数理逻辑

03 - 一阶逻辑

(Press ? for help, n and p for next and previous slide)

戴望州

南京大学智能科学与技术学院

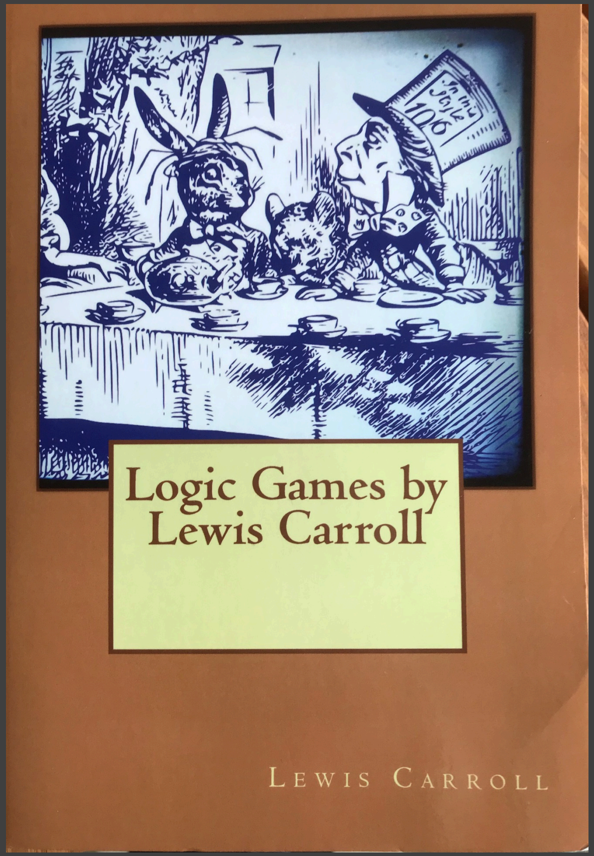
2024年 - 春季

https://daiwz.net

Lewis 的谜题

Games from Lewis Carroll

1. No kitten, that loves fish, is unteachable;
2. No kitten without a tail will play with a gorilla;
3. Kittens with whiskers always love fish;
4. No teachable kitten has green eyes;
5. No kittens have tails unless they have whiskers.
6. Q: Kitten with green eyes will play with a gorilla?



语法

一阶语言

什么是**一阶（first-order）**？

一阶语言

逻辑符号

1. 标点符号：“(”，“)”，“,”
2. 联结词：$\rightarrow$，$\neg$
   » 其它联结词：$\wedge, \vee, \leftrightarrow$
3. 变元（可数无穷个）：$\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \ldots$
4. 量词：$\forall$
   » 其它量词：$\exists$
5. 等词（可选）：$=$

非逻辑符号 （signature）

1. n元谓词（可数无穷个），$n \geq 1$:
   $A_0^n, A_1^n, \ldots$
2. 常元（可数无穷个）：$c_0, c_1, \ldots$
   » 特殊常元：$\top, \bot, T, F$
3. n元函数（可数无穷个）：
   $f_0^n, f_1^n, \ldots$

一阶语言的例子

纯一阶逻辑（*pure First-Order Logic, FOL*）

常元	$c_0, c_1, \ldots$
n元谓词	$A_0^n, A_1^n, \ldots$
n元函数	$f_0^n, f_1^n, \ldots$
等词	无

集合论

常元	$\emptyset$
2元谓词	$\in$
n元函数	无
等词	有

一阶语言的例子

初等数论

常元	$\mathbf{0}$
谓词	$<$
1元函数	$\mathbf{S}$
2元函数	$+, \times, \mathbf{E}$
等词	有

- 注：$\mathbf{S}, \mathbf{E}$分别为后继和指数函数

上面的例子里，我们只是按照习惯来定义各个language signature中谓词与函数的**记号**，例如$<, \in, \leq$只是A_0^2；$\mathbf{0}, \emptyset$为c_0；$+, \times, \mathbf{E}$为f_0^2, f_1^2, f_3^2

FOL之于数学

因为：

- 一阶语言包含集合论语言
- 一切数学都可被嵌入在集合论中

所以：

1. 集合论的**一阶语言**能够描述任意数学
2. 一切数学定理都来自对集合论公理的**逻辑推导**

一阶逻辑语言足以描述一切数学结构吗？

FOL的例子 [Enderton, pp.73]

1. "所有苹果都坏了"

$$\forall \boldsymbol{v}_1 (A(\boldsymbol{v}_1) \to B(\boldsymbol{v}_1))$$

2. "有些苹果坏了"

$$\exists \boldsymbol{v}_1 (A(\boldsymbol{v}_1) \wedge B(\boldsymbol{v}_1))$$

$$\neg \forall \boldsymbol{v}_1 (\neg(\neg(A(\boldsymbol{v}_1) \to (\neg B(\boldsymbol{v}_1)))))$$

3. 所有 X 都属于 Y
   - » $\forall \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \to Y(\boldsymbol{v}_2))$
   - » $\forall \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \wedge Y(\boldsymbol{v}_2))$（语气太强：所有东西都是 X 而且也是 Y）
4. 存在 X 属于 Y
   - » $\exists \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \wedge Y(\boldsymbol{v}_1))$
   - » $\exists \boldsymbol{v}_1 (X(\boldsymbol{v}_1) \to Y(\boldsymbol{v}_1))$（语气太弱：存在一些东西，只有当它是 X 时，它才是 Y）

项

定义 2.1（项，*term*）[Enderton, pp.74]：

每个n元函数符号f对应一个n元项构造算子$\mathcal{F}_f$：

$$\mathcal{F}_f(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = f\epsilon_1 \cdots \epsilon_n$$

一阶逻辑的项的集合是常元和变元符号经过（0次或多次）$\mathcal{F}_f$运算得到的表达式集合

例如：

$$+\,\boldsymbol{v}_2\mathbf{S0},$$
$$\mathbf{SSSS0},$$
$$+\,\mathbf{E}\boldsymbol{v}_1\mathbf{SS0}\,\mathbf{E}\boldsymbol{v}_2\mathbf{SS0}.$$

原子公式

定义 2.2（原子公式，*atomic formula*，*atom*）[Enderton, pp.74]：

一阶逻辑的原子公式是如下形式的表达式

$$Pt_1 \cdots t_n$$

其中 P 是 n 元谓词，$t_1, \ldots, t_n$ 是项

例如：

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2, \\ &< \mathbf{SS0}\, \mathbf{SSSS0}, \\ &= \mathbf{E}\boldsymbol{v}_1 \mathbf{SS0}\, \mathbf{E}\boldsymbol{v}_2 \mathbf{SS0}. \end{aligned}$$

合式公式

定义 2.3（合式公式，*well-formed formula*，*wff*）[Enderton, pp.75]：

一阶逻辑的合式公式集合是原子公式通过运用0次或多次公式构造算子 $\mathcal{E}_\neg, \mathcal{E}_\leftarrow, \mathcal{Q}_i (i = 1, 2, \ldots)$形成的表达式集合。其中

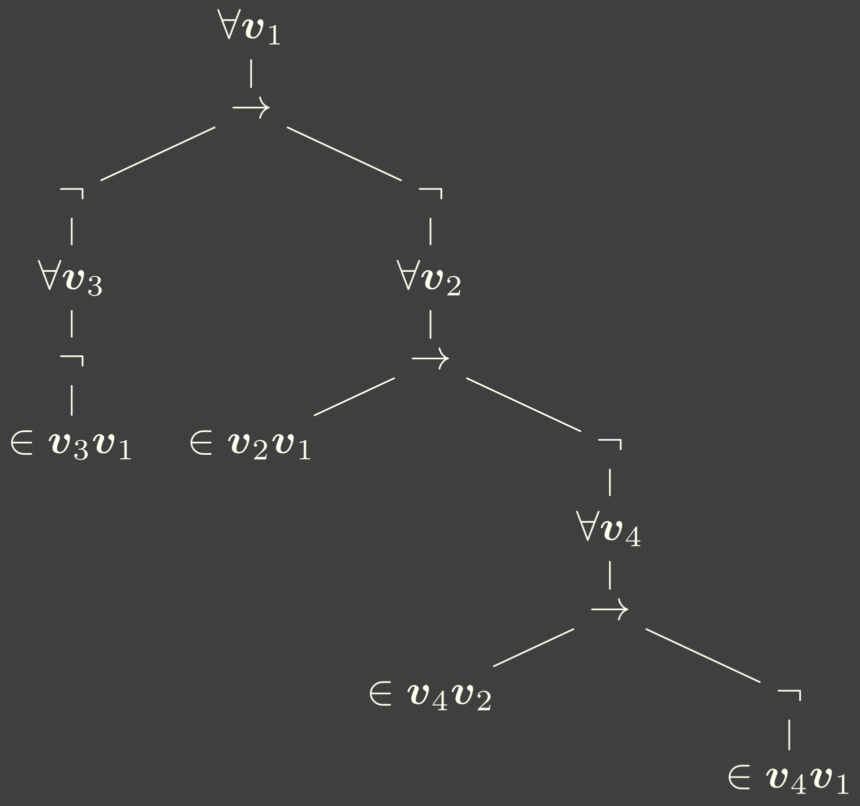
$$\mathcal{E}_\neg(\gamma) = (\neg\gamma)$$
$$\mathcal{E}_\leftarrow(\gamma, \delta) = (\gamma \leftarrow \delta)$$
$$\mathcal{Q}_i(\gamma) = \forall \boldsymbol{v}_i \gamma$$

例如：

- $\neg \boldsymbol{v}_i$ 不是wff
- $\forall \boldsymbol{v}_1((\neg\forall \boldsymbol{v}_3(\neg \in \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1)) \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_2(\in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1 \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_4(\in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_2 \to (\neg \in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1))))))$ 是wff（ZFC的正则公理）

合式公式

$$\forall \boldsymbol{v}_1((\neg\forall \boldsymbol{v}_3(\neg \in \boldsymbol{v}_3\boldsymbol{v}_1)) \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_2(\in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1 \to (\neg\forall \boldsymbol{v}_4(\in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_2 \to (\neg \in \boldsymbol{v}_4\boldsymbol{v}_1))))))$$



自由变元

- $\forall \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1$
  - “所有集合都是____$_1$ 的元素”
- $(\neg\forall \boldsymbol{v}_1(\neg\forall \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1))$
  - “存在一个集合，任意集合都是它的元素”
  - 记 $\exists x\, \alpha \equiv \neg\forall x\, (\neg\alpha)$

