南京大学数学课程试卷

2010/2011 学年 第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2011.01.06 系别 商学院（09 级） 学号 ________ 姓名 ________

题号	一 36	二 10	三 10	四 12	五 10	六 10	七 12	合计
得分								

$\Phi(1.28)=0.90$ $\Phi(1.58)=0.943$ $\Phi(1.645)=0.95$ $\Phi(1.96)=0.975$ $\Phi(2.33)=0.99$ $\Phi(2.58)=0.995$

$\chi^2_{0.1}(9)=14.68$ $\chi^2_{0.1}(10)=16$ $\chi^2_{0.05}(9)=16.91$ $\chi^2_{0.05}(10)=18.3$

一.（6 分×6=36 分）

(一) 1. 袋中有 n 个球，记有号码 1，2，⋯，n, 求下列事件的概率：(a) 任意取出 2 球，号码为 1，2；(b) 任意取出 3 球，没有号码 1；(c) 任意取出 5 球，号码 1，2，3 中至少出现一个.

(a) $P_a = \dfrac{1}{C_n^2} = \dfrac{2}{n(n-1)}$

(b) $P_b = \dfrac{C_{n-1}^3}{C_n^3} = \dfrac{n-3}{n} = 1-\dfrac{3}{n}$

(c) $P_c = 1-\dfrac{C_{n-3}^5}{C_n^5} = 1-\dfrac{(n-5)(n-6)(n-7)}{n(n-1)(n-2)}$

(四) 2. 设随机变量 $X\sim E(2)$，$Y\sim B(20,\ 0.2)$，且 X 和 Y 相互独立，求 $\boxed{E(XY)}$.

$EX=\frac{1}{2}$. $E(Y)=20\times 0.2=4$

$\Rightarrow E(XY)=EX\cdot EY=\frac{1}{2}\cdot 4=2$.

(五) 3. 设$\{\xi_n\}$为独立随机变序列，且$\xi_k \sim \begin{pmatrix} \sqrt{\ln k} & -\sqrt{\ln k} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，k=1,2, ⋯ . 求证：$\forall \varepsilon>0$，有

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right| \geq \varepsilon\right)=0$，即 $\{\xi_n\}$服从$\boxed{\text{大数}}$定律.

$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k)=0$.

$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln k$

$(\because D(\xi_k)=E(\xi_k^2)-E^2(\xi_k)=\ln k)$

$0\leq P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k)}{\varepsilon^2}=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n^2\varepsilon^2}\leq\dfrac{\ln n}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\geq\varepsilon\right)=0$，即 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律.

(六) 4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为总体 $\xi \sim N(0,\ 0.09)$ 的样本，计算 $P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right)$.

$\because X_i \sim N(0, 0.09)$

$\therefore \frac{X_i}{0.3} \sim N(0,1)$. $\therefore \sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{0.3}\right)^2 \sim \chi^2(10)$.

$\therefore P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right) = P\left(\frac{1}{0.09}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 16\right) = 0.1$

(六) 5. 已知 $X \sim t(n)$，求 X^2 的分布.

$\because X \sim t(n)$. $\therefore X = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$

$U \sim N(0,1)$. $V \sim \chi^2(n)$.

$X^2 = \frac{U^2}{V/n} \sim F(1,n)$.

(七) 6. 设总体 X 是连续型随机变量，其密度函数为 $p(x;\theta)$， θ 为未知数，已知 $EX^2=\theta$，$EX^4=2\theta^2$，设 $(X_1,X_2,\ldots, X_n)$ 是来自总体 X 的随机样本， $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ 的一个估计量，问 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量？ $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的一致估计量？（均需说明理由）.

(1) $E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta = \theta$

$\therefore \hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

(2) $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \theta$. $\therefore$ 是一致估计

(独立同分布大数定律)

或 $D(\hat{\theta}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta^2 = \frac{1}{n}\theta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\therefore \hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量.

(二) 二. (10 分)设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $Y=2(1-|X|)$ 的概率密度函数.

