

二元关系

离散数学

马晓星

南京大学 · 计算机科学与技术系



回顾

- 直觉概率分析：三门问题
- 概率的公理化：概率空间
- 条件概率与贝叶斯定理
- 随机变量及其期望与方差



提要

- 二元关系
 - 有序对与笛卡尔积
 - 关系与函数
 - 关系的表示
- 关系的运算
- 关系的性质
 - 自反
 - 传递
 - 对称



集合与关系

- 集合中元素无序，元素之间的“关系”难以直接体现
- 体现关系的前提是区分“主”“客” – “有序对”
 - 君君臣臣，父父子子，尊卑有别，长幼有序
 - “平等”也是一种关系

有序对 (Ordered pair)

- (a, b) 是集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 的简写
 - 卡齐米日·库拉托夫斯基 Kazimierz Kuratowski 1921
 - 这是现代通用的定义
- 有序对可以有其他的集合论定义方式:
 - Norbert Wiener 1914: $(a, b) := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$
 - Felix Hausdorff 1924: $(a, b) := \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$, where 1 and 2 are two distinct objects different from a and b .

有序对 (Ordered pair)

- (a, b) 是集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 的简写
- 次序的体现
 - $(x, y) = (u, v)$ iff $x = u$ 且 $y = v$
 - 若 $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$, 则 $\{x\} = \{u\}$ 或 $\{x\} = \{u, v\}$, 因此 $x = u$ 。
 - 假设 $y \neq v$
 - (1) 若 $x = y$, 左边 = $\{\{x\}\}$, 而 $v \neq x, \therefore$ 右边 $\neq \{\{x\}\}$;
 - (2) 若 $x \neq y$, 则必有 $\{x, y\} = \{u, v\}$, 但 y 既非 u , 又非 v , 矛盾。

笛卡尔乘积 (Cartesian Product)

- 对任意集合 A, B 笛卡尔积

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

- 例: $\{1, 2, 3\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

- 若 A, B 是有限集合, $|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A = \{1,2\}, \quad \mathcal{P}(A) \times A = ?$
- $|A| = m, |B| = n, |A \times B| = ?$
- $\emptyset \times \mathcal{P}(\emptyset) = ?$
- $|\mathcal{P}(\emptyset) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))| = ?$

关系 (Relation) 的定义

- 若 A, B 是集合,从 A 到 B 的一个 (二元) 关系是 $A \times B$ 的一个子集.

$$R \subseteq A \times B$$

是一个集合。

- 集合的元素是有序对
- 可以是空集
- 集合 R 是从 A 到 B 的一个二元关系意味着

$$\forall r \in R. \exists x, y. (r = (x, y))$$

其中 $x \in A, y \in B$.

二元关系

- 相关记号：令 $R \subseteq A \times B$
 - $(a, b) \in R$ 可简记为 aRb
 - $(a, b) \notin R$ 可简记为 $\neg aRb$ 或者 $a \not R b$
 - $aRb \wedge bRc$ 可简记为 $aRbRc$
- 例如: $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}, R = \{(1, 3), (2, 3), (1, 5)\}$ 为从 A 到 B 的关系，有: $1R3, 2R3, 1R5$

二元关系

- 关系意味着什么？
 - 两类对象之间建立起来的联系！
- 例子
 - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
 - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合 A 上的**空关系** \emptyset : 空关系即空集
- **全域关系** E_A : $E_A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$
- **恒等关系** I_A : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$

