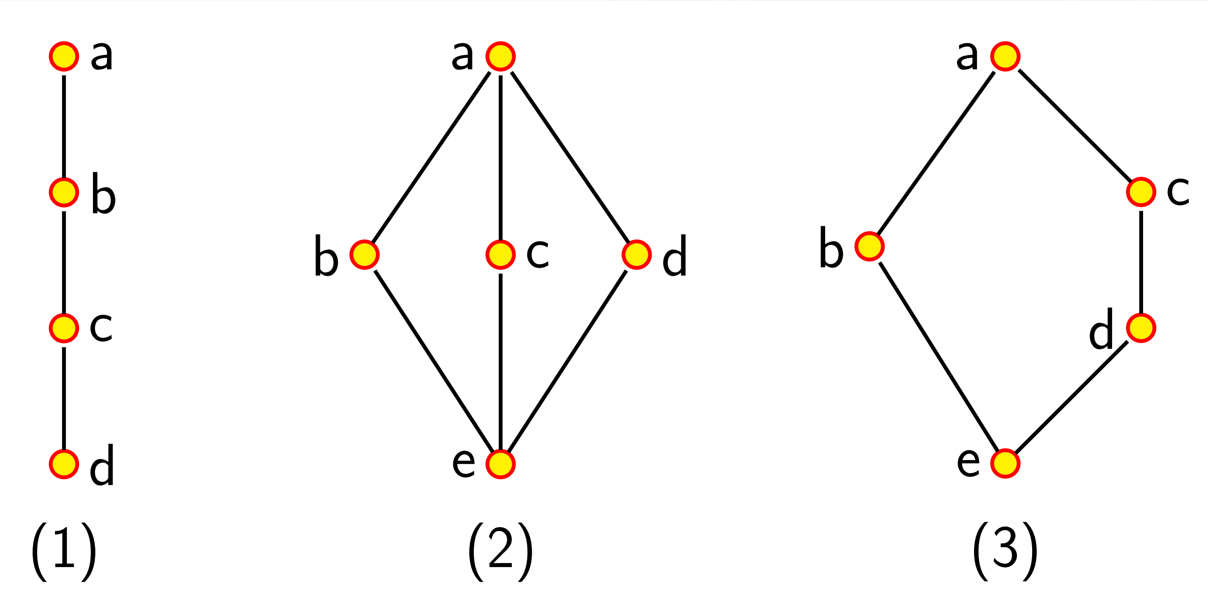


# 分配格与有补格

# 几种典型的格

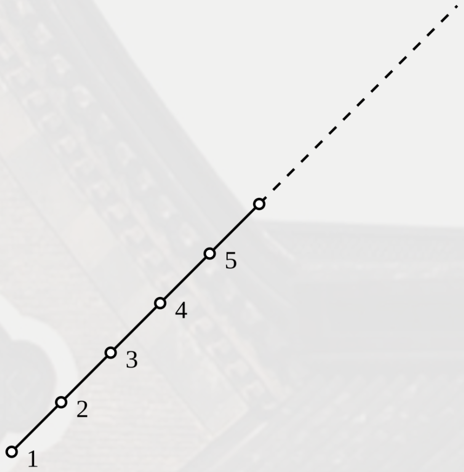
- 三种典型的格：
  (1) **链(chain)**
  (2) **钻石格(diamond lattice, $M_3$)**
  (3) **五角格(pentagon lattice, $N_5$)**