$\because X \sim N(0,1)$. $\therefore f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$y = 2(1-|x|) = \begin{cases} 2(1-x), & x \geq 0 \\ 2(1+x), & x<0 \end{cases}$，且 $y \leq 1$

$y \leq 1$ 时，

① $x<0$ 时，$x = \frac{y}{2}-1$. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$

$\therefore f_Y^{①}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{y}{2}-1)^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}$

② $x \geq 0$ 时，$x = 1-\frac{y}{2}$. $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}$.

$\therefore f_Y^{②}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1-\frac{y}{2})^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}$

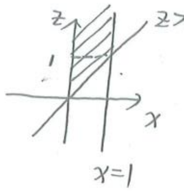
$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}, & y \leq 1 \\ 0, & y>1 \end{cases}$

$\therefore f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}$ [illegible]

三．(10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其密度函数分别为 $p_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，

$p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$，求随机变量 Z=X+Y 的密度函数. 卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)\cdot p_Y(z-x)\,dx \qquad \begin{pmatrix}0\le x\le 1\\ z-x>0\end{pmatrix}$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-x)}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-z}\,dx.$$

① $0<z<1$，

$$f_Z(z)=\int_0^z e^{x-z}\,dx= e^{x-z}\Big|_0^z=1-e^{-z}$$

② $z\ge 1$，

$$f_Z(z)=\int_0^1 e^{x-z}\,dx= e^{x-z}\Big|_0^1=e^{1-z}-e^{-z}=e^{-z}(e-1)$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{-z}(e-1), & z\ge 1\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

中心极限定理

(五) 四．(12 分) 甲，乙两影院在竞争 $\boxed{1000}$ 名观众，假定每个观众任选一个影院且观众间的选择彼此独立.（1）如果每个影院的座位数都是 525 个，求观众因为缺少座位而离去的概率；（2）问每个影院至少应设多少座位，才能保证因缺少座位而使观众离去的概率小于 1%？

~~(1) 设观众因缺少座位而离去为事件 A~~

~~X = 到其中一个影院看电影的观众数，则 $X\sim B(1000,\frac{1}{2})$~~

~~$P(A)=\sum_{k=526}^{1000} C_{1000}^{k}(\frac{1}{2})^k$~~

(1) 引入 X_i，$X_i=\begin{cases}1, & 观众去某影院\\ 0, & 观众不去某影院\end{cases}$ $\quad P(X_i=1)=\frac{1}{2}$.

$EX_i=\frac{1}{2}$. $DX_i=E(X_i^2)-E^2(X_i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000}X_i>525\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000}X_i-500}{\sqrt{250}}>\frac{525-500}{5\sqrt{10}}\right)=1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)$$

$$=1-\Phi(1.58)=1-0.943=0.057$$

(2) 设每个影院设 m 个座位. 则 $P\left(\sum_{i=1}^{1000}X_i>m\right)=1-\Phi\left(\frac{m-500}{5\sqrt{10}}\right)<0.01$

$\Phi\left(\frac{m-500}{5\sqrt{10}}\right)>0.99$

则 $\frac{m-500}{5\sqrt{10}}>2.33$

$\Rightarrow m>536.84$

∴ 至少应设 537 个座位.

(六) 五．(10 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$，$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，求统计量 Z 的分布.

$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)\sim N(\mu,\frac{1}{6}\sigma^2)$

$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)\sim N(\mu,\frac{1}{3}\sigma^2)$

$Y_1-Y_2\sim N(0,\frac{1}{2}\sigma^2)$，$\sqrt{2}(Y_1-Y_2)\sim N(0,\sigma^2)$

$\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\sim N(0,1)$

又 ∵ $\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$. $\Rightarrow Z=\frac{\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}}{\frac{S}{\sigma}}\sim t(2)$

~~∵ $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，$cov(X_i,Y_2)=\frac{\sigma^2}{3}$~~

~~∴ $X_i-Y_2\sim N(0,\frac{2}{3}\sigma^2)$~~

~~$\Rightarrow \sum_{i=7}^{9}\left(\frac{X_i-Y_2}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(3)$~~

~~$\Rightarrow \frac{3S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$~~

~~$\Rightarrow Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{\sigma}\Big/\sqrt{\frac{3S^2}{\sigma^2 \cdot 3}}\sim t(3)$~~

(七) 六. (10 分)设总体ξ的概率分布为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta & \theta & 1-2\theta \end{pmatrix}$， $\theta>0$ 未知，今有其容量为 16 的样本值，其中 1 出现 7 次，2 出现 6 次，3 出现 3 次，试求θ的矩估计值和最大似然估计值.

