221900180田永铭 数理逻辑作业4

Problem1 证明 $\forall x \forall y Pxy \vdash \forall y \forall x Pyx$

证明:

根据enderton教材中THEOREM 24I (EXISTENCE OF ALPHABETIC VARIANTS)(EAV) 规则可知:
$\forall x \forall y Pxy \vdash \forall x \forall z Pxz$ (1)

方法一: 以此类似再代换两步即可证明原式.

此处给出更详细的证法.

方法二:

由公理2.7.2得:

$\forall x \forall y Pxy \vdash \forall x \forall z Pxz \to \forall z Pyz$ (2).解释一下这里的可替换性质:

满足可替换定义2.5b的4的第一个条件，x在 $\forall x \forall z Pxz$ 中约束出现，可以用y来代替之.

由(1)(2)和MP规则得:

$\forall x \forall y Pxy \vdash \forall z Pyz$ (3).

完全同理地，可得:

$\forall x \forall y Pxy \vdash Pyx$ (4).

根据概括定理，由于(4)式左端中x不自由出现，所以:

$\forall x \forall y Pxy \vdash \forall x Pyx.$ (5)

同理:

$\forall x \forall y Pxy \vdash \forall y \forall x Pyx.$ (6)

证毕!

Problem2 证明（三组任选两组）[Enderton, pp.131, 15-17]

第一组

1. $\vdash \exists x \alpha \vee \exists x \beta \leftrightarrow \exists x(\alpha \vee \beta)$

证明:

注意!**整个**Problem2中利用到 $\alpha \vee \beta$ 等价于 $\neg\alpha \to \beta$, 以及 $\alpha \wedge \beta$ 等价于 $\neg(\alpha \to \neg\beta)$. 这并非是是以此来代入公理的项做替换，而是基于重言式(tautologically equivalent)[enderton 书上 p26 1.2.2].

继续证明此题:

利用重言等价，以及双箭头的含义，原命题等价于证明以下两个命题:

(a)$\vdash (\neg\exists x\alpha \to \exists x\beta) \to \exists x(\neg\alpha \to \beta)$

(b)$\vdash \exists x(\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\exists x\alpha \to \exists x\beta)$

由于 contraposition theorems(逆否命题，PPT已经证明，此处可以直接使用)，所以原命题等价于证明以下两个命题:

(1)$\vdash \forall x\neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg(\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta)$

(2)$\vdash \neg(\forall x\neg\alpha \to \neg\forall x\neg\beta) \to \forall x\neg(\neg\alpha \to \beta)$

证明如下:

(1)$\vdash \forall x\neg(\neg\alpha\to\beta)\to\neg(\forall x\neg\alpha\to\neg\forall x\neg\beta)$

证明:

$1.\forall x\neg(\neg\alpha\to\beta)\qquad Hpy$
$2.\emptyset\vdash\neg(\neg\alpha\to\beta)\to(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\qquad tautology\quad p26(3)的2$
$3.\vdash\forall x\neg(\neg\alpha\to\beta)\to\forall x(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$
$概括定理(x不在空集的任何公式中自由出现)+AX2.7.3$
$4.\forall x(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\qquad 1,3MP$
$5.\vdash(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\to\neg\alpha\qquad AX1.22.1$
$6.\vdash\forall x(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\to\forall x\neg\alpha$
$概括定理(x不在空集的任何公式中自由出现)+AX2.7.3$
$7.\forall x\neg\alpha\qquad 4,6MP$
$8.\vdash(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\to\neg\beta\qquad AX1.22.2$
$9.\vdash\forall x(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\to\forall x\neg\beta$
$概括定理(x不在空集的任何公式中自由出现)+AX2.7.3$
$10.\forall x\neg\beta\qquad 4,9MP$
$11.\neg(\forall x\neg\alpha\to\neg\forall x\neg\beta)\qquad 7,10tautology\quad p26(3)的2$
$12.\vdash\forall x\neg(\neg\alpha\to\beta)\to\neg(\forall x\neg\alpha\to\neg\forall x\neg\beta)\quad 1,11MP$

(2)$\vdash\neg(\forall x\neg\alpha\to\neg\forall x\neg\beta)\to\forall x\neg(\neg\alpha\to\beta)$

证明:
利用contrapositiony和概括定理(先用概括定理说明只需证明把后面的$\forall$去掉的式子)，该命题完全等价于证明:

$\neg\alpha\to\beta\vdash\forall x\neg\alpha\to\neg\forall x\neg\beta$ (1)

利用定理1.25演绎规则，等价于:

$\neg\alpha\to\beta;\forall x\neg\alpha\to\neg\forall x\neg\beta$ (2)

由定理1.30可知，这等价于:

$\{\neg\alpha\to\beta;\forall x\neg\alpha;\forall x\neg\beta\}$(3) 不一致 .

