离散数学（2023）作业 07 - 集合的基数

March 28, 2023

Problem 1

计算下列集合的基数：

1. $A = \{x, y, z\}$
2. $B = \{x | x = n^2 \wedge n \in N\}$
3. $C = \{x | x = n^{109} \wedge n \in N\}$
4. $B \cap C$
5. $B \cup C$
6. 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合

答案:

1. 3
2. $\aleph_0$
3. $\aleph_0$
4. $\aleph_0$
5. $\aleph_0$
6. $\aleph_1$（也可以写做 $\aleph$）

Problem 2

设 A,B 为可数集，证明：

1. $A \cap B$ 是可数集
2. $A \times B$ 是可数集

答案:

1. 不妨设 $A \cap B = \emptyset$。若两个集合都是有穷集，那么 $card(A \cup B) = n + m \leqslant \aleph_0$。如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，构造如下双射 $h : A \cup B \to N$。当 $x \in A$ 时，$x = a_i$，$h(x) = i$；当 $x \in B$ 时，$x = b_j$，j =0,1,$\cdots$，那么 $h(x) = j + n$。如果 $card\, A = card\, B = \aleph_0$，那么存在双射 $f : A \to N$ 和 $g : B \to N$。如下构造函数 $h : A \cup B \to N$，

$$h(x) \begin{cases} 2i, & x \in A \\ 2j+1, & x \in B \end{cases}$$

显然 h 为双射。这就证明了 $card(A \cup B) = \aleph_0$。

2. 若两个集合都是有穷集，那么 $card(A \times B) = nm \leqslant \aleph_0$。如果其中一个集合是有穷集，另一个是无穷可数集，构造双射 $h : A \times B \to N.h(< ai, bi >) = i + jn$。如果 $card\,A = card\,B = \aleph_0$，那么存在双射 $f : A \to N$ 和 $g : B \to N$。构造函数 $h : A \times B \to N$，

$$h(< x, y >) = \frac{(i+j+1)(i+j)}{2} + i, \text{其中 } f(x) = i, g(y) = j$$

显然 h 是双射的。从而得到 $card(A \times B) = \aleph_0$.

Problem 3

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的。对那些可数无限集合，给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

1. 大于 10 的整数
2. 奇负整数
3. 绝对值小于 1 000 000 的整数
4. 0 和 2 之间的实数
5. 集合 $A \times Z^+$，此处 $A = \{2, 3\}$
6. 10 的整数倍

答案:

1. 可数无限集，$n \leftrightarrow n + 11$。
2. 可数无限集，$n \leftrightarrow -(2n + 1)$
3. 有限集。
4. 不可数集。
5. 可数无限集。n 为奇数，则 $n \leftrightarrow (2, n/2 + 1)$；$n$ 为偶数，则 $n \leftrightarrow (3, n/2)$。
6. 可数无限集。$1 \leftrightarrow 0$,$2 \leftrightarrow 10$,$3 \leftrightarrow -10$，$\cdots$。

Problem 4

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子，使得 $A - B$ 是

1. 有限的
2. 可数无限的
3. 不可数的

答案:

1. $A = \{x | x \in \mathbf{R} \land x \geq 0\}$, $B = \{x | x \in \mathbf{R} \land x > 0\}$, $A - B = \{0\}$
2. $A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R} - \mathbf{Z}$, $A - B = \mathbf{Z}$
3. $A = \{x | x \in \mathbf{R} \land x \geq 0\}$, $B = \{x | x \in \mathbf{R} \land x \leq 0\}$, $A - B = \{x | x \in \mathbf{R} \land x > 0\}$

Problem 5

给出两个不可数集合 A 和 B 的例子，使得 $A \cap B$ 是

1. 有限的
2. 可数无限的
3. 不可数的

答案:

1. $A = \{x|x \in \mathbf{R} \land x \geq 0\}$, $B = \{x|x \in \mathbf{R} \land x \leq 0\}$, $A \cap B = \{0\}$
2. $A = \{x|x \in \mathbf{R} \land x \in (0,1)\} \cup \mathbf{Z}$, $B = \{x|x \in \mathbf{R} \land x \in (1,2)\} \cup \mathbf{Z}$, $A \cap B = \mathbf{Z}$
3. $A = \{x|x \in \mathbf{R} \land x \in (0,1)\}$, $B = R$, $A \cap B = A$

Problem 6

假设 A 是可数集合。证明：如果存在一个从 A 到 B 的满射函数 f，则 B 也是可数的。

答案: 为了证明 B 也是可数的，需要构造一个从 B 到自然数集合 $\mathbf{N}$ 的单射函数 g。
由于 f 是满射函数，对于 $\forall b \in B$，都存在至少一个 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$。由于 A 是可数的，我们可以列出 A 中所有元素的列表：$a_1, a_2, a_3, \ldots$。构造从 B 到 N 的一个函数 g：

$g(b) = n$ (其中 n 是 $a_1, a_2, a_3, ...$ 中第一个满足 $f(a_n) = b$ 的自然数的索引)