~~$\because \theta+2\theta+3(1-2\theta)=1 \Rightarrow 3-3\theta=1 \Rightarrow 3\theta=2 \Rightarrow \theta=\frac{2}{3}$~~

~~$\therefore \xi$ 的概率分布为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \end{pmatrix}$~~

$\begin{cases} EX = 3-3\theta \\ EX \triangleq \bar{x} = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow 3-3\theta=\frac{7}{4} \Rightarrow \hat{\theta}_{矩}=\frac{5}{12}$

似然函数为 $L(\theta)=C_{16}^{7}\theta^{7}\cdot C_{9}^{6}\theta^{6}\cdot(1-2\theta)^{3}$

$\ln L(\theta) = \ln C_{16}^{7}\cdot C_{9}^{6} + 13\ln\theta + 3\ln(1-2\theta)$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{13}{\theta} + \frac{3\cdot(-2)}{1-2\theta} \triangleq 0.$

$\Rightarrow \hat{\theta}_{mle} = \frac{13}{32}$

(七)(八) 七. (12 分)设某疾病的患者年龄$\xi\sim N(55, \boxed{100})$. 现某机构抽查了患该病的 400 名患者，发现平均年龄为$\boxed{53}$岁，(1) 在显著水平$\alpha=0.05$下，$\boxed{检验}$该种疾病患者平均年龄是否已发生变化？ (2) 求$\mu=E\xi$的置信度为 95%的置信区间.（设方差都是$\sigma^2=100$）。 $H_0: \mu=55$; $H_1: \mu\neq 55$. $\boxed{\mu=55}$

(1) 检验统计量为 $U=\frac{\bar{X}-55}{10/20}\sim N(0,1)$.

拒绝域为 $|U|\geq Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96$.

$\because U_0=\frac{53-55}{1/2}=-4$, 落在拒绝域内.

$\therefore$ 该种疾病患者平均年龄已发生变化

(2) $(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\because \bar{x}=53.\quad Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.\quad \sigma=10.\quad \sqrt{n}=20.$

$\Rightarrow$ 置信区间为 $(52.02, 53.98)$.

南京大学数学课程试卷 （商学院 10 级）

2011/2012 学年 第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2011.12.28 系别 ______ 学号 ______ 姓名 ______

题号	一 36	二 10	三 10	四 12	五 10	六 10	七 12	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$， $\Phi(1.28)=0.90$， $\Phi(1.58)=0.943$， $\Phi(1.645)=0.95$， $\Phi(1.96)=0.975$， $\Phi(2.33)=0.99$， $\Phi(2.58)=0.995$， $t_{0.025}(27)=2.052$， $t_{0.025}(28)=2.048$， $t_{0.05}(27)=1.703$， $t_{0.05}(28)=1.706$ $t_{0.025}(24)=2.052$， $t_{0.025}(25)=2.048$， $t_{0.05}(24)=1.703$， $t_{0.05}(25)=1.706$

一．（6 分×6=36 分）

(一) （1）给定 $p=P(A), q=P(B), r=P(A\cup B)$， 求 $P(A\bar{B})$ 及 $P(\bar{A}\bar{B})$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\Rightarrow P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=p+q-r$

$\therefore P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=p-(p+q-r)=-q+r$

$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-r.$

(四) （2）设随机变量 $X_i\sim N(2,3^2)$， $i=1,2,\cdots 10$，且相互独立，求 $E[2X_1\sum_{i=1}^{10}X_i]$.

