命题逻辑

马晓星

http://cs.nju.edu.cn/xxm

南京大学计算机科学与技术系

内容提要

- 引言
- 逻辑运算符
- 命题表达式
- 命题的真值表
- 语义蕴含

引言—编程语言中的布尔表达式

- Java程序设计语言中的布尔运算符
  - &&, || , !
  - 举例
    - (a >= 5) && (a <= 10)
    - p || !q
- 程序验证需要考察有关不变式
  - 循环语句
- 程序分析时需要考虑布尔表达式的可满足性

```
if ((a >= 5) && (a <= 10)) {
  b = a*a;
} else {
  throw new Exception(“Panic!”);
}
```

引言—搜索引擎中的布尔检索

- 布尔逻辑检索
  - 利用布尔逻辑运算符进行检索项的逻辑组配，用以表达检索者的查询。
    - (" Xiaoxing Ma" OR "马晓星") AND "Software Engineering"
    - …… NOT “Ontology”// 有的使用“-”替代“NOT”
- 布尔运算符
  - 与，合取，Conjunction (AND) ($\wedge$, &, ·)
  - 或，析取，Disjunction (OR) ($\vee$, +)
  - 非，否定，Negation (NOT) ($\neg$, ~, -)

引言—逻辑迷题

- 泥巴孩谜题
  - 一个男孩和一个女孩玩耍回来，看不见自己的额头，父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”。父亲问孩子“你知道你额头上有没有泥？”

p：男孩的额头上有泥

q：女孩的额头上有泥

$p \vee q$ 为真

引言—日常生活中的逻辑

- 父子对话
  - 子：爸爸，我要玩游戏
  - 父：不做完作业不能玩游戏 （除非…, 否则不允许…. ）
- 如果以 p 表示“做完作业”， q 表示“玩游戏”
  - 常理： $p \rightarrow q$
  - 数学：$\neg p \rightarrow \neg q$（等价命题：$q \rightarrow p$）

引言—日常生活中的推理

- 有个人请客，看看时间过了，还有一大半的客人没来。主人心里很焦急，便说："怎么搞的，该来的客人还不来？"一些敏感的客人听到了，心想："该来的没来，那我们是不该来的啰？"于是悄悄地走了。
- 主人一看又走掉好几位客人，越发着急了，便说："怎么这些不该走的客人，反倒走了呢？"剩下的客人一听，又想："走了的是不该走的，那我们这些没走的倒是该走的了！"于是又都走了。
- 最后只剩下一个跟主人较亲近的朋友，看了这种尴尬的场面，就劝他说："你说话前应该先考虑一下，否则说错了，就不容易收回来了。"主人大叫冤枉，急忙解释说："我并不是叫他们走哇！"朋友听了大为光火，说："不是叫他们走，那就是叫我走了。"说完，头也不回地离开了。

自然语言带有模糊性，不合理表述的后果会很严重

逻辑学

- 简言之，研究“推理”是否“有效”。
  - 人类思维基本形式：概念，命题，推理
    - 概念：内涵 与 外延
  - 推理（Reasoning）：
    - **演绎（deduction）**
    - 归纳（induction）
    - 溯因（abduction，或称为“反绎”）
  - 源于两千多年前：古希腊（逻辑）、印度（因明）和中国（名辩）

逻辑学

- 我们的讨论限定于二值逻辑
  - “真”、“假” – 真值
    - 暂不讨论“七分真、三分假”之类的情况
    - 暂不讨论“昨日非、今日是”之类的情况
  - 排除悖论：“这句话是假话”

- 通过对逻辑的初步学习，理解下列基本概念
  - 断言（assertion）、命题（proposition）、论证（argument）、有效性（validity）
  - 证明（proof）、定理（theorem）、矛盾（contradiction）、悖论（paradox）、
  - 一致性（consistency）、到可靠性（soundness）、完备性（completeness）

