2015－2016 第一学期"信号与系统"期中试卷

1、填空和简答（26分）

(1)（2分）计算 $(2\cos t-3t)\delta(-2t+\frac{\pi}{3})+\int_0^{\infty}(2\sin t-2t)\delta(-2t+\frac{\pi}{3})dt=$ ______

原式 $=(2\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})\delta(2t-\frac{\pi}{3})+\int_0^{\infty}(2\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})\delta(2t-\frac{\pi}{3})dt$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})\delta(t-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(1-\frac{\pi}{3})\delta(t-\frac{\pi}{6})dt$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4})\delta(t-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$

(2).（2分）. 已知 $f(t)=2[\sin(10t)]^2+5\sin[16(t-1)]$，$f(t)$ 周期 $T=$ ______

定理：若 $f_1(t)$ 周期为 a，$f_2(t)$ 周期为 b，若 $\frac{a}{b}$ 为有理数，

则 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 和差积商也为周期函数。周期为

a，b 最小公倍数。

$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$，$T_1=\frac{\pi}{10}$，$T_2=\frac{\pi}{8}$，$\therefore T=\frac{\pi}{2}$

(3)（4分） $\cos(5t)*\delta(t+1)=\underline{\cos(5(t+1))}$，$[t\,u(t)]*u(t-2)=$ ______

$[t\,u(t)]*u(t-2)=[t\,u(t)]*u(t)*\delta(t-2)$

$=\int_{-\infty}^{t}\tau u(\tau)d\tau*\delta(t-2)$

$=\int_0^t\tau d\tau*\delta(t-2)$

$=\frac{1}{2}t^2u(t)*\delta(t-2)$

$=\frac{1}{2}(t-2)^2u(t-2)$

(4)（2分）已知信号 $f(t)$ 的单边拉氏变换 $F(s)=\frac{2s^2-s+1}{s^2+s+1}$，则 $f(0_+)=$ ______

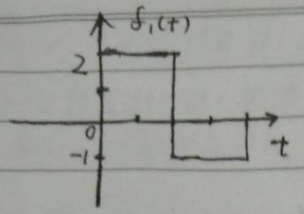
$F(s)=\frac{2s^2-s+1}{s^2+s+1}=\frac{2s^2+2s+2-3s-1}{s^2+s+1}=\frac{-3s-1}{s^2+s+1}+2$

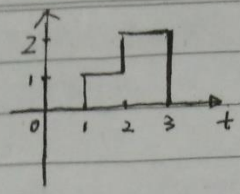
常数2表时 $f(t)$ 中有 $2\delta(t)$ 项，不影响 $f(0_+)$，故省去

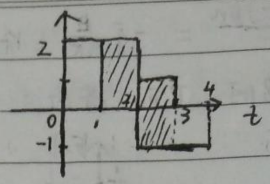
$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{-3s^2-s}{s^2+s+1}=-3$

(5)（4分）. 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 波形图如下，设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则

$y(4)=$ ______ .







$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\times f_2(t-\tau)\,d\tau$

$y(4)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\times f_2(4-\tau)\,d\tau$，如图

$y(4)=\int_1^2 2\times 2\,d\tau+\int_2^3 1\times(-1)\,d\tau=4-1=3$

(6) (3分) 已知 $r(t)=2e(t-1)\cdot\cos(t+1)$，

请判断该系统：是线性的（√）、时不变的（×）、因果的（√）。

令 $r_1(t)=2e_1(t-1)\cdot\cos(t+1)$

$r_2(t)=2e_2(t-1)\cdot\cos(t+1)$

$c_1r_1(t)+c_2r_2(t)=2(c_1e_1(t-1)+c_2e_2(t-1))\cos(t+1)$ 满足线性

$r(t-t_0)=2e(t-1-t_0)\cos(t+1-t_0)\neq 2e(t-t_0-1)\cdot\cos(t+1)$

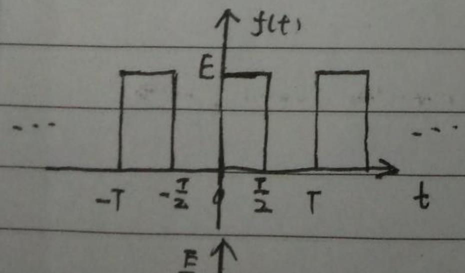
故时变

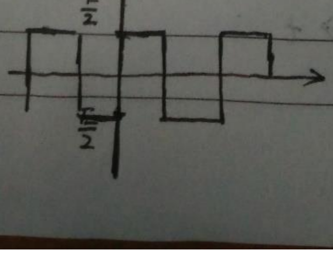
$r(1)$ 由 $e(0)$ 决定，故因果

(7) (9分). 如下图所示的周期信号f(t)，请标注其三角函数形式的傅里叶级数中可能出现的分量形式：

直流（$\frac{E}{2}$）、余弦（0）、正弦（$\frac{2E[1-(-1)^n]}{n\pi}$）、奇次谐波（$\frac{4E}{n\pi}$）、偶次谐波（0）.