$E(2X_1\sum_{i=1}^{10}X_i)=E\left(2X_1^2+2X_1\sum_{i=2}^{10}X_i\right)$

$=2E(X_1)^2+2E(X_1)\cdot E(\sum_{i=2}^{10}X_i)$

$=2\cdot(E^2X_1+DX_1)+2E(X_1)\cdot\sum_{i=2}^{10}EX_i$

$=2(2^2+3^2)+2\cdot2\cdot2\cdot9$

$=2\cdot13+72=26+72=98.$

(五) （3）设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变序列，且 $\xi_k\sim\begin{pmatrix}2^k & 0 & -2^k\\ 2^{-(2k+1)} & 1-2^{-2k} & 2^{-(2k+1)}\end{pmatrix}$， $k=1,2,\cdots$.

求证：$\forall\varepsilon>0$，有 $\lim_{n\to\infty}P(\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\geq\varepsilon)=0$， 即 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律.

$E\xi_k=2^k\cdot2^{-(2k+1)}+(-2^k)\cdot2^{-(2k+1)}=0.$

$D\xi_k=E(\xi_k^2)-E^2(\xi_k)=2^{2k}\cdot2^{-(2k+1)}+2^{2k}\cdot2^{-(2k+1)}=1$， $E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=0$

$0\leq P(\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n}\xi_k|\geq\varepsilon)=P(|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-0|\geq\varepsilon)\leq\frac{1}{n\varepsilon^2}\to0$ $D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k)=\frac{1}{n}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}P(\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n}\xi_k|\geq\varepsilon)=0$，即 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律.

(六) (4) 已知两正态总体 $\xi \sim N(20, 4)$, $\eta \sim N(20, 6)$. 分别从 ξ, η 中取出 $n_1=10$, $n_2=25$ 的两组独立样本, $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别为 ξ, η 的样本均值. 计算 $P(|\bar{X}-\bar{Y}|>0.8)$.

$\bar{X} \sim N(20, 0.4)$, $\bar{Y} \sim N(20, 0.24)$.

$\bar{X}-\bar{Y} \sim N(0, 0.64)$.

$\therefore P(|\bar{X}-\bar{Y}|>0.8) = P\left(\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{0.8}\right|>1\right) = 2(1-\Phi(1))$

$= 2(1-0.8413) = 2\times 0.1587$

$= 0.3174$

(七) (5) 设某年级数学考试成绩服从正态分布, 随机抽取其中 28 名学生的考试成绩, 得样本均值 $\bar{x}=80$ 分, 样本方差 $\tilde{S}^2=\frac{1}{28}\sum_{i=1}^{28}(x_i-\bar{x})^2=64$, 试求该年级数学考试平均成绩的置信区间 (置信度 0.95).

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, 则 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$\left(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$

$\because \bar{x}=80$, $t_{0.025}(27)=2.052$, $S^2=64$. $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

$\Rightarrow (76.90,\ 83.10)$

(七) (6) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, X_1, X_2, X_3 是一个样本, 试验证 $\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3$, $\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3$, $\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3$ 都是 μ 的无偏估计量, 并比较它们的有效性.

$E(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\mu$;

$E(\hat{\mu}_2)=\mu$; $E(\hat{\mu}_3)=\mu$.

$\therefore \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 均是 μ 的无偏估计量.

$D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{25}\sigma^2+\frac{9}{100}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2=\frac{19}{50}\sigma^2$

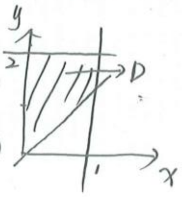
$D(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{16}\sigma^2+\frac{25}{144}\sigma^2=\frac{25}{72}\sigma^2$

$D(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{9}\sigma^2+\frac{1}{36}\sigma^2+\frac{1}{4}\sigma^2=\frac{7}{18}\sigma^2$

$\because D(\hat{\mu}_2)<D(\hat{\mu}_1)<D(\hat{\mu}_3)$

$\therefore$ 有效性依次为: $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_3$

(三) 二. (12 分) 设 (ξ, η) 的联合密度为 $p(x,y)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 试求: (1) 边际密度 $p_1(x)$ 和 $p_2(y)$, ξ 与 η 是否相互独立? 说明理由; (2) $P\{\xi<\eta\}$ 的值.



