2.5 两个平行的超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_1\}$ 和 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_2\}$ 之间的距离是多少？

解：$\boxed{\text{方法一}}$：由于 a 是超平面的法向量

设~~取~~ a 与超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_1\}$，$\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_2\}$ 相交于点 x_1 与 x_2

则
$$x_1=\left(\frac{b_1}{\|a\|^2}\right)a$$
$$x_2=\left(\frac{b_2}{\|a\|^2}\right)a$$

因为 $a^Tx_1=a^T\frac{b_1}{\|a\|^2}a=\frac{\|a\|^2}{\|a\|^2}b_1=b_1$ 因此 $x_1\in\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_1\}$ ~~且 x_1 与 a 平行~~

x_1 是 a 的伸缩

因此
$$\|x_1-x_2\|_2=\left\|\frac{b_1}{\|a\|^2}a-\frac{b_2}{\|a\|^2}a\right\|$$
$$=\left\|\frac{b_1-b_2}{\|a\|^2}a\right\|_2=\frac{|b_1-b_2|}{\|a\|_2}$$

$\boxed{\text{方法二}}$：设 x_1 为超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_1\}$ 上的一点

不妨设 x_1 在超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx=b_2\}$ 上的投影为 x_2

则 $a^Tx_2=b_2$

那么 x_1-x_2 与法向量 a 平行

因此
$$a\cdot(x_1-x_2)=\|a\|_2\|x_1-x_2\|_2\cos(0\text{或}\pi)$$
$$=\pm\|a\|_2\|x_1-x_2\|_2$$

又因为 $a\cdot(x_1-x_2)=a\cdot x_1-a\cdot x_2=b_1-b_2$

因此
$$\|x_1-x_2\|_2=\frac{|b_1-b_2|}{\|a\|_2}$$

2.7 半空间的Voronoi描述。令 a 和 b 为 $\mathbb{R}^n$ 上互异的两点。证明所有距离 a 比距离 b 近（Euclid 范数下）的点的集合，即 $\{x \mid \|x-a\|_2 \le \|x-b\|_2\}$ 是一个~~超平面~~半空间。用形如 $c^Tx \le d$ 的不等式进行显式表示并绘出图像。

证： $\|x-a\|_2 \le \|x-b\|_2 \iff \|x-a\|_2^2 \le \|x-b\|_2^2$

$$\iff (x-a)^T(x-a) \le (x-b)^T(x-b)$$

$$\iff \cancel{x^Tx} - 2a^Tx + a^Ta \le \cancel{x^Tx} - 2b^Tx + b^Tb$$

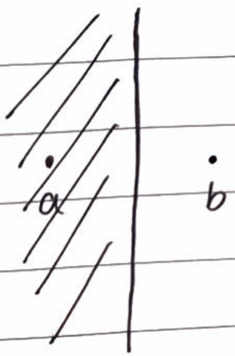
$$\iff 2(b-a)^Tx \le b^Tb - a^Ta$$

令 $c = 2(b-a)$, $d = b^Tb - a^Ta$

则 $c^Tx \le d$

因此所有距离 a 比距离 b 近的点的集合是一个半空间。

$\boxed{\text{图像}}$：



阴影部分为该半空间
（包括那条超平面）

2.10 二次不等式的解集。令 $C\subseteq\mathbb{R}^n$ 为下列二次不等式的解集

$$C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x^TAx+b^Tx+c\le 0\}$$

其中 $A\in S^n$, $b\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$

(a) 证明：如果 $A\succeq 0$，那么 C 是凸集

(b) 证明：如果对某些 $\lambda\in\mathbb{R}$ 有 $A+\lambda gg^T\succeq 0$，那么 C 和由 $g^Tx+h=0$（这里 $g\neq 0$）定义的超平面的交集是凸集.

