古典概型与几何概型

September 7, 2023

回忆: 例 ??

回到 Poker Hands 的例子:

- **Gaming**: a one-pair hand that draws 5 cards from 52 cards
- 这个游戏的特点:
  1. a one-pair hand consists of 5 cards, such as $\omega_i = \{2S, 3H, 4D, 6C, 10C\}$
     - 试验结果只有有限种可能, 即 $\binom{52}{5} = 2,598,960$
  2. computing the probability of any one-pair hand ω_i
     - 每种结果发生的可能性相同, 即 $P(\omega_i) = \frac{1}{2{,}598{,}960}$
- 这样的试验称为**等可能概型**, 即**古典概型 (classical)**.
  - w_i 也被称为基本事件
  - 若事件 A 包含 k 个基本事件, 则 $P(A) = \frac{k}{2{,}598{,}960}$

思考: 例 0.5

例 0.5 将 n 个不同的球随机放入 N $(N \geq n)$ 个不同的盒子中:

- 事件 A 表示恰有 n 个盒子且每盒一球
- 事件 B 表示指定的 n 个盒子中各有一球
- 事件 C 表示指定一个盒子恰有 m 个球

求事件 A, B, C 发生的概率.

(1) $\dfrac{A_N^n}{N^n} = \dfrac{A_n^n}{n^n}$

(2) $\dfrac{n!}{N^n}$

(4) $\dfrac{C_N^n}{N^n}$

(5) $\dfrac{A_N^n}{N^n}$

(3) $\dfrac{C_n^m \cancel{A} (N-1)^{n-m}}{N^n}$, $0 \le m \le n$

D. , $m > n$

古典概型: 例 0.6

例 0.6 (生日问题) 有 K 个人 $(K < 365)$, 每个人的生日等可能地出现于 365 天中的任意一天, 求至少两人生日相同的概率.

$$1 - \frac{A_{365}^{K}}{365^{K}}$$

引入: 例 0.7

例 0.7 设一批 N 件产品中有 M 件次品.

- 现从 N 件产品中有放回地任选 n 件, 记事件 A 为 "取出的产品种恰有 m 件次品", 求事件 A 的概率.

- 现从 N 件产品中无放回地任选 n 件, 记事件 B 为 "取出的产品种恰有 m 件次品", 求事件 B 的概率.

后者被称为超几何概率 **(hypergeometric)**.

思考: 例 0.8

$k = a+b$

例 0.8 (抽签问题) 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 $(i \leq k)$ 取出红球的概率?

$P(红) = \dfrac{b}{a+b}$

红

i

$$P = \frac{a \cdot A_{a+b-1}^{a+b-1}}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

超几何概率: 例 0.9

$a_1 \sim a_n \quad b_1 \sim b_n$

例 0.9 (匹配问题) 有 n 对夫妻参加一次聚会, 现将所有参会人员任意分成 n 组, 每组一男一女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

思考: 这个题和生日题的联系和区别在哪里?

$P = 1 - n \cdot \frac{1}{2n-1} + C_n^2 \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n-3} - \cdots$

几何概型

古典概型考虑有限的样本空间, 即有限个等可能的基本事件, 在很多实际应用中受到限制.

接下来, 我们讨论另一种特殊的随机现象, 具有如下特征:

- **样本空间无限可测.** 样本空间包含无限不可列个样本点, 可以用几何图形 (如一维线段、二位平面区域、或三维空间区域等) 来表示, 其相应的几何测度 (如长度、面积、体积等) 是一个非零有限的实数
- **基本事件等可能性.** 每个基本事件发生的可能性大小相等, 从而使得每个事件发生的概率与该事件的几何测度相关, 与具体位置无关

称为**几何概型**.

几何概型与测度

定义 0.4 在一个测度有限的区域 Ω 内等可能性投点, 落入 Ω 内的任意子区域 A 的可能性与 A 区域的测度成正比, 与 A 的位置与形状无关, 这样的概率模型称之为几何概型.

事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

这里 $\mu(\cdot)$ 表示区域的测度.

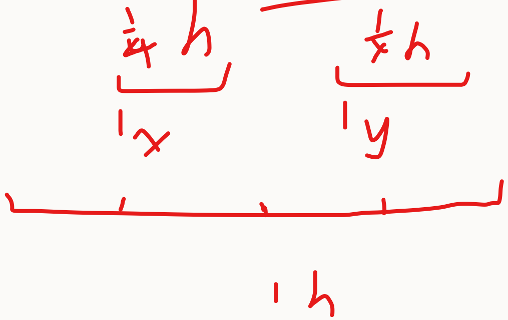
思考: 例 0.10

例 0.10 (公交车发车班次) 假设一乘客到达汽车站的时间是任意的, 客车间隔一段时间发班, 请规划最长的间隔发车时间, 才能确保乘客候车等待时间不超过 20 分钟的概率大于 80%.

$$\frac{20}{80\%} = 25 \text{ min.}$$

几何概型: 例 0.11

例 0.11 (时间约定问题) 两银行经理约定中午 12:00 - 13:00 到某地会面, 两人到达时间随机, 先到者等另一人 15 分钟后离开. 求两人见面的概率.