(1) $p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^2(x^2+\frac{1}{3}xy)dy=(x^2y+\frac{1}{6}xy^2)\Big|_0^2=2x^2+\frac{2}{3}x$. $(0\le x\le 1)$

$\Rightarrow p_1(x)=\begin{cases} 2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_0^1(x^2+\frac{1}{3}xy)dx=(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}yx^2)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y$, $(0\le y\le 2)$

$\Rightarrow p_2(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}y & (0\le y\le 2) \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$

$\because p_1(x)\cdot p_2(y)\ne p(x,y)$. $\therefore \xi, \eta$ 不独立.

(2) $P(\xi<\eta)=\iint_D p(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^2(x^2+\frac{1}{3}xy)dy=\int_0^1(2x^2+\frac{2}{3}x-\frac{7}{6}x^3)dx$

$=\frac{17}{24}$

独立

三. (10分)设 $X \sim U(-0.5, 0.5)$，而 $Y=\cos X$，试问：(1) X 与 Y 是否不相关？(2) X 与 Y 是否独立？

(四)(均须说明理由).

(1) $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$.

$$EXY=\int_{-0.5}^{0.5} x\cos x\, dx = 0.$$

$$EX=\frac{-0.5+0.5}{2}=0$$

$\therefore \mathrm{cov}(X,Y)=0$

$\therefore$ X与Y不相关

(2) $\because Y=\cos X$, $\therefore$ X与Y不独立.

(五) 四. (10分)设某地区拟建一家新电影院，据分析，该地区平均每日约有 1600 人去看电影，且预计新电影院建成后，平均每天约有四分之三的观众将去这家新电影院，现该影院在计划座位数时，要求座位数尽可能多，但还要求“空座位数达到 200 或更多”的概率不能超过 0.1，问至多可设多少个座位？

解：设X表示去该影院的人数，则 $X\sim B(1600, \frac{3}{4})$. 设m个座位.

$EX=1200$. $DX=300$. $X \sim N(1200, 300)$.

$$P(m-X\geq 200)=P(X\leq m-200)=P\left(\frac{X-1200}{10\sqrt{3}}\leq\frac{m-1400}{10\sqrt{3}}\right)=\Phi\left(\frac{m-1400}{10\sqrt{3}}\right)\leq 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{m-1400}{10\sqrt{3}}\leq -1.28. \quad \Rightarrow m\leq 1400-12.8\sqrt{3}=1377.856.$$

$\therefore$ 至多可设 1377 个座位.

(六) 五. (10分)设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 是取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的容量为 5 的样本，试求下列统计量的分布：(1) $Y=\frac{1}{2\sigma^2}(X_1+X_2)^2+\frac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2+X_5^2)$；(2) $Z=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$.（如有自由度，必须指出）

(1) $X_1+X_2\sim N(0, 2\sigma^2)$

$$\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\therefore \frac{1}{2\sigma^2}(X_1+X_2)^2\sim \chi^2(1).$$

$$\because \frac{X_3}{\sigma}\sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1).$$

$$\Rightarrow Y\sim\chi^2(4).$$

(2). $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$

$$\frac{1}{\sigma^2}(X_3^2+X_4^2+X_5^2)\sim\chi^2(3).$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{3\sigma^2}(X_3^2+X_4^2+X_5^2)}}\sim t(3).$$

即 $Z\sim t(3)$.

(七) 六. (12 分)设总体 X 服从$\boxed{\text{二项分布}}$，即 $X \sim B(m,\ p)$，其中 m 是已知的自然数，p 是未知参数，$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是来自总体 X 的随机样本，(1)求 p 的矩估计量与极大似然估计量. (2)这些估计量是否为 p 的无偏估计量？是否为 p 的$\boxed{\text{一致估计量}}$？（均须说明理由）.

(1). $EX = mp \triangleq \bar{x}$

$\Rightarrow \hat{p}_{矩} = \frac{1}{m}\bar{x}$

$P(X=x) = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}$

似然函数为

$L(p) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i}$

$= \prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i} p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\ln L(p) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \left(mn - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)$

$\frac{d(\ln L(p))}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{mn-\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} \triangleq 0$

$\Rightarrow \hat{p}_{mle} = \frac{\bar{x}}{m}$

(2). $E(\hat{p}) = E\left(\frac{1}{m}\bar{x}\right) = \frac{1}{m}E(\bar{x}) = \frac{1}{m}\cdot mp = p$

∴ 是无偏估计.

