w 15

91

2020—2021 第一学期“信号与系统”期中试卷

班级 抓图控 学号 1P1180177 姓名 詹远兵

1. 填空和简答（18 分）

（1）（2 分）计算：$(2\cos t+3t)\delta(-2t+\frac{\pi}{3})+\int_0^{\infty}(2\cos t+3t)\delta(t+\frac{\pi}{3})dt=$ $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4})\delta(t-\frac{\pi}{6})$

$(\cos t+\frac{3}{2}t)\delta(t-\frac{\pi}{6})$ 　　0

（2）（2 分）计算：$[(2t-1)u(t)]*u(t-2)=$ $(t^2-5t+6)u(t-2)$

（3）（2 分）化简：$\cos(\frac{2}{3}\pi t+\frac{1}{3}\pi)*\delta(-t-0.25)=$ $-\sin(\frac{2}{3}\pi t)$

（4）（2 分）$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dt=$ $2\pi\delta(\omega)$

（5）（4 分）已知 $r(t)=2e(0.5t)\cdot\cos(t-1)$，请判断该系统：

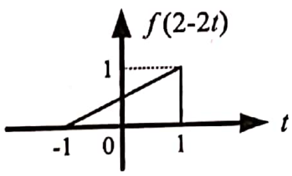
是线性的（ √ ）、时不变的（ × ）、因果的（ × ）、稳定的（ √ ）。

（6）（6 分）计算傅里叶变换：$F\{t\}=$ $-2\pi\cancel{j}\delta'(\omega)$，$F\{\frac{1}{\pi t}\}=$ $-j\,\mathrm{sgn}(\omega)$

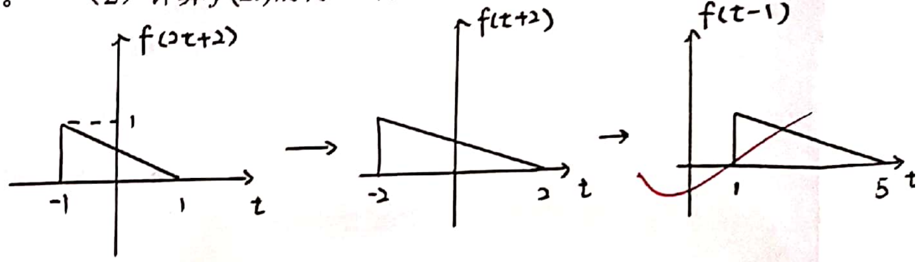
15

2. （15 分）已知信号 $f(2-2t)$ 的波形如下图所示。

（1）画出信号 $f(t-1)$ 的波形。　　（2）计算 $f(2t)$ 的傅立叶变换。

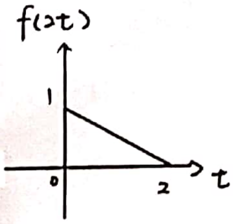


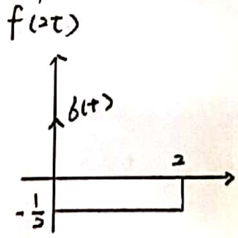
反褶 →



解：(1) 如图所示

(2)





设 $g(t)=f'(2t)=\delta(t)-\frac{1}{2}[u(t)-u(t-2)]$

$F(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]=1-Sa(\omega)e^{-j\omega}$

$F(0)=0$

则 $\mathcal{F}[g(t)]=\frac{1}{j\omega}[1-Sa(\omega)e^{-j\omega}]$

即 $\mathcal{F}[f(2t)]=\frac{1}{j\omega}[1-Sa(\omega)e^{-j\omega}]$

3．(12 分)分别求下列信号的单边拉普拉斯变换

（1）$f_1(t)=(t^2+1)e^{-t-1}u(t-1)+\delta(t+1)$

（2）$f_2(t)=2\sin(\pi t)[u(t-1.5)-u(t-3)]$

解：(1) 设 $f_0(t)=\frac{1}{e}(t^2+1)\,u(t-1)$

$f_0(t)=\frac{1}{e}\left[(t-1)^2+2(t-1)+2\right]u(t-1)$

$L[f_0(t)]=\left[\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s}\right]e^{-(s+1)}$