自由变元

$$\varphi \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j$$

自由变元

定义2.4（自由出现，*occur free*）[Enderton, pp.76]：

考虑一个变元$\boldsymbol{x}$，我们递归地定义：

1. 对于原子公式α，$\boldsymbol{x}$在α中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中出现
2. $\boldsymbol{x}$在$(\neg\alpha)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中自由出现
3. $\boldsymbol{x}$在$(\alpha\to\beta)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在α中自由出现或在β中自由出现
4. $\boldsymbol{x}$在$(\forall \boldsymbol{v}_i\alpha)$中自由出现当且仅当$\boldsymbol{x}$在$\alpha$中出现且$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{v}_i$

若一个变元如果不是自由（*not free*）的，则我们称它为（受）约束的（*bounded*）。若一个wff没有自由出现的变元，则称它是闭公式（*closed wff*）或语句（*sentence*）

变元替换

$$(\varphi)_2^k = (\sum_{j=0}^{k} a_j)_2^k = \sum_{j=0}^{2} a_j$$

变元替换

$$(\varphi)_i^j = (\sum_{j=0}^{k} a_j)_i^j = \sum_{j=0}^{k} a_j$$

变元替换

定义 2.5a（替换，*substitution*）[Enderton, pp.112]

wff中的变元替换（substitution）可递归地定义如下：

1. 对任意原子公式α，α^x_t是用项t代替α中出现的所有x后所得的表达式
2. $(\neg\alpha)^x_t = (\neg\alpha^x_t)$
3. $(\alpha \to \beta)^x_t = (\alpha^x_t \to \beta^x_t)$
4. $(\forall y\,\alpha)^x_t = \begin{cases} \forall y\,\alpha, & \text{if } x = y \\ \forall y\,(\alpha)^x_t, & \text{if } x \neq y \end{cases}$

我们记这个替换算子为$\theta = [t/x]$，则$\alpha^x_t = \alpha \circ \theta = \alpha\theta$

变元替换

$$[\sum_{j=0}^{n}(k \cdot a_j)]_{f(j)}^{k} \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^{n}(f(j) \cdot a_j)$$

可替换

定义 2.5b（可替换，*substitutable*）[Enderton, pp.112]

我们定义项t对于α中的变元x是可替换的（substitutable）如下：

1. 对任意原子公式α，项t对于α中出现的所有x都是可替换的（原子公式无量词）
2. 项t对于$(\neg\alpha)$中的x是可替换的，当且仅当它对α中出现的x是可替换的
3. 项t对于$(\alpha \to \beta)$中的x是可替换的，当且仅当它对α和β中出现的x均是可替换的
4. 项t对于$\forall y\,\alpha$中的x是可替换的当且仅当：
   - x在$\forall y\,\alpha$中是约束出现的（为保证替换后不影响原公式意义），或者
   - y在t中未出现（为保证t中的变元不在替换后被$\forall y$量化）且t对于α中的x是可替换的

替换的例子

一阶逻辑的Hilbert系统里有一条公理模式：

$$\forall x\,\alpha \to \alpha_t^x$$

其中t对于α中的x是可替换的，那么：

- 以下wff是该公理模式的一个实例

$$\forall \boldsymbol{v}_3\,(\forall \boldsymbol{v}_1\,(A\boldsymbol{v}_1 \to \forall \boldsymbol{v}_2\,A\boldsymbol{v}_2) \to (A\boldsymbol{v}_2 \to \forall \boldsymbol{v}_2\,A\boldsymbol{v}_2))$$

  - 其中α是$(A\boldsymbol{v}_1 \to \forall \boldsymbol{v}_2\,A\boldsymbol{v}_2)$，$x$是$\boldsymbol{v}_1$，$t$是$\boldsymbol{v}_2$

- 以下wff则不是该公理模式的实例

$$\forall \boldsymbol{v}_1\,\forall \boldsymbol{v}_2\,B\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \to \forall \boldsymbol{v}_2\,B\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2$$

  - 因为$\boldsymbol{v}_2$在$\forall \boldsymbol{v}_1\,\forall \boldsymbol{v}_2\,B\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2$中受约束，因此它不能替换这里的$\boldsymbol{v}_1$

证明

证明的定义

定义2.6（定义1.19-21）（*proof, deduction, or derivation*）[Enderton, pp.111]:

从Γ到φ的证明（推导）是一个有穷的wff序列$\langle\alpha_0,\ldots,\alpha_n\rangle$，其中$\alpha_n$就是$\varphi$且对任意$k \le n$有

1. α_k属于$\Gamma \cup \Lambda$（Λ为公理集），或者
2. α_k是由序列中位于它前面的两个wff经过MP规则推导而得；即存在$i, j \le k$有α_j为$\alpha_i \to \alpha_k$

若以上证明存在，我们就说φ是从Γ出发可证的（*provable, deducible or derivable*），或称φ是Γ中的定理（*theorem of* Γ），记为$\Gamma \vdash \varphi$

一阶逻辑中的公理系统

定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Enderton, pp.110]：

令 α 与 β 为 FOL wff，x 和 y 为变元。FOL 的公理集 Λ 是具有以下形式的 wff 的所有概括：

1. 重言式（例如定义 1.22 中的公理）
2. $\forall x\, \alpha \to \alpha^x_t$，其中 t 对于 α 中的 x 是可替换的
   » 它的逆否命题也是公理：$\beta \to \exists x\, \beta^t_x$，其中 x 不在 t 中出现
3. $\forall x\, (\alpha \to \beta) \to (\forall x\, \alpha \to \forall x\, \beta)$
4. $\alpha \to \forall x\, \alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
5. （有等词时）$x = x$
6. （有等词时）$(x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中 α 为原子公式，α' 为对 α 中的 x 进行 0 个位置或多个位置的替换后得到的 wff

一阶逻辑中的公理系统

（续）定义 2.7（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）：

该公理系统中只有一条MP推理规则，即若推导中已有$\beta \to \alpha$和β，那么α也是正确的，即:

$$\beta, (\beta \to \alpha) \vdash \alpha$$

一阶逻辑推导的例子

试证：公理 2.7.2 的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明:

Lemma 1：$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$，根据演绎定理，即证$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$

$$\begin{array}{lll}
1. & (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha) & \text{AX } 1.22.9 \\
2. & \alpha \to \beta & \text{Hyp} \\
3. & (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha & 1, 2 \text{ MP} \\
4. & \neg\beta \to (\alpha \to \neg\beta) & \text{Ax}, 1.22.7 \\
5. & \neg\beta & \text{Hyp} \\
6. & \alpha \to \neg\beta & 4, 5 \text{ MP} \\
7. & \neg\alpha & 3, 6 \text{ MP}
\end{array}$$

一阶逻辑推导的例子

试证：定义2.7.2的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明（Cont'd）：

Lemma 2（*syllogism*）: $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$，用演绎定理易证

Lemma 3: $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$，根据演绎定理，即证$\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$

1.	α	Hyp
2.	$\alpha \to (\neg\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha))$	Ax 1.22.3
3.	$\alpha \to (\neg\alpha \to \bot)$	Rewrite/Def
4.	$\neg\alpha \to \bot$	1, 3 MP
5.	$(\neg\alpha \to \bot) \to \neg\neg\alpha$	Ax 1.22.13
6.	$\neg\neg\alpha$	4, 5 MP

一阶逻辑推导的例子

试证：定义2.7.2的推论

$$\vdash Px \to \exists y\, Py$$

证明（Cont'd）：

1.	$\forall y \neg Py \to \neg Px$	AX 2.7.2
2.	$(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (\neg\neg Px \to \neg \forall y \neg Py)$	Lemma 1
3.	$\neg\neg Px \to \neg \forall y \neg Py$	1, 2 MP
4.	$\neg\neg Px \to \exists y Py$	Rewrite 3
5.	$(Px \to \neg\neg Px) \to [(\neg\neg Px \to \exists y Py) \to (Px \to \exists y Py)]$	Lemma 2
6.	$Px \to \neg\neg Px$	Lemma 3
7.	$(\neg\neg Px \to \exists y Py) \to (Px \to \exists y Py)$	5, 6 MP
8.	$Px \to \exists y Py$	4, 7 MP

Q.E.D.

一阶逻辑推导的例子2

试证：

$$\vdash (\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall x\, (Px \wedge Qx)$$

证明：

Lemma：$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to (\beta \wedge \gamma)$，根据演绎定理和公理1.22.3易证

1.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall x\, Px$	Ax 1.22.1
2.	$\forall x\, Px \to Pt$	AX 2.7.2
3.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to Pt$	1, 2 Syl.
4.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall y\, Qy$	Ax 1.22.1
5.	$\forall y\, Qy \to Qt$	AX 2.7.2
6.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to Qt$	4, 5 Syl.
7.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to (Pt \wedge Qt)$	3, 6 Lemma
8.	$(\forall x\, Px \wedge \forall y\, Qy) \to \forall x\, (Px \wedge Qx)$	Ded. and Gen.

Q.E.D.

一阶逻辑的元定理

演绎定理

引理 2.8（T 规则） [Enderton, pp.118]:

若$\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \Gamma \vdash \alpha_n$且$\{\alpha_1, \ldots \alpha_n\}$重言蕴涵$\beta$（即$(\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots \to (\alpha_n \to \beta)))$为重言式），则$\Gamma \vdash \beta$

- 通过n次MP推理可证

定理 2.9（演绎定理） [Enderton, pp.118]:

$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$当且仅当$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

- **证明**：见命题逻辑的演绎定理（1.25）

一些其它的元定理

推论 2.10（逆否命题，*Contraposition*）[Enderton, pp.119]：

$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$当且仅当且$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$

- 前面的例子中已证

推论 2.11（归谬，*Reductio ad Absurdum*，*RAA*）[Enderton, pp.119]：

若$\Gamma \cup \{\varphi\}$不一致，则$\Gamma \vdash \neg\varphi$

- 证明过程与命题逻辑的定理1.30类似

概括定理

定理2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

证明：

令φ存在一个证明$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \varphi \rangle$，利用对证明长度施归纳即可证明该定理。

- **奠基：** 当证明长度为1时，$\varphi \in \Gamma$，根据公理2.7.4可知当x不在φ中自由出现时有$\varphi \to \forall x\, \varphi$，根据~~演绎定理~~可得$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

MP

概括定理

定理 2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若$\Gamma \vdash \varphi$且x不在Γ中自由出现，则$\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

证明（续）：

- **归纳**：假设$j < i$时对任意j有该结论成立，下面对于α_i分情况讨论：
  - $\alpha_i \in \Lambda$，根据定义有$\forall x\, \alpha_i$依然是逻辑公理，显然有$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_i$（尽管$x$可能在$\alpha_i$中出现，但不影响结论）
  - $\alpha_i \in \Gamma$，与奠基情况一致
  - α_i由α_j与$\alpha_j \to \alpha_i$通过MP规则得到。由归纳假设有$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_j$且$\Gamma \vdash \forall x\, (\alpha_j \to \alpha_i)$。对公理2.7.3

$$\forall x\, (\alpha_j \to \alpha_i) \to (\forall x\, \alpha_j \to \forall x\, \alpha_i)$$

运用两次MP规则即可得$\Gamma \vdash \forall x\, \alpha_i$ Q.E.D.

