

Ch04: 连续型随机变量

Distribution Functions, Probability Density Functions, and Statistical Quantity

October 15, 2023

随机变量 – 分布函数

定义 0.26 给定任意随机变量 X 和实数 x , 函数

$$F(x) = P(X \leq x)$$

称为随机变量 X 的分布函数, 分布函数的本质是概率.

- 分布函数 $F(x)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 的普通函数, 将概率与普通函数联系起来, 有利于利用数学分析的知识来研究随机变量;
- 分布函数不限制随机变量的类型, 无论是离散型随机变量还是非离散型随机变量, 都有各自的分布函数;
- 对任意实数 $x_1 < x_2$, 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1)$$

分布函数的性质

分布函数 $F(x)$ 具有如下性质:

- 单调性: 若 $x_1 < x_2$, 则 $F(x_1) < F(x_2)$
- 规范性: $F(x) \in [0, 1]$ 且 $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$
- 右连续性: $F(x+0) = F(x)$

任何分布函数都需要满足上述三性质, 满足上述三性质的函数必是某随机变量的分布函数. 分布函数可由上述三性质完全刻画.

概率的计算

有了分布函数 $F(x)$, 就很容易计算随机变量 X 的概率, 如:

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

$$P(X < a) = F(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a} F(x)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$$

$$P(X \geq a) = 1 - F(a - 0)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a - 0)$$

分布函数：例 0.61

对离散型随机变量 X ，设其分布列为 $p_k = P(X = x_k) (k = 1, 2, \dots)$ ，可得 X 的分布函数为：

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k$$

例 0.61 随机变量 X 的分布列如下，求 X 的分布函数.

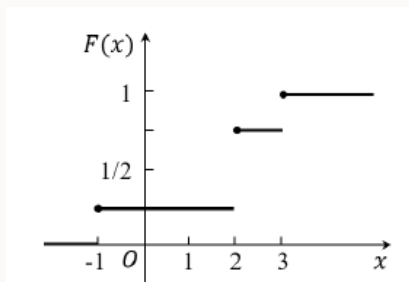
X	-1	2	3
P	1/4	1/2	1/4

解答：例 0.61

题目：随机变量 X 的分布列为 $P(X = -1) = P(X = 3) = 1/4$ 和 $P(X = 2) = 1/2$, 求 X 的分布函数

解答：

- 对离散型随机变量 X , 设其分布列为 $p_k = P(X = x_k) (k = 1, 2, \dots)$, X 的分布函数为 $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k: x_k \leq x} p_k$.
- 当 $x < -1$, 有 $F(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$; 当 $-1 \leq x < 2$, 有 $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$; 当 $2 \leq x < 3$, 有 $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$; 当 $x \geq 3$, 有 $F(x) = P(X \leq x) = P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$.
- 如下图所示, 分布函数 $F(x)$ 是一条阶梯形的曲线, 在 $x = -1, 2, 3$ 处有跳跃点.



分布函数：例 0.62

例 0.62 随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$,

求 $P(X \leq 1)$. $F(1) = A + B \frac{\pi}{4}$

$$F(-\infty) = -\frac{\pi}{2} B + A \Rightarrow$$

$$F(+\infty) = \frac{\pi}{2} B + A = 1$$

$$P = F(1) = \frac{3}{4}.$$

解答：例 0.62

题目：随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = A + B \arctan x, x \in (-\infty, +\infty)$, 求 $P(X \leq 1)$.

解答：

- 直接代入定义: $F(1) = A + B \arctan 1 = A + B\pi/4$.
- 由分布函数的性质可知, $F(-\infty) = 0$ 和 $F(+\infty) = 1$.
- 求解下列式子:

$$0 = F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} A + B \arctan x = A - \pi B/2$$

$$1 = F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A + B \arctan x = A + \pi B/2$$


可得 $A = 1/2$ 和 $B = 1/\pi$, 从而得到 $P(X \leq 1) = 3/4$.