$L[f_0(t)e^{-t}+\delta(t+1)]$

$=\left[\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}\right]2e^{-(s+2)}+e^{s}$

5

(2) $f_2(t)=2\sin\left(\pi(t-1.5)+\frac{3\pi}{2}\right)u(t-1.5)$

$-2\sin(\pi(t-3)+3\pi)\,u(t-3)$

$=2\cos[\pi(t-1.5)]\,u(t-1.5)$

$+2\sin[\pi(t-3)]\,u(t-3)$

$L[f_2(t)]$

$=\frac{2s}{\pi^2+s^2}e^{-1.5s}+\frac{2\pi}{\pi^2+s^2}e^{-3s}$

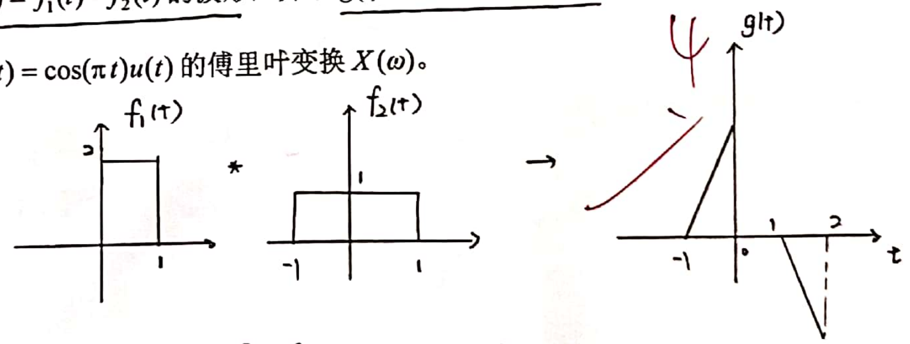
$=\frac{2}{\pi^2+s^2}\left(se^{-1.5s}+\pi e^{-3s}\right)$

5

4．(20 分)(1) 已知信号 $f_1(t)=2[u(t)-u(t-1)]$, $f_2(t)=u(-t+1)-u(-t-1)$，画出卷积 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的波形，并求 $g(t)$ 的傅立叶变换 $G(\omega)$。

(2) 求 $x(t)=\cos(\pi t)u(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$。

解：(1)



$g(t)=2[u(t)-u(t-1)]*[u(t+1)-u(t-1)]$

$=2t[u(t)-u(t-1)]*[\delta(t+1)-\delta(t-1)]=2(t+1)[u(t+1)-u(t)]$

$-2(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$

$F_1(\omega)=\mathcal{F}[f_1(t)]=2Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}j\omega}$

$F_2(\omega)=\mathcal{F}[f_2(t)]=2Sa(\omega)$

$G(\omega)=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)=4Sa(\omega)Sa\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}j\omega}$

5

(2) $\mathcal{F}[\cos(\pi t)]=\pi[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]$

$\mathcal{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\pi[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega+\pi)+\frac{1}{j(\omega+\pi)}+\pi\delta(\omega-\pi)+\frac{1}{j(\omega-\pi)}\right]$

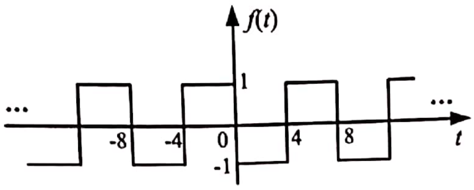
8

5 t

扫描全能王 创建

5. (15 分) 下图$f(t)$为周期信号，求：(1) $f(t)$的傅里叶级数（三角函数形式或指数形式）,并求系数F_3和F_4；(2) $f(t)$的傅里叶变换$F(\omega)$，并画出幅度频谱的大概波形。

14



解：(1) 由题可知

$$F_0(w) = \mathcal{F}\left[-(u(t)-u(t-4)) + [u(t-4)-u(t-8)]\right]$$

$$= 4Sa(2w)\left[e^{-6jw} - e^{-2jw}\right]$$

$$F_n = \frac{1}{T_S} F_0(w)\Big|_{w=nw_s} = \frac{1}{2} Sa(2nw_s)\left(e^{-6jnw_s} - e^{-2jnw_s}\right)$$