概括定理

定理 2.9（概括定理）[Enderton, pp.117]：

若 $\Gamma \vdash \varphi$ 且 x 不在 Γ 中自由出现，则 $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$

- 可见，公理 2.7.3 与 2.7.4 存在的作用就是为了证明概括定理
  - **2.7.3** $\forall x\,(\alpha \to \beta) \to (\forall x\,\alpha \to \forall x\,\beta)$
  - **2.7.4** $\alpha \to \forall x\,\alpha$，其中 x 不在 α 中自由出现
- 概括定理在有些逻辑系统中被作为推理规则（如 Gentzen 的 LK 自然演绎系统等）
  - 若能对 x 不进行假设（约束）即可证明命题 $\_\_x\_\_$，那么可以说“由于 x 的任意性，我们有 $\forall x\,\_\_x\_\_$ 成立”
- 常见的用法：“*without loss of generality*”（不失一般性，*WLOG*）
  - 用特例代替一般性推理，最后概括（同时使用公理 2.7.2 与概括定理）

另一套公理系统

定义 2.7'（一阶逻辑的公理系统，*Axiomatic system for FOL*）[Open Logic, section 10.1]：

公理（Λ）：

1. 命题逻辑公理（定义 1.22）的 FOL 概括
2. 关于量词的公理：对闭项（*closed term*，即不含变元的项）有
   - $\forall x\, \beta \to \beta_t^x$
   - $\beta(t) \to \exists x\, \beta$ [Enderton, pp. 124] (*Rule EI*)

自由

推理规则：

1. MP规则
2. 关于量词的推理规则（QR）：
   - 若 $\beta \to \alpha(a)$ 已经出现在证明序列中，且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现，那么 $\beta \to \forall x\, \beta(x)$ 是正确的
   - 若 $\alpha(a) \to \beta$ 已经出现在证明序列中，且 a 不在 $\Gamma \cup \{\beta\}$ 中出现，那么 $\exists x\, \beta(x) \to \beta$ 是正确的

概括定理

例：

1. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash Qc$，显然
2. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash Qy$，和1类似
3. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash \forall y\,Qy$，不失一般性
4. $\{\forall x\,(Px \to Qx), \forall z\,Pz\} \vdash \forall x\,Qx$，约束变元换名

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*） [Enderton, pp.123]：

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明：

令$\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n = \varphi \rangle$是从$\Gamma$到$\varphi$的一个证明，令$y$为第一个不在任意$\alpha_i, i \in \{0, \ldots, n\}$中出现的变元。那么可以断言

$$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$$

是一个从Γ到φ^c_y的一个推演。为证明这个断言，需验证每个$(\alpha_k)^c_y$要么属于$\Gamma \cup \Lambda$，要么根据MP规则从$\{(\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_{k-1})^c_y\}$中推导而来。

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]：

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\,\varphi^c_y$不含$c$的推演

证明（续）：
下面对未作替换的α_k分情况讨论：

1. $\alpha_k \in \Gamma$：因此c不在α_k中出现，可知$(\alpha_k)^c_y = \alpha_k \in \Gamma$
2. $\alpha_k \in \Lambda$：即α_k为定义2.7中的逻辑公理，那么在$(\alpha_k)^c_y$依然是一条逻辑公理（Why?），因此$(\alpha_k)^c_y \in \Lambda$
   - 若α_k是命题逻辑中的重言式，替换其中常量得到的仍然是重言式。例如$Pc \to \neg\neg Pc$，显然有$(Pc \to \neg\neg Pc)^c_y = Py \to \neg\neg Py$，它仍是逻辑公理
   - 若α_k是$\forall x\,\psi \to \psi^x_t$，那么$(\alpha_k)^c_y$就是$\forall x\,\psi^c_y \to (\psi^x_t)^c_y$。注意到$(\psi^x_t)^c_y$正是$(\psi^c_y)^x_{t^c_y}$，所以它也是逻辑公理。其它组的公理也容易验证
3. α_k是由α_i与$\alpha_j = (\alpha_i \to \alpha_k)$（$i, j < k$）用MP规则推出：那么有$(\alpha_j)^c_y = ((\alpha_i)^c_y \to (\alpha_k)^c_y)$，因此可知$(\alpha_k)^c_k$可由$(\alpha_i)^c_y$与$(\alpha_j)^c_y$经过MP规则导出

常数概括定理

推论 2.13（常数概括，*Generalisation on Constants*）[Enderton, pp.123]**：**

假设$\Gamma \vdash \varphi$且c是一个不在Γ中出现的常数符号。则存在变元y，y不在φ中出现，使得$\Gamma \vdash \varphi^c_y$成立。更进一步，存在一个从$\Gamma$到$\forall y\, \varphi^c_y$不含$c$的推演

证明（续）：

由上面的推导可知，$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$的确是$\varphi^c_y$的一个推演。

令Φ为$\langle (\alpha_0)^c_y, \ldots, (\alpha_n)^c_y \rangle$中所有$\alpha_i \in \Gamma$构成的集合。

- 显然Φ是一个有穷集合，有$\overset{c}{\cancel{y}}$不在Φ中出现且$\Phi \vdash \varphi^c_y$
- 根据概括定理，$\Phi \vdash \forall y\, \varphi^c_y$，所以$\Gamma \vdash \forall y\, \varphi^c_y$

注意到概括定理的证明中不会引入新的常元，这样就可以得到一个从Γ到$\forall y\, \varphi^c_y$的证明，且c不出现在其中。 Q.E.D.

约束变元替换

我们想证：

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall y\, Pyy$$

由于$\forall x \forall y\, Pxy$中的$x$不能用$y$进行替换，所以它无法套用公理2.7.2。

但如果我们有

$$\vdash \forall x \forall z\, Pxz \to \forall y\, Pyy$$

显然就会好证很多。

那么只需要有

$$\vdash \forall x \forall y\, Pxy \to \forall x \forall z\, Pxz$$

就能证明最开始的结论。

Alphabetic Variants

定理2.14（约束变元替换定理，*Alphabetic Variants*）[Enderton, pp.126]:

令φ是一个wff，t是一个项，x是一个变元。总可以找到一个wff φ'，它和φ的差别仅在于约束变元，使得

1. $\varphi \vdash \varphi'$且$\varphi' \vdash \varphi$
2. t可以在φ'中无冲突地替换x

该定理的目的是当t无法被用来替换x时，可以通过对约束变元换名来实现合法替换。

证明概要:

1. 不失一般性，可固定t和x并递归地从φ构造φ'，通过结构归纳进行证明
   - 归纳假设为：应用构造算子前有$\varphi \vdash \varphi'$（或$\varphi' \vdash \varphi$）
2. 无量词情况较简单；对于有量词的情况构造$(\forall y\, \varphi)' = \forall z\, (\varphi')^y_z$，其中$z$不在$\varphi'$，$x$和$t$中出现，这时$t$便可用来替换其中的$x$（定理结论2成立）
3. 运用概括定理易证定理结论1成立

与等词有关的元定理

1. $\vdash \forall x\,(x = x)$
2. $\vdash \forall x \forall y\,(x = y \to y = x)$
3. $\vdash \forall x \forall y \forall z\,(x = y \to (y = z \to x = z))$
4. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\,(x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (Px_1x_2 = Py_1y_2)))$，$P$为一二元谓词
5. $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2\,(x_1 = y_1 \to (x_2 = y_2 \to (fx_1x_2 = fy_1y_2)))$，$f$为一二元函数

语义

回顾：命题逻辑中的赋值

定义 1.12（truth assignment）：

对于命题符号集合 S，一个真值指派 v 是一个函数

$$v : S \to \{F, T\}$$

定义 1.12’（truth assignment, extended）：

1. v 是一个真值指派（赋值）指它是一个函数 $v : S \to \{F, T\}$，从而对于任何命题符号 $\mathbf{A}_i \in S$，$v(\mathbf{A}_i)$ 为 T 或 F
2. 对于任何真值指派 v，定义 $\bar{v} : \bar{S} \to \{F, T\}$ 如下
   - » $\bar{v}(\mathbf{A}_i) = v(\mathbf{A}_i), i \in \mathbb{N}$
   - » $\bar{v}(\neg\alpha) = B_\neg(\bar{v}(\alpha))$
   - » $\bar{v}(\alpha \square \beta) = B_\square(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta)), \square \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$

目标：先为原子公式赋值，再为每个wff生成唯一的真值指派

FOL中的赋值

与“天生自带真值”的命题不同，在FOL中我们需要一些**来自外部的信息**才能达成以上目标：

1. 确定一些对象（*objects*），至少要有1个（因为有些公理对论域为空的语言不成立），作为被量词所量化的定义论域（*domain of discourse*）
2. 为论域中的每个对象指派一个FOL语言中的正式名字（即常元符号），作为对它的解释和索引（它与论域中的元素一一对应，自然也要非空）
3. 为论域中的每个k-元谓词/函数也指派一个FOL语言中的正式名字（谓词符号/函数符号）。这些符号对应于论域中一些k-元组（对于函数则是$k+1$-元组）构成的集合（可能是空集），本质上是谓词与函数的外延（*extension*），它们为这个外部结构提供基础的真值
   - “*extension*”的定义详见ZFC中的“外延公理”

