4 思考题提示

思考题1-1 试用联接词表达自然语言中的“如果……则”

$p \to q$

思考题1-2 同一律证明是否一定要用（L1）

一定要用

定义特征函数$\delta(p) \in S$.设:

(1)$\delta(L2) \in S$

(2)$\delta(L3) \in S$

(3)MP可以保持这个特征:即$\delta(p) \in S$且$\delta(p \to q) \in S \Rightarrow \delta(q) \in S$

$\Longrightarrow \ \{L2, L3, MP\} \vdash r \Rightarrow \delta(r) \in S$

若$\delta(r) \notin S$,说明$\delta(r)$ 不能由$L2, L3, MP$推出

$\delta(p) \in S$是一个三值函数，定义一个三值真值表

证明$\delta(p \to p) \notin S$即可

(附：特征函数的定义)

k元关系$R(\subseteq N^k)$的特征函数$C_R : N^k \to \{0, 1\}$是用下式定义的

$$C_R(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1 & (n1, \ldots, n_k) \in R \\ 0 & (n1, \ldots, n_k) \notin R \end{cases}$$

思考题1-3 演绎定理说明了什么

蕴含词的解释：蕴含词（$\to$）必须被解释（或者说赋值）为实质蕴含(真值表表示的蕴含)。否则，三个公理不成立，以及语义语法之间可能出现不一致

可以简化证明

思考题1-4 双否律$\{\neg\neg p\}$ 无需证明,因为$\neg\neg p$与p相同，对吗

不对，在L（X）中，由层次性可知，$\neg\neg p \neq p$

思考题1-5 直接证明$\vdash (\neg p \to p) \to p$最少需要几步

$\bigodot \nabla \bigodot$ 只能做23步的渣渣不会呀……> _ <

思考题1-6

1° 语义后承与重言式有何关系

2° 论断是否成立：任给$\Gamma \subseteq L(X)$和$p \in L(X)$，存在$q \in L(X)$使$\Gamma \vDash p$ 当且

仅当$\vDash q$

p为重言式为语义后承$\Gamma \vDash p$的特例$(\Gamma = \Phi)$
1° $\Gamma = \{p_1 ... p_n\}$有限
$q = p_1 \to (p_2 \to ...(p_n \to p)...)$
则由语义的演绎定理可得$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \vDash q$
2° Γ无限
利用紧致性，得到$\Gamma \vDash p \Rightarrow$有限子集$\Gamma' \vDash p$,转为$1^\circ$
思考题1-7 $\Gamma \vdash p$是否是可判定的
一类问题可判定的标准：
(1) 该类问题中的每一个问题实例只有“是”或“否”两种回答
(2) 存在一个“能行”方法A，使得对该类问题的每一实例，A都可以在有限时间内给出正确答案
命题逻辑的可判定性 存在一个能行方法A,对$P \in L(X)$，当$\vdash P$时，A回答yes，当$\nvdash P$时A回答no.
利用L的可靠性和完全性：$\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \vDash p$
因此可以通过真值表来进行判定
　　首先要做的就是指派和赋值（赋值此处不需要），对于指派，这里要求是对变元的任意指派
(1)Γ集有限

(2)Γ集无穷

外延：一阶逻辑的判定问题
1° 任给符号是否是K的公理 $\surd$
2° 任给公式p, q, r,是否从p, q用MP规则推出r $\surd$
3° 任给公式p, q,q是否从p中用Gen规则推出 $\surd$
4° 任给公式序列，是否是K的一个形式证明 $\surd$
5° 任给公式p是否是K的内定理 $\times$
思考题2-1 （K4）（K5）限制条件有何意义？举例
限制条件的意义在于保证K4，K5在任何解释域M下均恒真，即有效式
(K4) 为一个由多到一的推论，限制条件保证了不再有更多的约束条件出现
无限制的反例：$M\{R, \Phi, >\}$

$$\forall x \exists y R_1^2(x,y) \to \exists y R_1^2(y,y)$$

(K5) 为一个由一到多的推论，限制条件保证了不会有约束条件被忽略
无限制的反例：$M\{R, \Phi, \{R_1^1 :> 2, R_2^1 :> 1\}\}$

$$\forall x(R_1^1(x) \to R_2^1(x)) \to (R_1^1(x) \to \forall x R_2^1(x))$$

思考题2-2 K演绎定理的限制有何意义？
无限制反例：
$\because \quad R_1^1(x_1) \vdash \forall x_1 R_1^1(x_1)$ UG
$\therefore \quad \vdash R_1^1(x_1) \to \forall x_1 R_1^1(x_1)$
再利用K的可靠性和完全性，从语义上说明