并大致画出 $E=1$，$T=8$ 时指数形式傅里叶级数的幅度频谱。





解：

直流 $a_0=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}E\,dt=\frac{E}{2}$

减去直流之后，f(t)变成奇函数，且是奇谐函数

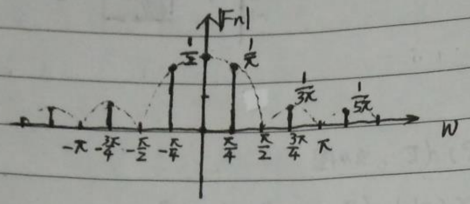
故 余弦 $a_n=0$

正弦 $b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}E\sin\frac{2n\pi}{T}t\,dt$

$=\frac{2E}{n\pi}[1-(-1)^n]$

$F_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = -j\frac{E}{n\pi}[1-(-1)^n]$

$E=1$，$T=8$时，幅度谱为：



4、(10分) 已知LTI系统单位冲击响应 $h(t)=u(t)-u(t-2)$，激励信号 $e(t)=e^{-2t}u(t)$，求零状态响应 $r_{zs}(t)$。

$r_{zs}(t) = e(t) * h(t)$

$= [e^{-2t}u(t)] * [u(t)-u(t-2)]$

$= [e^{-2t}u(t)] * u(t) - [e^{-2t}u(t)] * u(t-2)$

$= \int_0^t e^{-2\tau}d\tau - \int_0^t e^{-2\tau}d\tau * \delta(t-2)$

$= \frac{1}{2}(e^{-2t}-1)u(t-2) - \frac{1}{2}(e^{-2t}-1)u(t)$

5.(10分). 已知 $F(w)=\frac{1}{w^2}$，求傅立叶逆变换 $f(t)$，并画出其波形。

解：∵ $\mathcal{F}[Sgn(t)] = \frac{2}{jw}$

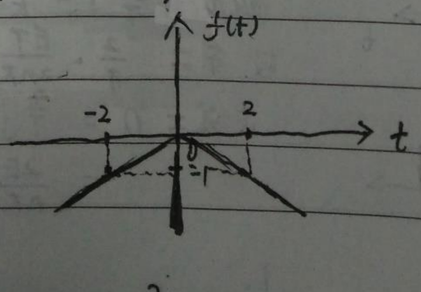
$\mathcal{F}[-jt\,Sgn(t)] = -\frac{2}{jw^2}$

∴ $\mathcal{F}[-\frac{1}{2}t\,Sgn(t)] = \frac{1}{w^2}$

∴ $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{w^2}] = -\frac{1}{2}t\,Sgn(t)$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & t<0 \\ 0, & t=0 \\ -\frac{1}{2}t, & t>0 \end{cases}$$

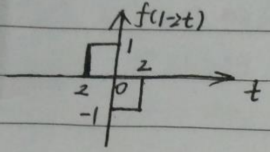
图像如下：



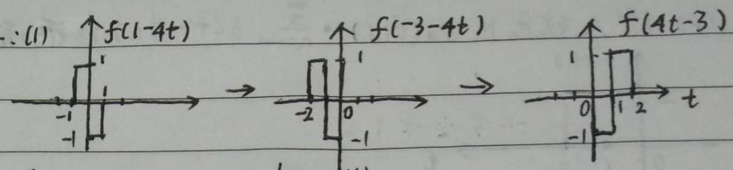
2、(12分)．已知信号 $f(1-2t)$ 的波形如下图。(1) 画出信号 $f(4t-3)$ 的波形。

(2) 若信号 $f(1-2t)$ 的傅立叶变换为 $F(w)$，求信号 $f(4t-3)$ 的傅立叶变换。

（用 $F(w)$ 的形式表示）。



解：(1)



(2) $\mathcal{F}[f(1-4t)] = \frac{1}{2}F(\frac{w}{2})$

$\mathcal{F}[f(-3-4t)] = \frac{1}{2}F(\frac{w}{2})e^{jw}$

$\mathcal{F}[f(4t-3)] = \frac{1}{2}F(-\frac{w}{2})e^{-jw}$

3、(12分) 分别求下列信号的单边拉氏变换

(1) $f_1(t) = (t^2-2t)e^{-2t}u(t-2)$ (2) $f_2(t) = A\sin\pi t\,(u(t)-u(t-1))$

解： (1) $(t^2-2t)\,u(t-2)$

$= t(t-2)\,u(t-2)$

$= (t-2)^2u(t-2) + 2(t-2)\,u(t-2)$

$= f_2(t)$

$\mathcal{L}[f_2(t)] = (\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2})e^{-2s} = \frac{2(1+s)}{s^3}e^{-2s}$

$\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)e^{-2t}] = \frac{2(s+3)}{(s+2)^3}e^{-2(s+2)}$