关系的一些相关术语

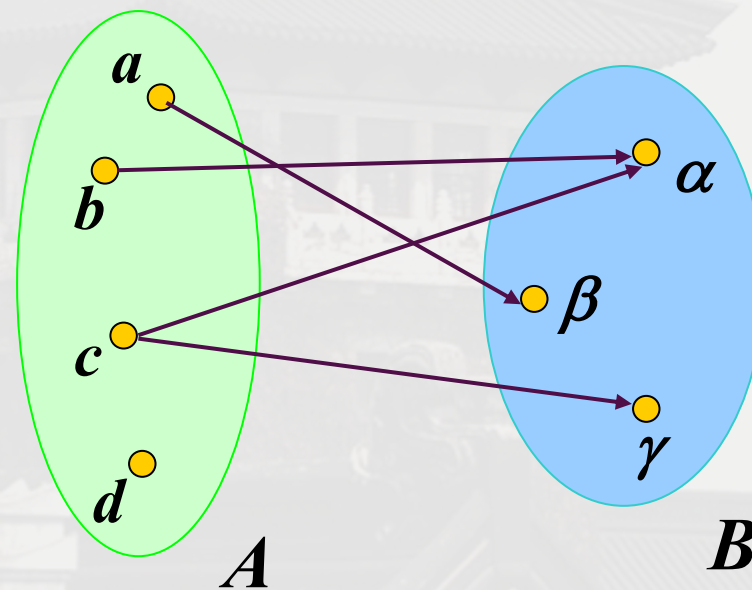
- 关系的**定义域**、**值域**和**域**：设 R 为从 A 到 B 的关系（ $R \subseteq A \times B$ ）
 - R 的定义域 Domain $\text{Dom}(R) = \{x \mid \exists y \in B. (x, y) \in R\}$
 - R 的值域 Range $\text{Ran}(R) = \{y \mid \exists x \in A. (x, y) \in R\}$
 - R 的域 Field $\text{Fld}(R) = \text{Dom}(R) \cup \text{Ran}(R)$
- 例如： $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{r, s\}$, $R = \{(1, 2), (2, s), (3, r)\}$ 其定义域、值域和域分别是什么？

二元关系的表示

- 假设 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ // 假设为有限集合
- 集合表示: $R = \{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha), (c, \gamma)\}$

	α	β	γ
a	0	1	0
b	1	0	0
c	1	0	1
d	0	0	0

0-1矩阵表示



有向图表示

二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ \longleftrightarrow 有向图 (V_D, E_D)

A 和 B 是集合

有序对集合

$(x, y) \in R$

若 $A=B$, R 中存在序列: $(x_1, x_2),$
 $(x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集 E_D

从 x 到 y 有一条边

图 D 中存在从 x_1 到 x_n 的长
度为 $n-1$ 的通路

函数是一种特殊的关系

- 若 f 是从 A 到 B 的一个函数, $R = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$ 是一个从 A 到 B 的一个关系。
- A 和 B 为非空集合, 若关系 $R \subseteq A \times B$ 满足
对于 A 中的每个元素 a , B 中都有且仅有一个元素 b 使得 aRb
则 R 是一个从 A 到 B 的函数。
- 如何用逻辑公式表达上述条件?

关系的运算

关系的运算 (1)

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用

- 例子:

- 自然数集合上: $< \cup =$ 等同于 \leq
- 自然数集合上: $\leq \cap \geq$ 等同于 $=$
- 自然数集合上: $< \cap >$ 等同于 \emptyset
- -- 请注意“类型”问题（是哪个笛卡尔积的子集）。

关系的运算 (2)

- 与定义域和值域有关的运算： 设 R 为从 A 到 B 的关系
 - $R \upharpoonright S = \{ (x, y) \mid x \in S \wedge xRy \},$
 - $R \upharpoonright S \subseteq R$
 - $R[S] = \{ y \mid \exists x (x \in S \wedge (x, y) \in R) \} = \text{Ran}(R \upharpoonright S)$
 - $R[S] \subseteq \text{Ran}(R)$
 - 有时我们用 $R(a)$ 表示 $R[\{a\}]$

例： $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 3, 5, 6\}$, A 上关系 R ：
 $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 5), (5, 2)\}$
求 $R \upharpoonright B$, $R[B]$ 、 $R(1)$ 和 $R(2)$

关系的运算 (3)

