案例分析: 组合计数

(习题课)

回答思考题、补充例题、复盘作业

September 13, 2023

十二重计数

概率的计算往往与组合计数密切相关, 且组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用。

十二重计数 (the twelvefold way), by G.- C.Rota (1932-1999).

- **问题简述:** 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$
不同	不同	?	?	?
相同	不同	?	?	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

进展: 十二重计数

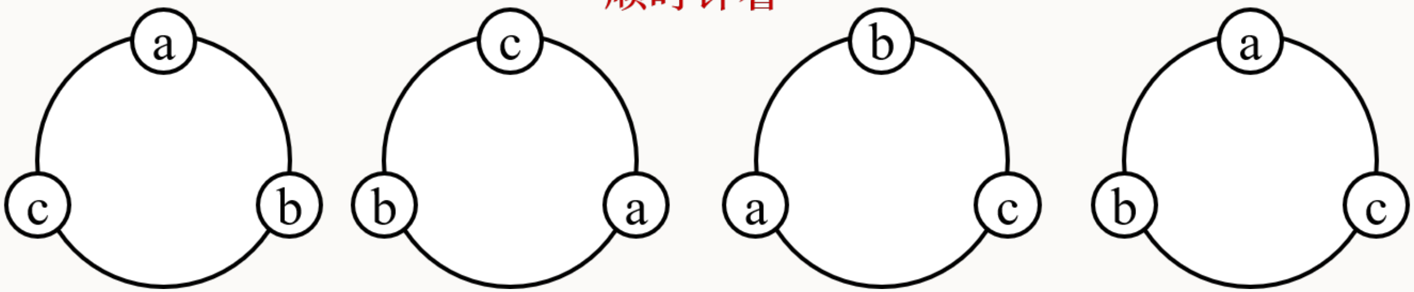
- **问题简述:** 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	?	?
相同	不同	?	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

环排列

- **(直线) 排列:** n 个不同的元素中无放回取出 r 个元素进行排列; 有 $(n)_r = n(n-1)\ldots(n-r+1)$ 种不同的排法
- **全排列:** 若 $r=n$ 时; 有 $n!$ 种不同的排法
- **环排列:** n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环

顺时针看



- 每一个环排列对应于 r 种不同的直线排列
- 不同的环排列的直线排列互不相同

环排列

定义 0.5 (环排列数) 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环, 有

$$\frac{(n)_r}{r}$$

种不同的排法, 称为 环排列数。

特别地, n 个不同元素的环排列数为 $(n-1)!$

例 0.20 将 n 对夫妻安排在一张圆桌, 任何夫妻两人需安排在一起, 有多少种不同的安排方法。

解法: 例 0.20

问题: 将 n 对夫妻安排在一张圆桌, 任何夫妻两人需安排在一起, 有多少种不同的安排方法?

- 基本事件的个数 $(2n-1)!$
- 考虑 “n 对夫妻排在一起” 的情况: $(n-1)!$
- 考虑 “每一对夫妻的座位顺序可以调换” 的情况: 2^n
- 因此, $|A|_\# = 2^n(n-1)!$

进展: 十二重计数

- **问题简述:** 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 1 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 1 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	?	$\binom{m}{n}$	?
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

多重组合

- **组合:** n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素; 有 $\binom{n}{r}$ 种.
- **多重组合:** 将 n 个不同的元素分成 k 组, 组内元素无顺序关系; 假设每组分别有 $r_1, r_2, \ldots, r_k$ 个元素, 即 $n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$, 则有
$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\ldots\binom{r_k}{r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$$
种不同的分组方法, 称为 $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ 多重组合数.

Remark:

- 多组合数又称多项式系数, 因为
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n=r_1+r_2+\cdots+r_k} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$
- 组合数本质上也属于多重组合数.