$w_s = \frac{2\pi}{T_S} = \frac{\pi}{4}$

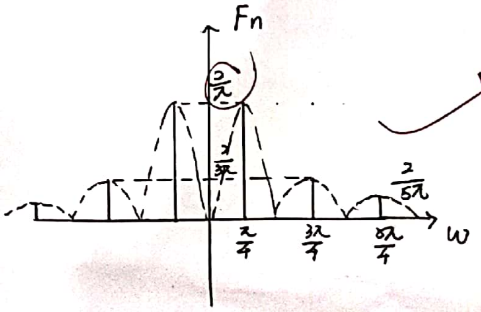
$$= \frac{1}{2} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left[e^{-j\frac{3}{2}\pi n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right]$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jnw_s t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left[e^{jn\frac{\pi}{4}(t-6)} - e^{jn\frac{\pi}{4}(t-2)}\right]$$

$F_3 = \frac{2j}{3\pi}$ $F_4 = 0$

(2) $F(w) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(w-nw_s)$

$$= \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left[e^{-j\frac{3}{2}\pi n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n}\right]\delta\left(w-n\frac{\pi}{4}\right)$$



1

6.（20 分）给定 LTI 系统微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+3e(t)$

20

若激励信号 $e(t)=2u(t-1)$，起始状态为： $r(0_-)=1$，$r'(0_-)=2$。
试求单位冲激响应 $h(t)$、零输入响应 $r_{zi}(t)$、零状态响应 $r_{zs}(t)$，以及自由响应和强迫响应分量。

解：单位冲激响应：

$$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta'(t)+3\delta(t)$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \quad \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2 \qquad r(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

设 $\begin{cases} r''(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t) \\ r'(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ r(t)=a\Delta u(t) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a=1 \\ b+3a=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

则 $r'(0_+)=r'(0_-)=0$ $\quad \begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -A_1-2A_2=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A_1=2 \\ A_2=-1 \end{cases}$

$r(0_+)=r(0_-)+a=1$

则 $h(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

零输入响应

$$r_{zi}=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t} \qquad r_{zi}=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$$

$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -A_1-2A_2=2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} A_1=4 \\ A_2=-3 \end{cases}$

零状态响应

$$r_{zs}=e(t)*h(t)=2u(t-1)*(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

$$=2\delta(t-1)*\left(-2e^{-t}+\tfrac{1}{2}e^{-2t}+\tfrac{3}{2}\right)u(t)$$

$$=\left(e^{-2(t-1)}-4e^{-(t-1)}+3\right)u(t-1)$$

自由响应：$(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)+\left[e^{-2(t-1)}-4e^{-(t-1)}\right]u(t-1)$

强迫响应：$3u(t-1)$

一
9

2020—2021 第一学期“信号与系统”期中试卷

95

班级 **计国桂** 学号 **19180196** 姓名 **郑耀杰**

1．填空和简答（18 分）

18

（1）（2 分）计算：$(2\cos t+3t)\delta(-2t+\frac{\pi}{3})+\int_0^{\infty}(2\cos t+3t)\delta(t+\frac{\pi}{3})dt=$ $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\frac{\pi}{2})\delta(t-\frac{\pi}{6})$

（2）（2 分）计算：$[(2t-1)u(t)]*u(t-2)=$ $(t^2-5t+6)u(t-2)$

（3）（2 分）化简：$\cos(\frac{2}{3}\pi t+\frac{1}{3}\pi)*\delta(-t-0.25)=$ $-\sin(\frac{2\pi}{3}t)$

（4）（2 分）$\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dt=$ $2\pi\delta(\omega)$

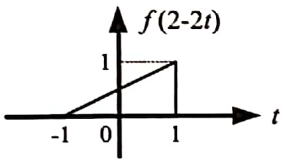
（5）（4 分）已知 $r(t)=2e(0.5t)\cdot\cos(t-1)$，请判断该系统：