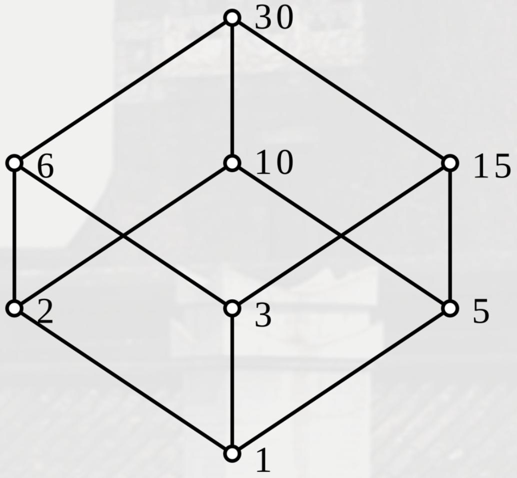


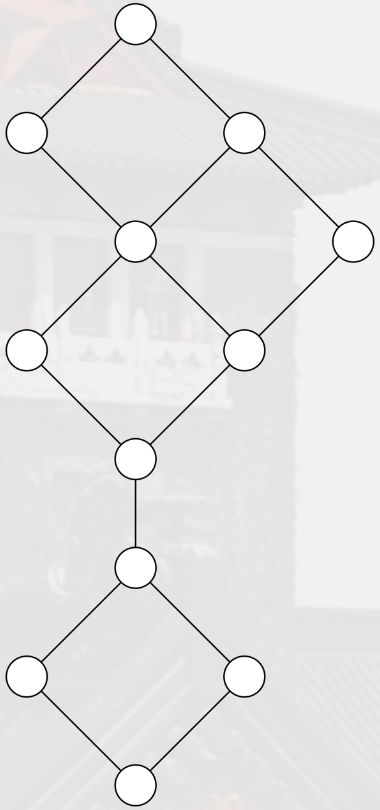
# 分配格

- **分配格**：设$(L,\wedge,\vee)$为格，若$\forall a,b,c \in L$，
  - $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
  - $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

  则称$L$为分配格(distributive lattice).

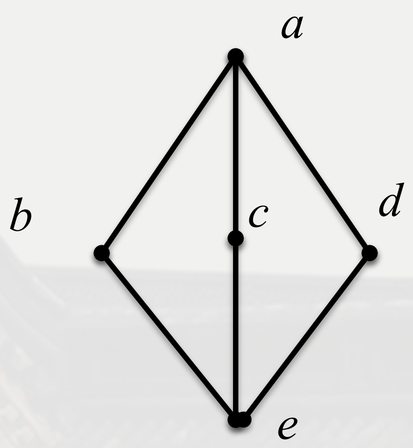


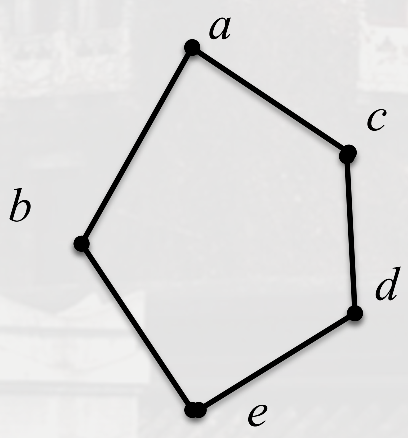



# 分配格

- 钻石格(diamond lattice, $M_3$) 不是分配格
  - $b \wedge (c \vee d) = b$ 但 $(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = e$
- 五角格(pentagon lattice, $N_5$)不是分配格
  - $d \vee (b \wedge c) = d$ 但$(d \vee b) \wedge (d \vee c) = c$