- 逆运算

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$$

- 注意:如果 R 是从 A 到 B 的关系,则 R^{-1} 是从 B 到 A 的。
- $(R^{-1})^{-1} = R$

例: $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$

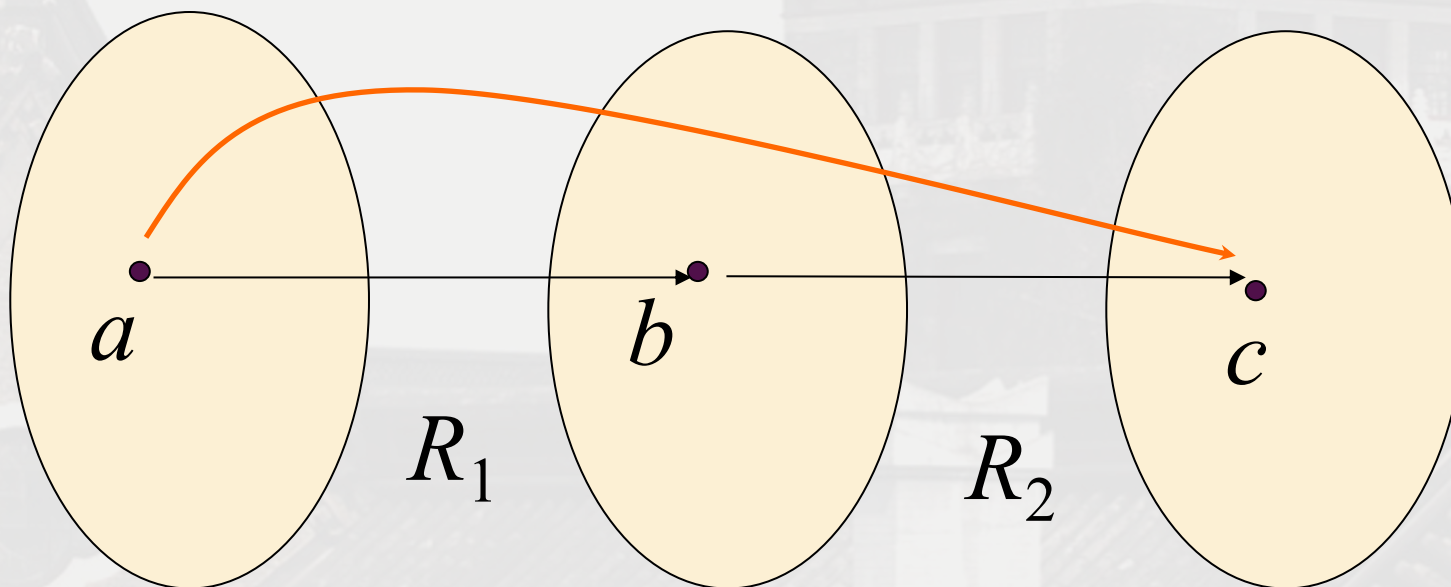
$$\begin{aligned} (x, y) \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in (R_1 \cup R_2) \\ &\Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \text{ 或 } (y, x) \in R_2 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1} \text{ 或 } (x, y) \in R_2^{-1} \end{aligned}$$

关系的运算 (4)

- 关系的**复合** (合成, **Composition**)

设 $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, R_1 与 R_2 的复合, 记为 $R_2 \circ R_1$, 定义如下:

$$R_2 \circ R_1 = \{ (a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B. ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \}$$



关系的复合运算：举例

- 设 $A = \{a, b, c, d\}$, R_1, R_2 为 A 上的关系，其中：

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\}, \quad R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$$

则：

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$$

$$R_1^2 = R_1 \circ R_1 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$$

关系的复合运算的性质 (1)

- 结合律

给定 $R_1 \subseteq A \times B, R_2 \subseteq B \times C, R_3 \subseteq C \times D$, 则有:

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$$

证明左右两个集合相等.

关系的复合运算的性质 (2)

- 复合关系的逆关系

给定 $R_1 \subseteq A \times B, R_2 \subseteq B \times C$, 则:

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

同样, 证明左右两个集合相等

$$\begin{aligned}(x, y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in R_2 \circ R_1 \\&\Leftrightarrow \exists t \in B. ((y, t) \in R_1 \wedge (t, x) \in R_2) \\&\Leftrightarrow \exists t \in B. ((t, y) \in R_1^{-1} \wedge (x, t) \in R_2^{-1}) \\&\Leftrightarrow (x, y) \in R_1^{-1} \circ R_2^{-1}\end{aligned}$$

关系的复合运算的性质 (3)

- 给定 $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, H \subseteq B \times C$, 则:

- 对集合并运算满足分配律:

$$(G \cup H) \circ F = (G \circ F) \cup (H \circ F)$$

- 对集合交运算:

$$(G \cap H) \circ F \subseteq (G \circ F) \cap (H \circ F)$$

注意: 等号不成立。考虑

$$A = \{a\}, B = \{s, t\}, C = \{b\};$$

$$F = \{(a, s), (a, t)\}, G = \{(s, b)\}, H = \{(t, b)\};$$

$$G \cap H = \emptyset, \text{ 但是 } (G \circ F) \cap (H \circ F) = \{(a, b)\}$$

0-1 矩阵运算

- 令0-1矩阵 $M_1 = [a_{i,j}]$, $M_2 = [b_{i,j}]$:
 - **交(Join):** $C = M_1 \wedge M_2$: $c_{i,j} = 1$ iff. $a_{i,j} = b_{i,j} = 1$
 - **并(Meet):** $C = M_1 \vee M_2$: $c_{i,j} = 1$ iff. $a_{i,j}$ 或者 $b_{i,j} = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

0-1 矩阵运算

- 令 $r \times s$ 矩阵 $M_1 = [a_{i,j}]$; $s \times t$ 矩阵 $M_2 = [b_{i,j}]$:
 - $C = M_1 \odot M_2$: $c_{i,j} = 1$ iff. $\exists k (a_{i,k} = 1 \wedge b_{k,j} = 1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. & \mathbf{A} \odot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix} \\ & & & = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} \\ & & & = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

关系运算的矩阵算法 (1)

- 命题

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$$

若 R 是有限集合 A 上的关系, $M_{R^n} = M_R \odot \dots \odot M_R = (M_R)^n$

关系运算的矩阵算法 (2)

- $M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$

证明:

令 $R_1: X \rightarrow Y; R_2: Y \rightarrow Z;$

令 $A = M_{R_1}, B = M_{R_2}, C = M_{R_2 \circ R_1}, D = M_{R_1} \odot M_{R_2}$ 有

$$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y (\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

关系的性质



关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合 A 上的关系 R 是：
 - 自反的 **reflexive**: 定义为: 对所有的 $a \in A, (a, a) \in R$
 - 反自反的 **irreflexive**: 定义为: 对所有的 $a \in A, (a, a) \notin R$
 - 注意区分“非”与“反”: 反自反不是自反的否定。

设 $A = \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A$

$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ 是自反的

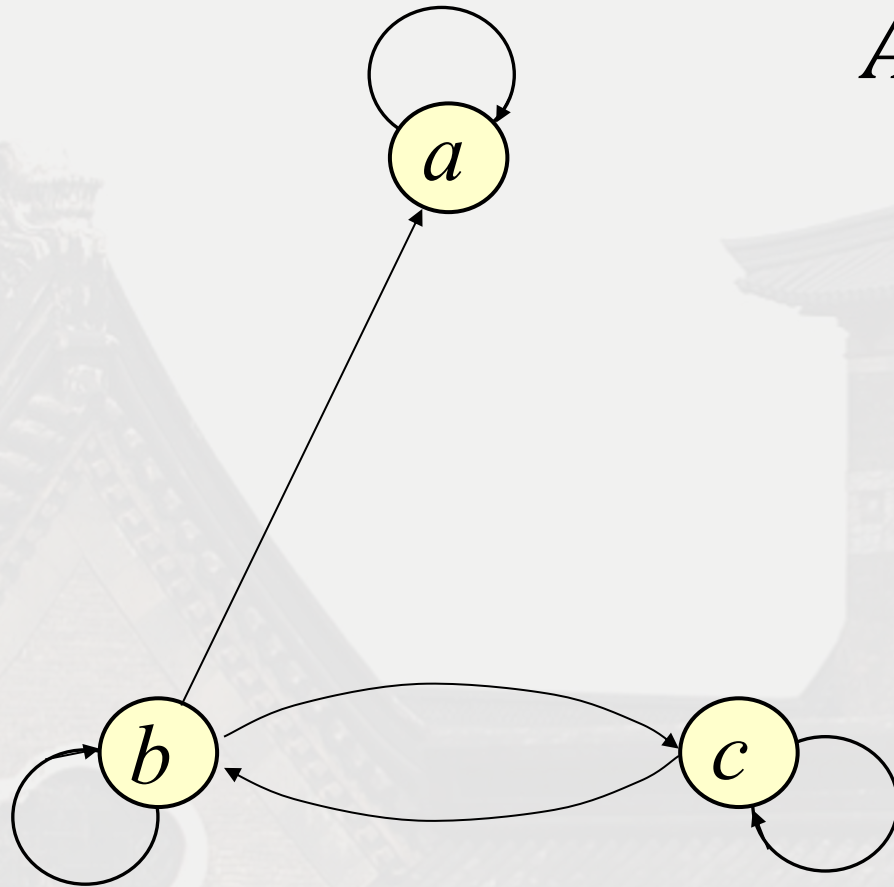
$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ 是反自反的