命题（Proposition）

- 命题是一个陈述语句，即一个陈述事实的句子
  - 要么真，要么假
  - 不能既真又假，也不能不真不假
- 判断下列句子是否为命题
  - ✓ 税收下降了
  - ✓ 我的收入上升了
  - ✓ 今天是星期五
  - ✗ 你会说英语吗?
  - ✗ 3-x=5
  - ✗ 我们走吧!
  - ✓ 任一足够大的偶数一定可以表示为两个素数之和。
  - ✗ 他是个多好的人呀!
  - ✗ “我现在说的是假话。”

形式逻辑，符号逻辑，数理逻辑

- 形式逻辑：推理形式与内容的分离
  - 追求：**推理的有效性仅仅依赖于推理的形式，而与推理的内容无关。**
  - 例如：
    - “苏格拉底会死。”是一个真命题
    - “苏格拉底是人。所以，苏格拉底会死。”不是有效推理
    - “所有的人都会死。苏格拉底是人。所以，苏格拉底会死” 是有效推理
  - 形式逻辑要求：语言无歧义，无缺省前提，推理只是用既定的机械规则

形式逻辑，符号逻辑，数理逻辑

- 符号逻辑
  - 要使推理的形式与内容彻底分离，需要引入符号语言。
    - 完全的内容中立，最大程度的可泛化
    - 符号化（Clarence Irving Lewis, 1918）：
      1. the use of **ideograms** instead of the phonograms of ordinary language;
      2. the **deductive** method—which may here be taken to mean simply that the greater portion of the subject matter is derived from a relatively few principles by operations which are "exact”;
      3. the use of **variables** having a definite range of significance.

形式逻辑，符号逻辑，数理逻辑

- 数理逻辑
  - 用符号逻辑作为研究数学问题的基本工具
    - 1879：G. Frege 提议用符号逻辑作为数学推理的语言
    - 20世纪初：D. Hilbert 提出要建立一个能推导出所有数学真理的形式化系统
  - 用数学的方法来研究符号逻辑系统的性质
    - 比如 soundness、adequacy、completeness、decidability
- 主要内容
  - 证明论（Proof Theory）、模型论（Model Theory）、集合论（Set Theory）、递归函数论（Recursion Theory） -- 将在《数理逻辑》课程中学习

形式逻辑

- 下面我们来讨论命题逻辑（Propositional Logic）。
  - 作为一个“逻辑系统”我们关注：
    - 什么是合适的命题逻辑公式（语法）

请时刻注意区分**逻辑本身的语言**（作为研究对象的语言）和研究所使用的语言（作为观察者的语言，有时称为**元语言**）

    - 命题逻辑公式的解释或含义（语义）
    - 从一组公式一步推导出另一个公式（推理规则）

注：完全形式化的处理留待《数理逻辑》课程

命题变元

- 常用小写字母表示命题变元，如：p, q, r
- 命题变元的取值范围为：$\{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$，有时用$\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$
- 命题也可以表示为命题变元的形式，可以理解为该变元“已赋值”
  - p: 今天是周五　　（$p = \mathbf{T}$）
  - q: 2+2=4　　（$q = \mathbf{F}$）

这里只有 p, q, r 属于逻辑的语言

原子命题与复合命题

- 复合命题（compound proposition）
  - 并非外面在下雨。
  - 张挥与王丽都是三好学生。
  - 张晓静不是江西人就是安徽人。
  - 如果2+3=6，则π是有理数。
  - 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲。

自然语言里，表达同一种逻辑联接可以有不同的说法，麻烦。符号化之。

复合命题是否为真，取决于：

1. 作为复合成分的子命题的真假
2. 逻辑运算符（联接词）的语义

否定（Negation）

$\neg p$: “非p”

$\neg p$的真值表

p	$\neg p$
F	**T**
T	**F**

p所有可能的取值

合取（Conjunction）

$p \wedge q$：“p 并且 q”

p	q	$p \wedge q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

$p \wedge q$ = **T** iff

p 和 q 均为 **T**

(p,q) 所有可能的取值

析取（ Disjunction）

$p \vee q$：“p 或 q”