多重排列

多重集: 假设集合中的元素可以重复, 且重复的元素之间不可分辨。

- 例如, 多重集 $A = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\}$.
- 多重集 A 有 k 类不同的元素, 每类元素的个数分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_k$, 即 $n = r_1 + \cdots + r_k$。将多重集 A 中的所有元素排列成一排, 然后
  - 从 n 个位置中选取出 r_1 个位置放第一类元素
  - 再从剩下的从 $n - r_1$ 个位置中选取出 r_2 个位置放第二类元素
  - $\ldots$
  - 最后 r_k 个位置放第 k 类元素

因此, A 有 $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$ 种不同的排列方法, 即多重组合数。

整数的有序分解

回到十二重计数的问题:

- **子问题:** 考虑将 n 只完全相同的球放入 m 个不同的箱子 $(n \geq m)$
- **转化:** 第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\ldots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 其中 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 为非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

- n 只相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程非负的整数解

定理 0.1 (整数的有序分解: 非负解) *方程*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \text{s.t.} \quad x_i \in \mathbb{N}, \quad i \in [m]$$

解的个数为 $\binom{n+m-1}{m-1}$。

整数的有序分解: 例 0.21

例 0.21 将 10 只完全相同的球放入 3 个不同的箱子, 有多少种不同的放法?

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \qquad x_i \geq 0.$$

$$\binom{10+3-1}{3-1} = C_{12}^{2} = 66.$$

整数的有序分解

定理 0.2 (正整数解) 方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \textbf{s.t.} \quad x_i \in \mathbb{Z}^+, \quad i \in [m]$$

解的个数为 $\binom{n-1}{m-1}$。

整数的有序分解: 例 0.22

例 0.22 思考题:

- 整数有序分解问题二定理的证明思路
- 推论: 求方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq n$ 非负整数解、正整数解的个数
- 问题: 在多项式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?

进展: 十二重计数

- **问题简述:** 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球 $(m \geq n)$	每个箱子至少 **1** 球 $(n \geq m)$
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

第二类 Stirling 数

回到十二重计数的问题:

- **子问题:** 考虑将 n 只不同的球放入 m 个完全相同不可分辨的箱子

定义 0.6 (第二类 Stirling 数) 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集, 不同的划分数称为 第二类 Stirling 数, 记为 $S(n, m)$

例 0.23 集合 $\{1, 2, 3\}$ 不同的划分数。

第二类 Stirling 数

- 记 $S(0,0)=1, S(n,1)=1, S(n,n)=1$
- 当 $m>n\geq 1$ 时, 有 $S(n,m)=0$

定理 0.3 对 $n\geq m\geq 1$, 有

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$$

其中,

$$\begin{cases} S(n,k)=\dfrac{1}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k=x^n\ , \quad (x)_k=x(x-1)\ldots(x-k+1) \end{cases}$$

第二类 Stirling 数

回到十二重计数的问题:

- **问题:** 考虑将 n 只球放入 m 个箱子

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球	每个箱子至少 **1** 球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	?
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n}{m}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	?	?	?
相同	相同	?	?	?

整数的无序分拆

回到十二重计数的问题:

- **子问题:** 考虑将 n 只相同的球放入 m 个相同的箱子
- **组合学表述:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和
- **形式化:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 不同的划分数记为 $p(n, m)$

例 0.24 考虑整数 7 的各种无序划分。

$m = 1$	7	$p(7,1) = 1$
$m = 2$	$6+1,\ 5+2,\ 4+3$	$p(7,2) = 3$
$m = 3$	$5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$	$p(7,3) = 4$
$m = 4$	$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$	$p(7,4) = 3$
$m = 5$	$3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$	$p(7,5) = 2$
$m = 6$	$2+1+1+1+1+1$	$p(7,6) = 1$
$m = 7$	$1+1+1+1+1+1+1$	$p(7,7) = 1$

整数的无序分拆

- **问题:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和
- **转化:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 等价于

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \quad \textbf{s.t.} \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 1$$

- **形式化:** 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 不同的划分数记为 $p(n, m)$
  - 记 $p(0, 0) = 1$, $p(n, 1) = 1$, $p(n, n) = 1$
  - 当 $m > n \geq 1$ 时, 有 $p(n, m) = 0$

定理 0.4 (递推关系) 对 $n \geq m \geq 1$, 有

$$\begin{cases} p(n, m) = p(n-1, m-1) + p(n-m, m) \\ p(n, m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p(n-m, i) \end{cases}$$

整数的无序分拆

对正整数 $n \geq 1$ 和 $m \geq 1$, 有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1} \leq p(n,m) \leq \frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}$$

给定 $m \geq 1$, 当 n 非常大或趋于无穷的极限中有

$$p(n,m) \approx \frac{n^{(m-1)}}{m!(m-1)!}$$

十二重计数

回到十二重计数的问题: 将 n 只球放入 m 个箱子, 有多少种不同的放法

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多 **1** 球	每个箱子至少 **1** 球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\cancel{\binom{n}{m}}$ $\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n,m)$