下证明其不一致性质:
由概括定理和公理2.7.3知: $\forall x\neg\alpha\to\forall x\beta.$

利用MP规则可知: $\forall x\beta.$

再由公理2.7.2可以分别得到: $\beta,\neg\beta.$

所以(3)能推出 $\perp$,所以其不一致.所以得证.

证毕!

2. $\vdash\forall x\alpha\vee\forall x\beta\to\forall x(\alpha\vee\beta)$

证明:

利用概括定理，我们只需证明:
$\vdash\forall x\alpha\vee\forall x\beta\to\alpha\vee\beta.$

利用contoposition,演绎定理，结合 $\vee$ 的重言式等价，这等价于证明:

$\neg(\neg\alpha\to\beta)\vdash\neg(\neg\forall x\alpha\to\forall x\beta).$

只需要证明:

$\neg(\neg\alpha\to\beta)\vdash\neg\forall x\alpha$ 以及 $\neg(\neg\alpha\to\beta)\vdash\neg\forall x\beta$

这是因为$\wedge$的重言式等价($\gamma;\neg\delta\vDash\neg(\gamma\to\delta)$),以及LEMMA 24C (RULE T).

再利用定理1.30知，等价于证明:

$\{\neg(\neg\alpha\to\beta);\forall x\alpha\}$(1) 不一致 且 $\{\neg(\neg\alpha\to\beta);\forall x\beta\}$(2) 不一致,证明如下:

标签: 不一致性证明(作为超链接，后面还要复用)

前者:

由于重言式p26 (3)的2，$\vdash \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha \wedge \neg\beta$.由于公理1.22.1和1.22.2，结合MP规则可知，$\vdash \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg\alpha$，以及$\vdash \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg\beta$.
由于公理2.7.2，$\vdash \forall x\alpha \to \alpha$. 所以由MP规则知，集合(1)能推出 $\neg\alpha$ 和 α，即能推出 $\perp$，所以前者不一致得证.

后者:
$\vdash \neg(\neg\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ 已在前者中证明，此后证明与前者完全同理.所以后者也不一致.

证毕!

第二组

注意!由于第一组里面我已经非常详细地证明了，此后完全同理的证明我将通过超链接展示，适当简略.

1. $\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \to \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$

证明:

首先证明标签：双重否定消去证明(作为超链接，后面还要复用)

$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$ 是公理1.22.14，以及它的逆命题在上次作业已经证明，故此后出现均直接使用.

用 $\forall$ Rewrite $\exists$,以及利用P26重言式来替换 $\wedge$ 得原命题等价于证明:

$\vdash \neg\forall x(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\neg\forall x\neg\alpha \to \forall x\neg\beta)$.

利用contropisition以及双重否定的消去的证明,等价于:

$\vdash (\neg\forall x\neg\alpha \to \forall x\neg\beta) \to \forall x(\alpha \to \neg\beta)$.

利用概括定理和演绎规则，这只需要证明:

$(\neg\forall x\neg\alpha \to \forall x\neg\beta) \vdash (\alpha \to \neg\beta)$,即可通过合理地引入任意来证明上一个式子.

再利用一次controposition，只需证明:

$\vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \neg(\neg\forall x\neg\alpha \to \forall x\neg\beta)$.

与第一组证明同理，利用重言式 $\wedge$ 的等价形式，以及利用LEMMA 24C (RULE T),和利用一致性定理1.30，这只需要证明:

$\{\neg(\alpha \to \neg\beta), \forall x\neg\alpha\}$ (1) 与 $\{\neg(\alpha \to \neg\beta), \forall x\neg\beta\}$(2)均不一致.

复用第一题中不一致性的证明，结合双重否定的消去的证明,可以完全同理地轻易证明出来.

证毕!

2. $\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$

证明:

利用 $\wedge$ 的重言式等价，以及利用双箭头的等价，以及演绎定理，原命题等价于证明以下两个命题:

(1)$\forall x\neg(\alpha \to \neg\beta) \vdash \neg(\forall x\alpha \to \neg\forall x\beta)$

(2)$\neg(\forall x\alpha \to \neg\forall x\beta) \vdash \forall x\neg(\alpha \to \neg\beta)$

证明如下:

(1) $\forall x\neg(\alpha \to \neg\beta) \vdash \neg(\forall x\alpha \to \neg\forall x\beta)$

证明:

由于 Rule T 以及 $\wedge$ 的重言式等价($\gamma; \neg\delta \vDash \neg(\gamma \to \delta)$),所以只需证明:

$\forall x\neg(\alpha \to \neg\beta) \vdash \forall x\alpha$，以及 $\forall x\neg(\alpha \to \neg\beta) \vdash \forall x\beta$.