$p \vee q$ = **F** iff

p 和 q 均为 **F**

p	q	$p \vee q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**T**
T	**F**	**T**
T	**T**	**T**

蕴含（Implication, Conditional）

$p \rightarrow q$：“若 p，则 q”（条件语句） p称为假设，q称为结论

p	q	$p \rightarrow q$
F	**F**	**T**
F	**T**	**T**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

$p \rightarrow q$ = **F** iff

p 为 **T** 而 q 为 **F**

关于蕴含

- $p \to q$："若 p，则 q"（条件语句）
- "想得奖，仅当/只有考试得85分以上"
  - "得奖" → "考试得85分以上"
  - 考不到85分以上，甭想得奖
- 不能玩游戏，除非做完作业（$\neg p$, 除非 c）
  - 没有做完作业，就不能玩（$\neg c \to \neg p$）

双蕴含（Biconditional）

$p \leftrightarrow q$： "p当且仅当 q"（双条件语句）

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$p \leftrightarrow q$ =1 iff

p和q有相同的真值

命题表达式（命题逻辑公式）

- 命题逻辑的**合适公式**（Well-Formed Formula）：
  1. 命题变元$p_1, p_2, p_3, \cdots$是命题表达式；
  2. 若ϕ是命题表达式，则$(\neg\phi)$也是；
  3. 若ϕ和ψ是命题表达式，则$(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$也是；
  4. 只有有限次应用上述规则形成的符号串才是命题表达式。

- 通过递归的方式，严格定义了合适公式的“语法”。
- 依据这个定义，严格地说公式里命题变元只能有$p_1, p_2, p_3, \cdots$这些，但为了方便，在不引起误解的情况下我们也允许q, r等。
- 常用希腊字母ϕ和ψ等表示命题逻辑公式。

命题表达式（命题逻辑公式）

- 例如：
  - $(p\to q)\wedge(q\leftrightarrow r)$, $p\to(q\to r)$是命题公式（省略了外层括号）。
  - $pq\to r$以及 $p\to\wedge q$都不是命题公式。
  - $p\vee q\to r$， $\neg p\wedge q$， $(\neg p)\to q$是命题公式

- 约定运算符的优先级从高到低：$\neg$， $\wedge$， $\vee$， $\to$，$\leftrightarrow$

  也常约定$\to$为右结合（尽量用括号）

将自然语言翻译成命题表达式

- 只有你主修计算机科学或 不是新生, 才可以从校园网访问因特网.

p: 你可以从校园网访问因特网
q: 你主修计算机科学
r: 你是新生

$$p \to (q \vee \neg r)$$

将自然语言翻译成命题表达式（续）

- 除非你满16周岁否则只要你身高低于1.2米就不能乘滑行游乐车.

q: 你能乘滑行游乐车

r: 你身高低于1.2米

s: 你满16周岁

-- 到底在说什么，多种理解：

$$(\neg s \wedge r) \rightarrow \neg q$$

$$s \vee (r \rightarrow \neg q)$$

$$\neg s \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$$

那么，这几个逻辑表达式“等价”么？

命题表达式的真值表

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$$

$p \quad q \quad r$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r$
F F F	**T**	**F**	**T**	**T**
F F T	**T**	**F**	**F**	**T**
F T F	**T**	**T**	**T**	**T**
F T T	**T**	**T**	**F**	**F**
T F F	**F**	**F**	**T**	**T**
T F T	**F**	**F**	**F**	**T**
T T F	**F**	**F**	**T**	**T**
T T T	**F**	**F**	**F**	**T**

一种“成假”指派

该命题表达式的所有指派(assignment)

命题表达式的真值表

$$(p\leftrightarrow q)\ \leftrightarrow\ ((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$

p	q	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow p$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	$p\leftrightarrow q$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T

