参数估计 – 点估计

一、作业 (提交时间：Dec. 18, 2023)

1.[194-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}(a-x), & 0 < x < a \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 a 的矩估计量.

2.[195-4] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 0$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 0$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

4.[197-7/201-5] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的分布列为

X	-1	0	1
概率	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\frac{\theta}{2}$

其中 θ 未知, $0 < \theta < 1$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量, 并讨论 θ 的矩估计量和最大似然估计量的无偏性.

5.[199-1] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 $X \sim B(1, p)$, 其中 p 未知且 $0 < p < 1$, 证明 (1)X_1 是 p 的无偏估计; (2)X_1^2 是 p^2 的无偏估计; (3) 当 $n \geq 2$ 时, X_1X_2 是 p^2 的无偏估计.

6.[200-3] 设总体 $X \sim U(\theta, \theta+1)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 证明:$\hat{\theta_1} = \bar{X} - \frac{1}{2}$, $\hat{\theta_2} = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$, $\hat{\theta_3} = X_{(1)} - \frac{1}{n+1}$ 都是 θ 的无偏估计.

7.[203-10] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 且总体 X 的期望 $\mathbb{E}[X] = \mu$, 方差 $\sigma(X) = \sigma^2$, 证明:$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$ 是未知参数 μ 的无偏估计量, 也是一致性估计量.

二、练习

1.[194-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 其中总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 其中 λ 未知, $\lambda > 0$, 求 λ 的矩估计量和最大似然估计量.

2.[195-3] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - x^{-\theta}, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 θ 未知, $\theta > 1$. 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

3.[196-6] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 服从几何分布, 其分布列为 $P(X = x; p) = p(1-p)^{x-1}$, $(x = 1, 2, \ldots)$. 其中 p 未知, $0 < p < 1$, 求 p 的矩估计量.

4.[197-8] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$. 求 θ 及 λ 的最大似然估计量.

5.[199-2] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本, 总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x > \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $-\infty < \mu < +\infty$, μ 未知, 易知 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_1 = X_1$, 问 (1)$\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计吗? 若不是请修正; (2)μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_2$ 是 μ 的无偏估计吗? 是一致性估计量吗?

6.[200-4] 设 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 选适当的值 c, 使得 $\hat{\sigma}^2 = c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

7.[202-8] 设 (X_1, X_2, X_3) 是取自总体 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 证明:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{5}X_2 + \frac{2}{5}X_3.$$

都是总体均值 μ 的无偏估计, 并进一步判断哪个估计量更有效.