2.（12 分）试求定义在一个n元集合上的不同二元关系的总数.

解：方法一：将每个二元关系看做一个关系矩阵，因为无任何限制，因此，关系矩阵的个数即为二元关系的个数。关系矩阵为$n\times n$个元素，每个元素只能取0或者1，因此关系矩阵的总数为2^{n^2}个，这表明定义在n元集上的二元关系总数为2^{n^2}.

解法二：设n元集为A，因为任何二元关系皆为$A\times A$之子集，而$|A\times A|=n^2$故所有定义在n元集A上的二元关系的总数等于$A\times A$之子集的总数，即$|P(A\times A)|=2^{n^2}$.

3.（12 分）设函数$f: X \to Y$，$g: Y \to X$；设$g \circ f$为X上的恒同函数（$i.e. g\big(f(x)\big) = I_X(x)$），证明：$f$为单射函数，$g$为满射函数.

证明：先证$f: X \to Y$为单射，$(\forall x_1, x_2 \in X)\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)(\because g: Y \to X$为函数$) \Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2(\because g \circ f = \mathrm{I}_X)$□

再证g为满射，$(\forall x \in X) \Longrightarrow \exists y(y \in Y \wedge y = f(x))(\because \mathrm{dom} f = X) \Longrightarrow \exists y \exists x'\big(y \in Y \wedge x' \in X \wedge y = f(x) \wedge x' = g(y)\big)$（$\because \mathrm{dom} g = Y$）$\Longrightarrow \exists y \exists x'\big(y \in Y \wedge x' \in X \wedge x' = g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = x\big)(\because g \circ f = \mathrm{I}_X) \Longrightarrow \exists y(y \in Y \wedge g(y) = x)$，故$g$为满射.□

4.（12 分）请分别给出 3 对不可列（$i.e.$不可数）集合A、B，使其交集$A \cap B$分别满足：①为有限集；②为可列无穷集；③为不可列集.

解：答案有多种。例如：

① $A = [0,1]$ （**实数从 0 到 1 的闭区间**） $B = [1,2]$； $A \cap B = \{1\}$；

② $A = [0,1] \cup \boldsymbol{Z}$，$A = [2,3] \cup \boldsymbol{Z}$，$A \cap B = \boldsymbol{Z}$ ；

③ $A = [0,1]$，$A = [0.5,10]$，$A \cap B = [0.5,1]$；

有多种答案，请自行验证，只要给出正确的集合 A、B 即可全分。

5.（12 分）请给出集合$\{a,b,c,d,e\}$上包含关系$\{(a,b),(a,c),(d,e)\}$的最小等价关系（*i.e.*上述关系的“等价闭包”）.

解：这个最小等价关系为：$\{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$

若同学们分步解决则可分步给分，比如先使之满足对称性，再使之满足传递性，再使之满足自反性等。

6.（14 分）设B为布尔代数，试证明：

(1) $(\forall a_1,a_2,\cdots,a_n \in B)((a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_n')$

(2) $(\forall x,y \in B)(x \preccurlyeq y \Leftrightarrow y' \preccurlyeq x')$

其中x'表示x之补元.

(1) 证明：（7 分）

证明：

对n实施数学归纳法。当$n=2$时，等式成立（德摩根律），

I.H. $n=k$时命题成立，则

I.S.

$$\begin{aligned}(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{k+1})' &= \left((a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \vee a_{k+1}\right)' \\ &= (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k)' \wedge a_{k+1}' \\ &= (a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k') \wedge a_{k+1}' \\ &= a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k' \wedge a_{k+1}'\end{aligned}$$

(2) 证法一：（7 分）

证：

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x' \vee y' = x' (\text{de Morgen}) \Leftrightarrow y' \preccurlyeq x'$$

证法二：$(\forall x,y \in B) x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow (x \wedge y)' = x \Leftrightarrow x' \vee y' = x' \Leftrightarrow y' \preccurlyeq x'$.□

7. （12分）将"所有大于等于9的完全平方数，减去1之后一定是合数."翻译为逻辑表达式，并用数学归纳法证明结论成立.

解： 用一阶谓词逻辑建立谓词如下：$Z(x)$: x为整数，$C(x)$: x为合数；则语句可翻译为$\forall x\big(\exists y(Z(x) \wedge Z(y) \wedge x \geq 9 \wedge x = y^2) \rightarrow C(x-1)\big)$，也可将合数谓词用因子形式表达，但较复杂.

证明（本部分 7 分）： **Basis.** 当$n = 9$时，显然$n - 1 = 8$为合数；**I.H.**假设$n = x^2$ $(x^2 > 9)$时命题成立，即$x^2 - 1$为合数，则 **I.S.** 当$n = (x+1)^2 - 1 = x(x+2)$ 时，根据归纳假设，$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$为合数，故$x+1$为一真因子（不为 1，且小于$x^2 - 1$），故$1 < x + 2 < (x+1)^2 - 1$，可得$x + 2$为$(x+1)^2 - 1$的真因子，后者为合数.根据数学归纳法，命题成立. □

8.（14分）请用命题逻辑方法辅助设计包含三个开关A,B,C的照明线路，使得电灯在下列三种条件下不亮，其余情况下均亮：(1)三个开关均断开；(2)开关A,B均断开且开关C闭合；(3)开关B,C均断开且开关A闭合。画出尽可能简单的电路图（灯泡用—⊗—表示，开关用—∘⟍—表示，电源用⊣⊢表示）.

解：用命题逻辑方法，先设定命题变元：设P:A开关断开，Q:B开关断开，R:C开关断开，L：电灯不亮。故由题设条件，可得命题表达式：

$$L \Leftrightarrow (P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\wedge(R\vee\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$$

$$\Leftrightarrow Q\wedge\big(P\vee(\neg P\wedge R)\big)\Leftrightarrow Q\wedge(P\vee R)$$

故可根据此化简后的命题表达式设计照明线路图如下（参考布局，只要开关A,C串联后再与开关B并联即可）：