结构

定义 2.15（结构，*Structure*）[Enderton, pp.80]：

FOL的一个结构$\mathfrak{A}$是一个函数，它的定义域是FOL的量词符号及非逻辑符号（*signature*），并且满足下列条件：

1. $\mathfrak{A}$为量词$\forall$指派一个非空集合$|\mathfrak{A}|$作为论域（*domain*或*universe*）
2. $\mathfrak{A}$为每个n-元谓词符号P指派一个n-元关系$P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$
3. $\mathfrak{A}$为每个常元符号c指派一个$|\mathfrak{A}|$中的元素$c^{\mathfrak{A}}$
4. $\mathfrak{A}$为每个n-元函数符号f指派一个n-元函数$f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$

结构的例子

在集合论的FOL语言中，定义一个结构$\mathfrak{A}$如下：

- $|\mathfrak{A}|$为自然数集合
- $\in^{\mathfrak{A}}$为二元组集合$\{\langle m, n\rangle \mid m < n\}$

一个该语言中语句为

$$\exists x \forall y \neg y \in x$$

由于它在$\mathfrak{A}$中为真，我们称$\mathfrak{A}$是它的一个模型（*model*），记为

$$\models_{\mathfrak{A}} \exists x \forall y \neg y \in x$$

下面的语句在$\mathfrak{A}$下应该如何解释？$\mathfrak{A}$是它的模型吗？

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

可满足

我们在何种情况下才能说一个一般的FOL wff为**真**？

- 显然我们在自由变元没有赋值时无法下定论，因为它**不是命题**。例如$\varphi \equiv x \in 10$

因此，我们希望在给定一个变元赋值$s : V \to |\mathfrak{A}|$时，

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$$

当且仅当将φ中的自由变元x替换为$s(x) = c^{\mathfrak{A}} \in |\mathfrak{A}|$后，再按照$\mathfrak{A}$的规定进行“翻译”，所得的语句为**真**

- 例如$\varphi^x_5 = 5 \in 10$

解释

定义 2.16（解释，*Interpretation*）[Enderton, pp.83; Hao et.al., 90]：

令$\mathfrak{A}$是FOL语言的结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个将变元映射到论域的函数。我们定义$\mathfrak{A}$和s满足（*satisfy*）wff φ，记为$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$（或者$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$），递归定义如下：

- **项的解释**：把对变元的赋值s扩展为对所有项的赋值。令T表示所有项构成的集合，递归定义项的赋值函数$\bar{s} : T \to |\mathfrak{A}|$如下
  1. 对每一个变元符号x，$\bar{s}(x) = x$
  2. 对每一个常元符号c，$\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$
  3. 若$t_1, \ldots, t_n$是项，且f是一个n-元函数符号，那么

$$\bar{s}(ft_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n))$$

解释

定义 2.16（解释，*Interpretation*）[Enderton, pp.83; Hao et.al., 90]:

令$\mathfrak{A}$是FOL语言的结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个将变元映射到论域的函数。我们定义$\mathfrak{A}$和s满足（*satisfy*）wff φ，记为$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$（或者$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$），递归定义如下：

- **原子公式的解释**：由于原子公式的定义是非递归的，因此它的解释的定义也是非递归的
  1. 对于特殊的谓词"="，我们有$\models_{\mathfrak{A}} = t_1 t_2$当且仅当$\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$（注意，这两个=分别处在FOL和元语言中）
  2. 对其他每个n-元谓词符号P有

$$\models_{\mathfrak{A}} Pt_1 \dots t_n \quad \text{iff} \quad (\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}$$

解释

定义 2.16（解释，*Interpretation*）[Enderton, pp.83; Hao et.al., 90]：

令$\mathfrak{A}$是FOL语言的结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个将变元映射到论域的函数。我们定义$\mathfrak{A}$和s满足（*satisfy*）wff φ，记为$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$（或者$(\mathfrak{A}, s) \models \varphi$），递归定义如下：

- **其它wff的解释**：根据wff的结构，递归定义如下：
  1. 若为原子公式，其定义如上
  2. $\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$当且仅当$\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$
  3. $\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)[s]$当且仅当$\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$或$\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$；或者以上两者均成立
  4. $\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi[s]$当且仅当对任意$d \in |\mathfrak{A}|$，我们有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]$，其中$s(x \mid d)$定义如下：

$$s(x \mid d)(y) = \begin{cases} s(y), & \text{if } y \neq x, \\ d, & \text{if } y = x. \end{cases}$$

例子 [Smith, pp.345]

定义一个FOL语言如下:

- 常元: m, n
- 一元谓词: F, G
- 二元谓词: L

考察下列语句的解释与真值:

1. $(\exists x\, Lmx \rightarrow Lmn)$
2. $\forall x\,(Gx \rightarrow (Lxm \vee \neg Lmx))$
3. $\forall x\,(Gx \rightarrow \exists y\, Lxy)$

对应的结构$\mathfrak{A}$如下:

- $|\mathfrak{A}|$: $\{\text{Romeo}, \text{Juliet}, \text{Benedick}, \text{Beatrice}\}$
- 常元指派:
  - m: Romeo
  - n: Juliet
- 谓词指派:
  - F: $\{\text{Romeo}, \text{Benedick}\}$
  - G: $\{\text{Juliet}, \text{Beatrice}\}$
  - L: $\{\langle\text{Romeo}, \text{Juliet}\rangle, \langle\text{Juliet}, \text{Romeo}\rangle, \langle\text{Benedick}, \text{Beatrice}\rangle, \langle\text{Beatrice}, \text{Benedick}\rangle, \langle\text{Benedick}, \text{Benedick}\rangle\}$

例子 [Smith, pp.345]

定义一个FOL语言如下：

- 常元：m, n
- 一元谓词：F, G
- 二元谓词：L

考察下列语句的解释与真值：

1. $(\exists x\, Lmx \to Lmn)$
2. $\forall x\, (Gx \to (Lxm \lor \neg Lmx))$
3. $\forall x\, (Gx \to \exists y\, Lxy)$

对应的结构$\mathfrak{A}$如下：

- $|\mathfrak{A}|$：$\{4, 7, 8, 11, 12\}$
- 常元指派：
  - m：7
  - n：12
- 谓词指派：
  - F：$|\mathfrak{A}|$中的全部偶数
  - G：$|\mathfrak{A}|$中的全部奇数
  - L：$|\mathfrak{A}|$中所有满足$m < n$的有序对$\langle m, n\rangle$

当 WFF 中拥有自由变元时

定理 2.17 [Enderton, pp.86]:

若 s_1 与 s_2 是两个从 V 到 $|\mathfrak{A}|$ 的变量赋值函数，它们在wff φ 所有自由变元（如果有的话）上的取值相等，那么

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s_1] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s_2]$$

推论 2.18 [Enderton, pp.86]：对于一个语句 σ，下列结论中必有一条成立：

1. $\mathfrak{A}$ 对于任意变元赋值函数 s 均满足 σ，这时我们称 $\mathfrak{A}$ 是 σ 的模型（*model*）
2. $\mathfrak{A}$ 对于任意变元赋值函数 s 均不满足 σ

证明思路：由于wff的可满足性是归纳定义的，直接使用结构归纳证明即可。

模型

对于语句

$$\exists x\,(x \cdot x = \mathbf{1} + \mathbf{1})$$

- 实数域 $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}; 0, 1, +, \cdot)^{\dagger}$ 是它的模型
- 有理数域 $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}; 0, 1, +, \cdot)$ 不是它的模型
- $\exists, \wedge, \vee, \leftrightarrow$ 的解释与它们在命题逻辑中的语义一样 [Enderton, pp.87]

$^{\dagger}\mathfrak{A} = (|\mathfrak{A}|; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots)$ 是一种非正式记法，只有在不引起歧义的时候才能不加标注地使用

FOL的逻辑有效性/逻辑蕴涵

定义 2.19（逻辑蕴涵） [Enderton, pp.88]：

令 Γ 为wff集合，φ 是一个wff。那么我们说 Γ 逻辑蕴涵（*logically implies, entails*）φ 当且仅当对任意结构 $\mathfrak{A}$ 和任意赋值 $s : V \to |\mathfrak{A}|$ 均有 $\Gamma \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$。这时我们记为

$$\Gamma \vDash \varphi$$

1. 这里的逻辑蕴涵使用的（元语言）符号⊨与第二章《命题逻辑》里一模一样。由于一阶逻辑包含（*subsumes*）命题逻辑（只需允许0元谓词存在），因此逻辑蕴涵包含重言蕴涵，也更接近我们在第一章《非形式化逻辑》里的定义

   定义：我们称一个推演步骤是有效的当且仅当不存在任何一种可能，令该推演的<u>前提为真且结论为假</u>。同样地，在这种情况下我们称这些前提蕴涵（entails）其结论。

2. 与之前的定义一样：
   - 记逻辑等价（*logically equivalent*）为 $\gamma \vDash\Dashv \varphi$ 或者 $\gamma \simeq \varphi$
   - 若 $\emptyset \vDash \varphi$ 则称 φ 是（逻辑）有效的（*valid*），简记为 $\vDash \varphi$

FOL的逻辑有效性/逻辑蕴涵

定义 2.19（逻辑蕴涵）[Enderton, pp.88]：

令Γ为wff集合，φ是一个wff。那么我们说Γ逻辑蕴涵（*logically implies, entails*）φ当且仅当对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值$s : V \to |\mathfrak{A}|$均有$\Gamma \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$。这时我们记为

$$\Gamma \vDash \varphi$$

推论 2.20（语句的逻辑蕴涵）[Enderton, pp.88]：

对一个语句集合Σ和语句σ，$\Sigma \vDash \sigma$当且仅当Σ的任意一个模型都是σ的模型。我们称语句σ是有效的当且仅当在任意结构下σ均为真。

例子

1. $\forall v_1\, Qv_1 \vDash Qv_2$
2. $\vDash \neg\neg\sigma \to \sigma$
3. $\vDash \exists x\, (Qx \to \forall x\, Qx)$
4. [Enderton, pp.99] $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi$ 当且仅当 $\Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)$
   » 证明:

$$
\begin{aligned}
& \Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \varphi \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意 } \mathfrak{A} \text{ 和赋值 } s \text{ 有 } \vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma \cup \{\alpha\}[s] \text{ 蕴涵 } \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意 } \mathfrak{A} \text{ 和赋值 } s \text{ 有 } \vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s] \text{ 蕴涵“若 } \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \text{ 那么 } \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]\text{”} \\
\Leftrightarrow\ & \text{对任意 } \mathfrak{A} \text{ 和赋值 } s \text{ 有 } \vDash_{\mathfrak{A}} \Gamma[s] \text{ 蕴涵 } \vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \varphi)[s] \\
\Leftrightarrow\ & \Gamma \vDash (\alpha \to \varphi)
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

更多例子

证明以下结论[Enderton, pp.99]：

$$\{\forall x\,(\alpha \to \beta), \forall x\,\alpha\} \vDash \forall x\,\beta$$

证明：

1. 根据定义，对任意使得$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s]$和$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$成立的$\mathfrak{A}$和赋值$s$，我们有：
   - 对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s(x \mid d)]$且$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$
2. 根据$\to$符的解释，对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} (\alpha \to \beta)[s(x \mid d)]$当且仅当：
   - $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$或者$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$；要么这二者均成立。因此一共有3种情况：
     - $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$且$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$
     - $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$且$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$
     - $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$且$\nvDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$
3. 我们在第一步中得知，对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x \mid d)]$
   - 那么必然有$\vDash_{\mathfrak{A}} \beta[s(x \mid d)]$，即$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\beta[s]$

Q.E.D.