以上命题的逆命题是否成立？

证：(a) $\boxed{\text{方法一}}$

一个集合是凸集当且仅当它与任何直线 $\{\hat{x}+tv \mid t\in\mathbb{R}\}$ 相交是凸的

因此，我们~~可以得到~~有：

$$(\hat{x}+tv)^TA(\hat{x}+tv)+b^T(\hat{x}+tv)+c$$

$$=\hat{x}A^Tx+\hat{x}^TAvt+v^TAxt+v^TAvt^2+b^T\hat{x}+b^Tvt+c$$

$$=v^TAvt^2+(2\hat{x}^TAv+b^Tv)t+\hat{x}^TA\hat{x}+b^T\hat{x}+c$$

令 $\alpha=v^TAv$, $\beta=b^Tv+2\hat{x}^TAv$, $\gamma=c+b^T\hat{x}+\hat{x}^TA\hat{x}$

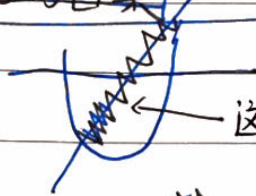
将直线 $\{\hat{x}+tv \mid t\in\mathbb{R}\}$ 与集合C相交的集合定义为

$$\{\hat{x}+tv \mid \alpha t^2+\beta t+\gamma\le 0\}$$

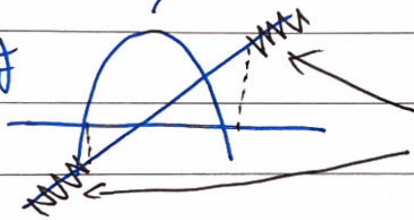
其中 $\alpha=v^TAv$, $\beta=b^Tv+2\hat{x}^TAv$, $\gamma=c+b^T\hat{x}+\hat{x}^TA\hat{x}$

当 $\alpha\ge 0$ 时该集合为凸集

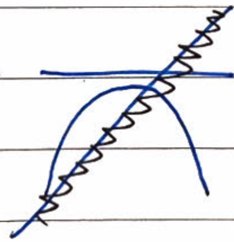
因为当 $\alpha>0$ 时



当 $\alpha<0$ 时



当然当二次函数满足



由于 $A\succeq 0$ 的，因此对 $\forall v$, $v^TAv\ge 0$

逆命题不成立，因为如果取 $A=-I$, $b=0$, $c=-1$

则 $\boxed{C=\{x\in\mathbb{R}^n \mid -x^Tx-1\le 0\}=\mathbb{R}^n}$

即 $A\not\succeq 0$ 但C是凸集

这时候其实就是这种情况！

方法2 （建议该方法）

(a) $\forall x_1, x_2 \in C,\ \theta \in [0,1]$

有 $x_1^TAx_1 + b^Tx_1 + c \le 0,\ x_2^TAx_2 + b^Tx_2 + c \le 0$

只需证：$\cancel{\theta^2 x_1^T}\ [\theta x_1 + (1-\theta)x_2]^T A [\theta x_1 + (1-\theta)x_2] +$

$b^T[\theta x_1 + (1-\theta)x_2] + c \le 0$

~~即证：~~ $\cancel{\theta^2 x_1^TAx_1 + \theta(1-\theta)x_1^TAx_2 + \theta(1-\theta)x_2^TAx_1 +}$

$\cancel{(1-\theta)^2 x_2^TAx_2 + \theta b^Tx_1 + (1-\theta)b^Tx_2 + c \le 0}$

~~即证：~~ $\cancel{\theta^2(x_1^TAx_1 + b^Tx_1 + c) + (1-\theta)^2(x_2^TAx_2 +}$

$\cancel{b^Tx_2 + c) + (\theta-\theta^2)(x_1^TAx_2 + x_2^TAx_1 + b^Tx_1 + b^Tx_2 +}$

$2c) \le 0$

$\cancel{原式 = \theta(x_1^TAx_1 + b^Tx_1 + c) + (1-\theta)(x_2^TAx_2 + b^Tx_2 + c) +}$

$\cancel{\theta(1-\theta)[x_1^TA(x_2 - x_1) - x_2^TA(x_2 - x_1)]}$

$\cancel{= \theta(x_1^TAx_1 + b^Tx_1 + c) + (1-\theta)(x_2^TAx_2 + b^Tx_2 + c) - \theta[1-\theta](x_2 - x_1)^TA(x_2 - x_1)}$