~~$\hat{p} = \frac{1}{m}\bar{x} \xrightarrow{P} E(\frac{1}{m}\bar{x}) = p$~~

~~∴ 是一致估计.~~

$D(\hat{p}) = D\left(\frac{1}{m}\bar{X}\right) = \frac{1}{m^2}D\bar{X} = \frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{n}DX$

$= \frac{mp(1-p)}{m^2 n} = \frac{p(1-p)}{mn} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

∴ 是一致估计.

(八)(七) 七. (10 分)一种元件，要求其平均使用寿命不得低于是$\boxed{1000\text{ 小时}}$，今从这批元件中随机地抽取 25 件，测得其平均寿命为 950 小时. 已知该种元件寿命 ξ 服从标准差$\boxed{\sigma=100}$小时的正态分布，（1）试在显著水平 $\alpha=0.05$ 下确定这批元件是否合格？（2）求 $\mu=E\xi$ 的置信度为 95% 的置信区间.

(1) $H_0: \mu \geq 1000$；$H_1: \mu < 1000$. $U = \frac{\bar{X}-1000}{100/5}$

拒绝域为 $U < -Z_\alpha = -Z_{0.05} = -1.645$.

$U_0 = \frac{950-1000}{100/5} = -2.5 < -1.645$.

∴拒绝原假设，即元件不合格

(2). $\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\bar{x} = 950$, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$. $\sigma = 100$. $\sqrt{n} = 5$.

$\Rightarrow (910.8,\ 989.2)$.

南京大学数学课程试卷 （商学院 11 级）

2012/2013 学年 第一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率统计 (A 卷)

考试时间 2013.1.9 系别 ______ 学号 ______ 姓名 ______

题号	一 36	二 10	三 12	四 10	五 10	六 12	七 10	合计
得分								

$\Phi(1.0)=0.8413$, $\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.64)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(2.33)=0.99$, $\Phi(2.58)=0.995$, $t_{0.025}(16)=2.12$, $t_{0.025}(17)=2.11$, $t_{0.05}(16)=1.746$, $t_{0.05}(17)=1.740$

一．(6 分×6=36 分)

(一) 1．某产品有 15 件，其中有次品 2 件，现从中任取 3 件，求至少取到 1 件次品的概率.

$P=1-\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}=1-\frac{22}{35}=\frac{13}{35}$

(四) 2．设随机变量 $\xi\sim N(1,4)$, $\eta\sim E(\frac{1}{3})$, 且 ξ 与 η 独立，求 $E(5\xi-3\eta)$ 和 $D(5\xi-3\eta)$ 的值.

$\because \xi\sim N(1,4)$. $\therefore E\xi=1$. $D\xi=4$

$\because \eta\sim e(\frac{1}{3})$. $\therefore E\eta=3$. $D\eta=9$.

$\therefore E(5\xi-3\eta)=5E\xi-3E\eta=5\cdot1-3\cdot3=5-9=-4$.

$D(5\xi-3\eta)=25D\xi+9D\eta=100+81=181$

(五) 3．设随机变量 X 和 Y 的 EX=EY=2，DX=1，DY=4， $r_{XY}=0.5$， 用切比雪夫不等式计算 $P(|X-Y|\geq 6)$ 至多为多少？ $E(X-Y)=EX-EY=0$, $D(X-Y)=DX+DY-2cov(X,Y)=3$

$P(|X-Y|\geq 6)\leq\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

$\therefore$ 至多为 $\frac{1}{12}$

(六) 4.设总体 X 与 Y 相互独立，且都服从 $N(0,\sigma^2)$， (X_1,X_2,X_3) 和 (Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) 分别是来自 X 和 Y 的样本，求统计量 $T=\frac{\sum_{i=1}^{3}X_i^2}{\sum_{i=1}^{4}(Y_i-\bar{Y})^2}$ 的分布（如有自由度，须给出）.