思考题2-3 真在一阶逻辑里有那几个层次？它们的关系

三层：
- M可满足:在一个M中，在一种项解释φ下，p是真的
- M有效：在一个M中，在任一项解释φ下，p是真的
- (模型类有效：$\Gamma \vDash p$ 在任一使Γ中公式为真的M中，在任一项解释φ下，p是真的)
- M逻辑有效：在任何M中,在任一项解释φ下，p是真的

M可满足：设$I = \{M, V, v\}$是$K(Y)$的一阶解释，$p \in K(Y)$,若$I(p) = t$，则称p在I下为真，又称p在M下可满足
M有效：设M为任一一阶结构，$p \in K(Y)$,若对一切V，p在$I\{M, V, v\}$下为真，则称p在M中有效（p是M有效的，M是p的一个模型，记为$M \vDash p$）
逻辑有效：设$p \in K(Y)$,若对一切一阶结构M，若$M \vDash p$，则称p为逻辑有效的，记为$\vDash p$

思考题2-4 若$\Gamma \vDash p$,则对一切解释I，若$\forall q \in \Gamma$有$I(q) = t$.则$I(p) = t$?
不正确。
$\Gamma \vDash p \Leftrightarrow \forall M \vDash \Gamma$ 则$M \vDash p$
换成一切解释，可能其一阶结构M不再是Γ的模型，则$\vDash$约束不再存在

思考题3-1 L是否“强迫”$'\to'$ 解释为实质蕴含（语义解释）
是，为了$L1 \sim L3$的成立，$'\to'$ 必须解释为实质蕴含
$L1, L2, MP$强迫$\to$解释为实质蕴含,在此基础上，$L3$强迫$\neg$ 解释为非

5 杂记

HS直接证明

(1)$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ $(L1)$

(2)$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $(L2)$

(3)$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$ $(L1)$

(4)$(q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ $MP(2)(3)$

(5)$((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \to (((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))))$ $(L2)$

(6)$((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ $MP(4)(5)$

(7)$(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ $MP(1)(6)$

(8)$((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $(L2)$

(9)$((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ $MP(7)(8)$

(10)$(((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))) \to ((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ $(L1)$

(11)$(p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $MP(9)(10)$

(12)$((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))) \to (((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ $(L2)$

(13)$((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $MP(11)(12)$

(14)$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q)$ $(L1)$

(15)$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)$ $MP(13)(14)$

双否律的直接证明

(1)$\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(2)$(\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to$

$(\neg\neg p \to \neg\neg p))$ $(L2)$

(3)$(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

(4)$\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(5)$\neg\neg p \to \neg\neg p$ $MP(3)(4)$

(6)$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(7)$(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L3)$

(8)$((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

(9)$\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $MP(7)(8)$

(10)$(\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

(11)$(\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$$MP(9)(10)$

(12)$\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

(13)$\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

(14)$(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $(L3)$

(15)$((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L1)$

(16)$\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(14)(15)$

(17)$(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L2)$

(18)$(\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(16)(17)$

(19)$\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)$ $MP(13)(18)$

(20)$(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)) \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $(L2)$

(21)$(\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)$ $MP(19)(20)$

(22)$\neg\neg p \to p$ $MP(5)(21)$

第二双否律的直接证明

(1)$\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

(2)$(\neg\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p) \to \neg\neg\neg p)) \to ((\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $(L2)$

(3)$(\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

(4)$\neg\neg\neg p \to (\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

(5)$\neg\neg\neg p \to \neg\neg\neg p$ $MP(3)(4)$

$(6) \neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(7) (\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)$ $(L3)$

$(8) ((\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

$(9) \neg\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p))$ $MP(7)(8)$

$(10) (\neg\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p))) \rightarrow ((\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p)) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

$(11) (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p)) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p))$ $MP(9)(10)$

$(12) \neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(13) \neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

$(14) (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)$ $(L3)$

$(15) ((\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)))$ $(L1)$

$(16) \neg\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p))$ $MP(14)(15)$

$(17) (\neg\neg\neg p \rightarrow ((\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p))) \rightarrow ((\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)))$ $(L2)$

$(18) (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg\neg p)) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p))$ $MP(16)(17)$

$(19) \neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)$ $MP(13)(18)$

$(20) (\neg\neg\neg p \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p))$ $(L2)$

$(21) (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p)$ $MP(19)(20)$

$(22) \neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$ $MP(5)(21)$

$(23) (\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg p)$ $(L3)$

$(24) p \rightarrow \neg\neg p$ $MP(22)(23)$

¬(p→q)→p直接证明

(1) (¬q→¬p)→(p→q) (L3)

(2) ((¬q→¬p)→(p→q))→(¬p→((¬q→¬p)→(p→q))) (L1)

(3) ¬p→((¬q→¬p)→(p→q)) MP(1)(2)

(4) (¬p→((¬q→¬p)→(p→q)))→((¬p→(¬q→¬p))→(¬p→(p→q))) (L2)

