221900180田永铭 数理逻辑作业3

Problem1 证明命题3选1

1. $\vdash(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$

我不选

2.若 $\Gamma\cup\neg\alpha\vdash\neg\beta$**，则** $\Gamma\cup\beta\vdash\alpha$

证明：对 $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$**到** $\neg\beta$ **的长度进行归纳：**

奠基：

（1）若 $\neg\beta\in\Gamma$,则 $\Gamma\vdash\neg\beta$, 所以 $\Gamma\cup\beta\vdash\neg\beta$(多一个条件更能推出).
$\because\beta\in\Gamma\cup\beta,\therefore\Gamma\cup\beta\vdash\beta$. 由于公理1.22.10,得到

$\Gamma\cup\beta\vdash\neg\beta\to(\beta\to\bot)$,利用两次MP推理得：
$\Gamma\cup\beta\vdash\bot$.这意味着 $\Gamma\cup\beta$ 不一致，所以 $\{\Gamma\cup\beta\}\cup\neg\alpha$ 也不一致，由定理1.30可知，这不一致当且仅当 $\Gamma\cup\beta\vdash\alpha$,这就是要证的公式，所以此情况得证.

（2）若 $\neg\beta\notin\Gamma$, 则 $\beta=\alpha.\because\alpha\in\Gamma\cup\alpha,\therefore\Gamma\cup\alpha\vdash\alpha,\therefore\Gamma\cup\beta\vdash\alpha$,得证.

归纳：

假设长度小于n的时候均成立.假设存在一个 $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ 到 $\neg\beta$ 的证明，且 $\neg\beta$ 由MP推出.则其证明前段必然存在 $\gamma\to\neg\beta$ 以及 γ,且长度均小于n.

$\therefore(a)\Gamma\vdash\neg\alpha\to(\gamma\to\neg\beta)$ 成立，并且(b) $\Gamma\vdash\neg\alpha\to\gamma$ 成立.

在公理1.22.8中，利用替换 $\theta[\neg\alpha/\alpha,\neg\beta/\beta]$,得到公式:

$\Gamma\vdash(\neg\alpha\to(\gamma\to\neg\beta))\to((\neg\alpha\to\gamma)\to(\neg\alpha\to\neg\beta))$,结合(a)(b)两式，利用两次MP规则，可得 $\Gamma\vdash\neg\alpha\to\neg\beta$.

因为 $\Gamma\vdash\neg\alpha\to\neg\beta$,所以

(c)$\Gamma\cup\beta\vdash\neg\alpha\to\neg\beta$.

因为 $\beta\in\Gamma\cup\beta$,所以 $\Gamma\cup\beta\vdash\beta$.
由公理1.22.7得, $\alpha\to(\beta\to\alpha)$,作简单替换得 ,$\beta\to(\neg\alpha\to\beta)$,这是公理，所以有

(d) $\Gamma\cup\beta\vdash(\neg\alpha\to\beta)$.

由公理1.22.9,将其中的 α 替换成 $\neg\alpha$,得到公理，可得到

$\Gamma\cup\beta\vdash(\neg\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\neg\beta)\to\neg\neg\alpha)$,结合(c)(d)两个式子，利用两次MP规则，可以得到

$\Gamma\cup\beta\vdash\neg\neg\alpha$.由公理1.22.14得, $\Gamma\cup\beta\vdash\neg\neg\alpha\to\alpha$, 结合MP推理得:

$\Gamma\cup\beta\vdash\alpha$.

证毕!

3.$\neg\neg\alpha\vdash\alpha$

证明:

因为 $\neg\neg\alpha\in\{\neg\neg\alpha\}$, 所以 $\{\neg\neg\alpha\}\vdash\neg\neg\alpha$. 由公理1.22.14得 $\{\neg\neg\alpha\}\vdash\neg\neg\alpha\to\alpha$, 由MP推理规则变形得到 $\{\neg\neg\alpha\}\vdash\alpha$.

证毕!

Problem2 证明3选2

1. 若Γ **是不一致的，那么对任意 wff**α**,有** $\Gamma\vdash\alpha$

证明:

因为 Γ 不一致， 所以由一致性的定义“一个wff集合是一致的（consistent），当且仅当$\Gamma\nvdash\bot$”,得 $\Gamma\vdash\bot$, 所以新增一个wff $\neg\alpha$, 可得 $\Gamma\cup\neg\alpha\vdash\bot$, 由定理1.30 “$\Gamma\vdash\alpha$当且仅当$\Gamma\cup\neg\alpha$不一致” 得到，上式等价于 $\Gamma\vdash\alpha$, 所以得证.

证毕!

2.若 $\Gamma \vdash \alpha$ 且 $\neg\alpha \in \Gamma$，那么 Γ是不一致的

证明：

$\because \neg\alpha \in \Gamma, \therefore \Gamma \vdash \neg\alpha$,又 $\because \Gamma \vdash \alpha.$

由公理1.22.10得到：

$\Gamma \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \perp)$,利用两次MP推理，得到 $\Gamma \vdash \perp.$

又由定理1.29得到，Γ 不一致.

证毕！

3. 若$\Gamma \cup \alpha$与$\Gamma \cup \neg\alpha$均不一致，那么 Γ 本身就不一致

我不选

Problem3 证明定理 1.34

如果 Γ 是完备（complete）且一致（consistent）的，那么：

1. 若 $\Gamma \vdash \alpha$，则 $\alpha \in \Gamma$
2. $\alpha \to \beta \in \Gamma$ 当且仅当要么 $\alpha \notin \Gamma$,要么$\beta \in \Gamma$

证明：

1 证明：

采用反证法，假设 $\Gamma \vdash \alpha$ 成立的前提下, $\alpha \notin \Gamma$. 由完备集的定义1.33可知，必有 $\neg\alpha \in \Gamma$. 所以有 $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

由公理1.22.10得到 $\Gamma \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \perp)$,利用两次MP推理，得到 $\Gamma \vdash \perp$. 这与 Γ 为一致的相矛盾，所以假设不成立，所以原结论成立.

证毕！

2 证明：
(1) $\Rightarrow$:

采用反证法，假设 $\alpha \to \beta \in \Gamma$ 成立的前提下，同时有 $\alpha \in \Gamma$ 和 $\beta \notin \Gamma$.

$\because \alpha \to \beta \in \Gamma, \therefore \Gamma \vdash \alpha \to \beta. \because \alpha \in \Gamma, \therefore \Gamma \vdash \alpha.$ 由MP推理得到，$\Gamma \vdash \beta$.由已经证明的定理1.34的1得到,在 Γ 完备且一致的条件下，有 $\beta \in \Gamma$. 这与假设相矛盾，所以假设不成立.所以原结论正方向成立.

(2) $\Leftarrow$:
分为两种情况：(a) $\alpha \notin \Gamma$, (b) $\beta \in \Gamma$.

(a)因为 $\alpha \notin \Gamma$, 由 Γ 是完备的, 可知 $\neg\alpha \in \Gamma$, 所以 $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

由公理1.22.10可知， $\Gamma \vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$, 由MP规则可知, $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$, 又由已经证明的定理1.34的1得到, $\alpha \to \beta \in \Gamma$.

(b)因为 $\beta \in \Gamma$, 所以 $\Gamma \vdash \beta$. 由公理1.22.7得到 $\Gamma \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$, 由MP推理可得到 $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$,又由已经证明的定理1.34的1得到, $\alpha \to \beta \in \Gamma$.

证毕！