$\because X_i\sim N(0,\sigma^2)$. $\therefore \frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)\Rightarrow\sum_{i=1}^{3}(\frac{X_i}{\sigma})^2\sim\chi^2(3)$;

$\because \frac{\sum_{i=1}^{4}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(3)$.

$\therefore T=\frac{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{3}X_i^2/3}{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{4}(Y_i-\bar{Y})^2/3}\sim F(3,3)$.

(八) 5. 若总体$\xi \sim N(\mu, 0.9^2)$，取自总体的容量为 9 的样本均值$\bar{x}=5$，求未知参数μ的置信度为 0.95 的置信区间.

$(\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\because \bar{x}=5. \quad Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.025}=1.96. \quad \sigma=0.9. \quad \sqrt{n}=3.$

$\Rightarrow (4.412,\ 5.588)$

(七) 6. 已知总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta \end{cases}$，$\theta$为未知参数，$X_1, X_2, \cdots X_n$ 为样本，求θ的极大似然估计量.

似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)}, & x_i>\theta \\ 0, & 其它 \end{cases}$

$x_i>\theta$ 时，$L(\theta)=e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$

$\ln L(\theta)=-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=n\theta-\sum_{i=1}^{n}x_i.$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=n>0.$

$\because \theta\le x_{(1)}\le x_{(2)}\le\cdots\le x_{(n)}$

$\therefore \hat{\theta}_{MLE}=x_{(1)}.$

即 $\hat{\theta}_{MLE}=X_{(1)}.$

(一) 二. (10 分)设事件 A 在一次试验中发生的概率为$\boxed{\frac{1}{4}}$. 如果做了四次伯努利独立试验,事件 A 均未发生,则事件 B 也不发生；如果四次伯努利试验中事件 A 发生一次,则事件 B 发生的概率为$\frac{2}{3}$；而四次试验中若事件 A 发生两次及两次以上,则事件 B 一定发生. 试求：(1)P(B)； (2)若已知事件 B 已经发生，问四次试验中事件 A 至少发生两次及两次以上的概率.

X $\quad X\sim B(4,\frac{1}{4})$

(1) $P(B)=C_4^1(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^3\cdot\frac{2}{3}+(1-C_4^0(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^4-C_4^1(\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^3)$

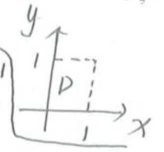
$=\frac{9}{32}+1-\frac{81}{256}-\frac{27}{64}=\frac{139}{256}$

(2). 记四次实验中A至少发生两次及以上为事件C.

则 $P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{1-\frac{81}{256}-\frac{27}{64}}{139/256}=\frac{87}{139}$

(四) 三．(12 分)设(ξ,η)～$p(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，试求：(1) 边际密度 $p_\xi(x)$ 和 $p_\eta(y)$；

(2) ξ 与 η 的相关系数 $r_{\xi\eta}$.



(1) $p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy=\int_0^1(2-x-y)\,dy=\left[(2-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$

$=(2-x)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-x,\quad 0<x<1.$

$\Rightarrow p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

同理可得 $p_\eta(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}-y, & 0<y<1\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(2) $cov(\xi,\eta)=E(XY)-EX\cdot EY.$

$EXY=\iint_D xy(2-x-y)\,dxdy=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y(2-x-y)\,dy=\int_0^1\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)x\,dx=\frac{1}{6}.$

$EX=\iint_D x(2-x-y)\,dxdy=\int_0^1 x\,dx\int_0^1(2-x-y)\,dy=\int_0^1 x\left(\frac{3}{2}-x\right)dx=\frac{5}{12}=EY.$

$EX^2=\iint_D x^2(2-x-y)\,dxdy=\int_0^1 x^2dx\int_0^1(2-x-y)\,dy=\int_0^1 x^2\left(\frac{3}{2}-x\right)dx=\frac{1}{4}.\Rightarrow DX=DY=\frac{11}{144}.$

$\Rightarrow \rho_{XY}=\left[\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{11}{144}\right)=-\frac{1}{11}.$

(五) 四．(10 分)设某种电子元件的使用寿命（单位：小时）服从参数为 $\lambda=0.1$ 的指数分布，其使用情况是第一个损坏第二个立即使用，第二个损坏第三个立即使用等等．已知每个元件的价格为 10 元，那么在一年中至少需要多少元才能以 95% 的概率保证该元件够用（假设一年有 306 个工作日，每个工作日为 8 小时）．

设每个的寿命为 X_i，则 $X_i\sim e(0.1)$. $\Rightarrow f_{X_i}(x_i)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x_i}, & x_i>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

记有n个. 则 $\sum_{i=1}^n X_i\sim N(10n,\ 100n)$.