原式 $= \theta(x_1^TAx_1 + b^Tx_1 + c) + (1-\theta)(x_2^TAx_2 + b^Tx_2 + c)$

$\cancel{+\theta(1-\theta)[x_1^TA(x_2 - x_1) - x_2^TA(x_2 - x_1)]}$

$= \theta(x_1^TAx_1 + b^Tx_1 + c) + (1-\theta)(x_2^TAx_2 + b^Tx_2 + c)$

$- \theta[1-\theta]\underbrace{(x_2 - x_1)^TA[x_2 - x_1]}_{A \preceq 0} \le 0$

所以C为凸集

(b) 不妨设超平面 $D=\{x\in\mathbb{R}^n \mid g^Tx+h=0\}$

$\forall\, x_1, x_2 \in C\cap D,\ \theta\in[0,1]$ 有

$$\begin{cases} x_1^TAx_1+b^Tx_1+c\le 0 \\ x_2^TAx_2+bx_2+c\le 0 \end{cases} \quad 且 \quad \begin{cases} g^Tx_1+h=0 \\ g^Tx_2+h=0 \end{cases}$$

由(a)可知 将 $\theta x_1+(1-\theta)x_2$ 代入 $x_1^TAx_1+b^Tx_1+c$

可得 $\theta(x_1^TAx_1+b^Tx_1+c)+(1-\theta)(x_2^TAx_2+b^Tx_2+c)-(\theta-\theta^2)(x_2-x_1)^TA(x_2-x_1)$ ①

$$\begin{cases} g^Tx_1+h=0 \\ g^Tx_2+h=0 \end{cases} \Rightarrow g^T(x_2-x_1)=0$$

又因为 $\exists\,\lambda$, s.t. $A+\lambda gg^T\succeq 0$

$\Rightarrow (x_2-x_1)^T(A+\lambda gg^T)(x_2-x_1)\ge 0$

即 $(x_2-x_1)^TA(x_2-x_1)+\lambda(x_2-x_1)^Tg(x_2-x_1)\ge 0$

$\Rightarrow (x_2-x_1)^TA(x_2-x_1)\ge 0$

因此 ①式 ≤ 0

而 $g^T[\theta x_1+(1-\theta)x_2]+h=\theta(g^Tx_1+h)+(1-\theta)(g^Tx_2+h)$

$=0$

$\therefore C\cap D$ 是凸集

2.14 扩展和限制集合。

令 $S\subseteq\mathbb{R}^n$，用 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的范数

(a) 对于 $a\geqslant 0$，我们定义 S_a 为 $\{x \mid \mathrm{dist}(x,S)\leq a\}$ 其中 $\mathrm{dist}(x,S)=\inf_{y\in S}\|x-y\|$。我们称 S_a 为 S 的扩展或延伸，其幅度为 a。证明如果 S 是凸集，那么 S_a 是凸的.

(b) 对于 $a\geqslant 0$，我们定义 $S_{-a}=\{x \mid B(x,a)\subseteq S\}$，其中 $B(x,a)$ 是以 x 为中心，a 为半径的球（在范数 $\|\cdot\|$ 意义下）。我们称 S_{-a} 为 S 的收缩或限制，其幅度为 a，因为 S_{-a} 是由所有离 $\mathbb{R}^n/S$ 的距离至少为 a 的点的集合。证明如果 S 是凸集，那么 S_{-a} 也是凸集.

证明 $\forall\, x_1,x_2\in S_a$，$\theta\in[0,1]$ 下面证明 $\theta x_1+(1-\theta)x_2\in S_a$：

$$\mathrm{dist}(\theta x_1+(1-\theta)x_2, S)=\inf_{y\in S}\|\theta x_1+(1-\theta)x_2-y\|$$

$$=\inf_{y_1,y_2\in S}\|\theta x_1+(1-\theta)x_2-\theta y_1-(1-\theta)y_2\|$$

$$\leq\inf_{y_1,y_2\in S}\left(\theta\|x_1-y_1\|+(1-\theta)\|x_2-y_2\|\right)$$

$$= \theta \inf_{y_1 \in S} \left(\|x_1 - y_1\| + (1-\theta) \inf_{y_2 \in S} \|x_2 - y_2\| \right)$$

$$\leq \theta a + (1-\theta) a = a$$

因此 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S_a$

所以 S_a 为凸集.

