南京大学计算机科学与技术系2016—2017学年春季学期

“离散数学”期中测验题

答案要点

**1.** **（15分）**今于我班诸生之中，遴选俊彦若干（不少于二人），排成一列纵队. 试以我班学生全体之集合为个体域，仅通过以下2个谓词：

**(a)**相等谓词“”： 表示与是同一个学生；

**(b)**谓词：表示均在纵队中，且排在之前.

定义下列谓词（前面小题中已定义过的谓词在后面小题中可直接使用）：

在定义谓词时，那些不在谓词中的变元，必须通过量词限定，否则-1分

使用不规范的符号，例如用“！ ”表示，用文字“且”“或”表示“”“”等情形，只出现在一小问中，该小问-1分。出现在多个小问中，酌情扣分

1. 学生 在纵队中；（3分）
2. 学生 排在队首；（4分）
3. 在队列中学生紧随着； （4分）
4. 学生 排在第二位. （4分）

**2. （12分）**试证明：正整数 和 的最后一位必相同.

证明：

方法一：费马小定理

5是质数，根据费马小定理， （6分）

又易见（3分）

于是2和5的最小公倍数10整除, 即正整数 和 的最后一位必相同。（3分）

方法二：罗列n的个位

若n的个位为0，假设，又，则的个位一定为0

若n的个位为1，假设，又，则的个位一定为1

若n的个位为2，假设，又，则的个位一定为2

若n的个位为3，假设，又，则的个位一定为3

若n的个位为4，假设，又，则的个位一定为4

若n的个位为5，假设，又，则的个位一定为5

若n的个位为6，假设，又，则的个位一定为6

若n的个位为7，假设，又则的个位一定为7

若n的个位为8，假设，又则的个位一定为8

若n的个位为9，假设，又则的个位一定为9

综上，正整数 和 的最后一位必相同。（每个数字1分，结论两分）

方法三：数学归纳法

1. 基础步骤：当时，命题显然成立（2分）
2. 归纳步骤：假设当时，命题成立，即 和的个位相同。

则当时，,

其中与个位无关，即只需考察（2分）

其中，若k为奇数，为偶数，显然可被10整除，若k为偶数，则也可被10整除，即不影响的个位，所以的个位和的个位相同。（5分）

又由假设 和的个位相同,则的个位和相同，即时命题也成立。（2分）

根据数学归纳法，正整数 和 的最后一位必相同（1分）

**3. （12分）**令为有限长的串的集合，为无限长的串的集合，我们知道前者可数而后者不可数. 试问：

1. 中仅含有限个字符“”的串的集合是否可数？为什么？
2. 中包含无限个字符“”的串的集合是否可数？为什么？

答：

(1). 可数。记中仅含有限个字符“”的串的集合为，可构造一个从到之间的映射：对于每一个含有限个字符“1”的串，忽略掉其最后一个“”后的无限多的“0”。易见此映射为单射；而可数，于是可数。（8分）

(2). 不可数。记中包含无限个字符“”的串的集为,若可数，则可数，而不可数，矛盾。故不可数。（4分）

**4.** **（12分）**递归定义双斐波那契数列 如下：

试证明：

1. 所有双斐波那契数均为奇数；
2. 任何两个相邻的双斐波那契数均互质.

解：（1）6分

* 1. 归纳基础：D0=1，D1=1. （1分）
  2. 归纳步骤：假设Dk为奇数（k为整数且k≥1），则Dk+1也为奇数。（2分）（注意k的定义域）

证明：已知Dk+1 = 2Dk+D k-1，由假设得2Dk为偶数，Dk-1为奇数，则Dk+1为奇数。（3分）

综上，命题得证。

（2）6分

方法一：数学归纳法(直接证明)

1. 归纳基础：D0与D1互质，gcd（D1，D0）= 1（1分）
2. 归纳步骤：假设gcd（Dk，Dk-1）= 1（k为整数且k≥1），则gcd（Dk+1，Dk）= 1。（1分）（注意k的定义域）

由最大公约数的辗转相除法得：gcd（Dk+1，Dk）= gcd（2Dk+Dk-1，Dk）= gcd（Dk，Dk-1）=1。

综上，命题得证。

方法二：数学归纳法(反证)

