数字信号处理
作业二

方盛俊 201300035

2022 年 12 月 1 日

作业提交注意事项

(1) 本次作业提交截止时间为 **2022/12/2 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；

(2) 作业提交方式：使用此 LaTex 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 ftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 www.lamda.nju.edu.cn，提交到/D:/courses/DSP2022/HW/HW2 路径下。

(3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-1-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；

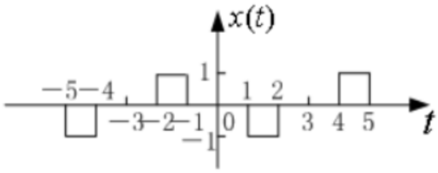
(4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [40pts] 傅里叶级数

设 $x(t)$ 为某一周期信号。

(1) 设 $x(t) = \cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})$，求 $x(t)$ 的**傅里叶级数**表达式。

(2) 设 $x(t)$ 的部分图像如下所示：



求 $x(t)$ 的**傅里叶级数**表达式。

(3) 设 $x(t)$ 的基波周期为 T_0, 傅里叶级数的系数为 $\dot{A}_k$，请用 $\dot{A}_k$ 表示下列傅里叶级数的系数：

(a) $x(t - t_0)$

(b) $x(-t)$

(c) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$，假设 $\dot{A}_0 = 0$

(d) $\frac{dx(t)}{dt}$

(e) $x(at)$，其中 $a > 0$

- (1)

  $x(t) = \cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})$ 的周期为 $\frac{2\pi}{4}$ 和 $\frac{2\pi}{6}$ 的最小公倍数 π.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{4}\sin 4t - \frac{1}{6}\cos 6t + \frac{1}{6}\sin(6t + \frac{\pi}{3})]|_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})]\cos 2nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos 4t\cos 2nt + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})\sin 6t\cos 2nt + \frac{1}{2}\cos 6t\cos 2nt]\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} 1, & n = 2 \\ \frac{1}{2}, & n = 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})]\sin 2nt\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos 4t\sin 2nt + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})\sin 6t\sin 2nt + \frac{1}{2}\cos 6t\sin 2nt]\mathrm{d}t \\
&= \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此我们也有指数函数族分解系数

$$X_n = \begin{cases} X_0 = \frac{1}{2}a_0 \\ X_{-n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{j}{2}b_n \\ X_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{j}{2}b_n \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4} + j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}), & n = -3 \\ \frac{1}{2}, & n = \pm 2 \\ \frac{1}{4} - j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}), & n = 3 \end{cases}$$

因此三角形式傅里叶级数表达式为

$$x(t) = \cos 4t + \frac{1}{2}\cos 6t + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})\sin 6t$$

因此指数形式傅里叶级数表达式为

$$x(t) = [\frac{1}{4} + j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})]e^{-j6t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j4t} + [\frac{1}{4} - j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})]e^{j6t}$$

- (2)

  $x(t)$ 的周期为 $T = 6$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$.

  $$a_0 = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} x(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1} -1\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int_{1}^{2} 1\mathrm{d}t = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

  $$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{6}\int_{-3}^{3} x(t)\cos\frac{\pi}{3}nt\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1}\cos\frac{\pi}{3}nt\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_{1}^{2} -\cos\frac{\pi}{3}nt\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\cdot(\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi}{3}nt)|_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi}{3}nt)|_{1}^{2} \\ &= \frac{1}{\pi n}[-\sin(\frac{\pi n}{3}) + \sin(\frac{2\pi n}{3})] + \frac{1}{\pi n}[\sin(\frac{\pi n}{3}) - \sin(\frac{2\pi n}{3})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{6}\int_{-3}^{3} x(t)\sin\frac{\pi}{3}nt\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\int_{-2}^{-1}\sin\frac{\pi}{3}nt\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_{1}^{2} -\sin\frac{\pi}{3}nt\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi}{3}nt)|_{-2}^{-1} + \frac{1}{3}\cdot(\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi}{3}nt)|_{1}^{2} \\ &= \frac{1}{\pi n}[-\cos(\frac{\pi n}{3}) + \cos(\frac{2\pi n}{3})] + \frac{1}{\pi n}[-\cos(\frac{\pi n}{3}) + \cos(\frac{2\pi n}{3})] \\ &= \frac{2}{\pi n}[-\cos(\frac{\pi n}{3}) + \cos(\frac{2\pi n}{3})] \end{aligned}$$

