第十次作业参考答案

By 梁文艺 朱映

---

1. **设 K 中 $C=\{c_1\},f=\{f_1^2\},R=\{R_1^2\}$，解释域 Z 是整数集。$\overline{c_1}=0$，$\overline{f_1^2}$ 是减法，$\overline{R_1^2}$ 是 “<”。求$|p|_Z$，其中 p 为**
   1. $\forall x_1\ R_1^2(f_1^2(c_1,x_1),c_1)$
      答：令$q=R_1^2(f_1^2(c_1,x_1),c_1)$，取$\psi\in\Phi$的 x_1 变通 ψ' 使得 $\psi'(x_1)=-1$，则 $\psi'(R_1^2(f_1^2(c_1,x_1),c_1))=0+1<0=0$，故 $|q|(\psi')=0$，因为x_1 是任意的，则 $|p|_Z=0$。
   2. $\forall x_1\forall x_2\ \neg R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1)$
      答：令$q=\neg R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1)$，取$\psi\in\Phi$的 x_2 变通 ψ' 使得 $\psi'(x_2)=1$，则 $\psi'(R_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1))=\neg(\overline{x_1}-1<\overline{x_1})=0$，故 $|q|(\psi')=0$，因为x_2 是任意的，则 $|p|_Z=0$。
   3. $\forall x_1\forall x_2\forall x_3\ (R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow R_1^2(f_1^2(x_1,x_3),f_1^2(x_2,x_3)))$
      答：令$q=R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow R_1^2(f_1^2(x_1,x_3),f_1^2(x_2,x_3))$，任取$\psi\in\Phi$，则 当$\psi'(R_1^2(x_1,x_2))=1$时，$\psi'(R_1^2(f_1^2(x_1,x_3),f_1^2(x_2,x_3)))=1$，故$|q|(\psi)=1$；当$\psi'(R_1^2(x_1,x_2))=9$时，$|q|(\psi)=1$；因为$\psi$ 是任意的，则 $|p|_Z=1$。
   4. $\forall x_1\exists x_2\ R_1^2(x_1,f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2))$
      答：令$q=R_1^2(x_1,f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2)$，取$\psi\in\Phi$的 x_2 变通 ψ' 使得 $\psi'(x_2)=-1$，则 $\psi'(f_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_2))=\overline{x_1}+2$，$\psi'(q)=\overline{x_1}<\overline{x_1}+2$，故$|q|(\psi')=1$，因为$x_2$ 是存在约束的，则 $|p|_Z=1$。

---

2. **试证 $|p|_M=1\Rightarrow|\exists xp|_M=1$。反向是否成立？ 说明理由**
   证明：

$$
\begin{aligned}
&|p|_M=1\\
\Rightarrow&|\neg p|_M=0\\
\Rightarrow&|\forall x\neg p|_M=0 &&\text{（课本p90命题2）}\\
\Rightarrow&|\neg\forall x\neg p|_M=1\\
\Rightarrow&|\exists xp|_M=1
\end{aligned}
$$

   反向不成立，以书中2.2.1小节例1中的 K 和 N 为例，N 为 K 的解释域， $N=\{0,1,2,\dots\},\overline{c_1}=0,\overline{R_1^2}:$ 相等$(=)$
   有 $|\exists x_1\ R_1^2(x_1,c_1)|_N=1$，但是 $|R_1^2(x_1,c_1)|_N$ 没有意义。（取 $\psi(x_1)=0$ 时，$|R_1^2(x_1,c_1)|(\psi)=1$，而取 $\psi(x_1)=1$ 时，$|R_1^2(x_1,c_1)|(\psi)=1$，

---

3. **求与下列公式等价的前束范式，并给出求解过程：**

$$\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_1\forall x_2R_2^2(x_1,x_2)$$

   答：

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_1\forall x_2R_2^2(x_1,x_2)\\
&\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_3\forall x_4R_2^2(x_3,x_4) &&\text{（约束变元换名）}\\
&\exists x_1(R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_3\forall x_4R_2^2(x_3,x_4)) &&\text{（课本p77命题2.3）}\\
&\exists x_1\forall x_3\forall x_4(R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow R_2^2(x_3,x_4)) &&\text{（课本p77命题2.2，前束范式）}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\forall x_1\forall x_2R_2^2(x_1,x_2)\\
&\neg\forall x_1R_1^2(x_1,x_2)\vee\forall x_1\forall x_2R_2^2(x_1,x_2) &&\text{（蕴涵等值式）}\\
&\exists x_1\neg R_1^2(x_1,x_2)\vee\forall x_1\forall x_2R_2^2(x_1,x_2) &&\text{（量词否定等值式）}\\
&\exists x_1\neg R_1^2(x_1,x_2)\vee\forall x_3\forall x_4R_2^2(x_3,x_4) &&\text{（换名）}\\
&\exists x_1\forall x_3\forall x_4(\neg R_1^2(x_1,x_2)\vee R_2^2(x_3,x_4)) &&\text{（量词辖域调整）}
\end{aligned}
$$