Wrap up

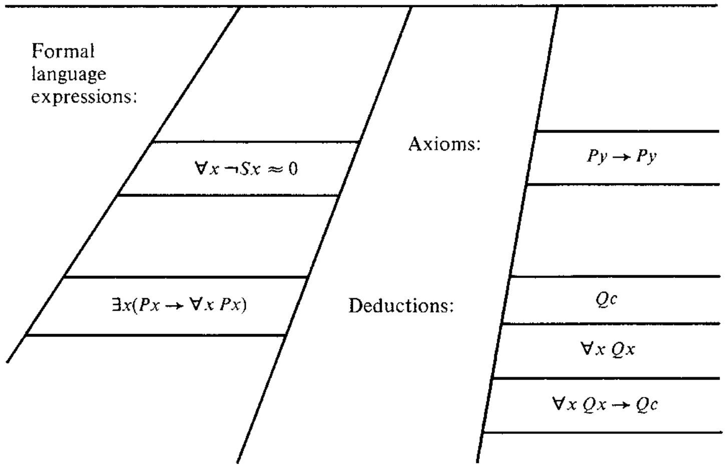
The study, in English, of the view below:

$$\text{If } \Gamma \models \varphi, \text{ then } \Gamma \vdash \varphi.$$

$$\Gamma; \alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$$

$$\models_{\mathfrak{N}} \forall x \, \neg Sx \approx 0$$

$$\models \exists x(Px \to \forall x Px)$$



可靠性与完备性

FOL远比命题逻辑复杂，还需要准备工作

结构与赋值的数量是**无穷**的！

证明可靠性与完备性的准备工作：可定义性、同态与同构

可定义性：自由变量的意义

考虑一个结构：$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; 0, S, +, \cdot)$

1. 该结构中能够定义单点集，如$\{2\}$

$$\boldsymbol{v}_1 = SS0$$

2. 尽管没有关系$<$，即集合$\{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle \mid \boldsymbol{v}_1 < \boldsymbol{v}_2\}$，但这并不妨碍我们用以下公式定义它

$$\exists \boldsymbol{v}_3 \, (\boldsymbol{v}_1 + S\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2)$$

3. 素数（由于1和$<$均可定义，以下wff是合法的）

$$(1 < \boldsymbol{v}_1) \land \forall \boldsymbol{v}_2 \forall \boldsymbol{v}_3 \, (\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_3 \to \boldsymbol{v}_2 = 1 \lor \boldsymbol{v}_3 = 1)$$

4. 负数和有理数，比如$-5_{\mathbb{Z}} \equiv \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$和$\frac{1}{2}_{\mathbb{Q}} \equiv \langle (\boldsymbol{v}_1)_{\mathbb{Z}}, (\boldsymbol{v}_2)_{\mathbb{Z}}\rangle$

$$\boldsymbol{v}_1 + 5 = \boldsymbol{v}_2 + 0; \qquad (\boldsymbol{v}_1 \cdot 2)_{\mathbb{Z}} = (\boldsymbol{v}_2 \cdot 1)_{\mathbb{Z}}$$

5. 无理数（戴德金分割）

可定义性

定义 2.21（可定义性，*definability*）[Enderton, pp.90]：

考虑一个结构$\mathfrak{A}$与一个wff φ，若φ的自由变元为$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$，那么我们便能够在$\mathfrak{A}$中定义一个$k$-元关系

$$\{\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \mid \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\, [\![\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k]\!]\}$$

我们称该k-元关系在$\mathfrak{A}$中由φ定义（*defines*）

- 一般地，一个$|\mathfrak{A}|$上的k-元关系在$\mathfrak{A}$中可定义（*definable*）当且仅当存在一个自由变元为$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$的wff恰好能够描述它

类

定义 2.22（类，*Class*）[Enderton, pp.92]：

对于一个语句集 Σ，用 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ 来表示由 Σ 的模型所组成的类。如果 Σ 是单个语句的集合 $\{\sigma\}$，则用 $\mathrm{Mod}\,\sigma$ 而不用 $\mathrm{Mod}\,\{\sigma\}$ 表示

- 由一条 FOL 语句定义的类被称为初等类（*elementary class*，*EC*），即存在一条语句 σ 使得 $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\sigma$
- 由 FOL 语句集合 Σ 定义的类被称为广义初等类（*elementary class in a wider sense*，EC_Δ）

类的例子

1. [Hao et.al., pp.96]一阶语言$\mathcal{L}=\{=,P\}$，其中P为二元谓词符号，令σ为下列3个语句的合取

$$\begin{gathered}\forall x\forall y\forall z\,(Pxy\to(Pyz\to Pxz))\\ \forall x\forall y\,(Pxy\vee x=y\vee Pyx)\\ \forall x\forall y\,(Pxy\to\neg Pyx)\end{gathered}$$

2. [Hao et.al., pp.97]一阶语言$\mathcal{L}=\{=,\circ,{}^{-1},e\}$，其中$\circ$和${}^{-1}$分别为二元和一元函数符号，$e$为常数符号，定义下面一组语句集$\Sigma$

$$\begin{aligned}&(1)\ \forall x\forall y\forall z\,(x\circ(y\circ z)=(x\circ y)\circ z)\\ &(2)\ \forall x\,(x\circ e=e\circ x)\\ &(3)\ \forall x\,(x\circ x^{-1}=x^{-1}\circ x=e)\end{aligned}$$

类的例子

朴素集合论中的**概括原则**：若φ是一个公式，$\boldsymbol{v}_2$是其中的自由变元，那么：

$$\exists \boldsymbol{v}_1 \forall \boldsymbol{v}_2 \left(\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_1 \leftrightarrow \varphi(\boldsymbol{v}_2)\right)$$

- 最早来自于Frege的*The Foundations of Arithmetic* (1884)
- 当定义$\varphi \equiv \neg(\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_2)$，那么它定义的就是一个真类而不是集合（罗素悖论）
- 为了回避该问题，ZFC选取了分离公理模式代替它

$$\forall \boldsymbol{v}_3 \exists \boldsymbol{v}_1 \forall \boldsymbol{v}_2 (\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_1 \leftrightarrow (\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{v}_3 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}_2)))$$

同态

定义 2.23（同态，*Homomorphisms*）[Enderton, pp.94; Hao et.al., pp.100]：

令$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是FOL语言的两个结构，称函数$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$是从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的一个同态，如果它满足下列条件：

1. 对每个（不是等词的）谓词P以及每组$|\mathfrak{A}|$中的n-元组$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$，都有

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \text{ iff } \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in P^{\mathfrak{B}}$$

2. 对每个函数符号f以及每组$|\mathfrak{A}|$中的n-元组$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$，都有

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

3. 对于每个常数符号c都有

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

在上述定义中如果h是一个双射，则称h是从$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的一个同构（*isomorphism*），并称$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$同构[†]，记为$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

[†] [Enderton]根据映射的大小区分了“*onto*”和“*into*”的同构。由于不影响可靠性和完备性的证明，我们采取[Hao et.al.]的术语，即“同构”指的是*onto*的同构，也即双射的同构。

同态的例子

定义自然数集合上的结构$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}; +, \cdot)$，并定义一个映射$h : \mathbb{N} \to \{e, o\}$

$$h(n) = \begin{cases} e & \text{if } n \text{ is even} \\ o & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

那么h是一个$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{B}$的（满）同态，其中$\mathfrak{B} = (\{e, o\}; +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}})$，运算定义如下：

$+^{\mathfrak{B}}$	e	o
e	e	o
o	o	e

$\cdot^{\mathfrak{B}}$	e	o
e	e	e
o	e	o

容易验证，它满足定义2.23中的条件2和3

既然同态定义了结构之间的联系，
那么FOL wff的语义（真值）能够通过同态从一个结构传到另一个结构吗？

同态定理

定理 2.24（同态定理，*Homomorphism Theorem*）[Enderton, pp.96; Hao et.al., pp.100]：

假定 h 为从 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{B}$ 的一个同态，并且 $s : V \to |\mathfrak{A}|$ 的一个赋值：

1. 对任意项 t，$h(\overline{s}(t)) = \overline{h \circ s}(t)$，其中 $\overline{s}(t)$ 在 $\mathfrak{A}$ 中计算且 $\overline{h \circ s}$ 在 $\mathfrak{B}$ 中计算
2. 对任何不含量词且不含等词的公式 α

$$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \alpha[h \circ s]$$

3. 如果 h 是单射，则 2 中的 wff α 可以包含等词
4. 如果 h 是 $|\mathfrak{A}|$ 到 $|\mathfrak{B}|$ 的满射，则 2 中的 wff α 也可以包含量词

同态定理的证明概要 [Enderton, pp.97]

1. 根据 s 和 h 的定义，对项的结构做归纳证明
2. 对（无等词和量词结构的）wff结构做归纳证明
3. 显然
4. 同样可以使用归纳法。根据归纳假设已经有 $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s] \Leftrightarrow \models_{\mathfrak{B}} \varphi[h \circ s]$
   - 首先，不管 h 是否是满射都有

$$\begin{aligned}
\models_{\mathfrak{B}} \forall x\, \varphi(h \circ s) &\Leftrightarrow \text{对任意 } e \in |\mathfrak{B}|, \models_{\mathfrak{B}} \varphi[(h \circ s)(x \mid e)] \\
&\Rightarrow \text{对任意 } d \in |\mathfrak{A}|, \models_{\mathfrak{B}} \varphi[(h \circ s)(x \mid h(d))] \\
&\Leftrightarrow \text{对任意 } d \in |\mathfrak{A}|, \models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]
\end{aligned}$$