(5) (¬p→(¬q→¬p))→(¬p→(p→q)) MP(3)(4)

(6) ¬p→(¬q→¬p) (L1)

(7) ¬p→(p→q) MP(5)(6)

(8) ¬¬¬(p→q)→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→¬¬¬(p→q)) (L1)

(9) (¬¬¬(p→q)→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→¬¬¬(p→q)))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))) (L2)

(10) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) MP(8)(9)

(11) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) (L1)

(12) ¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q) MP(10)(11)

(13) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) (L1)

(14) (¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)) (L3)

(15) ((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))) (L1)

(16) ¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))) MP(14)(15)

(17) (¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))) (L2)

(18) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))MP(16)(17)

(19) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) (L1)

(20) ¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)) MP(18)(19)

(21) (¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)) (L3)

(22) ((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))))(L1)

(23) ¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))) MP(21)(22)

(24) (¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))) (L2)

(25) (¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))) MP(23)(24)

(26) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)) MP(20)(25)

(27) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))) (L2)

(28) (¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)) MP(26)(27)

(29) ¬¬¬(p→q)→¬(p→q) MP(12)(28)

(30) (¬¬¬(p→q)→¬(p→q))→((p→q)→¬¬(p→q)) (L3)

(31) (p→q)→¬¬(p→q) MP(29)(30)

(32) ((p→q)→¬¬(p→q))→(¬p→((p→q)→¬¬(p→q))) (L1)

(33) ¬p→((p→q)→¬¬(p→q)) MP(31)(32)

(34) (¬p→((p→q)→¬¬(p→q)))→((¬p→(p→q))→(¬p→¬¬(p→q))) (L2)

(35) (¬p→(p→q))→(¬p→¬¬(p→q)) MP(33)(34)

(36) ¬p→¬¬(p→q) MP(8)(35)

(37) (¬p→¬¬(p→q))→(¬(p→q)→p) (L3)

(38) ¬(p→q)→p MP(36)(37)

¬(p→q)→¬q直接证明

(1) ¬¬q→((¬¬q→¬¬q)→¬¬q) (L1)

(2) (¬¬q→((¬¬q→¬¬q)→¬¬q))→((¬¬q→(¬¬q→¬¬q))→(¬¬q→¬¬q)) (L2)

(3) (¬¬q→(¬¬q→¬¬q))→(¬¬q→¬¬q) MP(1)(2)

(4) ¬¬q→(¬¬q→¬¬q) (L1)

(5) ¬¬q→¬¬q MP(3)(4)

(6) ¬¬q→(¬¬¬¬q→¬¬q) (L1)

(7) (¬¬¬¬q→¬¬q)→(¬q→¬¬¬q) (L3)

(8) ((¬¬¬¬q→¬¬q)→(¬q→¬¬¬q))→(¬¬q→((¬¬¬¬q→¬¬q)→(¬q→¬¬¬q))) (L1)

(9) ¬¬q→((¬¬¬¬q→¬¬q)→(¬q→¬¬¬q)) MP(7)(8)

(10) (¬¬q→((¬¬¬¬q→¬¬q)→(¬q→¬¬¬q)))→((¬¬q→(¬¬¬¬q→¬¬q))→(¬¬q→(¬q→¬¬¬q))) (L2)

(11) (¬¬q→(¬¬¬¬q→¬¬q))→(¬¬q→(¬q→¬¬¬q)) MP(9)(10)

(12) ¬¬q→(¬¬¬¬q→¬¬q) (L1)

(13) ¬¬q→(¬q→¬¬¬q) MP(11)(12)

(14) (¬q→¬¬¬q)→(¬¬q→q) (L3)

(15) ((¬q→¬¬¬q)→(¬¬q→q))→(¬¬q→((¬q→¬¬¬q)→(¬¬q→q))) (L1)

(16) ¬¬q→((¬q→¬¬¬q)→(¬¬q→q)) MP(14)(15)

(17) (¬¬q→((¬q→¬¬¬q)→(¬¬q→q)))→((¬¬q→(¬q→¬¬¬q))→(¬¬q→(¬¬q→q))) (L2)

(18) (¬¬q→(¬q→¬¬¬q))→(¬¬q→(¬¬q→q)) MP(16)(17)

(19) ¬¬q→(¬¬q→q) MP(13)(18)

(20) (¬¬q→(¬¬q→q))→((¬¬q→¬¬q)→(¬¬q→q)) (L2)

(21) (¬¬q→¬¬q)→(¬¬q→q) MP(19)(20)

(22) ¬¬q→q MP(5)(21)

(23) $q\to(p\to q)$ (L1)

(24) $(q\to(p\to q))\to(\neg\neg q\to(q\to(p\to q)))$ (L1)

(25) $\neg\neg q\to(q\to(p\to q))$ MP(23)(24)