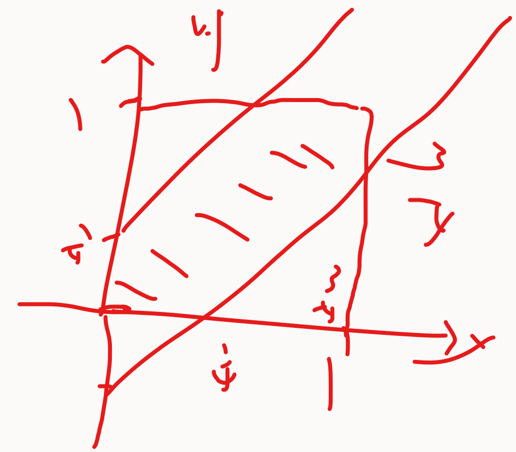


$|x-y| \le \frac{1}{4}$

$y, x \sim U[0,1]$

$\begin{cases} x-y \le \frac{1}{4} \\ x > y \end{cases}$, $\begin{cases} y-x \le \frac{1}{4} \\ y \ge x \end{cases}$

$P = \frac{9}{16}$

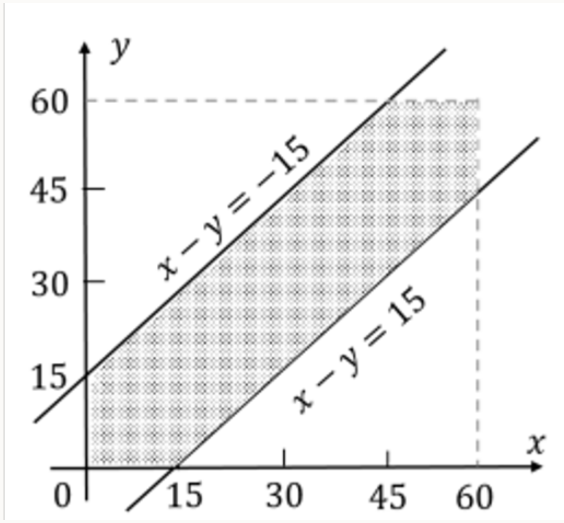


几何概型: Monte-Carlo 模拟法

通过计算机模拟近似计算几何概型的概率. 具体地,

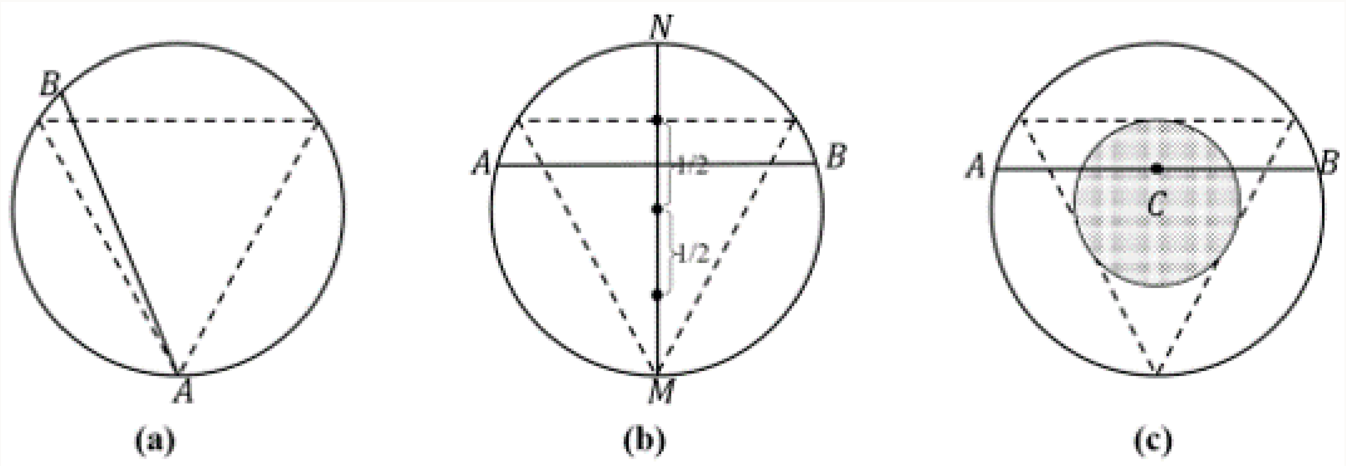
- 构造概率模型
- 进行计算机模拟试验
- 用统计的方法计算其估计值近似概率

```
n_A ← 0
For i = 1 : N
    x ← Random(0, 60)
    y ← Random(0, 60)
    If |x − y| ⩽ 15 then
        n_A ← n_A + 1
    Endif
Endfor
Return n_A/N
```



几何概型: 例 0.12

例 0.12 (贝特朗 (Bertrand) 奇论) 在半径为 1 的圆内随机地取一条弦, 求其弦长超过该圆内接等边三角形边长 $\sqrt{3}$ 的概率.



提示: 同一问题有三种不同答案, 究其原因在于圆内 "取弦" 时规定尚不够具体, 不同的 "等可能性假定" 导致了不同的样本空间.

案例分析: 组合计数

(习题课)

回答思考题、补充例题、复盘作业

September 7, 2023