永真式、矛盾式与可能式

- **永真式（重言式 Tautology ）：** 总是真的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如：$p \vee \neg p$
- **矛盾式（Contradiction）：** 总是假的，无论其中出现的命题变元如何取值。比如： $p \wedge \neg p$
- **可能式（Contingency）：** 既不是永真式又不是矛盾式。比如： $\neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	**F**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**

语义蕴涵（Semantic Entailment）

- 定义：$\phi \vDash \psi$: 对于ϕ的任意一个成真指派，ψ均为真。

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \to q$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	F	F	T

举例说明

$$\neg p \wedge q \vDash p \to q$$

$$\neg p \wedge q \vDash \neg p$$

语义蕴涵（重言蕴含，逻辑蕴含）

- 或者等价地，
  - ϕ语义蕴含ψ（记为$\phi \vDash \psi$）当且仅当 $\phi \to \psi$为重言式。更一般地
  - $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ 当且仅当 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \to \psi$ 为重言式。

因此也称为“**重言蕴含**”（Tautologically implication）通常我们所说的“**逻辑蕴含**”也是指这个含义– 注意与逻辑联结词→相区别。

语义蕴涵可归结为 “判断某个命题是否永真”

语义蕴涵

- ϕ是永真的 当且仅当 $\vDash \phi$ （称 ϕ is valid)。
  - 举例说明

p	$\neg p$	$p\vee\neg p$
F	T	T
T	F	T

$\vDash p\vee\neg p$

$p\vee\neg p$ 是永真的

附：有趣的悖论

刘志明，裘宗燕，《数理逻辑引论》

- **理发师悖论 (The Barber's Paradox)**：一个理发师在他的理发店里贴出广告说〝我将为本市不给自己刮脸的人刮脸，也只为这些人刮脸”。有一天他从镜子里看到自己的胡子长了，请问他能不能给自己刮脸？

附：有趣的悖论

- **突击测验悖论 (The Surprise Test Paradox)**：一个哲学教投在课堂上向学生宣布下周某个上课日（星期一至星期五）将有一次测验，他不告诉学生测验将在哪天进行，但保证测验时学生会因出乎预料而感到惊讶。学生们通过推理论证得出考试不会是星期五。因为如果是星期五，星期四晚上或星期五早晨就知道在星期五，因此不会感到惊讶。已经知道测验不会在星期五，学生们推论测试就不会在星期四。因为如果测试在星期四，星期三晚上或星期四早上就知道，这样也不会惊讶。依次推导论证，测试不会在星期三，不会在星期二，也不会在星期一。从而学生们得出结论，下星期根本不会有测验。但是，星期二教授来到课堂宣布测验，所有的学生都大吃一惊。

附：有趣的逻辑谜题

- 说实话和撒谎者的逻辑问题(Raymond Smullyan） 设想你来到一个有并排的两个门的入口，一个门通向陷阱，另一个通向城堡。每个门前站着一个卫士，其中一个总讲实话，而另一个却总讲假话。你可以任选一个卫士问一个回答为“是”或“不是”的问题。你该如何问？

- 需要问一个卫士“如果我问另一个卫士我要去城堡是否应该走这个门，他会如何回答？” 如果回答为“是” 就应该走另一个门；如果回答为“不是”则应该走这个门。

附：有趣的逻辑谜题

- **咖啡罐问题 (David Gries）** 有一个咖啡罐，开始时罐中装了一些黑色豆子和一些白色豆子，罐外有一大堆黑豆和白豆。开始重复下面过程，直至咖啡罐中只剩一个豆子：

  随机从罐子中取出两颗豆子，如果两个颜色相同，就将它们扔掉，然后从罐子外的豆子中选一个黑豆放进罐中；如果两个颜色不同，则将白豆放回罐中而将黑豆扔掉。
- 问题：上述过程一定会终止吗？罐中最后剩下的那个豆子的颜色和开始时罐中黑色豆子和白色豆子的个数有什么关系吗？