2014—2015 第一学期“信号与系统”期中试卷

班级 <u>大-3班</u> 学号 <u>13118BD83</u> 姓名 <u>张猫斋</u>　　100

1．填空和简答

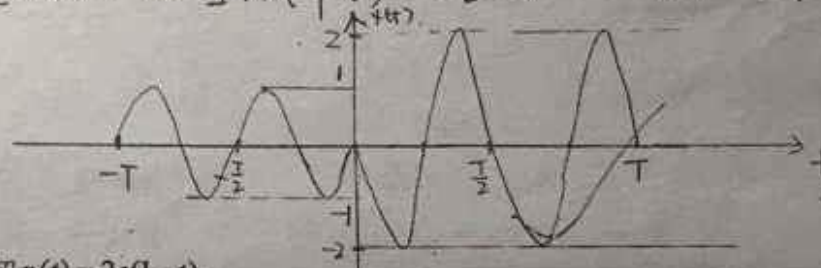
（1）（4 分)计算 $(2\cos t+3t)\delta(-t+\frac{\pi}{6})+\int_0^{\infty}(2\cos t-3t)\delta(-t-\frac{\pi}{6})dt=$ ~~$2\sqrt{3}$~~ $(\sqrt{3}+\frac{\pi}{2})\delta(-t+\frac{\pi}{6})$.

（2）(2 分)已知 $f(t)=2[\cos(10t)]^2+5\sin[16(t-1)]$，$f(t)$周期 $T=$ $\frac{\pi}{2}$

（3）(6 分)粗略画出下面函数式的波形图，关键点处请标注。

$$f(t)=[u(t+T)-3u(t)+2u(t-T)]\sin(\frac{4\pi}{T}t)$$

$f(t)=[u(t+T)-u(t)]\sin(\frac{4\pi}{T}t)-2[u(t)-u(t-T)]\sin(\frac{4\pi}{T}t)$.



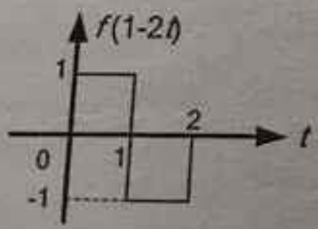
52

（4）(6 分)已知 $r(t)=2e(1-t)$，

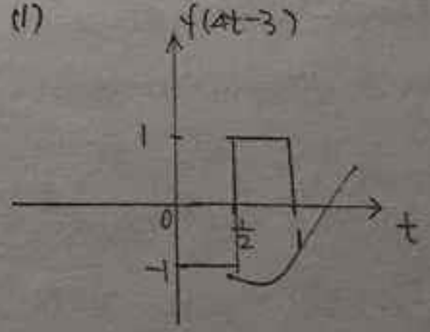
请判断该系统：是线性的（ √ ）、时不变的（ X ）、因果的（ X ）。

2. (12 分)已知信号 $f(1-2t)$ 的波形如下图所示。(1)画出信号$f(4t-3)$ 的波形。

(2) 若信号$f(1-2t)$ 的傅立叶变换为 $F(\omega)$，求信号 $f(4t-3)$ 的傅立叶变换。（用 $F(\omega)$的形式表示）。



(1)



(2) $\mathcal{F}(f(1-2t))=F(\omega)$.

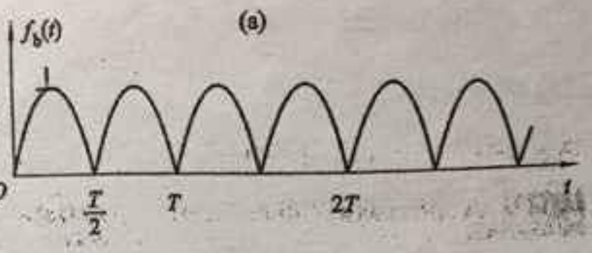
$\mathcal{F}(f(2t+1))=F(-\omega)$.

$\mathcal{F}(f(2(t-2)+1))=\mathcal{F}(f(2t-3))=F(-\omega)e^{-j\omega 2}$

$\mathcal{F}(f(4t-3))=\frac{1}{2}F(-\frac{1}{2}\omega)e^{-j\omega}$

3. (12分)分别求下列信号的单边拉普拉斯变换

(1) $f_1(t)=(t^2-1)e^{-2t}u(t-1)$　　(2) 下图所示的单边正弦全波整流脉冲。



解(1).