接下来证明 g 是单射：假设 $\exists b_1 \neq b_2$，使得 $g(b_1) = g(b_2) = n$，即 $f(a_n) = b_1$ 且 $f(a_n) = b_2$，由函数的定义可得 $b_1 = b_2$。g 是单射函数得证。

Problem 7

设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{0,1\}^A$，由定义证明 $\mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A$。

答案: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$，$\{0,1\}^A = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$，构造双射函数 f：
$f(\emptyset) = f_0$，$f(\{a\}) = f_1$，$f(\{b\}) = f_2$，$f(\{c\}) = f_3$，
$f(\{a,b\}) = f_4$，$f(\{a,c\}) = f_5$，$f(\{b,c\}) = f_6$，$f(\{a,b,c\}) = f_7$，根据等势的定义有 $\mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A$。

Problem 8

证明：二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实数解的集合是可数的，其中 a、b 和 c 都是整数。

答案: 所有整系数一元二次方程的根的集合是可数的。
这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。
一个整系数一元二次方程可以表示成 $ax^2 + bx + c = 0$，其中 a, b, c 均是整数。
这样，对应到 $Z \times Z \times Z$ 中的元素 (a, b, c)。这个对应是单射。
由于 Z 是可数的，不难证明 $Z \times Z \times Z$ 是可数的。
因此，整系数一元二次方程最多有可数个。

Problem 9

设 A, B, C 为集合，其满足 $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 且 $B \approx C$，试证明:$A \cup B \approx A \cup C$。

答案: 由于 $B \approx C$，故存在双射：$f\colon B \to C$；构造 $g\colon A \cup B \to A \cup C$：

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in A \\ f(x) & x \in B \end{cases}$$

由于 $A \cap B = \emptyset$，故不存在一多映射，所以 g 是函数。下面证明 g 是双射：

- g 是单射：假设 $g(x_1) = g(x_2)$，若 $g(x_1) \in C$，则由于 $A \cap C = \emptyset, g(x_1) \notin A$，则 $g(x) = f(x), f(x_1) = g(x_1) = g(x_2) = f(x_2)$，由于 f 是单射，因此 $x_1 = x_2$；若 $g(x_1) \in A$，则由于 $A \cap C = \emptyset$，则 $g(x) = x$，故 $x_1 = g(x_1) = g(x_2) = x_2$，故而 $x_1 = x_2$。因此，g 是单射函数。
- g 是满射：对于任意 $y \in A \cup C$，则 $y \in A$ 或者 $y \in C$; 若 $y \in A$，则 $y \in A \cup B$ 且 $g(y) = y$；若 $y \in C$，则 $\exists x \in B, f^{-1}(y) = x$，则 $x \in A \cup B$ 且 $g(x) = (f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y)) = y$。因此，$g$ 是满射函数。

综上，g 是 $A \cup B \to A \cup C$ 上的双射函数，因此 $A \cup B \approx A \cup C$。

Problem 10

令 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 为所有仅由数字 $1, 2$ 或 3 构成的无限长的序列的集合，证明该集合不可数。

答案: *方案 1:* 假设 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 可数，则我们将其中所有元素按照某种顺序列出:

$$
\begin{array}{l}
L_1 = a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\
L_2 = a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\
L_3 = a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\
\dots\dots
\end{array}
$$

使用下列规则构造一个新的串 L

$$\mathrm{L} = a_1a_2a_3\dots$$

其中

$$a_i = \begin{cases} 2 & \text{若 } a_{ii} = 1 \\ 1 & \text{若 } a_{ii} \neq 1 \text{ 并且 } L_i \text{ 长度小于 } 1 \end{cases}$$

则 L 显然与所有列出的 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 中的元素都不同，与 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 中所有元素均可列出矛盾。因此 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 不可列，所以不可数。

方案 2: $card\{1, 2\}^\omega \leq card\{1, 2, 3\}^\omega$，而 $card\{1, 2\}^\omega \approx card\{0, 1\}^\omega$。由于 $[0, 1) \approx \{0, 1\}^\omega$，从而 $card\, R \leq card\{1, 2, 3\}^\omega$，$\{1, 2, 3\}^\omega$ 不可数。($[0, 1) \approx \{0, 1\}^\omega$ 的证明参见课件)

方案 3: 构造一个从 $(0, 1)$ 到 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 的单射，
令 $r \in (0, 1) = 0.d_1d_2d_3d_4\dots\dots$，$d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，
其中 $0 = \{111\}, 1 = \{112\}, 2 = \{113\}, 3 = \{121\}, 4 = \{122\}, 5 = \{123\}, 6 = \{131\}, 7 = \{132\}, 8 = \{133\}, 9 = \{211\}$。
例如 0.123 可以转换为 112113121，0.999 可以转换为 211211211，
这样任意一个 $(0, 1)$ 中的实数均可以表示为 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 中的不同元素，得到一个从 $(0, 1)$ 到 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 的单射。
$card(0, 1) \leq card\{1, 2, 3\}^\omega$, $(0, 1)$ 不可数，$\{1, 2, 3\}^\omega$ 不可数。