

离散数学（2023）作业 02 - 谓词逻辑初步

March 13, 2023

Problem 1

$P(x)$: x 存在, $Q(x)$: x 是鬼

1. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$
2. $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$
3. $\exists x Q(x)$

推理正确.

Problem 2

1. 任意奇数的平方还是一个奇数.
2. $\neg \exists x (\exists k (x = 4k + 3)) \rightarrow \exists n \exists m (x = n^2 + m^2)$

Problem 3

$(\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R}) [0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - l| \geq \epsilon]$

Problem 4

$(\forall c_1 \in \mathbb{R})(\forall c_2 \in \mathbb{R}) \cdots (\forall c_n \in \mathbb{R}) \left[(c_i \text{全部为零}) \vee \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i \neq 0 \right) \right]$

Problem 5

当公共论域中含有一个或两个元素时, 条件语句为真; 当公共论域中含有超过两个元素时, 条件语句为假。

Problem 6

- $\exists x \exists y (P(x) \vee Q(y) \vee A)$
- $\exists x \exists y \neg (P(x) \vee Q(y))$

$$\begin{aligned} & \neg (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \\ \equiv & \neg \forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x) \\ \equiv & \exists x \neg P(x) \wedge \exists x \neg Q(x) \\ \equiv & \exists x \neg P(x) \wedge \neg Q(y) \\ \equiv & \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \end{aligned}$$

- $\forall x \exists y P(x) \rightarrow Q(y)$

$$\begin{aligned} & \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\ & \equiv \forall x \neg P(x) \vee \exists x Q(x) \\ & \equiv \forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(y)) \end{aligned}$$

Problem 7

$$\begin{aligned} & \neg \exists x \forall y P(x, y) \\ & \Leftrightarrow \forall x (\neg \forall y P(x, y)) \\ & \Leftrightarrow \forall x \exists y \neg P(x, y) \end{aligned}$$

Problem 8

- true
- true
- false (除非论域中只有一个元素)

Problem 9

- 分两种情况：第一种情况，如果 A 为真，那么 $(\forall x P(x)) \vee A$ 为真，且 $(P(x) \vee A)$ 为真，则 $\forall x (P(x) \vee A)$ 为真，等式成立。第二种情况，如果 A 为假。如果 $\forall x P(x)$ 为真，那么左边为真，而右边也为真。如果存在 x 使得 $P(x)$ 为假，那么两边都为假。综上，两边等式成立。
- 分两种情况：第一种情况，如果 A 为真，那么 $(\exists x P(x)) \vee A$ 为真，且存在 x 使得 $P(x) \vee A$ ，则 $\exists x (P(x) \vee A)$ 为真，等式成立。第二种情况，如果 A 为假。如果存在至少一个 x 使得 $P(x)$ 为真，那么左边为真，而右边也为真。如果所有 x 使得 $P(x)$ 为假，那么两边都为假。综上，两边等式成立。

Problem 10

- (1) true
- (2) false
- (3) true
- (4) false