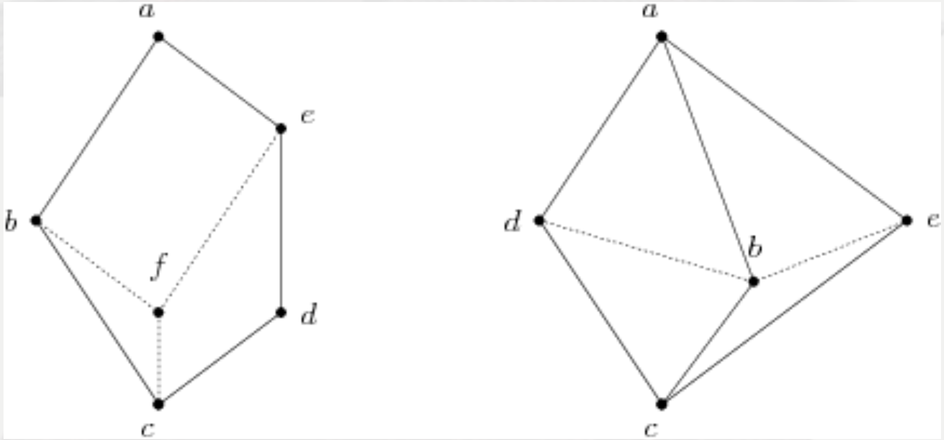


# 分配格的判定定理

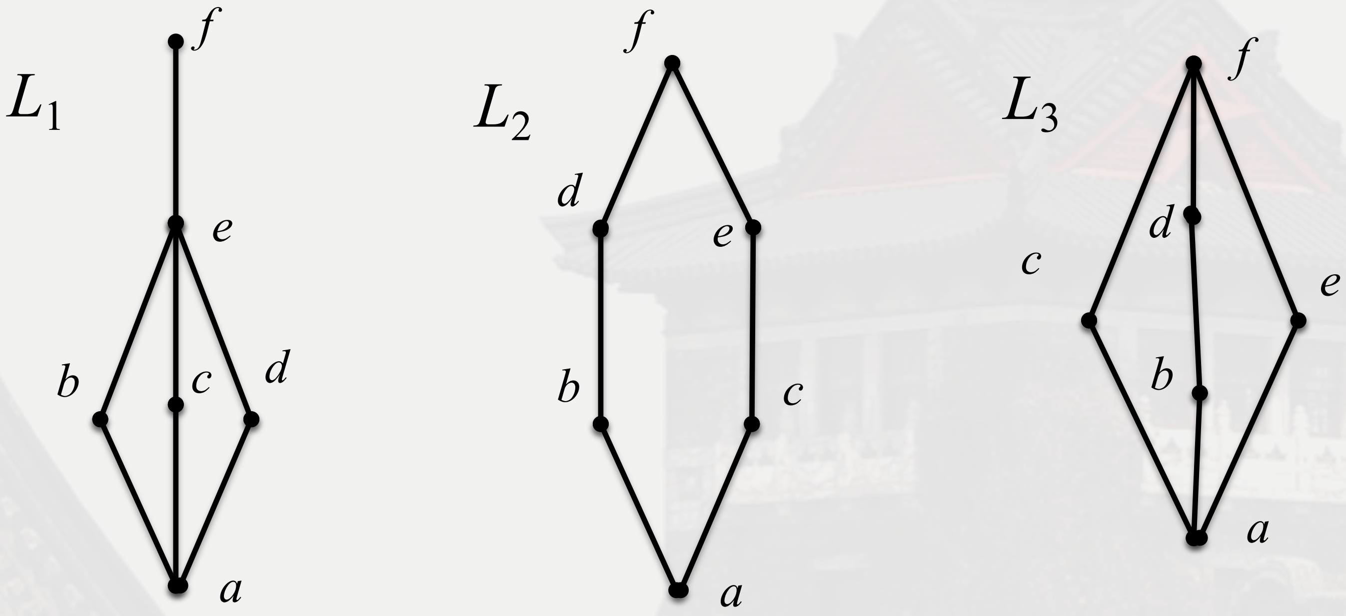
- 定理（分配格判定定理一）：设$L$为格，则$L$是分配格当且仅当$L$不含有与$M_3$（钻石格）或$N_5$（五角格）同构的子格.
  - 注意: 是不含子格,不是子图

含五角格、钻石格子图
(但不是子格)的分配格




- 推论
  - 小于五元的格皆为分配格
  - 任何链皆为分配格

# 分配格的判定定理（续）




都不是分配格：
$\{a,b,c,d,e\}$是$L_1$的子格，同构于钻石格；
$\{a,b,c,e,f\}$是$L_2$的子格，同构于五角格；
$\{a,b,c,e,f\}$是$L_3$的子格，同构于钻石格；

# 分配格的判定定理（续）

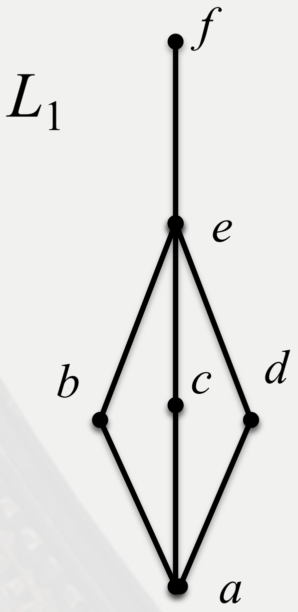
- 定理（分配格判定定理二）：设$L$为格，则$L$是分配格当且仅当对于任意的$a, b, c \in L$, 有

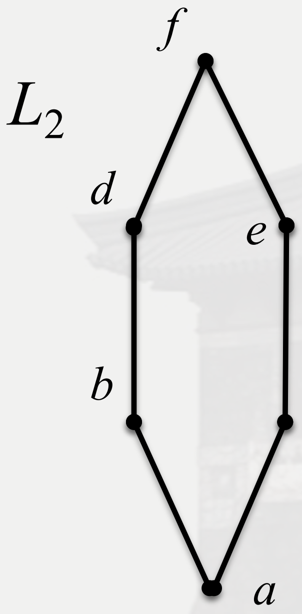
$$(a \wedge b = a \wedge c) \wedge (a \vee b = a \vee c) \rightarrow b = c$$