$f_1(t)=[(t-1)^2+2(t-1)]e^{-2(t-1)}\cdot e^{-2}u(t-1)$

令 $f_0(t)=[t^2+2t]e^{-2t}\cdot e^{-2}u(t)$

$L(f_0(t))=2e^{-2}\left(\frac{1}{(s+2)^3}+\frac{1}{(s+2)^2}\right)$

$\therefore L(f_1(t))=2e^{-2}\left(\frac{1}{(s+2)^3}+\frac{1}{(s+2)^2}\right)\cdot e^{-s}$

$=2e^{-2-s}\left[\frac{1}{(s+2)^3}+\frac{1}{(s+2)^2}\right]$

(2) 令 $f_0(t)=\sin wt\,[u(t)-u(t-\frac{T}{2})]$　$(wT=2\pi)$

$f_0(t)=\sin wt\,u(t)-\sin(wt)u(t-\frac{T}{2})$

$=\sin wt\,u(t)+\sin(w(t-\frac{T}{2}))u(t-\frac{T}{2})$

$L(f_0(t))=\frac{w}{s^2+w^2}+\frac{w}{s^2+w^2}\cdot e^{-s\cdot\frac{T}{2}}$

$=\frac{w}{s^2+w^2}\left(1+e^{-s\cdot\frac{T}{2}}\right)$

$L(f_b(t))=L(f_0(t))\left(1+e^{-s\frac{T}{2}}+e^{-sT}+e^{-s\frac{3T}{2}}+\cdots\right)$

$=L(f_0(t))\frac{1}{1-e^{-s\frac{T}{2}}}$

$=\frac{w}{s^2+w^2}\cdot\frac{1+e^{-s\frac{T}{2}}}{1-e^{-s\frac{T}{2}}}=\frac{\frac{2\pi}{T}}{s^2+\frac{4\pi^2}{T^2}}\cdot\frac{1+e^{-s\frac{T}{2}}}{1-e^{-s\frac{T}{2}}}$

4. (10分)已知 $f_1(t)=u(t+1)-u(t-1), f_2(t)=e^{-2t}u(t)$，求卷积 $f_1(t)*f_2(t)$

解: $f_1(t)*f_2(t)=[\delta(t+1)-\delta(t-1)]*\int_{-\infty}^{t}e^{-2\tau}u(\tau)d\tau$

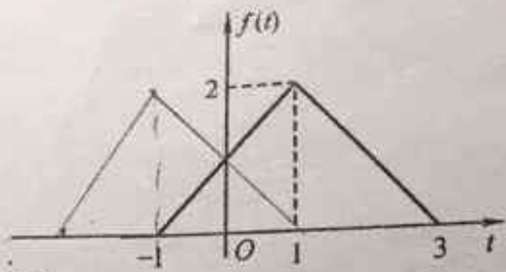
$=[\delta(t+1)-\delta(t-1)]*\int_0^t e^{-2\tau}d\tau\cdot u(t)$

$=[\delta(t+1)-\delta(t-1)]*(-\frac{1}{2})e^{-2\tau}\Big|_0^t\cdot u(t)$

$=[\delta(t+1)-\delta(t-1)]*\frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t)$

$=\frac{1}{2}(1-e^{-2(t+1)})u(t+1)-\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-1)})u(t-1)$

5.（16分）下图所示信号 $f(t)$ 的有傅立叶变换 $F[f(t)] = F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，可利用傅立叶变换的性质，求：



16

(1) $\varphi(\omega)$

(2) $F(0)$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$

(4) $F^{-1}\{\mathrm{Re}[F(\omega)]\}$ 的波形

解: $F(\omega) = \frac{2\cdot 4}{2} Sa^2\left(\frac{\omega \cdot 4}{4}\right)e^{-j\omega}$

$= 4Sa^2(\omega)e^{-j\omega}$

$\therefore \varphi(\omega) = -\omega$

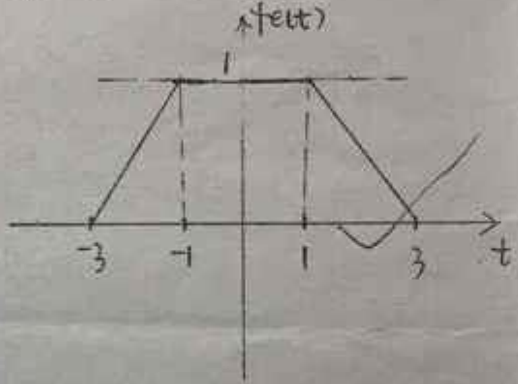
$F(0) = 4$

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

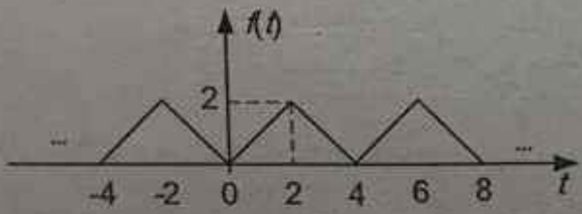
$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega = 2\pi f(0) = 2\pi$

$F^{-1}\{\mathrm{Re}[F(\omega)]\} = f_e(t) = \frac{1}{2}(f(t)+f(-t))$.