1. 归纳基础：D0与D1互质（1分）
2. 归纳步骤：假设Dk-1与Dk互质（k为整数且k≥1），则Dk与Dk+1也互质。（2分）（注意k的定义域）

假设Dk与Dk+1不互质，则Dk-1与Dk也不互质。（1分）

Dk与Dk+1不互质，则两者的最大公约数为p（p为整数且P>1），那么存在正整数a，b使得Dk=a×p，Dk+1=b×p。

已知Dk+1 =2Dk+Dk-1，则Dk-1 =（b-2a）×p > 0，可得Dk-1与Dk存在大于1的公因素p，则两者不互质。（2分）

综上，命题得证。

**5. （12分）**考虑等价关系，

1. 试求集合上共有多少个等价关系？
2. 试给出元集合（）上等价关系数的递推关系式.

要点：考虑有多少个不同的划分即可。

1. 15.

考虑等价类数为k时有多少个关系（2分：找到一个合适的分情况计数的思路）

1个等价类的方案数是，2个等价类方案数是 ，3个等价类方案数是，4个等价类方案数是；（1分：每个情况的计算方式正确；1分：每个情况的计算结果正确[补充：认为“空关系“也是一种只扣1分]）

合计。（2分：最终结果正确）

（补充：错误的计算思路可得1分，只写一个正确结果可得4分）

（2）

是含有个元素集合的划分的个数，考虑元素.（2分：选出一个元素分情况讨论的思路）

若被单独划分到一类，那么还剩下个元素，这种情况下划分个数为；若与某一个元素划分到一类，那么还剩下个元素，这种情况下划分个数为；依次类推，（2分：每个情况的计算方式正确）

可得。（2分：最终结果正确）

（补充：指出是贝尔数 or 与第二类斯特灵数的关系 or 从容斥的角度出发的计算方法，视为过程正确）

**6. （10分）**今有赌局如下：你独立地掷3次骰子（这里骰子是公平的），看你能掷出几个六点.

* + - 若没有一次是六点，你输一块钱；
    - 若仅有一次六点，你赢一块钱；
    - 若恰有两次六点，你赢两块钱；
    - 若三次全是六点，你赢块钱.

试问：是多少的情况下，这个赌局是公平的？

要点：记事件为“没有一次是六点”，为“仅有一次是六点”，为“恰有两次是六点”，为“三次全是六点”。设随机变量，

(2分 不一定要明确列出各个事件，但是要有随机变量求解这题的框架)

而各事件发生概率为

（6分，每个概率1.5分。如果因为某个共同的小误区导致四个概率都算错，如看错题以为投掷4次，可酌情给1~2分）

所谓赌局公平，即

即 .

（2分，列出式子给1分，结果给1分）

1. **（12分）**给定一个偏序格 和元素 ，令，试证明： 也是格.

证明要点：首先说明（限定在上）也是上的一个偏序；其次说明偏序格上的最大下界和最小上界运算在封闭，且就是上的最大下界和最小上界运算。

证明偏序集 （4分）

可分别证明自反，反对称，传递；或直接指出偏序的子集是偏序。

的下确界和上确界运算在上同样适用且封闭 （各4分，没能明确证明封闭性错一个扣2分）

1. **（15分）**令为不等式的所有非负整数解的集合，即：
2. 试给出与包含个和个的串的集合之间的双射；
3. 令为长度为的弱递增的、最大不超过的非负整数序列，即

试给出与之间的双射；

1. 试求 .

要点：

(1). （共6分）不等式的解一一对应于如下等式方程的解

而此等式方程的每一个解唯一对应于一个包含个和个的串： 个将个切成段，第段包含个 。(4分)

说明上述映射是双射：对任意两组不同的非负整数解，假设他们的值不同，则对应串中第i个1和第i+1个1之间0的数量不同，故为单射。又考虑任意一个个和个的串，均可以找到这样一组与之对应，故为满射。(2分)

如果未能将双射描述清楚，酌情扣1~2分

(2). （共6分）令 ，该映射为单射且为满射。(6分)

如果能找到其他双射亦可得满分，若找到的映射不为双射，视情况得1~2分。

(3). （共3分）因为存在与之间的双射，且存在与包含个和个的串的集合之间的双射（1分），所以

（2分）

使用其他方法直接求答案正确亦可得满分，若计算过程错误得1分。