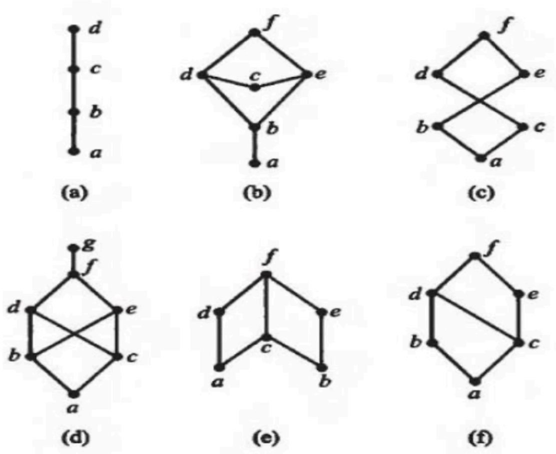
离散数学（2023）作业 15 - 格

离散数学教学组

Problem 1

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图。判断其中哪些是格。如果不是格，请说明理由。



答案： $(a)(c)(f)$ 是格，$(b)(d)(e)$ 不是格。在 (b) 中 $\{d, e\}$ 没有最大下界，在 (d) 中 $\{d, e\}$ 没有最大下界，在 (e) 中 $\{a, b\}$ 没有最大下界。

Problem 2

针对 **Problem 1** 中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元。

答案：

(a) a 与 d 互为补元，其他元素没有补元。

(c) a 与 f 互为补元，b 的补元是 c 和 d，c 的补元是 b 和 e，d 的补元是 b 和 e，e 的补元是 c 和 d。

(f) a 与 f 互为补元，b 与 e 互为补元，c 与 d 没有补元。

Problem 3

说明 **Problem 1** 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由。

答案：

(a) 是分配格，因为任何链都是分配格；不是有补格和布尔格，因为 b 与 c 没有补元。

(c) 不是分配格，因为含有 5 元子格与五角格同构；是有补格，每个元素都有补元；不是布尔格，因为不是分配格。

(f) 是分配格，因为不含有与钻石格和五角格同构的子格；不是有补格和布尔格，因为 c 与 d 没有补元。

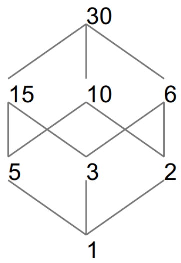
Problem 4

给定由集合 $S=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ 及整除关系构成的偏序集 $(S,|)$:

1. 画出 $(S,|)$ 的哈斯图，并判定集合 $A=\{2,3,5,6\}$ 的上确界、下确界是否存在，如存在请给出；
2. 判定该偏序集 $(S,|)$ 是否构成格；若是格，是否构成分配格、有补格、布尔代数；
3. 若 $(S,|)$ 为格，请判定 $(\{1,2,15,30\},|)$ 和 $(\{1,2,3,30\},|)$ 是否为 $(S,|)$ 定子格并说明理由。

答案:

1. 上确界、下确界均存在，上确界 $Sup(\{(2,3,5,6)\})=30$，下确界 $Inf(\{(2,3,5,6)\})=1$。



2. 偏序集 $(S,|)$ 构成格，构成分配格、有补格、布尔代数。
3. $(\{1,2,15,30\},|)$ 构成 $(S,|)$ 的子格，因为其各元素的上下确界均对自身封闭；$(\{1,2,3,30\},|)$ 构成格，但不是 $(S,|)$ 的子格，因为 $2\wedge 3=6\notin\{1,2,3,30\}$，不符合子格的定义。

Problem 5

设 L 是格，$a,b,c\in L$，且 $a\preceq b\preceq c$，证明 $a\vee b=b\wedge c$。

答案: 由 $a\preceq b$ 得 $a\vee b=b$，由 $b\preceq c$ 得 $b=b\wedge c$，因此 $a\vee b=b\wedge c$。

Problem 6

设 L 是格，求以下公式的对偶式:

1. $a\wedge(a\vee b)\preceq a$
2. $a\vee(b\wedge c)\preceq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
3. $b\vee(c\wedge a)\preceq(b\vee c)\wedge a$

答案:

1. $a\vee(a\wedge b)\succeq a$
2. $a\wedge(b\vee c)\succeq(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
3. $b\wedge(c\vee a)\succeq(b\wedge c)\vee a$

Problem 7

设 $<L,\preceq>$ 是格，任取 $a\in L$，令 $S=\{x|x\in L\wedge x\preceq a\}$，证明 $<S,\preceq>$ 是 L 的子格。

答案: 因为 $a\in S$，所以 S 非空。任取 $x,y\in S$，则有 $x\preceq a,y\preceq a$。因此，有 $x\wedge y\preceq x\preceq a,x\vee y\preceq a\vee a\preceq a$。故运算封闭，得证。

Problem 8

证明在任意格中，均有

1. $x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2. $x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

答案：

1. 显然，我们有 $x \preceq (x \vee y)$ 和 $x \leq (x \vee z)$，并且 $(y \wedge z) \preceq y \preceq (x \vee y)$ 和 $(y \wedge z) \preceq z \preceq (x \vee z)$。故我们有 $x \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ 和 $(y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$，得证。
2. 由对偶原理直接可得。

Problem 9

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格，证明 $\forall a \in L$，有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

答案：

- $a \wedge 0 \preceq 0, 0 \preceq 0$，且 $0 \preceq a \Rightarrow 0 \preceq a \wedge 0$，根据反对称性 $a \wedge 0 = 0$；
- $a \preceq a \vee 0, 0 \preceq a$，且 $a \preceq a \Rightarrow a \vee 0 \preceq a$，根据反对称性 $a \vee 0 = a$；
- $a \wedge 1 \preceq a, a \preceq a$，且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \preceq a \wedge 1$，根据反对称性 $a \wedge 1 = a$；
- $1 \preceq a \vee 1, 1 \preceq 1$，且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \vee 1 \preceq 1$，根据反对称性 $a \vee 1 = 1$。

Problem 10

求证：在格 $< L, \times, \oplus >$ 中，若 $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$，则 $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$。

答案： 证明：

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \times (a \oplus c) &= ((a \oplus b) \times a) \oplus ((a \oplus b) \times c) \\ &= a \oplus (c \times (a \oplus b)) \\ &= a \oplus ((c \times a) \oplus (c \times b)) \\ &= (a \oplus (a \times c)) \oplus (b \times c) \\ &= a \oplus (b \times c)\end{aligned}$$