   - 若是满射，上面推理步骤的第 2 步显然也有 $\Leftarrow$ 成立

初等等价与自同构

定理 2.25（初等等价，*Elementarily equivalent*）[Enderton, pp.97; Hao et.al., pp.102]：

我们称一个FOL语言的两个结构$\mathfrak{A}$和$\mathfrak{B}$是初等等价的，当且仅当对任意语句σ都有

$$\models_{\mathfrak{A}} \sigma \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{B}} \sigma$$

记为$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$。同构的两个结构初等等价，即$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

定理 2.26（自同构，*Automorphism*）[Enderton, pp.98; Hao et.al., pp.102]：

一个由结构$\mathfrak{A}$到自身的同构被称为自同构。令h是$\mathfrak{A}$的一个自同构，且R是一个在$|\mathfrak{A}|$上的n-元关系，它在$\mathfrak{A}$中可定义。则对任意$|\mathfrak{A}|$中的n-元组$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$有

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R \Leftrightarrow \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in R$$

例子 [Enderton, pp.101]

试证明：加法关系 $A = \{\langle m, n, p\rangle \mid p = m + n\}$ 在 $(\mathbb{N}; \cdot)$ 中无法定义。

证明：

根据算术基本定理，$(\mathbb{N}; \cdot)$是一个由全体素数与乘法生成的自由代数（交换半群），且包含一个0元。因此只要将生成元（素数）打乱顺序就可以构造自同构：

- 若$n = \prod_p p^{n_p}$，那么我们定义$h(n) = 2^{n_3} \cdot 3^{n_2} \prod_{p \geq 5} p^{n_p}$，显然它是一个一一映射
- 易证h关于乘法是一个自同构：对于$n = \prod_p p^{n_p}$和$m = \prod_p p^{m_p}$有

$$h(n \cdot m) = h(\prod_p p^{n_p + m_p}) = 2^{n_3 + m_3} \cdot 3^{n_2 + m_2} \prod_{p \geq 5} p^{n_p + m_p} = h(n) \cdot h(m)$$

- 然而$\langle 1, 1, 2\rangle \in A$但$\langle h(1), h(1), h(2)\rangle = \langle 1, 1, 3\rangle \notin A$，根据定理2.24 6可知$A$在该结构中无法定义

Q.E.D.

可靠性

FOL的可靠性

定理 2.27（可靠性定理，*Soundness Theorem*）[Enderton, pp.131]：

若$\Gamma \vdash \varphi$，则$\Gamma \vDash \varphi$

若有下面这条引理，根据蕴含连词的解释与逻辑蕴含的定义，可靠性的证明将非常简单

引理 2.28[Enderton, pp.131]：

所有逻辑公理均是有效的，即对任意$\varphi \in \Lambda$均有$\vDash \varphi$

FOL的可靠性

可靠性的证明（假设引理成立）：

根据证明的定义进行归纳证明：

1. **奠基**：证明长度为1时有以下两种情况：
   - $\varphi \in \Lambda$是逻辑公理，那么根据引理2.28有$\vDash \varphi$，因此$\Gamma \vDash \varphi$
   - $\varphi \in \Gamma$，显然有$\Gamma \vDash \varphi$
2. **归纳**：假设证明长度小于n时可靠性定理成立，当证明长度为n时：
   - 若$\varphi \in \Lambda \cup \Gamma$，则与奠基情况相同，否则
   - φ从ψ与$\psi \to \varphi$通过MP规则推导而来：根据归纳假设有$\Gamma \vDash \psi$且$\Gamma \vDash (\psi \to \varphi)$
     - 注意：这里我们使用的是定义2.7中定义的第一套公理系统，其中只有一条MP推理规则。对于有多条推理规则的系统的可靠性证明请见[Open Logic; Hao et.al.]对应章节
   - 又根据蕴含连词的解释可知$\Gamma \vDash (\psi \to \varphi)$当且仅当$\nvDash \psi$或$\vDash \varphi$
   - 前者与归纳假设中的$\Gamma \vDash \psi$矛盾，因此有$\vDash \varphi$

Q.E.D.

FOL公理的有效性

公理的概括：任意有效公式的概括仍然是有效的，即

$$\models \varphi \Rightarrow \models \forall x\, \varphi$$

证明：

φ是有效的，当且仅当

- 对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值函数s有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$，当且仅当
- 对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值函数s均有：对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]$
  - （$\Rightarrow$）$s(x \mid d)$是一种赋值函数
  - （$\Leftarrow$）由d的任意性，只需令$d = s(x)$就有$s(x \mid d) = s(x \mid s(x)) = s$

  当且仅当
- 对任意结构$\mathfrak{A}$和任意赋值函数s有$\models_{\mathfrak{A}} \forall x\, \varphi[s]$，即$\models \forall x\, \varphi$成立

Q.E.D.

FOL公理的有效性

第一组公理：命题逻辑中的重言式在FOL中是有效的。

证明：

若以下引理成立，那么只需取$\Gamma = \emptyset$即可令以上结论成立。

引理[Enderton, pp.129]：

令$\mathfrak{A}$是一个结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个赋值。定义一个在所有素公式†（*prime formulas*）α上的真值指派v如下

$$v(\alpha) = T \quad \text{iff} \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$$

那么对任意wff φ（不管是否为素公式）均有

$$\overline{v}(\varphi) = T \quad \text{iff} \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$$

进一步，若Γ重言蕴涵φ，那么Γ也逻辑蕴涵φ

† 素公式指所有原子公式以及形如$\forall x\, \alpha$的公式[Enderton, pp.114]

素公式：命题逻辑与一阶逻辑的桥梁

一阶逻辑的语法其实是对命题逻辑的细化，这可以体现在wff的分类上：

定义[Enderton, pp.114]：

1. 原子公式与形如$\forall x\,\varphi$的wff被称为素公式（prime formula）
   - *Formulas with no deeper propositional structure*
2. 其他形式的wff为非素公式（nonprime formula）或复杂公式（compound formula）

- 复杂公式均可以基于素公式通过逻辑连词构造
- 素公式本身可看作命题逻辑中的命题符号（注意区分[Enderton]中的闭语句“*sentence*”和命题符“*sentence symbol*”）
- 形式不同的素公式只能看作不同的命题符号
  - 形式语言的公式在语法上只是一个字符串

重言式

我们不再将重言式简单地归类进命题逻辑或一阶逻辑，这仅仅取决于wff本身的形式。回顾以下定义：

定义 1.14（tautologically implies, entails）：

Σ重言蕴涵τ（记为$\Sigma \vDash \tau$）当且仅当所有满足Σ的真值指派均满足τ

- 当$\Sigma = \emptyset$，记为$\emptyset \vDash \tau$或$\vDash \tau$
  - 意味着任意真值指派均满足τ，我们称τ为重言式或永真式（tautology）

显然，只有真值指派才能判定一个wff是否是重言式。例如下面的例子[Enderton, pp.115]

$$(\forall y \neg Py \to \neg Px) \to (Px \to \neg \forall y \neg Py)$$

就是一个重言式，其中有两个命题符（素公式）：$\forall y \neg Py$和Px。$\forall x\,(Px \to Px)$和$\forall x\, Px \to Pc$则不是重言式（尽管它们是有效的，其逻辑有效性源自于它们是公理而不是真值表上的验证）。

“重言蕴涵”与“可证”

既然FOL wff可以被看作命题逻辑公式，我们能够很直观地得到下面的结论

定理 2.29 [Enderton, pp.115]：

（FOL中）$\Gamma \vdash \varphi$当且仅当$\Gamma \cup \Lambda$重言蕴涵φ

- 该定理显然成立。只需要使用命题逻辑的紧致性（完备性的推论）即可
- 注意重言蕴涵φ的前提（前件）是$\Gamma\cup\Lambda$，它包含所有的FOL公理
  - 这样的话，例如$\varphi \equiv \forall x\, Px \to Px$虽然是非重言式，但由于$\varphi \in \Lambda$，仍然有$\Gamma \cup \Lambda$重言蕴涵$\varphi$
- 正因如此，我们必须证明Λ的有效性。而这个有效性不能再通过“重言蕴涵”（即真值指派）这样的命题逻辑工具验证，必须回到结构中去证明它们的“真”

FOL公理的有效性

第一组公理：命题逻辑中的重言式在FOL中是有效的。

证明：

若以下引理成立，那么只需取$\Gamma = \emptyset$即可令以上结论成立。

引理[Enderton, pp.129]：

令$\mathfrak{A}$是一个结构，$s : V \to |\mathfrak{A}|$是一个赋值。定义一个在所有素公式†（*prime formulas*）α上的真值指派v如下

$$v(\alpha) = T \quad \text{iff} \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$$

那么对任意wff φ（不管是否为素公式）均有

$$\overline{v}(\varphi) = T \quad \text{iff} \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$$

进一步，若Γ重言蕴涵φ，那么Γ也逻辑蕴涵φ

† 素公式指所有原子公式以及形如$\forall x\ \alpha$的公式[Enderton, pp.114]

FOL公理的有效性

第一组公理：命题逻辑中的重言式在FOL中是有效的。

证明（Cont’d）：

1. 对wff的结构进行归纳：
   - 对于每个可以看作命题的素公式，$\bar{v}(\alpha) = v(\alpha) = T$当且仅当$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$
   - 对于$\neg\varphi$形式的wff，$\bar{v}(\neg\varphi) = T$当且仅当$v(\varphi) = F$
     - 根据$\neg$的解释以及归纳假设得$\models_{\mathfrak{A}} \neg\varphi[s]$当且仅当$\not\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$
   - 对于形如$\psi \to \varphi$的wff，$\bar{v}(\psi \to \varphi) = T$当且仅当$v(\psi) = F$或者$v(\varphi) = T$
     - 根据$\to$的解释以及归纳假设得$\models_{\mathfrak{A}} (\psi \to \varphi)[s]$当且仅当$\not\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$或者$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$
2. 根据重言蕴含的定义，$\Gamma \models \varphi$意味着：
   - 对任意结构$\mathfrak{A}$和赋值s，任意$\psi \in \Gamma$均有若$\bar{v}(\psi[s]) = T$那么必有$\bar{v}(\varphi[s]) = T$。
     - 根据上面的结论，即：对任意结构$\mathfrak{A}$和赋值s，任意$\psi \in \Gamma$均有若$\models_{\mathfrak{A}} \psi[s]$那么必有$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$，也就是$\Gamma$逻辑蕴含$\varphi$ Q.E.D.

