作业 1

完成日期：2024 年 3 月 14 日

姓名: 田 永 铭
学号: 221900180
成绩:

Problem 1 .

Solution: 设 p 表示鱼大，q 表示鱼刺大，r 表示鱼肉少。则可以形式化为：

1.p $\rightarrow$ q
2.q $\rightarrow$ r
3.r $\rightarrow$ $\neg$p
4.p $\rightarrow$ $\neg$p

步骤中非有效的点：

1. 第一句鱼的大小与于此大小无直接因果关系，仅能说同种鱼在同种环境条件下可能鱼越大，鱼刺越大。可以找到极端例子是的第一句前件真，后件假。

2. 步骤 2、3 同样不具有有效性。能找到两种鱼，A 的鱼刺 >B 的鱼刺，但 A 的肉 >B 的肉；也有肉少但体积大的鱼。

故每一步均非有效。

Problem 2 .

Solution: 先证除了长度为 2、3、6 的合式公式都存在 $\forall$ 的单个命题符号长度为 1，一元联结词 $\neg$ 使得公式长度增加 3(含括号)。设 A_1、A_2 为长度是 1 的命题符号，则 $A_1, (A_1 \cap A_2), ((A_1 \cap A_2) \cap A_2)$ 分别为长度是 1，$\cancel{4}$ 5， 9 的合式公式。结合取反长度就 +3，可构造出长度为

$$\begin{cases} length = 1, 4, 7... \\ length = 5, 8, 11... \\ length = 9, 12, 15... \end{cases} \tag{1}$$

的合式公式。

显然，除了 2、3、6 以外的长度的公式均已被包含，所以存在。

再证长度为 2、3、6 的合式公式都不存在 设性质 F(x) 表示 x 这个合式公式长度并非 2、3、6。假设 α,β 满足 F(α),F(β),$\neg\alpha$,($\alpha \star \beta$)($\star$ 表示二元联结词) 长度显然不为 2、3。假设二者中有长度为 6 的，可直接推出 α 长度为 3 或者 α 与 β 长度之和为 3，这均不成立，所以假设不成立。所以长度为 2、3、6 的合式公式必不存在。

Problem 3 .

Solution:

1. **奠基** 当 $c = 0$ 时，无二元联结词，α 中命题符号只可能出现 1 次数 (0 次的话不是 wff)，形如 A 或者 $\neg$A, 所以 $s = 1$, 所以 $s = c + 1$ 成立。

2. **归纳假设** 假设当 $c = k$ 的时候，$s = c + 1 = k + 1$。

3. **归纳** 当 $c = k + 1$ 的时候，表示在 $c = k$ 的基础上增加了 1 个二元联结词。设增加前的合式公式为 α, 增加后为 α'。不妨设增加的二元联结词为 $\cap$, 则变化为 $\alpha' = (\alpha \cap A)$, 其中 A 为命题符号。所以 $s = (k + 1) + 1 = k + 2 = c + 1$。

所以 $s = c + 1$ 得证。

Problem 4 .

Solution:

1. **先证 S 中的 $\forall$ 一个合式公式 α 均在 S' 中，即可以由 S' 构造出 α:** 由 S 在 5 种运算下的封闭性可知:α 可以由 S 中的各个公式构造出来，S' 只需要依次构造即可。具体来说，若 S 由形如 $A \star B$($\star$ 表示二元联结词)，则可以讲 A 与 B 的构造序列进行拼接，并添加新元素 $A \star B$，得到新的构造序列，依此可以构造出 α。而取否这样的变化亦是如此。

2. **再证 S' 中的所有构造序列产生的结论 α, 均在 S 中:** 采用反证法: 假设 S' 中可构造出合式公式 β，且 β 不在 S 中，而 S' 构造又满足定义 1.4 的条件，即合法。那么这与 S 本身定义关于五种公式构造封闭相矛盾。所以 S' 构造出的 α 必在 S 中。

综上: 得证。