```
¬(p→q)→p直接证明
 (1) ( \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q) (L3)
 (2) (( \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ( \neg p \rightarrow (( \neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    (L1)
(4) \ ( \  \  \, \neg p \rightarrow (( \  \  \, \neg p \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow (( \  \  \, \neg p \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ( \  \  \, \neg p \rightarrow (p \rightarrow q))) \  \  \, (L2)
 (5) ( \neg p \rightarrow ( \neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ( \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \qquad MP(3)(4)
(7) \neg p \rightarrow (p \rightarrow q) MP(5)(6)
(8) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad (L1)
(9) \ ( \  \  \, (p \rightarrow q) \rightarrow (( \  \  \, (p \rightarrow q) \rightarrow \  \  \, (p \rightarrow q)) \rightarrow \  \  \, (p \rightarrow q))) \rightarrow (( 
(10) ( \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow ( \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q))) \rightarrow ( \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q))
                                MP(8)(9)
(11) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad (L1)
(12) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \quad MP(10)(11)
(13) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad (L1)
(16) \qquad (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow q
 (p \rightarrow q))) MP(14)(15)
(17) ( (17) (p \rightarrow q) \rightarrow ((17) (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q
(p\rightarrow q)\rightarrow (\neg \neg (p\rightarrow q)\rightarrow \neg \neg \neg \neg \neg (p\rightarrow q)))) (L2)
(p\rightarrow q)\rightarrow \neg \neg \neg \neg (p\rightarrow q)))MP(16)(17)
(20) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(18)(19)
(21) ( \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow ( \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)) \quad (L3)
(23) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)))
                                MP(21)(22)
(p \rightarrow q)))) \rightarrow ((\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q))) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q)))) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q)))) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q))))
   \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)))) \quad (L2)
(p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q))) MP(23)(24)
(26) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(20)(25)
(p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q))) (L2)
```

```
(28) ( \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow ( \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(26)(27)
(29)  \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q) \quad MP(12)(28)
(30) ( \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)) \quad (L3)
(31) (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q) \quad MP(29)(30)
(32) ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q))) \quad (L1)
(33)  \neg p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(31)(32)
(34) ( \neg p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q))) \quad (L2)
(35) ( \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(33)(34)
(36)  \neg p \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q) \quad MP(8)(35)
(37) ( \neg p \rightarrow \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg (p \rightarrow q) \rightarrow p) \quad (L3)
(38)  \neg (p \rightarrow q) \rightarrow p \quad MP(36)(37)
```

¬(p→q)→¬q直接证明 q)) (L2) (5) $\neg \neg q \rightarrow \neg \neg q \quad MP(3)(4)$ $(7) \left(\neg \neg \neg q \rightarrow \neg \neg q \right) \rightarrow \left(\neg q \rightarrow \neg \neg \neg q \right) \quad (L3)$ $q \rightarrow \neg \neg q)))$ (L1) $(9) \quad \neg \neg q \rightarrow ((\neg \neg \neg \neg q \rightarrow \neg \neg q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg \neg \neg q)) \quad MP(7)(8)$ $\neg q)) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg \neg \neg q)))$ (L2) $(12) \quad \neg \quad q \rightarrow (\neg \quad \neg \quad \neg \quad q \rightarrow \neg \quad \neg q) \quad (L1)$ $(14) (\neg q \rightarrow \neg \neg \neg q) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow q) \qquad (L3)$ $(15) \ ((\ \ q \rightarrow \ \ \ \ q) \rightarrow (\ \ \ q \rightarrow q)) \rightarrow (\ \ \ \ q \rightarrow q))) (L1)$ $q \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow q))) (L2)$ $(22) \neg \neg q \rightarrow q MP(5)(21)$

```
(23) q \rightarrow (p \rightarrow q) \qquad (L1)
(24) (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg \neg q \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))) (L1)
(25) \quad \neg \neg q \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \qquad MP(23)(24)
(26) \ ( \  \  \, \neg q \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))) \rightarrow ((\  \  \, \neg q \rightarrow q) \rightarrow (\  \  \, \neg q \rightarrow (p \rightarrow q))) \quad (L2)
(28) \quad \neg \neg q \rightarrow (p \rightarrow q) \qquad MP(22)(27)
(29) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad (L1)
(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q))) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q))) (L2)
MP(29)(30)
(33) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \quad MP(31)(32)
(34) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad (L1)
(37) \qquad (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow 
(p \rightarrow q))) MP(35)(36)
(p\rightarrow q)\rightarrow (\neg \neg (p\rightarrow q)\rightarrow \neg \neg \neg \neg \neg (p\rightarrow q)))) (L2)
                           (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q))) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg (p \rightarrow q))) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q))))
(p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q)))MP(37)(38)
(40) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad (L1)
(41) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(39)(40)
(44) \quad \boxed{\phantom{a}} (p \rightarrow q) \rightarrow ((\boxed{\phantom{a}} (p \rightarrow q) \rightarrow \boxed{\phantom{a}} (p \rightarrow q)) \rightarrow (\boxed{\phantom{a}} (p \rightarrow q) \rightarrow \boxed{\phantom{a}} (p \rightarrow q)))
               MP(42)(43)
\neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)))) \quad (L2)
(p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q))) MP(44)(45)
(47) \qquad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) \qquad MP(41)(46)
(p\rightarrow q))\rightarrow (\neg\neg\neg(p\rightarrow q)\rightarrow\neg(p\rightarrow q))) (L2)
(49) ( \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg \neg \neg (p \rightarrow q)) \rightarrow ( \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q)) \quad MP(47)(48)
(50) \quad \neg \neg \neg (p \rightarrow q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q) \quad MP(33)(49)
```

否定肯定律直接证明

```
(1) \neg p \rightarrow (\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow \neg p)
(2) \ (\neg \neg \ (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \ (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))
                                                                                                                                                                 (L3)
(3) ((\neg\neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow (\neg p \rightarrow ((\neg p \rightarrow p))) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))))
(4) \neg p \rightarrow ((\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))
                                                                                                                                                                             (2) (3) MP
(5) (\neg p \rightarrow ((\neg \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))))) (L2)
(6) \ (\neg p \to (\neg \neg \ (p \to (\neg p \to p)) \to \neg p)) \to (\neg p \to (p \to \neg \ (p \to (\neg p \to p))))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               (4) (5) MP
                                                                                                                                                                     (1) (6) MP
(7) \neg p \rightarrow (0 \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               (L2)
(8) \ (\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))))
(9) (\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))
(10) (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)
                                                                                                                                                             (L3)
(11) \ ((\neg p \rightarrow \neg \ (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \ (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow p))))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   (L1)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   (10) (11) MP
(12) \ (\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg \ (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))
(13) ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))) \rightarrow (((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p)))))))
p)))(L2)
(14)\;((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\;(p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   (12) (13) MP
(15) \; (\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)
                                                                                                                                                  (9) (14) MP
(16) \ ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (\neg p \rightarrow p)) \rightarrow p)) \rightarrow (((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p))
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   (L2)
(17) \ ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))) \rightarrow ((\neg p \rightarrow p) \rightarrow p)
                                                                                                                                                    (15) (16) MP
(18) (\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow p))
                                                                                                                                                    (L1)
                                                                                                                                                    (17) (18) MP \square
(19) (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p
```