FOL公理的有效性

以下公理均是有效的（证明留作习题）

- 第三组公理：$\vDash \forall(\alpha \to \beta) \to (\forall x\,\alpha \to \forall x\,\beta)$
- 第四组公理：$\vDash \alpha \to \forall x\,\alpha$，其中$x$不在$\alpha$中自由出现
- 第五组公理：$\vDash x = x$
- 第六组公理：$\vDash (x = y) \to (\alpha \to \alpha')$，其中$\alpha$为原子公式，$\alpha'$为对$\alpha$中的$x$进行0次或多次替换后得到的wff

第二组公理的有效性

第二组公理：$\vDash \forall x\, \alpha \to \alpha_t^x$，其中$t$对于$\alpha$中的$x$是可替换的

先看一个简单的例子：$\forall x\, Px \to Pt$是有效的。假设

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px[s]$$

根据定义，对任意$d \in |\mathfrak{A}|$有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px[s(x \mid d)]$$

我们可以令$d = \bar{s}(t)$，那么就有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\, Px[s(x \mid \bar{s}(t))]$$

根据谓词的解释，也就是说

$$\bar{s}(t) \in P^{\mathfrak{A}}$$

也即$\vDash_{\mathfrak{A}} Pt[s]$

第二组公理的有效性

我们希望将这种“先赋值，再替换”与“先替换，再赋值”的语义等价性扩张到更复杂的wff中，即

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))] \quad \text{iff} \quad \models_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s]$$

其中t可以替换φ中的x。这个性质可以被总结为下面的引理

引理 2.30 [Enderton, pp.133]:

对于一个结构$\mathfrak{A}$和赋值s，对任意项u，令u^x_t为将u中的x替换为t后的结果，那么

$$\bar{s}(u^x_t) = \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u)$$

换言之，一个替换既可以发生在项（语法）中，也可以发生在赋值（语义）里，且二者是等价的

替换引理

引理2.30 [Enderton, pp.133]: $\bar{s}(u_t^x) = \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u)$

证明：直接对项u的结构进行归纳。

1. **奠基**：
   - 若u是一个常元或非x变元，那么上式退化为$\bar{s}(u) = \bar{s}(u)$
   - 若$u = x$则上式退化为$\bar{s}(t) = \bar{s}(t)$
2. **归纳**：假设结论对项构造算子施加次数小于n时成立
   - 那么$u = fu_1 \cdots u_n = f(u_1, \ldots u_n)$时，$u_t^x = f((u_1)_t^x, \ldots, (u_n)_t^x)$
   - 根据项的解释，有$\bar{s}(u_t^x) = \bar{s}(f((u_1)_t^x, \ldots, (u_n)_t^x))$
   - 在$\mathfrak{A}$中即$f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}((u_1)_t^x), \ldots, \bar{s}((u_n)_t^x))$
   - 根据归纳假设，即$f^{\mathfrak{A}}(\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_1), \ldots, \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_n))$
   - 根据项的解释，即$\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(f(u_1, \ldots u_n))$

替换引理

引理 2.31（替换引理，*Substitution Lemma*）[Enderton, pp.133]：

若项t可以替换wff φ中的变元x，那么

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s] \quad \text{iff} \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))]$$

证明：对wff φ的结构进行归纳。

- **奠基**：φ为原子公式。那么根据引理2.28可知该结论成立。例如$\varphi \equiv Pu_1 \cdots u_n$则

$$\begin{aligned}
& \vDash_{\mathfrak{A}} (Pu_1 \cdots u_n)^x_t[s] && \\
\iff & (\bar{s}((u_1)^x_t), \ldots, \bar{s}((u_n)^x_t)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{Def.} \\
\iff & (\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_1), \ldots, \overline{s(x \mid \bar{s}(t))}(u_n)) \in P^{\mathfrak{A}} && \text{Lemma 2.28} \\
\iff & \vDash_{\mathfrak{A}} (Pu_1 \cdots u_n)[\overline{s(x \mid \bar{s}(t))}] &&
\end{aligned}$$

替换引理

证明（Cont'd）：

- **归纳**：假设替换引理对构造次数小于n的wff成立
  - 若φ为形如$\neg\psi$或$\psi\to\theta$的wff，根据$\neg$和$\to$的解释，替换引理显然对它们成立
  - 若φ为形如$\forall y\,\psi$，需要根据可替换的定义分情况讨论：
    1. x在φ中未自由出现，那么s与$s(x \mid \bar{s}(t))$在φ中所有自由变元的取值相同，所以$\varphi^x_t=\varphi$，结论显然成立
    2. x在φ中自由出现。由于t可以替换φ中的x，因此y不在t中出现且t可替换ψ中的x
       - 因为y不在t中出现，所以对任意$d\in|\mathfrak{A}|$有$\bar{s}(t)=\overline{s(y\mid d)}(t)$ (*)
       - 由于$x\neq y$，$\varphi^x_t=\forall y\,\psi^x_t$，那么有

$$
\begin{array}{llll}
\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s] & \text{iff 对任意 } d, & \vDash_{\mathfrak{A}} \psi^x_t[s(y\mid d)] & \text{定义} \\
 & \text{iff 对任意 } d, & \vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s(y\mid d)(x\mid \bar{s}(t))] & \text{归纳假设 \& (*)} \\
 & \text{iff} & \vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x\mid \bar{s}(t))] &
\end{array}
$$

因此，原命题对任意wff均成立 Q.E.D.

第二组公理的有效性

第二组公理是逻辑有效的，即$\vDash \forall x\,\varphi \to \varphi^x_t$，其中$t$对于$\alpha$中的$x$是可替换的

证明:

假设t可以在φ中替换x，且$\vDash_{\mathfrak{A}} (\forall x\,\varphi)[s]$，即需要证$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))]$

已知对任意$d \in |\mathfrak{A}|$

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid d)]$$

那么就可以令$d = \bar{s}(t)$，有

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s(x \mid \bar{s}(t))]$$

根据替换引理可知

$$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi^x_t[s]$$

由于$\mathfrak{A}$和s的任意性，有$\vDash \forall x\,\varphi \to \varphi^x_t$成立。进而，FOL的公理均是逻辑有效的，这也完成了可靠性定理的证明 Q.E.D.

FOL可靠性定理的推论

推论 2.32 [Enderton, pp.134]:

若$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$，那么$\varphi$与$\psi$逻辑等价

推论 2.33 [Enderton, pp.134]:

若φ'是φ的一个换名（alphabetic variant），那么它们是逻辑等价的

推论 2.34 [Enderton, pp.134]:

若Γ是可满足的，那么它是一致的

Gödel完备性定理

完备性定理

一阶逻辑的完备性（完全性）定理是数理逻辑的基本定理之一，非常重要。它由 Kurt Gödel 于 20 世纪 30 年代证明。

本小结中我们给出带等词的一阶谓词逻辑的完备性定理，主要采用 Henkin 在 20 世纪 50 年代给出的证明方法，即极大一致集方法。

完备性定理

哥德尔的博士论文:

On the completeness of the calculus of logic
(1929)

1. Introduction

The main object of the following investigations is the proof of the completeness of the axiom system for what is called the restricted functional calculus, namely the system given in *Whitehead and Russell 1910*, Part I, *1 and *10, and, in a similar way, in *Hilbert and Ackermann 1928* (hereafter cited as H. A.), III, §5. Here 'completeness' is to mean that every valid formula expressible in the restricted functional calculus (a valid *Zählaussage*, as Löwenheim would say) can be derived from the axioms by means of a finite sequence of formal inferences. This assertion can easily be seen to be equivalent to the following: Every consistent axiom system[1] consisting of only *Zählaussagen* has a realization. (Here 'consistent' means that no contradiction can be derived by means of finitely many formal inferences.)

完备性定理

定理 2.35（完备性定理，*Completeness Theorem*） [Enderton, pp.135]：

1. 若 $\Gamma \vDash \varphi$，则 $\Gamma \vdash \varphi$
2. 任意一致的 wff 集合是可满足的

- 以上两个命题的等价性可从命题逻辑部分的定理 1.31 简单推广而来

完备性定理

考虑可数无穷的一阶语言†：与命题逻辑完备性的证明类似，我们将从一致集Γ开始，一步步扩张为极大一致集Δ并构造它的模型

1. $\Gamma \subseteq \Delta$
2. Δ是一致的，且是极大的。即对任意wff α都有：要么$\alpha \in \Delta$，要么$(\neg\alpha) \in \Delta$
3. 对任意wff φ和任意的变元x，存在一个常量c使得

$$(\neg\forall x\, \varphi \to \neg\varphi^x_c) \in \Delta$$

   - 即$(\exists x\, \neg\varphi \to \neg\varphi^x_c) \in \Delta$，也叫Henkin's Expansion
4. 从Δ中构造$\mathfrak{A}$令Γ中所有不含等词的wff都被满足。其中$|\mathfrak{A}|$是所有项的集合，即

$$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \quad \text{iff} \quad Pt_1 \cdots t_n \in \Delta$$

5. 在$\mathfrak{A}$中增加对等词的支持

†完备性对于不可数的FOL依然成立，但需要更复杂的集合论工具

第一步：增加FOL中的常元

令Γ为可数FOL语言的一个一致集，那么在该语言中增加可数个常元后（公理集被扩充），Γ仍然是一致的

证明[Enderton, pp. 135]：

（注意：一致性是语法中的概念，只与FOL的语言本身有关）

1. 向FOL $\mathcal{L}$中增加可数多个常元$C = \{c_1, c_2, \ldots\}$后记作$\mathcal{L}_C$。假设$\mathcal{L}$一致，但$\mathcal{L}_C$不一致
2. 根据定义，$\mathcal{L}_C$中有$\Gamma \vdash (\beta \wedge \neg\beta)$。显然，该证明（包括$\beta$与$\neg\beta$）中至多只包含有穷个属于$C$的新常元符号
3. 这些新常元不在Γ中出现（Γ在$\mathcal{L}$中定义）。那么根据概括定理，我们可将以上证明以及β中出现的新常元概括为变元
4. 如此，便得到$\mathcal{L}$中的一段证明：$\Gamma \vdash (\beta' \wedge \neg\beta')$。这与$\mathcal{L}$一致的假设矛盾 Q.E.D.