是线性的（ √ ）、时不变的（ × ）、因果的（ × ）、稳定的（ √ ）。

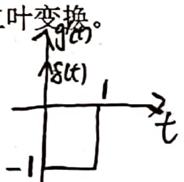
（6）（6 分）计算傅里叶变换：$F\{t\}=$ $2\pi j\delta'(\omega)$，$F\{\frac{1}{\pi t}\}=$ $j\,\mathrm{sgn}(-\omega)$

2．（15 分）已知信号 $f(2-2t)$ 的波形如下图所示。

（1）画出信号 $f(t-1)$ 的波形。（2）计算 $f(2t)$ 的傅立叶变换。



另解：$g(t)=f'(2t)=$



$G_1(\omega)=F(g'(t))=1-Sa(\frac{\omega}{2})e^{-j\omega\frac{1}{2}}$

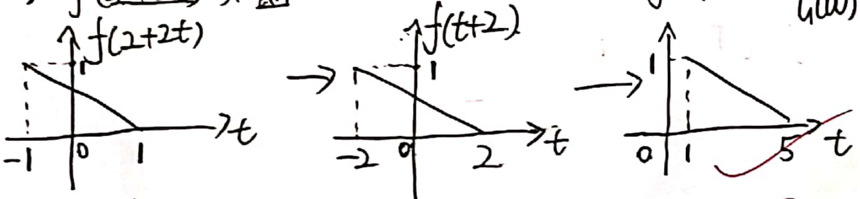
$G(\omega)=F(\int_{-\infty}^{t}g'(t)dt)=\frac{G_1(\omega)}{j\omega}+\pi\delta(\omega)G_1(0)$

$G_1(0)=[1-Sa(\frac{\omega}{2})e^{-j\frac{\omega}{2}}]\Big|_{\omega=0}=0$

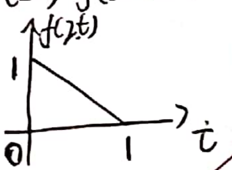
9

$\therefore F(f(2t))=G(\omega)=\frac{1-Sa(\frac{\omega}{2})e^{-j\frac{\omega}{2}}}{j\omega}$

(1) $\cancel{f(2+2t)}$ 如图



(2) $f(2t)$ 如图



$g(t)=f(2t)=[u(t)-u(t-1)](1-t)$

$F[f(2t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}(1-t)[u(t)-u(t-1)]e^{-j\omega t}dt$

$=\int_0^1 e^{-j\omega t}dt-\int_0^1 te^{-j\omega t}dt$

$=\frac{1-e^{-j\omega}}{j\omega}+\frac{1-e^{-j\omega}}{\omega^2}+\frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$

$=\frac{1}{j\omega}+\frac{1-e^{-j\omega}}{\omega^2}$

3

12

3. (12分)分别求下列信号的单边拉普拉斯变换

(1) $f_1(t)=(t^2+1)e^{-t-1}u(t-1)+\delta(t+1)$

(2) $f_2(t)=2\sin(\pi t)[u(t-1.5)-u(t-3)]$

解:(1) $\int_0^{+\infty}\delta(t+1)e^{-st}dt=0$

$\therefore L[f_1(t)]=\int_0^{+\infty}[(t^2+1)e^{-1}e^{-(s+1)t}u(t-1)]dt=e^{-1}\int_1^{+\infty}t^2e^{-(s+1)t}dt+e^{-1}\int_1^{+\infty}e^{-(s+1)t}dt$

$\int_1^{\infty}t^2e^{-(s+1)t}dt=\frac{-1}{s+1}t^2e^{-(s+1)t}\Big|_1^{\infty}+\frac{2}{s+1}\int_1^{\infty}te^{-(s+1)t}dt=\frac{e^{-(s+1)}}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}e^{-(s+1)}+\frac{2}{(s+1)^3}e^{-(s+1)}$ $\int_1^{+\infty}e^{-(s+1)t}dt=\frac{e^{-(s+1)}}{s+1}$

综上 $L[f_1(t)]=2e^{-(s+2)}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}\right]$