(26) $(\neg\neg q\to(q\to(p\to q)))\to((\neg\neg q\to q)\to(\neg\neg q\to(p\to q)))$ (L2)

(27) $(\neg\neg q\to q)\to(\neg\neg q\to(p\to q))$ MP(25)(26)

(28) $\neg\neg q\to(p\to q)$ MP(22)(27)

(29) $\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to\neg\neg\neg(p\to q))$ (L1)

(30) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to\neg\neg\neg(p\to q)))\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q)))$ (L2)

(31) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))$ MP(29)(30)

(32) $\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))$ (L1)

(33) $\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q)$ MP(31)(32)

(34) $\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))$ (L1)

(35) $(\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))$ (L3)

(36) $((\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))))$ (L1)

(37) $\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q)))$ MP(35)(36)

(38) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))))\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))))$ (L2)

(39) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q)))$ MP(37)(38)

(40) $\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))$ (L1)

(41) $\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))$ MP(39)(40)

(42) $(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))$ (L3)

(43) $((\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))))$ (L1)

(44) $\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))$ MP(42)(43)

(45) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to((\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))))\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))))$ (L2)

(46) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg\neg(p\to q)))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))$ MP(44)(45)

(47) $\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))$ MP(41)(46)

(48) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))$ (L2)

(49) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))$ MP(47)(48)

(50) $\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)$ MP(33)(49)

(51) (￢￢￢(p→q)→￢(p→q))→((p→q)→￢￢(p→q)) (L3)
(52) (p→q)→￢￢(p→q) MP(50)(51)
(53) ((p→q)→￢￢(p→q))→(￢￢q→((p→q)→￢￢(p→q))) (L1)
(54) ￢￢q→((p→q)→￢￢(p→q)) MP(52)(53)
(55) (￢￢q→((p→q)→￢￢(p→q)))→((￢￢q→(p→q))→(￢￢q→￢￢(p→q)))
(L2)
(56) (￢￢q→(p→q))→(￢￢q→￢￢(p→q)) MP(54)(55)
(57) ￢￢q→￢￢(p→q) MP(28)(56)
(58) (￢￢q→￢￢(p→q))→(￢(p→q)→￢q) (L3)
(59) ￢(p→q)→￢q MP(57)(58

否定肯定律直接证明

(1) ¬p→(¬¬(p→(¬p→p))→¬p) (L1)
(2) (¬¬(p→(¬p→p))→¬p)→(p→¬(p→(¬p→p))) (L3)
(3) ((¬¬(p→(¬p→p))→¬p)→(p→¬(p→(¬p→p))))→(¬p→((¬¬(p→(¬p→p))→¬p)→(p→¬(p→(¬p→p))))) (L1)
(4) ¬p→((¬¬(p→(¬p→p))→¬p)→(p→¬(p→(¬p→p)))) (2) (3) MP
(5) (¬p→((¬¬(p→(¬p→p))→¬p)→(p→¬(p→(¬p→p)))))→((¬p→(¬¬(p→(¬p→p))→¬p))→(¬p→(p→¬(p→(¬p→p))))) (L2)
(6) (¬p→(¬¬(p→(¬p→p))→¬p))→(¬p→(p→¬(p→(¬p→p)))) (4) (5) MP
(7) ¬p→(p→¬(p→(¬p→p))) (1) (6) MP
(8) (¬p→(p→¬(p→(¬p→p))))→((¬p→p)→(¬p→¬(p→(¬p→p)))) (L2)

(9) (¬p→p)→(¬p→¬(p→(¬p→p))) (7) (8) MP
(10) (¬p→¬(p→(¬p→p)))→((p→(¬p→p))→p) (L3)
(11) ((¬p→¬(p→(¬p→p)))→((p→(¬p→p))→p))→((¬p→p)→((¬p→¬(p→(¬p→p)))→((p→(¬p→p))→p))) (L1)
(12) (¬p→p)→((¬p→¬(p→(¬p→p)))→((p→(¬p→p))→p)) (10) (11) MP
(13) ((¬p→p)→((¬p→¬(p→(¬p→p)))→((p→(¬p→p))→p)))→(((¬p→p)→(¬p→¬(p→(¬p→p))))→((¬p→p)→((p→(¬p→p))→
p)))(L2)
(14) ((¬p→p)→(¬p→¬(p→(¬p→p))))→((¬p→p)→((p→(¬p→p))→p)) (12) (13) MP
(15) (¬p→p)→((p→(¬p→p))→p) (9) (14) MP
(16) ((¬p→p)→((p→(¬p→p))→p))→(((¬p→p)→(p→(¬p→p)))→((¬p→p)→p)) (L2)
(17) ((¬p→p)→(p→(¬p→p)))→((¬p→p)→p) (15) (16) MP
(18) (¬p→p)→(p→(¬p→p)) (L1)
(19) (¬p→p)→p (17) (18) MP □