回顾：随机变量

根据取值类型, 可以将随机变量进行分类:

- 离散型随机变量: X 的取值是有限的、无限可列的

- 抛一枚骰子的点数: $1, 2, \dots, 6$ —— 有限的



X	1	2	3	4	5	6
-----	---	---	---	---	---	---

- 国家一年出生的婴儿数: $1, 2, \dots, n$ —— 有限的或者无限可列的

X	1	2	...	n	...
-----	---	---	-----	-----	-----

- 非离散型随机变量: X 的取值是无限不可列的

连续型随机变量 – 概率密度函数

连续型随机变量: 随机变量的取值充满整个区间 $[a, b]$ 或 (a, ∞) , 例如火车的到站时间、或一盏灯泡的寿命等.

定义 0.27 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 如果存在可积函数 $f(x)$, 使得对任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

成立, 则称 X 为连续型随机变量, 函数 $f(x)$ 为随机变量 X 的概率密度函数, 简称密度函数.

Remarks:

- 随机变量的分布函数由一元积分表示, why ?
- 随机变量的取值 x 的取值为连续型

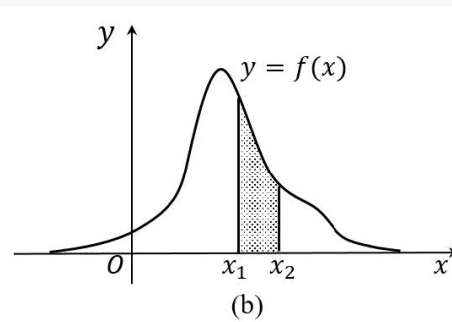
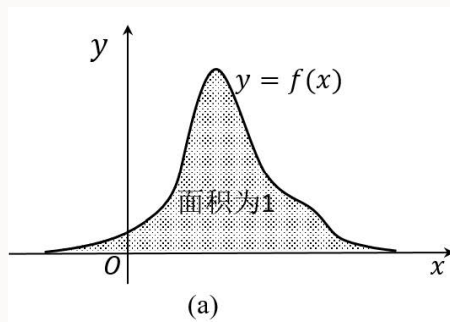
密度函数的几何解释

密度函数 $f(x)$ 满足非负性 $f(x) \geq 0$ 和规范性 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dt = 1$.

- 根据规范性可知曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的面积为 1. 对任意 $x_1 \leq x_2$, 有

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dt$$

- 几何解释: X 落入区间 $(x_1, x_2]$ 的概率等于 x 轴, $x = x_1$, $x = x_2$ 和 $y = f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积. $f(x)$ 指向 x 点处的可能性.



概率密度函数相关定理

定理 0.9 对连续随机变量 X , 其分布函数 $F(x)$ 在整个实数域上连续; 若 $f(x)$ 在 x 点连续, 则 $F(x)$ 在 x 点可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

分布函数的导数是概率密度函数, 概率密度函数的积分是分布函数?

定理 0.10 对连续型随机变量 X 和常数 x , 有 $P(X = x) = 0$.

- 事件是孤点的: 一个事件的概率为 0, 不能推出该事件是不可能事件; 一个事件的概率为 1, 也不能推出该事件是必然事件.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$.
- 概率密度函数不是概率: $P(X = x) = 0 \neq f(x)$.

概率与密度函数的关系

若 $f(x)$ 在点 x 连续, 根据连续性有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(t) dt}{(x + \Delta x) - (x - \Delta x)} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x f(\xi)}{2\Delta x} \\&= f(x)\end{aligned}$$

其中 $\xi \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$, 由此可得

$$P(x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x) \approx 2f(x)\Delta x$$

概率密度 $f(x)$ 越大, 则 X 在 x 附近取值的概率越大.

密度函数：例 0.63

例 0.63 设连续随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ a - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

求分布函数 $F(x)$.

解答：例 0.63

题目：如上所述.

解答：

- 考察密度函数的规范性及分布函数与密度函数的函数关系.
- 根据概率密度的规范性有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^2 (a-t)dt = a - 1$$

从而求解出 $a = 2$, 于是得到具体的密度函数 $f(x)$.