(2) $f_2(t)=2\sin[\pi(t-1.5)+1.5\pi]u(t-1.5)-2\sin[\pi(t-3)+3\pi]u(t-3)$

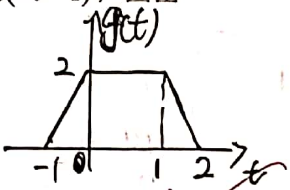
$=-2\cos[\pi(t-1.5)]u(t-1.5)+2\sin[\pi(t-3)]u(t-3)$ $L(\underset{\sin kt\,u(t)}{\underset{\uparrow}{\sin kt}})=\frac{k}{s^2+k^2}$ $L[\underset{\cos kt\,u(t)}{\underset{\uparrow}{\cos kt}}]=\frac{s}{s^2+k^2}$

故 $L[f_2(t)]=-2\frac{s}{s^2+\pi^2}e^{-1.5s}+2\frac{\pi}{s^2+\pi^2}e^{-3s}$

4. (20分)(1) 已知信号 $f_1(t)=2[u(t)-u(t-1)]$, $f_2(t)=u(-t+1)-u(-t-1)$,画出卷积 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的波形,并求 $g(t)$ 的傅立叶变换 $G(\omega)$。

(2) 求 $x(t)=\cos(\pi t)u(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$。

如图



7

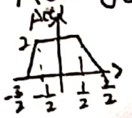
解:(1) $g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}2[u(\tau)-u(\tau-1)]\times[u(-t+\tau+1)-(-t+\tau-1)]d\tau$

$=2\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)u(-t+\tau+1)d\tau-2\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)u(-t+\tau-1)d\tau-2\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-1)u(-t+\tau+1)d\tau+2\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau-1)u(-t+\tau-1)d\tau$

$=2\{(t+1)[u(t+1)-u(t)]+[u(t)-u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-2)]\}$

令t'=-t换元化简后

$A(t)=g(t+\frac{1}{2})$ $F(A)=2\int_{-1.5}^{-0.5}(t+1.5)e^{-j\omega t}+2\int_{0.5}^{1.5}(1.5-t)e^{-j\omega t}+2\int_{-0.5}^{0.5}e^{-j\omega t}dt$



$=2\int_{0.5}^{1.5}(1.5-t)(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})dt+2Sa(\frac{\omega}{2})$

$=4\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1.5-t)\cos\omega t\,dt+2Sa(\frac{\omega}{2})$

3

$=\left[-\frac{4}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}+\frac{4}{\omega^2}(\cos\frac{\omega}{2}-\cos\frac{3}{2}\omega)+2Sa(\frac{\omega}{2})\right]$ $G(\omega)=F(A)e^{-j\frac{\omega}{2}}=\left[-\frac{4}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}+\frac{4}{\omega^2}(\cos\frac{\omega}{2}-\frac{3}{2}\omega)+2Sa(\frac{\omega}{2})\right]e^{-j\frac{\omega}{2}}$

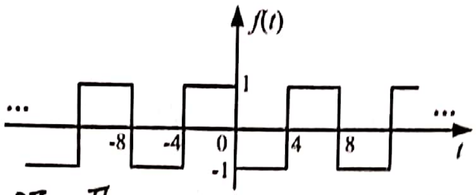
(2) $x(t)=\frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}u(t)$ 由 $F(u(t))=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$ 得

$X(\omega)=\frac{1}{2}\pi[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega+\pi)}+\frac{1}{j(\omega-\pi)}\right]=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]+\frac{1}{j}\frac{\omega}{\omega^2-\pi^2}$

8

15

5. (15分) 下图$f(t)$为周期信号，求：(1) $f(t)$的傅里叶级数（三角函数形式或指数形式），并求系数F_3和F_4；(2) $f(t)$的傅里叶变换$F(\omega)$，并画出幅度频谱的大概波形。



解：(1) $T_0=8$ $\quad \omega_0=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} F_n e^{jk\omega_0 t}$

⇓

$F(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_n\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega-k\omega_0)$

$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$

令 $f'(t)$ 为 $f(t)$ 的单脉冲信号

$F'(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-j\omega t}dt$

$=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f'(t)e^{-j\omega t}dt$

∴ $F_n=\frac{1}{T_0}F'(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}$

而 $F'(\omega)=\int_{-4}^{0} e^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{4} e^{-j\omega t}dt$