(2) $f_2(t) = A\sin\pi t\,u(t) - A\sin\pi t\,u(t-1)$

$= A\sin\pi t\,u(t) + A\sin\pi(t-1)\,u(t-1)$

$\mathcal{L}[\sin t\,u(t)] = \frac{1}{s^2+1}$，$\mathcal{L}[\sin\pi t\,u(t)] = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(\frac{s}{\pi})^2+1} = \frac{\pi}{s^2+\pi^2}$

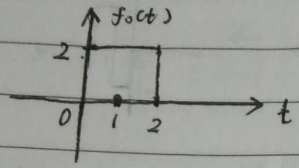
$\therefore \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{A\pi}{s^2+\pi^2} + \frac{A\pi}{s^2+\pi^2}e^{-s}$

$= (1+e^{-s})\frac{A\pi}{s^2+\pi^2}$

6、(15分) 已知：时域信号 $f_0(t)$ 的波形如下图所示。信号 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4n)$ 是周期的均匀冲击信号，且 $f(t)=f_0(t)*\delta_T(t)$。

(1) 求信号 $f_0(t)$ 的傅氏变换 $F_0(W)$ 和 $f(t)$ 的傅氏变换 $F(W)$。

(2) 请大致画出 $f_0(t+1)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{1}{4}n)$ 的频谱波形。



设 $f_1(t)=2[u(t+1)-u(t-1)]$

$\mathcal{F}[f_1(t)]=4Sa(W)$

$f_0(t)=f_1(t-1)$

$\mathcal{F}[f_0(t)]=4Sa(w)e^{-jW}$

$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[f_0 t]*\mathcal{F}[\delta_T(t)]$

$\mathcal{F}[\delta_0(t)]=1$， $F_n=\frac{1}{4}\Big|_{w=\frac{\pi n}{2}}$

$\mathcal{F}[\delta_T(t)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{2}\delta(W-\frac{n\pi}{2})$

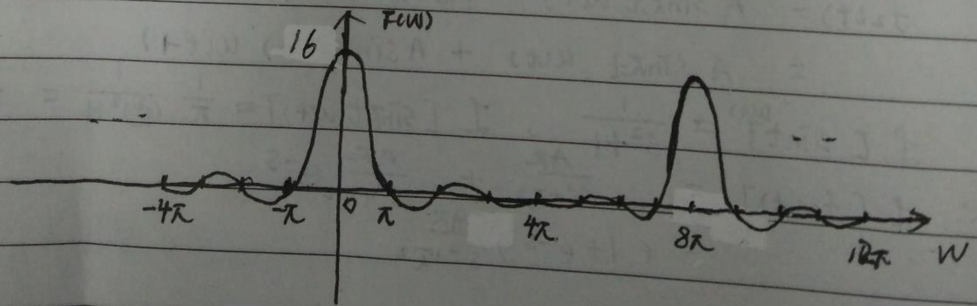
$\mathcal{F}[f(t)]=4Sa(w)*\frac{\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(W-\frac{n\pi}{2})$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi\, Sa(W-\frac{n\pi}{2})$

(2) $\mathcal{F}[f_0(t+1)]=\mathcal{F}[f_1(t)]=4Sa(W)$

$\mathcal{F}[f_1(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\frac{1}{4}n)]=\frac{1}{2\pi}4Sa(W)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}8\pi\,\delta(W-8n\pi)$

$=16\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(W-8n\pi)$



7.(15分) 给定系统微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=-e'(t)$

若激励信号为 $e(t)=u(t)$，起始状态为：$r(0_-)=2$，$r'(0_-)=1$。

试求单位冲击响应 $h(t)$、零输入响应 $r_{zi}(t)$、零状态响应 $r_{zs}(t)$，以及自由响应和强迫响应分量。

解： 特征方程： $\alpha^2+3\alpha+2=0$

特征根 $\alpha=-1,-2$

故齐次解： $r(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

(4) $h(t)=r'_{zs}(t)=e^{-t}-2e^{-2t}$ （注意冲激响应和阶跃响应都是零状态响应）

（by 陈建）

(1) $r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

$r_{zi}(0_+)=r(0_-)=2$，即 $A_1+A_2=2$

$r_{zi}'(0_+)=r'(0_-)=1$，即 $-A_1-2A_2=1$ $\Rightarrow \begin{cases} A_1=5 \\ A_2=-3 \end{cases}$

$\therefore r_{zi}(t)=(5e^{-t}-3e^{-2t})u(t)$

(2). $r_{zs}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$

设 $r''(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$

$r'(t)=a\Delta u(t)$

$r(t)=0$

则 $a=-1$, $b=0$

$\therefore r'(0_+)-r'(0_-)=-1$

$r(0_+)-r(0_-)=0$

即 $r'(0_+)=-1$，$r(0_+)=0$.

$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -A_1-2A_2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-1 \\ A_2=1 \end{cases}$

故 $r_{zs}(t)=-e^{-t}+e^{-2t}$

(3) $r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=(4e^{-t}-2e^{-2t})$，自由分量为 $(4e^{-t}-2e^{-2t})$，强迫分量为 0