(b) 对 $\forall x_1, x_2 \in S_{-a}$，则对 $\forall u$ 且 $\|u\| \leq a$

有 $x_1 + u \in S$，$x_2 + u \in S$

对 $\forall \theta \in [0,1]$，$\|u\| \leq a$

$$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 + u = \underline{\theta (x_1 + u) + (1-\theta)(x_2 + u) \in S}$$

因为 S 是凸集

所以 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S_{-a}$

2.16 证明如果 S_1 和 S_2 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中的凸集，那么它们的部分和

$$S=\{(x,y_1+y_2)\mid x\in\mathbb{R}^m,\ y_1,y_2\in\mathbb{R}^n,$$

$$(x,y_1)\in S_1,\ (x,y_2)\in S_2\}$$

也是凸的.

证：$\forall\ (\bar{x},\bar{y}_1+\bar{y}_2),\ (\tilde{x},\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)\in S$

即 $(\bar{x},\bar{y}_1)\in S_1,\ (\bar{x},\bar{y}_2)\in S_1$

$(\tilde{x},\tilde{y}_1)\in S_2,\ (\tilde{x},\tilde{y}_2)\in S_2$

对 $\forall\ \theta\in[0,1]$

则 $\theta(\bar{x},\bar{y}_1+\bar{y}_2)+(1-\theta)(\tilde{x},\tilde{y}_1+\tilde{y}_2)$

$=(\theta\bar{x}+(1-\theta)\tilde{x},\ \theta\bar{y}_1+(1-\theta)\tilde{y}_1+\theta\bar{y}_2+(1-\theta)\tilde{y}_2)$

~~又~~因为 S_1,S_2 是凸集

所以 $(\theta\bar{x}+(1-\theta)\tilde{x},\ \theta\bar{y}_1+(1-\theta)\tilde{y}_1)\in S_1$

$(\theta\bar{x}+(1-\theta)\tilde{x},\ \theta\bar{y}_2+(1-\theta)\tilde{y}_2)\in S_2$

因为 $\theta\underbrace{(\bar{x},\bar{y}_1)}_{\in S_1}+(1-\theta)\underbrace{(\tilde{x},\tilde{y}_1)}_{\in S_1}\in S_1$

$\theta\underbrace{(\bar{x},\bar{y}_2)}_{\in S_2}+(1-\theta)\underbrace{(\tilde{x},\tilde{y}_2)}_{\in S_2}\in S_2$

所以 S 为凸集

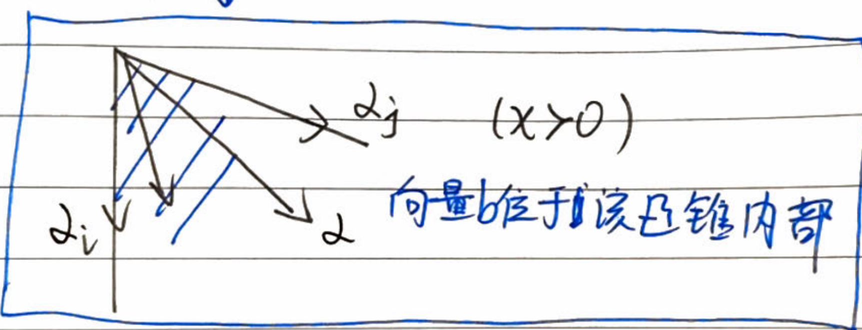
2.20 线性方程组的严格正解 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$b\in\mathbb{R}^{m}$，其中$b\in\mathcal{R}(A)$。证明存在$x$满足$x\succ 0$，$Ax=b$的充要条件是不存在$\lambda$满足

$$A^T\lambda\succeq 0,\quad A^T\lambda\neq 0,\quad b^T\lambda\le 0$$

提示：首先由线性代数证明，对于所有满足$Ax=b$的x，$c^Tx=d$的充要条件是存在向量λ满足$c=A^T\lambda$，$d=b^T\lambda$

证：设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_1,\cdots\alpha_n$为一系列列向量

则 $Ax=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 实际上便是这n个向量的加权求和，那么它们组成的向量位于凸锥里面，即$Ax=b$中向量b在凸锥内部(包括边界)　反证法：假设存在λ满足题干所述条件