6.（16分）下图所示 $f(t)$ 为周期信号，求：（1）信号的周期；（2）该信号的傅里叶级数（三角函数形式或指数形式）；（3）该信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$。



(1) 信号的周期为 $T_1 = 4$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

(2) 对 $0 \le t < 4$ 范围内的单个三角~~脉冲~~求傅里叶变换得

$F(\omega) = \frac{2\cdot 4}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\cdot 4}{4}\right)e^{-j\omega 2}$

$= 4Sa^2(\omega)e^{-j\omega 2}$

令 $\omega = n\omega_1$ 再乘以 $\times\frac{1}{T_1}$ 有 $F_n = \frac{1}{T_1}\cdot 4Sa^2(n\omega_1)e^{-jn\omega_1 2}$

~~代入 T_1 ω_1 的值有~~

$\cancel{F_n = Sa^2(n\frac{\pi}{2})e^{-jn\pi}}$

$\cancel{\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}}$

$\cancel{F_0 = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)dt = 1.}$

$\cancel{\therefore F_n = Sa^2(n\cdot\frac{\pi}{2})e^{-jn\pi}}$

$\cancel{\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\cdot\frac{\pi}{2}}}$

$\cancel{X(j\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega - n\frac{\pi}{2})}$

代入 T_1 ω_1 的值有

$$F_n = Sa^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-jn\pi} \quad (n\neq 0)$$

$$F_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt = 1$$

傅里叶级数为：$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\frac{n\pi t}{2}}$

傅里叶变换为：$X(j\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\frac{\pi}{2})$.

7. （16 分）给定系统微分方程 $r''(t)+5r'(t)+6r(t)=3e'(t)+7e(t)$

若激励信号 $e(t)=u(t)$，起始状态为：$r(0_-)=1$，$r'(0_-)=-1$。

试求单位冲激响应 $h(t)$、零输入响应 $r_{zi}(t)$、零状态响应 $r_{zs}(t)$，以及自由响应和强迫响应分量。

解：特征方程：$\alpha^2+5\alpha+6=0$.

$(\alpha+2)(\alpha+3)=0$.

$\therefore \alpha_1=-2 \quad \alpha_2=-3$.

$\therefore r_{zi}(t) = A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t}$

又 $\begin{cases} r_{zi}(0+) = r_{zi}(0-) = r(0-) = 1 \\ r'_{zi}(0+) = r'_{zi}(0-) = r'(0-) = -1. \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} A_1+A_2=1 \\ -2A_1-3A_2=-1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A_1=2 \\ A_2=-1 \end{cases}$

$\therefore r_{zi}(t) = 2e^{-2t}-e^{-3t}$

当 $t>0+$ 时，$r''(t)+5r'(t)+6r(t)=3\delta(t)+7u(t)=7$

$\therefore$ 特解为 $r_p(t)=\frac{7}{6}$

$\therefore r_{zs}(t) = A_3e^{-2t}+A_4e^{-3t}+\frac{7}{6}$

又 $\begin{cases} r_{zs}(0+) = r_{zs}(0-) = 0 \\ r'_{zs}(0+) = r'_{zs}(0-)+3 = 3 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} A_3+A_4+\frac{7}{6}=0. \\ -2A_3-3A_4 \cancel{+3} = 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A_3 = \cancel{-\frac{3}{2}}\ -\frac{1}{2} \\ A_4 = \cancel{\frac{8}{3}}\ -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\therefore$ ~~$r_{zs}(t) = (-\frac{7}{2})e^{-2t}+\frac{7}{3}e^{-3t}+\frac{7}{6}$~~ $r_{zs}(t) = (-\frac{1}{2})e^{-2t}+(-\frac{2}{3})e^{-3t}+\frac{7}{6}$

$\therefore$ ~~$r(t) = r_{zi}(t)+r_{zs}(t) = (-\frac{3}{2})e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{-3t}+\frac{7}{6}$~~ $r(t) = r_{zi}(t)+r_{zs}(t) = \frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}+\frac{7}{6}$

~~$r_h(t) = (-\frac{3}{2})e^{-2t}+\frac{4}{3}e^{-3t}$ 自由响应分量~~

~~$r_p(t) = \frac{7}{6}$ 强迫响应分量~~

自由响应分量：$\frac{3}{2}e^{-2t}-\frac{5}{3}e^{-3t}$

强迫响应分量：$\frac{7}{6}$

令 $e(t)=\delta(t)$ 有

$r''(t)+5r'(t)+6r(t) = 3\delta'(t)+7\delta(t)$.

$h(t) = A_5e^{-2t}+A_6e^{-3t}$

$\begin{cases} h(0+) = h(0-)+3 = 3 \\ h'(0+) = h'(0-)-8 = -8 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} A_5+A_6=3 \\ -2A_5-3A_6=-8 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A_5=1 \\ A_6=2 \end{cases}$

$\therefore h(t) = e^{-2t}+2e^{-3t}$