

# 数理逻辑（2024 春）作业 - 08

## I 预备知识

下面我们定义一个一阶逻辑语言的子集：逻辑程序。

### I.1 子句

**定义 1:** 一个字句 (clause) 是具有以下形式的 wff

$$\forall x_1 \cdots \forall x_S (L_1 \vee \cdots \vee L_m)$$

其中每个  $L_i$  都是一个原子公式或原子公式的否定，它们也被称为逻辑文字 (literal)， $x_1, \dots, x_S$  是  $L_1 \vee \cdots \vee L_m$  中所有出现过的变元。

例如， $\forall x \forall y \forall z (p(x, z) \vee \neg q(x, y) \vee \neg r(y, z))$  就是一个字句。一般情况下一个字句可以表示为

$$\forall x_1 \cdots \forall x_S (A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n)$$

其中的  $A_i$  和  $B_j$  都是原子公式， $x_1, \dots, x_S$  是  $A_1 \vee \cdots \vee A_k \vee \neg B_1 \vee \cdots \vee \neg B_n$  中出现的全部变元。它也能表示成

$$A_1, \dots, A_k \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

这里省略了所有的量词，且用逗号代替了  $A_i$  间的析取符号（“或”）和  $B_j$  间的合取符号（“与”）。蕴涵词的箭头所指部分  $A_1, \dots, A_k$  被称为规则头 (head) 或后件 (consequence)，另一部分  $B_1, \dots, B_n$  被称为规则体 (body) 或前件 (antecedent)。

### I.2 逻辑程序

**定义 2:** 一个定子句 (definite clause) 指只有一个后件的子句

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

由有穷个定子句构成的集合被称为定程序 (definite program) 或逻辑程序 (logic program)。若定程序中所有子句的规则头都是同一个谓词  $p$ ，我们称这个定程序为  $p$  的定义 (definition)。

### I.3 事实和目标

**定义 3:** 单位子句 (unit clause) 被用来在定程序中声明一个事实，它指后件为空的定子句

$$A \leftarrow$$

目标子句 (goal clause) 指前件为空的子句

$$\leftarrow B_1, \dots, B_n$$

其中每个  $B_i$  被称为该目标下的一个子目标 (sub-goal)。空子句 (empty clause) 指前后件均为空的子句，记为  $\square$ 。

### I.4 Horn 子句

**定义 5:** 一个 Horn 子句是一个定子句或一个目标子句。

### I.5 接地

**定义 6:** 一个接地项 (ground term，或译为具体项) 是一个 FOL 项，但不包含任意变元。类似的，一个接地原子 (ground atom，或具体原子) 是不包含任意变元的原子公式。

## 1.6 Herbrand 域

**定义 7:** 令  $L$  为一阶语言，它的 Herbrand 域 (Herbrand Universe)  $U_L$  是  $L$  中的全部接地项。

例如对于一个逻辑程序，其中  $x, y$  为变元：

$$\begin{aligned} p(x) &\leftarrow q(f(x), g(x)) \\ r(y) &\leftarrow \end{aligned}$$

那么它的 FOL 语言中有函数词  $f, g$ ，谓词  $p, q, r$ 。若该语言中只有一个常元  $a$ ，那么它的 Herbrand 域为

$$\{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), g(g(a)), \dots\}$$

## 1.7 Herbrand 基

**定义 8:** 令  $L$  为一阶语言，它的 Herbrand 基 (Herbrand Base)  $B_L$  是  $L$  中的全部接地原子。

例如对于上面的例子，它的 Herbrand 基为：

$$\{p(a), r(a), q(a, a), p(f(a)), r(f(a)), p(g(a)), r(g(a)), q(a, f(a)), q(f(a), a), q(f(a), f(a)), q(f(a), g(a)), \dots\}$$

## 2 作业（推荐大家通过自行查资料完成）

### 2.1 命题逻辑程序

考虑命题逻辑程序，即不含谓词和函数词的逻辑程序，那么每条子句中的原子公式均为一个命题符。

给定一个包含定子句  $F_1, \dots, F_n$  的命题逻辑程序以及一个系列待证明子目标，它可以表示为一个合取式  $g_1 \wedge \dots \wedge g_m$ ，逻辑程序的任务是判断是否有下面的式子成立：

$$\{F_1, \dots, F_n\} \models g_1 \wedge \dots \wedge g_m$$

它的推理系统非常简单：

1. 子句  $F_1, \dots, F_n$  被当作该程序中的公理 (or 前提)
2. 推理规则只有一条，被称为“归结”或“消去” (Resolution)：

$$\frac{A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee c \quad B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee \neg c}{A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee B_1 \vee B_2 \vee \dots}$$

这里采用的是 Gentzen 式的记法，横线表示“逻辑蕴涵”。可见，两个子句中相反的逻辑文字  $c$  和  $\neg c$  被消掉了。

#### 2.1.1 问题 1

命题逻辑程序的证明系统拥有可靠性吗？请证明你的结论。

#### 2.1.2 问题 2（可选）

命题逻辑程序的证明系统拥有完备性吗？请证明你的结论。

### 2.2 一阶逻辑程序的语义

和一般的 FOL 一样，逻辑程序中可以定义一个语义结构来判断其真假。

#### 2.2.1 问题 3

- 仿照教材上的方式，为逻辑程序定义一个结构作为它的解释。
- 若一个逻辑程序  $P$  是一致的，那么它就拥有一个模型（因为它只包含闭公式）。仿照极大一致集的方式，在你定义的结构中构造出  $P$  的模型。（提示：Herbrand Model）