$A^T\lambda \geq 0$ 表明向量λ与凸锥的夹角小于等于90°

$A^T\lambda \neq 0$ 表明向量λ与凸锥的夹角不能等于90°

而 $b^T\lambda \leq 0$ 表明λ与向量b的夹角大于等于90°，向量b又位于凸锥内部，~~[illegible]~~ 由前面的分析可知，向量b与λ的夹角一定小于90°，矛盾。

因此 ~~$Ax=b$的~~ 存在x满足 $x \geq 0$, $Ax=b$ 的充要条件是不存在λ满足 $A^T\lambda \geq 0$, $A^T\lambda \neq 0$, $b^T\lambda \leq 0$.

2.21 分离超平面的集合 设C和D为$\mathbb{R}^n$中的不相交的子集，考虑集合$(a,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$，它满足对$\forall x\in C$，有$a^Tx\le b$，对$\forall x\in D$，有$a^Tx\geq b$，证明这个集合是一个凸锥（并且如果没有分离C和D的超平面，那么它是单点集{0}）

证：对$\forall (a_1,b_1),(a_2,b_2)\in S$，$\forall \theta_1,\theta_2\geq 0$

$\forall x_1\in C$，$\forall x_2\in D$

$$(\theta_1 a_1+\theta_2 a_2)^T x_1=\theta a_1^T x_1+\theta_2 a_2^T x_1$$
$$\le \theta_1 b+\theta_2 b$$

$$(\theta_1 a_1+\theta_2 a_2)^T x_2=\theta_1 a_1^T x_2+\theta_2 a_2^T x_2 \geq \theta_1 b_1+\theta_2 b_2$$

$\therefore (\theta_1 a_1+\theta_2 a_2,\ \theta_1 b_1+\theta_2 b_2)\in S$

因此S为凸集.

HOW ARE YOU FEELING TODAY?

DATE / /

2.31 对偶锥的性质 令K^*为凸锥K的对偶锥，如(2.19)的定义。证明下面的性质

(a) K^*确实为凸锥

(b) $K_1 \subseteq K_2$表明$K_2^* \subseteq K_1^*$

(c) K^*是闭集

(d) K^*的内部由$\operatorname{int} K^* = \{y \mid y^T x > 0, \forall x \in \operatorname{cl} K\}$给出。

(e) 如果K具有非空内部，那么K^*是尖的.

(f) K^{**}是K的闭包。(因此，如果K是闭的，那么$K^{**} = K$)

(g) 如果K的闭包是尖的，那么K^*有非空内部.

证：(a) $K^* = \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$

由于K为凸锥，则设$\theta \geq 0$, $x \in K$, $\theta x \in K$

$\forall y_1, y_2 \in K^*$, $\theta_1 \geq 0$, $\theta_2 \geq 0$

则 $(\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)^T x = \underline{y_1^T \theta_1 x + \theta_2 y_2^T x} \geq 0$

因为$\theta_1 x \in K$, $\theta_2 x \in K$, 所以 $y_1^T \theta_1 x \geq 0$, $y_2^T \theta_2 x \geq 0$

所以K为凸锥.

HANG ON TO YOUR DREAMS

(b) 对于 $\forall y\in K_2^*$，有 $y^Tx\geq 0$ 对 $\forall x\in K_2$ 成立

因为 $K_1\subseteq K_2$

$\therefore$ 对 $\forall x\in K_1$ 有 $y^Tx\geq 0$

$\therefore y\in K_1^*$

$\therefore K_2^*\subseteq K_1^*$

(c) 由 K^* 的几何意义知，~~$\forall x\in K$ K^* 与 $\forall x\in$~~ K^* 是与 $\forall x\in K$ 形成的角为锐角或直角的向量集合，且包括边界

$\therefore K$ 为闭集

(d) ~~对于~~ 当 y 满足 $y^Tx>0$ 对 $\forall x\in K$ 成立

则对于 $\{u \mid \|u\|\leq r\}$ r 足够小时

$(y+u)^Tx>0$ 同样成立

所以此时 y 在 K^* 的内部

而若 $y^Tx=0$，$(y+u)^Tx<0$，当 $u=-x^{T}t^{T}$，$t>0$

此时 $y\notin \text{int}\, K^*$

因此 $\text{int}\, K^*\{y \mid y^Tx>0, \forall x\in \text{cl}\, K\}$

HOW ARE YOU FEELING TODAY?