$P\left(\sum_{i=1}^n X_i>306\times 8\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i-10n}{10\sqrt{n}}>\frac{306\times 8-10n}{10\sqrt{n}}\right)=1-\Phi\left(\frac{2448-10n}{10\sqrt{n}}\right)$

$\geq 95\%.$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{2448-10n}{10\sqrt{n}}\right)\leq 0.05.\quad\Rightarrow \frac{2448-10n}{10\sqrt{n}}\leq -1.64.\quad\Rightarrow n=272$

∴至少需2720元.

(七) 五．(10 分)设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为取自总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$，试问统计量 $T=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n iX_i$ 是 μ 的无偏和一致估计量吗？（须说明理由）．

$ET=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n iEX_i=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n i\mu=\mu\cdot\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{(1+n)n}{2}=\mu.$

∴T是μ的无偏估计量.

$DT=\frac{2^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^n i^2DX_i=\frac{2^2}{n^2(n+1)^2}\sigma^2\sum_{i=1}^n i^2=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2(2n+1)\sigma^2}{3n^2(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

∴是一致

(x) 六. (12 分)设有两总体 X～N（μ_1, σ^2）和 Y～N（μ_2, σ^2），且相互独立，$X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ 与 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ 分别是取自 X 与 Y 的样本，设 $S_1^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$ 和 $S_2^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$，(1) 试证对任意常数 a 和 b， a+b=1， 有 $T=aS_1^2+bS_2^2$ 均是 σ^2 的无偏估计； (2)试确定常数 a 和 b， 使方差 D(T)达到最小.

(1) $ET=E(aS_1^2+bS_2^2)=aES_1^2+bES_2^2=a\cdot\sigma^2+b\sigma^2=(a+b)\sigma^2=\sigma^2$

∴ 无偏.

(2). $DT=a^2D(S_1^2)+b^2D(S_2^2)$.

∵ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. ∴ $DS^2=2(n-1)\cdot\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}=\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

$\Rightarrow DT=a^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n_1-1}+b^2\cdot\frac{2\sigma^4}{n_2-1}=2\sigma^4\left[\frac{a^2}{n_1-1}+\frac{(1-a)^2}{n_2-1}\right]\triangleq g(a)$.

$g'(a)=2\sigma^4\left[\frac{2a}{n_1-1}+\frac{-2(1-a)}{n_2-1}\right]\triangleq 0$.

$\Rightarrow a=\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$. $b=\frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$

(v) 七. (10 分)已知某种罐头中维生素 C(Vc)的含量 X 服从正态分布，按照规定 Vc 的平均含量不得少于 21 毫克，现从一批罐头中取了 $\boxed{17}$ 罐，算得 Vc 含量平均值 $\bar{x}=19$，样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{17}(x_i-\bar{x})^2}=3.98$，

（1）问该批罐头 Vc 的含量是否合格? (α=0.05)（2）求 μ=EX 的置信度为 95%的置信区间.

(1). $H_0: \mu\geqslant 21$; $H_1: \mu<21$.

$T=\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(16)$

拒绝域为 $T<-t_\alpha(16)=-t_{0.05}(16)=-1.746$.

$T_0=\frac{19-21}{3.98/\sqrt{17}}=-2.071924$.

落在拒绝域内，故拒绝原假设，即认为该批罐头 Vc 的含量不合格.

(2). $\left(\bar{x}-t_{\frac{\alpha}{2}}(16)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\frac{\alpha}{2}}(16)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. ∵ $t_{0.025}(16)=2.12$

$\Rightarrow(16.9535814, 21.0464186)$