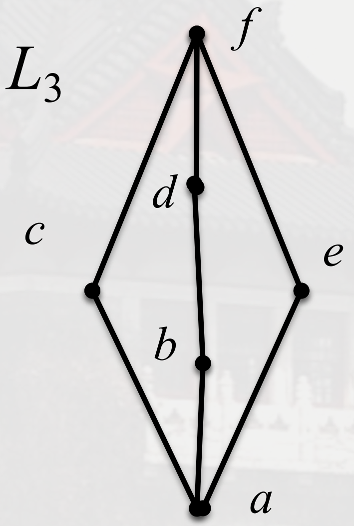
  - [必要性概要]

$$\begin{aligned} b &= b \vee (a \wedge b) \\ &= b \vee (a \wedge c) \\ &= (b \vee a) \wedge (b \vee c) \\ &= (a \vee c) \wedge (b \vee c) \\ &= (a \wedge b) \vee c \\ &= c \end{aligned}$$

# 分配格的判定定理（续）




都不是分配格：

$L_1$： $b \vee c = b \vee d, b \wedge c = b \wedge d$， 但$c \neq d$；

$L_2$： $b \vee c = b \vee e, b \wedge c = b \wedge e$， 但$c \neq e$；

$L_2$： $c \vee b = c \vee d, c \wedge b = c \wedge d$， 但$b \neq d$.

# 有界格

- **有界格(bounded lattice):** 设$L$为格，
  - 存在$b \in L$，使得$\forall x \in L$有$b \preccurlyeq x$ 【$b$称为格$L$的**全下界(bottom)**】
  - 存在$t \in L$，使得$\forall x \in L$有$x \preccurlyeq t$ 【元素$t$称为格$L$的**全上界(top)**】

 此时格$L$称为有界格.

- 若格$L$中存在全下界或全上界，则一定唯一.
  - 一般将格$L$的全下界记为$\mathbf{0}$，全上界记为$\mathbf{1}$
  - 有界格$L$一般记为$(\boldsymbol{L},\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1})$，
    $\forall a \in L$：$a \vee \mathbf{0} = a,\ a \wedge \mathbf{1} = a$

# 有界格（续）

- 有界格$(L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1})$满足同一律、支配律：
  - 同一律：$\forall a \in L$，$a \vee \mathbf{0} = a$, $a \wedge \mathbf{1} = a$
  - 支配律：$\forall a \in L$，$a \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $a \vee \mathbf{1} = \mathbf{1}$
  - $\mathbf{0}$是关于$\vee$运算的单位元，$\wedge$运算的零元；
  - $\mathbf{1}$是关于$\wedge$运算的单位元，$\vee$运算的零元。

# 有界格（续）

- 有限格皆为有界格，设$L = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n \text{是} L \text{的全下界}$$

$$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n \text{是} L \text{的全上界}$$