DATE / /

(d) 由对偶锥的定义知，$y\in K^*$ $(y\neq 0)$ 时，$\boxed{y\text{是包含}K\text{的半空间的法向量}}$

而K的闭包是所有包含K的半空间的交集

$$\therefore \mathrm{cl}\,K = \bigcap_{y\in K^*} \{x \mid y^T x \geq 0\}$$

$$= \{x \mid y^T x \geq 0, \text{对} \forall y\in K^*\}$$

$$= K^{**}$$

因为 $K^* = \{y \mid x^T y \geq 0, \text{对} \forall x\in K\}$

若 $y\in K^*$，则对 $\forall x\in K$，$x^T y \geq 0$

所以 $\{x \mid x^T y \geq 0\} \supseteq K$

(e) 反证法，若 K^* 不是尖的，~~时~~

~~则存在 $y^T x \geq 0$ 同时 $-y$~~

则 ~~$\exists y\in K^*$,~~ 则 $\exists y\in K^*$ 使得 $-y\in K^*$

即 $y^T x \geq 0$，$-y^T x \geq 0$ 对 $\forall x\in K$

$\therefore y^T x = 0$ 对 $\forall x\in K$

则K有空的内部，这与K具有非空内部矛盾。

HOW ARE YOU FEELING TODAY?

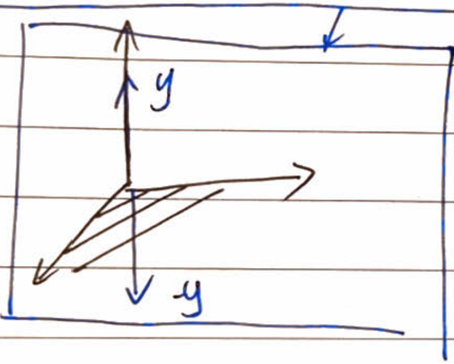
DATE / /

(g) 反证法：假设K^*没有非空内部

即 $\mathrm{int}\, K^* = \phi$

由于K^*是一个凸锥

那么若K是n维向量，K^*有小于等于n-1个线性无关的向量



~~因此 对 $\forall y \in K^*$, $\exists x \in K$ s.t.~~

因此，存在 $x \neq 0$ 使得对 $\forall y \in K^*$, $y^T x = 0$

则~~有~~对 $\forall y \in K^*$, $-y^T x = 0$

而 $K^{**} = \{x \mid y^T x \geq 0, \text{对} \forall y \in K^*\}$

所以 $x, -x \in K^{**}$

这与K的闭包是尖的相矛盾.

DATE / /

2.39 锥的分离 令 K 和 $\hat{K}$ 是两个内部非空且不相交的凸锥，即 $\text{int}\,K \cap \text{int}\,\hat{K} = \phi$，证明存在非零 y 使得 $y \in K^*$，$-y \in \hat{K}^*$。对于 $K = \hat{K}$，这表明如果锥 K 具有非空内部，那么 K^* 是尖的。

证：由于 $\text{int}\,K \cap \text{int}\,\hat{K} = \phi$

则存在 K，$\hat{K}$ 间的分离超平面，使得：

$\forall x \in K$，$\forall x_2 \in \hat{K}$，$a^T x_1 \geq b$，$a^T x_2 \leq b$

由于 K，$\hat{K}$ 为凸锥

则该超平面过原点，即 $b=0$，$a \neq 0$

那么 $\forall x_1 \in K$，$\forall x_2 \in \hat{K}$

$a^T x_1 \geq 0$，$a^T x_2 \leq 0$

即 $a^T x_1 \geq 0$，$-a^T x_2 \geq 0$。

$\therefore a \in K_1^*$，$-a \in K_2^*$

取 $y = a$，则 $y \neq 0$ 且 $y \in K^*$，$-y \in \hat{K}^*$