令 $t'=-t$，有 $\int_{-4}^{0} e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{4} e^{j\omega t'}dt'$

∴ $F'(\omega)=\int_{0}^{4}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})dt$

$=2j\int_{0}^{4}\sin\omega t\,dt=\frac{2j}{\omega}(1-\cos 4\omega)$

∴ $F_n=\frac{1}{8}\cdot\frac{2j}{\frac{\pi}{4}n}[1-\cos(4\times\frac{\pi}{4}n)]$

$=\frac{j}{n\pi}[1-(-1)^n]$

$F_n=\begin{cases}\frac{2j}{n\pi} & n为奇数\\ 0 & n为偶数\end{cases}$ $\qquad F_3=\frac{2j}{3\pi}$ $\quad F_4=0$

$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2j}{k\pi}e^{j\frac{\pi}{4}kt}$ $\quad (k=(2n+1))$

(2) $f(t)=f'(t)*\delta_T$

$\delta_T=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_0)$

$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}F'(\omega)*F(\delta_T)$

$F(\delta_T)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_0}2\pi\delta(\omega-k\omega_0)$

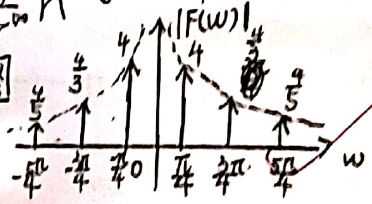
∴ $F(\omega)=\frac{1}{8}\sum_{-\infty}^{+\infty}F'(\omega-k\frac{\pi}{4})$

亦因 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2j}{n\pi}e^{j\frac{\pi}{4}nt}$ $\quad n=(2k+1)$

∴ $F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2j}{n\pi}2\pi\delta(\omega-\frac{n\pi}{4})$ $\quad (n=2k+1)$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4j}{n}\delta(\omega-\frac{n\pi}{4})$ $\quad (n=2k+1)$

如图



20

6.（20分）给定 LTI 系统微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+3e(t)$

若激励信号 $e(t)=2u(t-1)$，起始状态为：$r(0_-)=1$，$r'(0_-)=2$。
试求单位冲激响应 $h(t)$、零输入响应 $r_{zi}(t)$、零状态响应 $r_{zs}(t)$，以及自由响应和强迫响应分量。

解：(1) $\lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-2$

设 $h(t)=(Ae^{-t}+Be^{-2t})u(t)$

$h'(t)=(-Ae^{-t}-2Be^{-2t})u(t)+(A+B)\delta(t)$

$h''(t)=(Ae^{-t}+4Be^{-2t})u(t)+(-A-2B)\delta(t)+(A+B)\delta'(t)$

$e(t)=\delta(t)$ 时 方程右边为 $\delta'(t)+3\delta(t)$

$\therefore \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \quad h(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

设 $r_{zi}(t)=(A_1e^{-t}+B_1e^{-2t})u(t)$

$r_{zi}'(t)=(-A_1e^{-t}-2B_1e^{-2t})u(t)+(A+B)\delta(t)$

则 $r(0_-)=r(0_+)=1 \quad r'(0_-)=r'(0_+)=2$

$\therefore \begin{cases} A_1+B_1=1 \\ -A_1-2B_1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=4 \\ B_1=-3 \end{cases}$ ⑫

$r_{zi}(t)=(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}(2e^{-\tau}-e^{-2\tau})u(\tau)\times 2u(t-\tau-1)$

$=4\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau-1)d\tau-2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\tau}u(\tau)u(t-\tau-1)d\tau$

$=4u(t-1)[1-e^{-(t-1)}]-u(t-1)[1-e^{-2(t-1)}]$

$=[3-4e^{-(t-1)}+e^{-2(t-1)}]u(t-1)$

$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\underbrace{(4e^{-t}-3e^{-2t})u(t)+[e^{-2(t-1)}-4e^{-(t-1)}]u(t-1)}_{\text{自由响应}}+3u(t-1)$ 强迫响应