- 当 $x \leq 0$ 时, 有 $F(x) = 0$; 当 $0 < x \leq 1$ 时, 有

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = x^2/2;$$

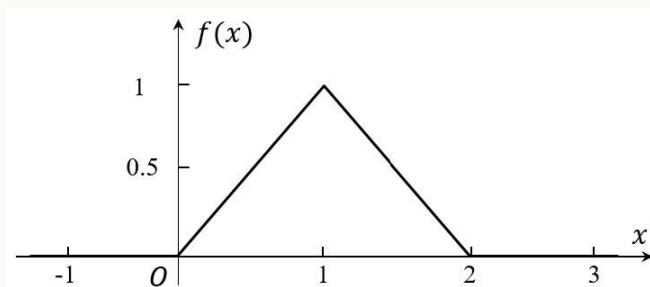
当 $1 < x \leq 2$ 时, 有

$$F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = 1/2 + \int_1^x (2-t)dt = -x^2/2 + 2x - 1;$$

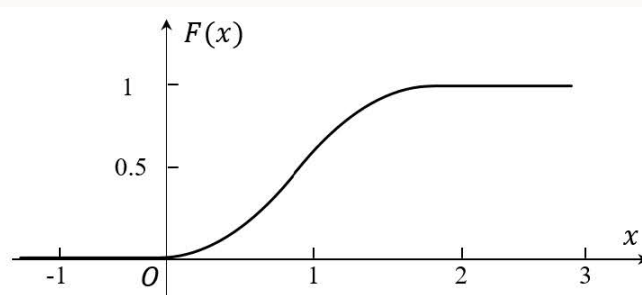
当 $x \geq 2$ 时, 有 $F(x) = 1$. 综合可得

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x^2/2 & 0 < x \leq 1, \\ -x^2/2 + 2x - 1 & 1 < x \leq 2, \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

随机变量 X 的密度函数和分布函数如下图所示.



(a) 概率密度函数



(b) 分布函数

密度函数：例 0.64

例 0.64 对连续随机变量 X ，当 $x \in (0, 3)$ 时密度函数 $f(x) = \frac{1}{9}cx^2$ ，在其它点的密度函数 $f(x) = 0$ 。设随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & X \in (1, 2) \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$$

$$\int_0^3 cx^2 dx = 1$$

$$\frac{c}{3} x^3 \Big|_0^3 = 1$$

$$9c = 1 \quad c = \frac{1}{9}$$

求概率 $P(Y \geq X)$.

~~$$P(X \leq 1) + P(1 < X < 2) + P(X \geq 2)$$~~

$$= P(1 - X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{9} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{27}$$

解答：例 0.64

题目：如上所述.

解答：

- 考察密度函数的规范性及分布函数与密度函数的函数关系.
- 根据概率密度的规范性有 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 9c$, 由此可得 $c = 1/9$.
- 用 $F_Y(y)$ 表示随机变量 Y 的分布函数. 当 $y < 1$ 时, 有 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$; 当 $y \geq 2$ 时, 有 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$; 当 $1 \leq y < 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(Y = 1) + P(1 < Y \leq y) \\ &= P(X \geq 2) + P(1 < X \leq y) = \int_2^3 t^2/9dt + \int_1^y t^2/9dt = (18 + y^3)/27 \end{aligned}$$

由此可得随机变量 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1, \\ (18 + y^3)/27 & y \in [1, 2), \\ 1 & y \geq 2. \end{cases}$$

可以观察到随机变量 Y 不是连续性随机变量, 也不是离散型随机变量. 最后计算概率

$$P(X \leq Y) = P(X < 2) = \int_0^2 t^2/9 dt = 8/27$$

连续型随机变量的数字特征 – 期望

定义 0.28 设连续随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ 收敛, 称 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 为随机变量 X 的期望, 记为 $\mathbb{E}(X)$, 即

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

.

期望：例 0.65

例 0.65 物理学中用到的柯西分布为：随机变量 X 的密度函数是

$$f(x) = 1/\pi(1 + x^2) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

求期望 $\mathbb{E}(X)$.

$$E(X)$$

解答：例 0.65

题目：物理学中用到的柯西分布为：随机变量 X 的密度函数是 $f(x) = 1/\pi(1+x^2)(x \in \mathbb{R})$ ，求期望 $\mathbb{E}(X)$ 。

解答：

- 根据随机变量 X 的期望 $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$ ，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} [\ln(1+x^2)]_0^{+\infty} = +\infty$$

- 由上可知柯西分布的期望不存在。

连续函数期望的性质

- 对任意常数 a, b 和连续随机变量 X , 有 $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
- 对常数 c_1, \dots, c_n 和连续函数 $g_1(x), \dots, g_n(x)$, 有

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n c_i g_i(X) \right) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}(g_i(X))$$

- 对连续随机变量 X 和凸函数 $f(x)$, 有 $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$.
- 对连续随机变量 X 和凹函数 $f(x)$, 有 $f(\mathbb{E}(X)) \geq \mathbb{E}(f(X))$.

