第六次作业参考答案

By 梁文艺 朱映

第六次作业最大问题：

1. 看清题目，要求用直接证明+演绎定理，就不能只写一种；
2. 演绎定理、反证法等运用时要说明清楚

---

1. **分别利用直接证明（即根据“证明”的定义，基于三个公理、Γ及 MP 规则进行证明）和演绎定理写出下面的证明过程（注明证明依据）**$\Gamma=\{p,(q\to(p\to r))\}$**，证明**$\Gamma\vdash(q\to r)$

直接证明：

$$\begin{array}{lr}
(1)p & \text{假定} \\
(2)p\to(q\to p) & \text{(L1) 肯定后件律} \\
(3)q\to p & \text{(1)，(2) MP} \\
(4)q\to(p\to r) & \text{假定} \\
(5)(q\to(p\to r))\to((q\to p)\to(q\to r)) & \text{(L2) 蕴涵分配律} \\
(6)(q\to p)\to(q\to r) & \text{(4)，(5) MP} \\
(7)q\to r & \text{(3)，(6) MP}
\end{array}$$

由演绎定理，只需证明：$\Gamma\cup\{q\}\vdash r$

$$\begin{array}{lr}
(1)q & \text{假定} \\
(2)q\to(p\to r) & \text{假定} \\
(3)p\to r & \text{(1)，(2) MP} \\
(4)p & \text{假定} \\
(5)r & \text{(4)，(5) MP}
\end{array}$$

原式得证。

---

1. **证明下列定理（注明证明依据）。**
   1. $\vdash(q\to p)\to(\neg p\to\neg q)$
   2. $\vdash\neg(p\to q)\to(q\to p)$
   3. $\vdash((p\to q)\to p)\to p$
   4. $\vdash(p\to q)\to((\neg p\to q)\to q)$

   答：
   1. 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{q\to p\}\vdash\neg p\to\neg q$

      $$\begin{array}{lr}
      (1)\neg\neg q\to q & \text{双重否定律} \\
      (2)q\to p & \text{假定} \\
      (3)\neg\neg q\to p & \text{(1)，(2) HS} \\
      (4)p\to\neg\neg p & \text{第二双重否定律} \\
      (5)\neg\neg q\to\neg\neg p & \text{(3)，(4) HS} \\
      (6)(\neg\neg q\to\neg\neg p)\to(\neg p\to\neg q) & \text{(L3) 换位律} \\
      (7)\neg p\to\neg q & \text{(5)，(6) MP}
      \end{array}$$

      得证。
   2. 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{\neg(p\to q)\}\vdash q\to p$

$$
\begin{array}{ll}
(1)\neg(p\to q) & \text{假定} \\
(2)\neg(p\to q)\to((p\to q)\to p) & \text{否定前件律} \\
(3)(p\to q)\to p & (1)，(2)\ \mathrm{MP} \\
(4)\neg p\to(p\to q) & \text{否定前件律} \\
(5)\neg p\to p & (3)，(4)\ \mathrm{HS} \\
(6)(\neg p\to p)\to p & \text{否定肯定律} \\
(7)p & (5)，(6)\ \mathrm{HS} \\
(8)p\to(q\to p) & (\mathrm{L1})\ \text{肯定后件率} \\
(9)q\to p & (7)，(8)\ \mathrm{MP}
\end{array}
$$

得证

3. 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{(p\to q)\to p\}\vdash p$

$$
\begin{array}{ll}
(1)(p\to q)\to p & \text{假定} \\
(2)\neg p\to(p\to q) & \text{否定前件律} \\
(3)\neg p\to p & (1)，(2)\ \mathrm{HS} \\
(4)(\neg p\to p)\to p & \text{否定肯定律} \\
(5)p & (3)，(4)\ \mathrm{MP}
\end{array}
$$

得证

4. 证明：根据演绎定理，只用证明 $\{p\to q\}\vdash(\neg p\to q)\to q$
再次使用演绎定理，只用证明 $\{p\to q,\neg p\to q\}\vdash q$

$$
\begin{array}{ll}
(1)p\to q & \text{假定} \\
(2)(p\to q)\to(\neg q\to\neg p) & \text{换位律} \\
(3)\neg q\to\neg p & (1)，(2)\ \mathrm{MP} \\
(4)\neg p\to q & \text{假定} \\
(5)\neg q\to q & (3)，(4)\ \mathrm{HS} \\
(6)(\neg q\to q)\to q & \text{否定肯定律} \\
(7)q & (5)，(6)\ \mathrm{MP}
\end{array}
$$

得证

---

3. **不用公理 L3（目前反证律的证明过程中间接地使用了 L3），尝试利用归谬律和双重否定律 ($\vdash\neg\neg p\to p$)推出反证律。**
证明：由反证律前提，我们有：
（1）$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$
（2）$\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q$
由归谬律可得：
$\Gamma\vdash\neg\neg p$
即存在 $\neg\neg p$ 从 Γ 的证明：

$$
\begin{array}{ll}
(1)\ldots & \text{假定} \\
(2)\neg\neg p & \neg\neg p\ \text{从}\ \Gamma\ \text{的证明} \\
(3)\neg\neg p\to p & \text{双重否定律} \\
(4)p & (2)，(3)\ \mathrm{MP}
\end{array}
$$

于是我们有 $\Gamma\vdash p$，反证律得证。