作业 09 - 基本计数技术

离散数学教学组

Problem 1

长度为 n(n > 5) 且以 000 开始或以 111 结尾的二进制串有多少个?

答案: $2^{n-3} + 2^{n-3} - 2^{n-6} = 15 * 2^{n-6}$

Problem 2

从 1000 到 9999 之间,包含多少个正整数

- 1. 被 9 整除?
- 2. 被5或7整除?
- 3. 是偶数?
- 4. 不被 5 也不被 7 整除?
- 5. 有不同的十进制数字?
- 6. 被5整除但不被7整除?
- 7. 不被 3 整除?
- 8. 被5和7整除?

答案:

- 1. 1000
- 2. 被 5 整除的有 1800 个,被 7 整除的有 1286 个,被 35 整除的有 257 个,答案为 1800+1286-257=2829
- 3. 4500
- 4. 9000 2829 = 6171
- 5. 9*9*8*7 = 4536
- 6. 即被 5 整除且不被 35 整除的正整数个数, 答案为 1800 257 = 1543
- 7. 6000
- 8. 即被 35 整除的正整数个数, 答案为 257

Problem 3

给定 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 A 的有多少个子集, 满足其中所有元素的乘积能被 10 整除?

答案: 必须要有 5, 和 (2 或 4), 共 12 种。

Problem 4

长度为 12 且不包含"11"子串的二进制串有多少个?

答案: 由题知二进制串最多包含 6 个 11, 且包含 k 个 11 的二进制串的集合 A_k 的元素个数为 $|A_k| = \mathcal{C}(13-k,13-2k)$, 则结果为

$$\mathcal{C}(13,13) + \mathcal{C}(12,11) + \mathcal{C}(11,9) + \mathcal{C}(10,7) + \mathcal{C}(9,5) + \mathcal{C}(8,3) + \mathcal{C}(7,1) = 377$$

Problem 5

设 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 和 x_6 是正整数, 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 32$ 有多少个解?

答案: C(31,6) = 736281(考虑 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 32$)

Problem 6

由一个正 n 边形的顶点构成的三角形有多少个? 如果正 n 边形的边不能是构成三角形的边,这样的三角形又有多少个?

答案: 从 n 边中选三点的情况有 $C(n,3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 种。

如果三角形的边是正 n 边形的边有两种情况,第一种是有一条边是正 n 边形的边,这种情况有 $(n-4) \times n$ 种;第二种是有两条边是正 n 边形的边,这种情况有 n 种。

则三角形的边不是正 n 边形的边的情况有 $C(n,3) - (n-4)n - n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ 种。

Problem 7

使用数学归纳法证明容斥原理。

答案:

- 基本步骤: n=2, 显然公式成立。
- 归纳步骤: 假设 n = k 时成立。当 n = k + 1 时,公式可写成

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \cap A_{k+1}|$$
(1)

又因为

$$|(A_{1} \cup A_{2} \cup ... \cup A_{k}) \cap A_{k+1}|$$

$$=|(A_{1} \cap A_{k+1}) \cup (A_{2} \cap A_{k+1}) \cup ... \cup (A_{k} \cap A_{k+1})|$$

$$=\sum_{i=1}^{k} |A_{i} \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} |A_{i} \cap A_{j} \cap A_{k+1}| + ... + (-1)^{k+1} |A_{1} \cap A_{2} \cap ... \cap A_{k+1}|$$
(2)

且.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le k} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k|$$
(3)

将式 (2), 式 (3) 带入式 (1) 中可得 $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le k+1} |A_i \cap A_j| + ... + (-1)^k |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k+1}|$ 。

综上, 由数学归纳法, 得证。

Problem 8

有6个集合,如果知道其中任3个集合都是不相交的,根据容斥原理写出关于这6个集合并集元素个数的显式公式。

答案:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| &= \\ |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| \\ - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_1 \cap A_6| \\ - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_6| \\ - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_6| \\ - |A_4 \cap A_5| - |A_4 \cap A_6| \\ - |A_5 \cap A_6| \end{aligned}$$

Problem 9

考虑用红,蓝两种颜色着色 3×3 的方格棋盘,在允许图形翻转和旋转的情况下,一共有多少种不同的着色方案?

答案: 本题需要使用 Burnside 计数定理 $L = \frac{1}{|G|} \Sigma_{g \in G} |D(g)|$ 。其中,L 表示总方案数,G 表示所有等价变换组成的集合,D(g) 表示置换后本质未发生改变的方案个数。不考虑旋转和翻转,共有 $2^9 = 512$ 种着色方案。接下来考虑各种置换:

- 旋转 0 度没有改变状态的方案: $2^9 = 512$ 种
- 旋转 90 度没有改变状态的方案: $2^3 = 8$ 种
- 旋转 180 度没有改变状态的方案: $2^5 = 32$ 种
- 旋转 270 度没有改变状态的方案: 2³ = 8 种
- 上下翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种
- 左右翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种
- 左上右下斜向翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种
- 左下右上斜向翻转没有改变状态的方案: $2^6 = 64$ 种

根据 Burnside 计数定理, 共有 (512+8+32+8+64+64+64+64)/8=102 种不同的着色方案。

Problem 10

考虑一个 $N\times N$ 网格,其中的每一个单元格可以取值 +1 或 -1。我们称这种网格为二进制网格 (Binary grid)。任何行的行乘积 (row product) 都被定义为该单行中所有元素的乘积。同样,一列的列乘积 (column product) 被定义为该单个列中所有元素的乘积。如果 N 行的行乘积中,有且只有一个结果为 -1,而 N 列的列乘积中,有且只有一个结果为 -1,则该 $N\times N$ 的二元网格称为魔术网格。换句话说,魔术网格要求其他 N-1 个行乘积全部为 +1,其他 N-1 个列乘积应也全部为 +1。试计算所有 $N\times N$ 的网格中,魔术网格的数量。

答案:

- 确定要使其行列乘积为 -1 的行和列。可以有 n 种方式选择行,对于选定的每一行,可以有 n 种方式选择列。总共 n^2 种方式。
- 接下来,随机填充剩余的 $(n-1)^2$ 个单元格(都不属于先前选择的行或列)。这可以有 $2^{(n-1)^2}$ 种方式。
- 现在,我们得到一个 $N \times N$ 的网格, 所有行和列乘积都已知。此时,填充第一步选中的行和列。显然,对于该行和列中的元素,是可以唯一地确定要插入的数字的符号。

根据基本计数原理,魔方格子总数为 $n^2 \times 2^{(n-1)^2}$ 。