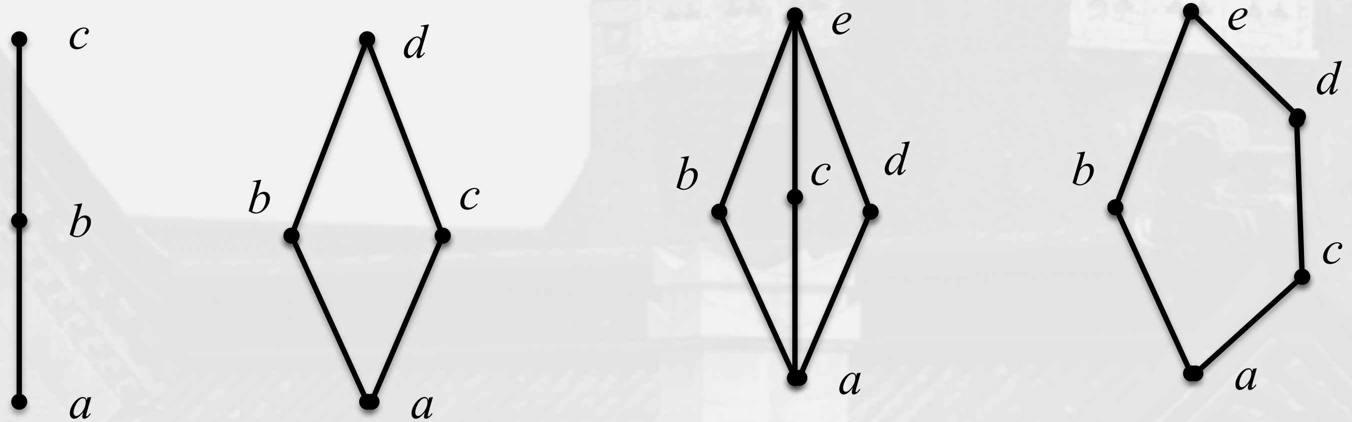
- 求涉及有界格的命题之对偶命题，须将全下界与全上界对换

# 补元

- **有界格的补元(complement)**：设$\langle L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$为有界格, $a\in L$, 若存在$b\in L$使得

$$a\wedge b=\mathbf{0}\text{ 且 }a\vee b=\mathbf{1}$$

则称元素$b$是$a$的补元.



# 补元的存在性与唯一性

- 任何有界格中，全上界**1**和全下界**0**互补
- 对于一般元素，可能不存在补元
- 补元若存在，可能有多个（不保证唯一）

# 有界分配格的补元

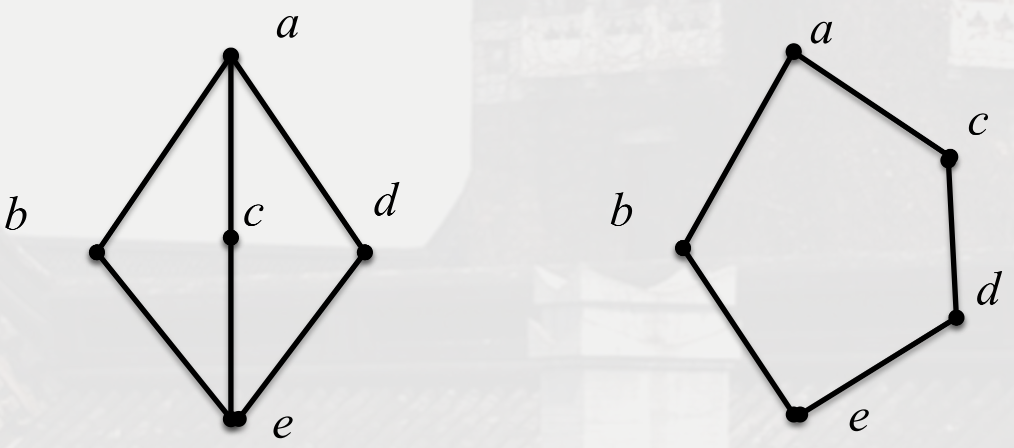
- **有界分配格的补元唯一**：设$(L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1})$为有界分配格，$a\in L$，若$a$存在补元则其补元唯一.

- **证明**：假设$b,c$皆为$a$之补元，则有
$$a\vee c=\mathbf{1},a\wedge c=\mathbf{0};a\vee b=\mathbf{1},a\wedge b=\mathbf{0}$$
由于全上界和全下界唯一，从而有$a\vee c=a\vee b,a\wedge c=a\wedge b.$
由于$L$是分配格，故$b=c.\square$

# 有补格（续）

- **有补格(complemented lattice)**：设$(L,\wedge,\vee,\mathbf{0},\mathbf{1})$为有界格，若$L$中所有元素皆存在补元，则称$L$为有补格.

- 例：钻石格$M_3$和五角格$N_5$皆为有补格.



# 有补分配格

- 代数格：结合律、交换律、吸收律、（幂等律）
- 分配格：分配律
- 有　界：同一律、（支配律）
- 有　补：补　律、（双重补律、德摩根律）

# 有补分配格（代数性质）

结合律　交换律　分配律　同一律　补律

吸收律　幂等律　支配律　双重补律　德摩根律

⇒ 布尔代数

# 小结

- 格是任意两个元素都有上确界和下确界的偏序集.
- 格也是定义了并和交运算且满足结合律、交换律、吸收律的代数系统.
- 有补分配格进一步满足分配律、同一律、支配律、补律、德摩根律等运算性质.
  - 将构成一种极为规整的结构