离散数学（2023）作业 01 - 命题逻辑

February 24, 2023

Problem 1

p	q	r	$\neg p$	$(p \to q)$	$(\neg p \to r)$	$(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Table 1: **Problem 1 真值表**

Problem 2

1. $r \wedge \neg p$
2. $\neg p \wedge q \wedge r$
3. $r \to (q \leftrightarrow \neg p)$
4. $\neg q \wedge \neg p \wedge r$
5. $(\neg r \wedge \neg p) \to q$
6. $(p \wedge r) \to \neg q$

Problem 3

1. Jennifer 和 Teja 不是朋友。
2. 面包师说的“一打”不是 13 个。
3. Abby 每天发送的短信数量少于 100 条。
4. 121 不是一个完全平方数。

Problem 4

1. **真**。假 $\leftrightarrow$ 假。
2. **假**。真 $\to$ 假。
3. **真**。假 $\to$ 假。
4. **真**。假 $\to$ 真。

Problem 5

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Table 2: **Problem 5 真值表**

由于 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值一样, 所以 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Problem 6

令 p、q、r 为如下命题：

- p: TA 是理科学生
- q: TA 是文科学生
- r: TA 学好了数学

原题可形式化为：$\{p \to r, \neg q \to p, \neg r\} \vdash q$

证明.

1.	$p \to r$	premise
2.	$\neg r$	premise
3.	$\neg p$	MT 1,2
4.	$\neg q \to p$	premise
5.	q	MT 3,4

□

Problem 7

设：

- p: 矿样为铁；
- q: 矿样为铜；
- r: 矿样为锡；

那么，三人的判断分别可以形式化为命题逻辑公式 F_1, F_2, F_3：

- 甲：$F_1 \equiv \neg p \wedge \neg q$.
- 乙：$F_2 \equiv \neg p \wedge r$.
- 丙：$F_3 \equiv p \wedge \neg r$.

显然，命题 p, q, r 至多只有一项成立，它们的真值指派记为 "T" 和 "F"。另外，分别记每人判断正确率 "错了"、"对一半" 和 "全对" 为 0 ，0.5 ，1 。那么，可以构建由 $\{p, q, r\}$ 的真值到 $\{F_1, F_2, F_3\}$ 正确率的映射如表3，并得到：该矿样本为铁。甲对一半，乙全错，丙全对。

p	q	r	F_1	F_2	F_3
F	F	T	1	1	0
F	T	F	0.5	0.5	0.5
T	F	F	0.5	0	1

Table 3: Problem 7 的命题真值-判断正确率映射关系

Problem 8

记：

$$\begin{aligned} A &\equiv (\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \\ B &\equiv ((\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg\alpha) \wedge ((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma)))) \end{aligned}$$

根据两公式的真值表4可知，两公式并不互为重言蕴含

α	β	γ	A	B	$A \to B$	$B \to A$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Table 4: Problem 8 的真值表

Problem 9

证明.

- $(1 \Rightarrow 2)$: 根据定义，$\alpha \models \beta$ 说明当 α 为真时 β 也为真。因此 $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ 恒真，因此 $\alpha \to \beta$ 为重言式，即 $\models (\alpha \to \beta)$.
- $(2 \Rightarrow 3)$:
  - $(\models)$: 由于 $\alpha \to \beta$ 为重言式，那么 α 为真时 β 必为真，此时 $(\alpha \wedge \beta)$ 亦为真，因此 $\alpha \models (\alpha \wedge \beta)$;
  - $(\dashv)$: 显然，$(\alpha \wedge \beta)$ 为真时有 α 为真，故 $(\alpha \wedge \beta) \models \alpha$ 。

  所以，α 与 $(\alpha \wedge \beta)$ 重言等价。
- $(3 \Rightarrow 4)$:
  - $(\models)$: 显然 β 为真时，$(\alpha \vee \beta)$ 必为真，因此有 $\beta \models (\alpha \vee \beta)$;
  - $(\dashv)$: $(\alpha \vee \beta)$ 为真可分为下列两种情况讨论：

    (a) α 为真，由 α 与 $(\alpha \wedge \beta)$ 重言等价可知，α 为真时，$(\alpha \wedge \beta)$ 必为真，因此 β 亦为真；

    (b) α 为假，那么根据 $(\alpha \vee \beta)$ 可知 β 必须为真；

    因此有 $(\alpha \vee \beta) \models \beta$ 。

  故 β 与 $(\alpha \vee \beta)$ 重言等价。
- $(4 \Rightarrow 1)$: 由 $(\alpha \vee \beta) \models \beta$ 可知，α 为真时，β 必为真。根据定义可得 $\alpha \models \beta$ 。

□

Problem 10

(1) **证明.**

1.	α	assumption
2.	β	assumption
3.	α	1
4.	$(\beta \to \alpha)$	→i 2, 3
5.	$\alpha \to (\beta \to \alpha)$	→i 1–4

□

(2) **证明.**

1.	$\alpha \to (\beta \to \gamma))$	assumption
2.	$\alpha \to \beta$	assumption
3.	α	assumption
4.	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	1
5.	$\beta \to \gamma$	→e 3, 4
6.	$\alpha \to \beta$	2
7.	β	→e 3, 6
8.	γ	→e 5, 7
9.	$\alpha \to \gamma$	→i 3–8
10.	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	→i 2–9
11.	$(\alpha \to (\beta \to \gamma))) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	→i 1–10

□

(3) **证明.**

1.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	assumption
2.	$\neg\beta \to \alpha$	assumption
3.	$\neg\beta$	assumption
4.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	1
5.	$\neg\alpha$	$\to$e 3, 4
6.	$\neg\beta \to \alpha$	2
7.	α	$\to$e 3, 6
8.	$\bot$	$\neg$e 5, 7
9.	β	$\bot$e, 3–7
10.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to \beta$	$\to$i 2–8
11.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	$\to$i 1–9

$\square$