HW7

PB21071416 张郑飞扬

1、求证 $\vdash p(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow\ \vdash p(p_1, \ldots, p_n)$，其中 $p_1, \ldots, p_n$ 是任意的公式。

证明：$\because\ \vdash p \iff\ \models p$

$\therefore$ 即证 $\models p(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow\ \vdash p(p_1, \ldots, p_n)$

由 $\models p(x_1, \ldots, x_n)$：

对 $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的任一真值指派，必可唯一扩张成 $L(X_n)$ 的赋值 v. 且 $v(p) = 1$.

同时 $v(p_1), v(p_2), \ldots, v(p_n)$ 也唯一确定

故设 S 为 X_n 的所有真值指派集合，R 为 $v(p_1), \ldots, v(p_n)$ 的所有赋值集合，则 $R \subseteq S$

那么显然，设 $p(X)$ 为公式 p 在 X 取值条件下的赋值，有 $p(R) \subseteq p(S)$

又 $p(S) = p(x_1, \ldots, x_n) = 1$

故 $p(R) = 1$. 即 $\models p(p_1, \ldots, p_n)$

证毕.

2、求证，若$\Gamma \models p$，则定有Γ的有限子集Σ，使得 $\Sigma \models p$。

证明：

由证明定义可推出：若Γ是无限集，且$\Gamma \vdash p$，则存在Γ的有限子集Δ使$\Delta \vdash p$.

又由语法推论和语义推论的一致性：$\Gamma \vdash p \Leftrightarrow \Gamma \models p$.

可知若Γ是无限集，且$\Gamma \models p$，则定有Γ的有限子集Δ使$\Delta \models p$.

当Γ为有限集时，上述结论依然成立，因为取$\Gamma = \Delta$即可.

综上，证毕.