又由于概括定理和演绎规则和公理2.7.3，只需要证明:

$\vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha$,以及$\vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \beta$. 这是因为由这一步，由于x不在空集的任何一个公式里面自由出现，所以可以由概括定理引入 $\forall x$；再利用公理2.7.3将 $\forall$ 分配到 $\to$ 两侧;再利用演绎规则即可得到等价性.

由 $\wedge$ 的重言式等价可得:

$\vdash \neg(\alpha \to \neg\beta) \to \alpha \wedge \beta$, 再利用公理1.22.1和公理1.22.2以及MP规则，可以证得上面两式子.此小问证毕.

(2)$\neg(\forall x\alpha \to \neg\forall x\beta) \vdash \forall x\neg(\alpha \to \neg\beta)$

证明:

由概括定理可知，只需证明上式 $\vdash$ 后 $\forall$ 去掉的式子即可；又由于contraposition,结合双重否定的消去的证明，所以只需证明:

$(\alpha \to \neg\beta) \vdash (\forall x\alpha \to \neg\forall x\beta).$

由于演绎定理，所以等价于证明:

$\{\alpha \to \neg\beta; \forall x\alpha\} \vdash \neg\forall x\beta.$

再利用一致性定理1.30，所以等价于证明:

$\{\alpha \to \neg\beta; \forall x\alpha; \forall x\beta\}$(1) 不一致.

再利用替换公理2.7.2，可知(1)能推出 $\{\alpha; \beta\}$.

利用一次MP规则可知由(1)的第一项和上式，能推出:

(1)式 $\vdash \{\beta; \neg\beta\}$,即推出 $\perp$.

所以(1)式不一致. 此小问证毕.

证毕!

第三组

注意!评分请以前两组为主，在第三组，我引入skolem function和skolem constant来做推导，这并非传统希尔伯特系统

1. $\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$

证明:

$$\begin{array}{ll}
1.\exists x\alpha & Hpy \\
2.x_0\alpha & skolemconstant \\
3.\forall x(\alpha \to \beta) & Hpy \\
4.x_0(\alpha \to \beta) & AX2.7.2, \theta[x_0/x] \\
5.x_0\beta & 2,4MP \\
6.\exists x\beta & AX2.7.2, inference \\
7.\exists x\alpha \to \exists x\beta & 1,6vdash定义 \\
8.\forall x(\alpha \to \beta) \vdash (\exists x\alpha \to \exists x\beta) & 3,7vdash定义 \\
9.\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta) & 演绎规则
\end{array}$$

证毕!

2. $\vdash \exists x(Py \wedge Qx) \leftrightarrow Py \wedge \exists xQx$

证明:

等价于证明以下两式:

(1)$\vdash \exists x(Py \wedge Qx) \to Py \wedge \exists xQx$

(2)$\vdash Py \wedge \exists xQx \to \exists x(Py \wedge Qx)$

证明如下:

(1)$\vdash \exists x(Py \wedge Qx) \to Py \wedge \exists xQx$

证明:

$$\begin{array}{ll}
1.\exists x(Py \wedge Qx) & Hpy \\
2.x_0(Py \wedge Qx_0) & skolemconstant \\
3.Py \wedge Qx_0 & Rewrite2 \\
4.Py & AX1.22.1
\end{array}$$

$5.Qx_0$ $AX1.22.1$
$6.\exists xQx$ $AX2.7.2推论$
$7.\exists x(Py \wedge Qx) \vdash Py \wedge \exists xQx$ $AX2.7.3 + 多次MP + 演绎定理 + vdash定义$
$8.\vdash \exists x(Py \wedge Qx) \rightarrow Py \wedge \exists xQx$ 演绎规则

此小题证毕.

(2)$\vdash Py \wedge \exists xQx \rightarrow \exists x(Py \wedge Qx)$

证明:

$1.Py \wedge \exists xQx$ Hpy
$2.Py$ $AX1.22.1 + MP$
$3.\exists xQx$ $AX1.22.1 + MP$
$4.Qx_0$ $skolemconstant$
$5.Py \wedge Qx_0$ $AX1.22.3 + 多次MP$
$6.\exists x(Py \wedge Qx)$ $AX2.7.2推论$
$7.Py \wedge \exists xQx \vdash \exists x(Py \wedge Qx)$ $vdash定义$
$8.\vdash Py \wedge \exists xQx \rightarrow \exists x(Py \wedge Qx)$ 演绎规则

证毕!