证: $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$

非负随机变量期望的等价定义

定义 0.29 对非负随机变量 X , 有

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt$$

证明

推论: 对非负随机变量 $g(X)$, 有 $\mathbb{E}[g(X)] = \int_0^{+\infty} P(g(X) > t) dt$.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t) dt.$$

随机变量函数的函数期望

定理 0.11 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ 、且 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ 绝对可积, 则随机变量 $Y = g(X)$ 的期望

$$\mathbb{E}((g(X))) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$$

期望：例 0.66

例 0.66 古人运送粮草, 如果早到每天需要的存储费用 c 元, 如果晚到每天需要的延期费用为 C 元. 粮草在运送过程中存在天气、路况等不确定因素, 因此运送需要的天数是随机的, 概率密度函数为 $f(x)$, 问什么时候出发才能使费用的期望值最小?

解答：例 0.66

解答：

- 先列出所需费用的分布函数, 再求期望的表达式及其最小值.
- 用随机变量 X 表示实际的运送天数, 分布函数为 $F(x)$. 不妨假设提前了 t 天出发 (t 也表示运粮约定时间), 那么所需费用为

$$\ell_t(X) = \begin{cases} c(t - X) & X \leq t, \\ C(X - t) & X > t. \end{cases}$$

- 因此可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ell_t(X)] &= \int_0^{+\infty} \ell_t(x) f(x) dx = \int_0^t c(t - x) f(x) dx + \int_t^{+\infty} C(x - t) f(x) dx \\ &= ctF(t) - c \int_0^t x f(x) dx + C \int_t^{+\infty} x f(x) dx - Ct(1 - F(t)) \end{aligned}$$

- 该函数是一个关于运粮约定时间或者提前出发事件 t 的函数

- 对上式中的 t 求导、并令导数为零可得

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[\ell_t(X)] = cF(t) - C(1 - F(t)) = (c + C)F(t) - C$$

求解可得期望最小的天数 t^* 满足

$$F(t^*) = C/(c + C)$$

连续型随机变量的数字特征 – 方差

定义 0.30 设连续随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 称

$$\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f(t) dt$$

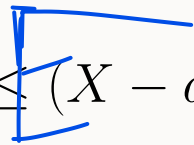
为随机变量 X 的方差.

等价定义:

$$\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \right)^2$$

连续函数方差的性质

- 对任意常数 a, b 和连续随机变量 X , 有 $\text{VAR}(aX + b) = a^2\text{VAR}(X)$.
- 对连续型随机变量 X 和常数 a ,

$$\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X - a)^2$$


- 对连续型随机变量 $X \in [a, b]$, 有

$$\text{VAR}(X) = (b - \mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(X) - a) \leq (b - a)^2/4$$

方差：例 0.67

例 0.67 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 X 的方差 $\text{VAR}(X)$ 和 $-2X+3$ 的方差 $\text{VAR}(-2X+3)$.

$$E(X) = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{3}x dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{9}$$

$$E(X^2) = \int_1^2 \frac{2}{3}x^3 dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{5}{2} - \frac{196}{81} = \frac{162}{162}$$

$$\text{VAR}(-2X+3) = 4\text{VAR}(X) = \frac{26}{81}$$

解答：例 0.67

题目：设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 X 的方差 $\text{VAR}(X)$ 和 $-2X + 3$ 的方差 $\text{VAR}(-2X + 3)$.

解答：

- 根据方差的定义可知, 因为 $\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, 且

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{3} x dx = \frac{14}{9}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{3} x dx = \frac{5}{2}$$

由此可得 $D(X) = \frac{13}{162}$.

- 根据方差的性质得, $D(-2X + 3) = 4D(X) = \frac{26}{81}$