第二步：Henkin's Expansion

对 FOL $\mathcal{L}_C$ 中的所有 wff φ 以及变元 x，在 Γ 中增加如下 wff

$$\neg\forall x\,\varphi \to \neg\varphi_c^x$$

其中 $c \in C$ 是新引入的常元符号。我们记这些 wff 的集合为 Θ（也被称为“Henkin 公理”）

Henkin 公理的构造过程：

1. 枚举二元组 $\langle\varphi, x\rangle$，其中 φ 和 x 分别为 $\mathcal{L}_C$ 中的 wff 和变元。由于 $\mathcal{L}_C$ 可数，所以这种枚举是可行的
2. 令 $\theta_1 \equiv \neg\forall x_1\,\varphi_1 \to (\varphi_1)_{c_1}^{x_1}$，其中 $c_1 \in C$ 是 φ_1 中未出现的第一个新常元（本质上可看作一个关于反例——如果存在的话——的参数变元，因为我们不指定它在原论域中的取值）。一般地，我们定义

   $$\theta_n \equiv \neg\forall x_n\,\varphi_n \to (\varphi_n)_{c_n}^{x_n}$$

   其中 $c_n \in C$ 是第一个未出现在 φ_n 和 θ_k 中的新常元，其中 $k < n$
3. 令 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots\}$，我们断言 $\Gamma \cup \Theta$ 是一致的

第二步：Henkin's Expansion

证明[Enderton, pp. 136]：

1. 假设$\Gamma \cup \Theta$不一致，那么必然对于某个$m \geq 0$有$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$一致，但$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}\}$不一致，根据归谬法（RAA）：

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\theta_{m+1}$$

   其中$\theta_{m+1} \equiv \neg\forall x\, \varphi \to \neg\varphi^x_c$，而$\varphi, x, c$则是$\mathcal{L}_C$中的某个wff、变元和常元

2. 因为$\neg(\alpha \to \beta) \vDash \dashv(\alpha \wedge \neg\beta)$，根据规则T可知

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\, \varphi \quad \text{并且} \quad \Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \varphi^x_c$$

3. 对于第二个表达式，因为c是在$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\}$中从未出现的常元，根据常数概括定理，我们有

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \forall x\, \varphi$$

   那么与$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \neg\forall x\, \varphi$可推出

$$\Gamma \cup \{\theta_1, \ldots, \theta_m\} \vdash \perp$$

4. 这与m是最小性假设矛盾

Q.E.D.

第三步：极大一致集

至此，可将$\Gamma \cup \Theta$进一步扩张为一个完全且一致的极大一致集Δ，即对\mathcal{L}_C$
中的任意wff φ都有：要么$\varphi \in \Delta$，要么$(\neg\varphi) \in \Delta$

证明概要[Enderton, pp. 137]：

- 与命题逻辑部分的引理1.35类似
  - 令Λ为$\mathcal{L}_C$中的公理，若$\Gamma \cup \Theta$一致，根据定理2.27有$\Gamma \cup \Theta \cup \Lambda$不可能同时重言蕴涵$\beta$和$\neg\beta$且$\Lambda \subseteq \Delta$。那么便存在一个素公式上的真值指派函数$v$满足$\Gamma \cup \Theta \cup \Lambda$，只需令

$$\Delta = \{\varphi \mid \bar{v}(\varphi) = T\}$$

    即可，显然φ和$\neg\varphi$不可能同时属于Δ，且Δ是一致的
- 由于Δ的极大性，它也是一个关于$\vdash$的传递闭包

$$\begin{aligned} \Delta \vdash \varphi &\Rightarrow \Delta \nvdash \neg\varphi && \text{一致性} \\ &\Rightarrow (\neg\varphi) \notin \Delta \\ &\Rightarrow \varphi \in \Delta && \text{极大性} \end{aligned}$$

第四步：从Δ中读出结构$\mathfrak{A}$

接下来，我们可以从Δ中为$\mathcal{L}_C$构造一个结构$\mathfrak{A}$，其中暂时用一个特殊的二元谓词E代替$\mathcal{L}_C$中的等词（如果有的话）：

1. $|\mathfrak{A}|$为$\mathcal{L}_C$中的所有项
2. 定义二元关系$E^{\mathfrak{A}}$，令

$$\langle u, t\rangle \in E^{\mathfrak{A}} \quad \text{当且仅当 wff } u = t \text{ 属于 } \Delta$$

3. 对所有$\mathcal{L}_C$中的n-元谓词P，定义n-元关系$P^{\mathfrak{A}}$，令

$$\langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in P^{\mathfrak{A}} \quad \text{当且仅当 wff } Pt_1 \cdots t_n \in \Delta$$

4. 对所有$\mathcal{L}_C$中的n-元函词f，定义n-元函数$f^{\mathfrak{A}}$，令

$$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = ft_1 \cdots t_n$$

以上均包含$n = 0$的情况。对所有常元c定义$c^{\mathfrak{A}} = c$；定义变元赋值函数$s : V \to |\mathfrak{A}|$为恒等函数$s(x) = x$

第四步：从Δ中读出结构$\mathfrak{A}$

那么，对任意$\mathcal{L}_C$中的公式φ，令φ^*是将其中的等词替换为E后的形式，我们有

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] \quad \text{iff} \quad \varphi \in \Delta$$

证明[Enderton, pp.138]：

- 对wff进行结构归纳，即对wff构造算子运用次数施归纳
- 其中关于原子公式和$(\neg\varphi)^*$形式，该结论不言自明
- 接下来只展示关于$(\varphi \to \psi)^*$与$(\forall x\, \varphi)^*$的证明

第四步：从Δ中读出结构$\mathfrak{A}$

证明（Cont'd）[Enderton, pp.138]：

$$
\begin{aligned}
\models_{\mathfrak{A}} (\varphi \to \psi)^*[s] &\Leftrightarrow\ \not\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] \text{ or } \models_{\mathfrak{A}} \psi^*[s] \\
&\Leftrightarrow \varphi \notin \Delta \text{ or } \psi \in \Delta && \text{IH} \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi) \in \Delta \text{ or } \psi \in \Delta \\
&\Leftrightarrow \Delta \vdash (\varphi \to \psi) && \text{tautologically} \\
&\Leftrightarrow (\varphi \to \psi) \in \Delta
\end{aligned}
$$

第四步：从Δ中读出结构$\mathfrak{A}$

证明（Cont'd）：

显然有$(\forall x\,\varphi)^* = \forall x\,\varphi^*$，因此我们只需证明：$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\varphi^*[s]$ iff $\forall x\,\varphi \in \Delta$

1. 如果$\forall x\,\varphi \in \Delta$，那么根据公理2.7.2和MP规则可知$\Delta \vdash \varphi^x_c$，故而有$\varphi^x_c \in \Delta$，其中$c \in |\mathfrak{A}|$
2. 根据归纳假设，对所有$c \in |\mathfrak{A}|$有$\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s(x \mid c)]$，即$\vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\varphi^*[s]$。故而有

$$\forall x\,\varphi \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \vDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\varphi^*[s]$$

3. 反过来，若$\forall x\,\varphi \notin \Delta$，那么根据$\Delta$的极大性有$\neg\forall x\,\varphi \in \Delta$
4. 注意到Henkin公理$(\neg\forall x\varphi \to \neg\varphi^x_c) \in \Delta$，其中$c \in C$是特意引入的“反例常元”
5. 结合MP规则有$\Delta \vdash \neg(\varphi^x_c)^*$，因此$(\neg\varphi^x_c) \in \Delta$，根据归纳假设和替换引理有$\nvDash_{\mathfrak{A}} (\varphi^*)^x_c[s]$
6. 那么根据全称量词$\forall$的解释可知$\nvDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\varphi^*[s]$，因此

$$\forall x\,\varphi \notin \Delta \quad \Rightarrow \quad \nvDash_{\mathfrak{A}} \forall x\,\varphi^*[s]$$

Q.E.D.

第五步：处理等词

若$\mathcal{L}$中有等词，我们定义$E^{\mathfrak{A}}$为$|\mathfrak{A}|$上的一个等价关系作为对$=$的解释。对任意项$t \in |\mathfrak{A}|$，定义$[t]$为t关于$E^{\mathfrak{A}}$的等价类。那么，我们可以获得一个商结构（*quotient structure*）：

1. $|\mathfrak{A}/E|$是$|\mathfrak{A}|$关于$E^{\mathfrak{A}}$的商集
2. 对每个n-元谓词P

$$\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in P^{\mathfrak{A}/E} \quad \text{iff} \quad \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$$

3. 对每个n-元函词f

$$f^{\mathfrak{A}/E}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n)]$$

4. 对于每个常元

$$c^{\mathfrak{A}/E} = [c^{\mathfrak{A}}]$$

5. 令$h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}/E|$为一个自然映射$h(t) = [t]$

第五步：处理等词

那么，h就是一个$\mathfrak{A}$到$\mathfrak{A}/E$的同态。进一步地，$E^{\mathfrak{A}/E}$是$|\mathfrak{A}/E|$中的等价关系。因此，对任意φ有

$$\begin{aligned}
\varphi \in \Delta &\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] && \text{第四步} \\
&\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/E} \varphi^*[h \circ s] && \text{同态定理 2.24} \\
&\Leftrightarrow \models_{\mathfrak{A}/E} \varphi[h \circ s] && E^{\mathfrak{A}/E}\ \text{是等价关系}
\end{aligned}$$

因此$\mathfrak{A}/E$和赋值函数$h \circ s$满足Δ中的任意wff

证明概要[Enderton, pp.141]：

1. 首先需证明关于$=$的解释$E^{\mathfrak{A}}$的确是$\mathfrak{A}$中的等价关系，且满足FOL等词的几个性质（显然成立）
2. 验证h是一个同态映射（显然成立）

第六步：从$\mathcal{L}_C$返回$\mathcal{L}$

将结构$\mathfrak{A}/E$限制（restrict）在$\mathcal{L}$上，它与$h \circ s$满足Γ中的任意一个wff

Q.E.D.

小结

一阶逻辑

1. 一阶语言的语法
   - 量词和等词
   - 自由变元与替换
2. 一阶逻辑的 Hilbert System
   - 概括定理
3. 语义
   - 结构与真
   - 解释
4. 一阶逻辑与命题逻辑的关系
5. 一阶逻辑的可靠性
   - 替换引理
6. 哥德尔完备性定理