

数理逻辑（2024 春）作业 - 07

I 证明（二选一）

1. [Enderton, pp.145] (语义 EI 规则) 假设常数符 c 在 wff φ 和 ψ 以及 wff 集 Γ 中从未出现, 且 $\Gamma \cup \{\varphi_c^x\} \models \psi$, 证明 (不使用可靠性与完备性定理) $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\} \models \psi$.
2. [Enderton, pp.145] 假设 $\Gamma \vdash \varphi$, 且 P 是一个从未出现在 Γ 和 φ 中的谓词符号。问: 是否存在一个从 Γ 出发到 φ 的证明, 其中 P 不出现?

2 证明（二选一）

1. [Enderton, pp.146] 令 $\Gamma = \{\neg \forall v_1, P v_1, P v_2, P v_3, \dots\}$. 请问 Γ 是一致的吗? 它是可满足的吗? 请证明你的结论。
2. [Enderton, pp.146] 证明: 一张无穷的地图 (有无穷个国家) 能用四种颜色着色, 当且仅当它的每一个有穷的子地图可以。

3 证明（四选二）

1. [Enderton, pp.146] 完备性定理告诉我们, 每个语句要么是有效的, 即存在一个证明 (从 \emptyset 出发); 要么就有一个结构令其为假。请判断下面的语句是否有效, 并证明你的结论
 - (a) $\forall x (Qx \rightarrow \forall y Qy)$
 - (b) $(\exists x Px \rightarrow \forall y Qy) \rightarrow \forall z (Pz \rightarrow Qz)$
 - (c) $\forall z (Pz \rightarrow Qz) \rightarrow (\exists x Px \rightarrow \forall y Qy)$
 - (d) $\neg \exists y \forall x (Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$