$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ 既不是自反的, 也不是反自反的

自反性与恒等关系

- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$,
 - 这里 I_A 是集合 A 上的恒等关系, 即: $I_A = \{ (a, a) \mid a \in A \}$
 - 直接根据定义证明:
 - \Rightarrow 只需证明: 对任意 (a, b) , 若 $(a, b) \in I_A$, 则 $(a, b) \in R$
 - \Leftarrow 只需证明: 对任意的 a , 若 $a \in A$, 则 $(a, a) \in R$

自反关系的有向图和0-1矩阵



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合 A 上的关系 R 是：
 - 对称的 **symmetric**: 若 $(a, b) \in R$, 则 $(b, a) \in R$
 - 反对称的 **antisymmetric**: 若 $(a, b) \in R$ 且 $(b, a) \in R$, 则 $a = b$
 - 非对称的 **asymmetric**: 若 $(a, b) \in R$ 则 $(b, a) \notin R$

设 $A = \{1, 2, 3\}$, $R \subseteq A \times A$

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 3)\}$ 是对称的

$\{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ 是反对称的, 但不是非对称的

理解对称性

- 关系 R 满足对称性：
对任意 (a, b) ，若 $(a, b) \in R$ ，则 $(b, a) \in R$
 - 注意： \emptyset 是对称关系。
- 反对称并不是对称的否定

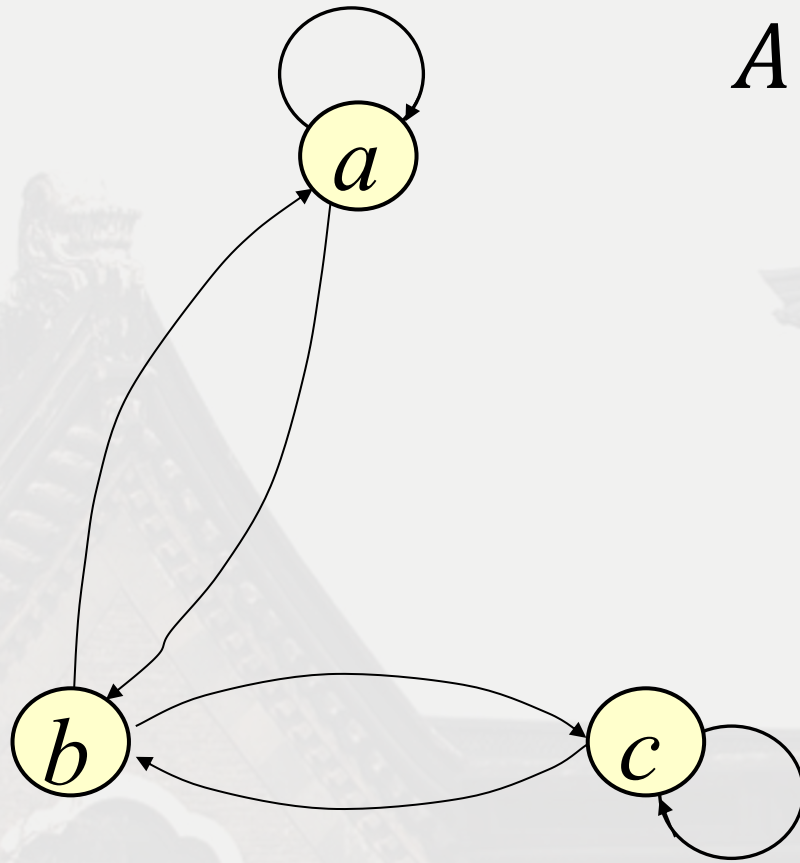
令： $A = \{1, 2, 3\}$, $R \subseteq A \times A$

$R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ 既是对称的，也是反对称的；
 \emptyset 是对称关系，也是反对称关系。

对称性与逆关系

- R 是集合 A 上的对称关系 $\Leftrightarrow R^{-1} = R$
 - \Rightarrow 证明一个集合等式 $R^{-1} = R$
 - 若 $(a, b) \in R^{-1}$, 则 $(b, a) \in R$, 由 R 的对称性可知 $(a, b) \in R$, 因此:
 $R^{-1} \subseteq R$; 同理可得: $R \subseteq R^{-1}$;
 - \Leftarrow 只需证明: 对任意的 (a, b) 若 $(a, b) \in R$, 则 $(b, a) \in R$.

