1. 用谓词逻辑演算描述出以下推理过程：

“没有一个女学生没有通过离散数学考试，每个足够认真而又聪明的学生都能通过离散数学考试，学生小明很聪明，但是没有通过离散数学考试，所以小明一定不是女生且不够认真。”

解：令代表学生x是女生，代表x通过了离散数学考试，代表学生x足够认真，代表学生x聪明，a表示学生小明， 则题中前提可表示为

前提1：，  
前提2：，  
前提3：，  
结论可表示为：

推理过程如下

前提1的逻辑等价

(1)的全称例示

前提2的全称例示

前提3

(3)(4)拒取式

(5)的逻辑等价

前提3

(6)(7)消解

(2)(4)的消解

(8)(9)的合取引入

1. 令为上的一个关系。试证明：是一个等价关系当且仅当  
    存在一个集合及一个函数使得.

证明：

必要性：若是一个等价关系，可令，定义 为 ,于是有, 即 .

充分性：若存在一个集合及一个函数使得，现证明是自反的、对称的、传递的：  
自反性：对于任意的，因为，所以;  
对称性：对于任意的, 若，于是所以;  
传递性：对于任意的, 若且，于是，所以;

证毕。

1. Fermat 素数为 .
   1. 试用数学归纳法证明: .
   2. 试基于上述结论证明: 对于任意两个不同的自然数,  
      总有 .
2. 证明：

基础步骤：;

归纳步骤：假设该式对于成立，现证明其对于成立。

证毕。

* 1. 证明：由于，有；又根据结论a)，有，于是除余2；根据Euclid辗转相除法，有

证毕。

1. 某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分。问：
   1. 游戏结束时得分为0的概率是多少？
   2. 游戏第一轮得分的期望值是多少？
   3. 游戏结束时得分的期望值是多少？

解：a) 得分为0意味着第一轮就掷出点数之乘积大于20的情况。所有36种结构中出现(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), 和 (6,6)这6种结果才会积大于20；其概率为.

b) 首先计算第一轮的得分期望值，其中

计算该值为 ；  
于是第一轮的得分期望为272/36=68/9；

c) 令所求之游戏结束时得分的期望值为；注意到每一轮之后，若游戏未结束，以后得分的期望值也为，于是有

可解得 。

1. 群论问题：
   1. 试证明有理数群不是循环群。
   2. 令为Klein四元群。请给出的各个陪集。
      1. 证明：假设其为循环群，记其生成元素为, ，但不存在 使得 (注意这里是该加法群的幂次运算，即个做运算，即；不是有理数幂运算)。  
         证毕。
      2. 解：该循环子群，其各陪集为 和；  
         (可注意到: 该群是交换群；=; ; )
2. 假设是连通图中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明的端点不是图的割点。（10分）

证明： 反证法，假设是的端点，而是图的割点。（2分）

删除顶点之后，产生2个或者多个连通分支，因为是的端点，所以，中顶点除了之外均来自某一个连通分支。（4）

到其他连通分支有边相连，从而有更长的初级通路， 这与“是连通图中的一条最长的初级通路”矛盾。（4分）

得证。

//如果图是平凡图，结论显然。（如果有这样的陈述，可以酌情给1分）

的端点不能有边连接到不在中的顶点，否则可将通过这条边延长到，这与是最长初级通路矛盾。（4分）

考虑到是的端点，删除该端点不影响中其余顶点间的连通性，而又没有其它相邻节点，可知它不是割点。（6分）

证毕。

1. 令 为一正整数序列，且 。（12分）
   1. 若恰好是某个树的各个顶点的度数序列，试证明
   2. 反过来，试证明：若满足上式，则存在一个树，使得恰好是的各个顶点的度数序列。
   3. 假设满足上式。试证明：可将中各整数划分为两个序列,使得中正整数之和与中正整数之和相等。
2. 证明：树的边的数目为。由握手定理可知。（4分）  
   证毕。
3. 证明： 对进行归纳。（1分）

基础步骤：当时该命题显然成立。（1分）

递归步骤：假设对于时该命题成立。现证明该命题对时也成立。中必存在（否则）;亦必有（否则）。考虑，易见满足归纳假设条件，即存在一颗树的各个顶点的度数序列恰是。今在中添加一个节点，并将其连接到对应于的节点上。易见恰好是这个新的树的顶点的度数序列。（2分）

证毕。

1. 证明：根据b），存在一个树，使得恰好是的各个顶点的度数序列。

（2分）

该树可依据各顶点距离某一给定顶点的距离的奇偶性划分为二部图，于是其两部分中各顶点的度数序列即对应于所求的。

（2分）

证毕。

1. 假设是连通图中的一条最长的初级通路（点不重复）。证明的端点不是图的割点。

证明：的端点不能有边连接到不在中的顶点，否则可将这通过条边延长到，这与是最长初级通路矛盾。  
考虑到是的端点，删除该端点不影响中其余顶点间的连通性，而又没有其它相邻节点，可知它不是割点。

证毕。

1. 画出下图的最小生成树，并给出其权重 (左图可作为草稿，答案画在右图上，把所选的边描粗)。



解：一个可能的最小生成树如图所示。权重为35.



1. 今有布尔代数，试证明对于任意的,以下四个命题等价：

证明：

a)🡪b): ;

b)🡪c): ;

c)🡪d):

d)🡪a):

证毕。