对称关系的有向图和0-1矩阵



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系的性质：传递性 transitivity

- 集合 A 上的关系 R 是
 - 传递的 **transitive**: 若 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R$

设 $A = \{1, 2, 3\}, R \subseteq A \times A$

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ 传递的

$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ 是非传递的

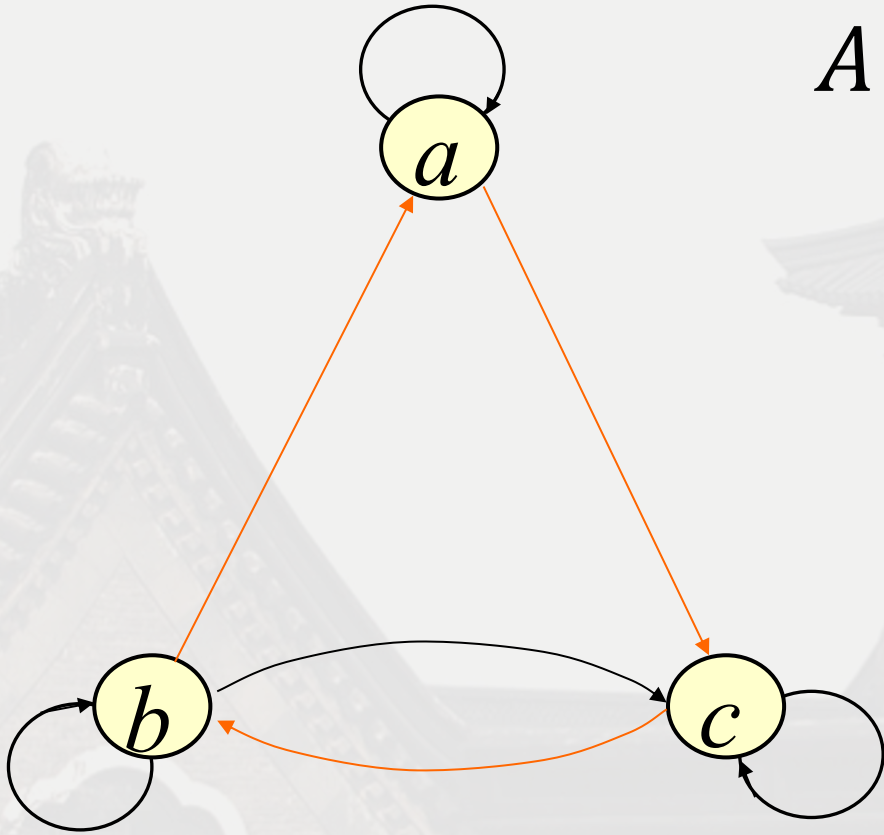
$\{(1, 3)\}$?

\emptyset ?

传递性与关系的乘幂

- 关系的复合(乘)运算满足结合律, 可以用 R^n 表示
$$R \circ R \circ \dots \circ R \quad (n \text{ 是正整数})$$
- 命题: $(a, b) \in R^n$ 当且仅当: 存在 $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in A$, 满足:
$$(a, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-2}, t_{n-1}), (t_{n-1}, b) \in R.$$
 - 对 $n \geq 1$ 用数学归纳法: $n = 1$, trivial.
奠基 $n = 2$, 直接由关系复合的定义可得;
归纳 基于: $R^n = R^{n-1} \circ R$
- 集合 A 上的关系 R 是传递关系 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$
 - 必要性: \Rightarrow 任取 $(a, b) \in R^2$, 根据上述命题以及 R 的传递性可得 $(a, b) \in R$ 。
 - 充分性: \Leftarrow 若 $(a, b) \in R, (b, c) \in R$, 则 $(a, c) \in R^2$, 由 $R^2 \subseteq R$ 可得 $(a, c) \in R$, 于是 R 是传递关系。

传递关系的有向图和0-1矩阵



$$A = \{a, b, c\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

一些常用关系的性质

	$=$	\leq	$<$	$ $	\equiv_3	\emptyset	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

小结

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
 - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
 - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
 - 图特征；矩阵特征