  因此傅里叶级数表达式为

  $$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}[-\cos(\frac{\pi n}{3}) + \cos(\frac{2\pi n}{3})]\sin\frac{\pi}{3}nt$$

- (3)

  (a)

  周期仍然为 T_0, 因此 ω 不变.

$$
\begin{aligned}
A_k &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t-t_0)e^{-jk\omega t}\mathrm{d}t \\
&= e^{-jk\omega t_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t-t_0)e^{-jk\omega(t-t_0)}\mathrm{d}(t-t_0) \\
&= e^{-jk\omega t_0}\dot{A}_k
\end{aligned}
$$

(b)

周期仍然为 T_0, 因此 ω 不变.

由于 $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$

则有 $x(-t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{j(-k)\omega t} = \sum\limits_{k'=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{-k'} e^{jk'\omega t}$

因此有 $A_k = \dot{A}_{-k}$

(c)

由于 $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$

则有 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 + \sum\limits_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} \dot{A}_k(-\frac{je^{jk\omega t}}{k\omega}) = \sum\limits_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty} -\frac{j\dot{A}_k}{k\omega}e^{jk\omega t}$

因此有 $A_0 = 0, A_k = -\frac{j\dot{A}_k}{k\omega}, k \neq 0$

(d)

由于 $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$

则有 $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k(jk\omega e^{jk\omega t}) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega\dot{A}_k e^{jk\omega t}$

因此有 $A_k = jk\omega\dot{A}_k$

(e)

周期变为 $T = \frac{T_0}{a}$, 因此 $\omega = a\omega_0$.

由于 $x(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t}$

则有 $x(at) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{j\omega_0 at} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{j\omega t}$

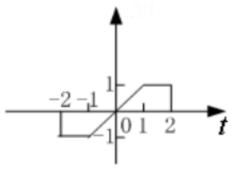
因此有 $A_k = \dot{A}_k$

2 [20pts] 傅里叶变换

求下列信号的傅里叶变换：

(1) $x(t)=e^{-3t}\left[u(t+2)-u(t-3)\right]$

(2) $x(t)=h(t)+h'(t)$，其中 $h(t)$ 的图像如下图所示。



- (1)

  由于 $x(t)=e^{-3t}[u(t+2)-u(t-3)]$

  $$\begin{aligned}X(j\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_{-2}^{3}e^{-3t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\\&=(\frac{1}{-(3+j\omega)}e^{-(3+j\omega)t})|_{-2}^{3}\\&=(\frac{1}{-(3+j\omega)}e^{-3\cdot(3+j\omega)}-\frac{1}{-(3+j\omega)}e^{2\cdot(3+j\omega)})\\&=\frac{1}{3+j\omega}e^{6+j2\omega}-\frac{1}{3+j\omega}e^{-9-j3\omega}\end{aligned}$$

- (2)

  由于 $h(t)=\begin{cases}-1, & -2\le t<-1\\ t, & -1\le t<1\\ 1, & 1\le t<2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

  因此有 $x(t)=h(t)+h'(t)=\begin{cases}-\delta(t), & t=-2\\ -1, & -2\le t<-1\\ t+1, & -1\le t<1\\ 1, & 1\le t<2\\ -\delta(t), & t=2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t \\
&= -e^{j2\omega} + \int_{-2}^{-1} -e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}(t+1)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} e^{-j\omega t}\mathrm{d}t - e^{-j2\omega} \\
&= -e^{j2\omega} + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}|_{-2}^{-1} + (\frac{(j\omega t + j\omega + 1)e^{-j\omega t}}{\omega^2})|_{-1}^{1} + \frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}|_{1}^{2} - e^{-j2\omega} \\
&= -e^{j2\omega} + \frac{j(e^{j\omega}-1)e^{j\omega}}{\omega} + \frac{(2j\omega - e^{2j\omega}+1)e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{j(1-e^{j\omega})e^{-2j\omega}}{\omega} - e^{-j2\omega} \\
&= \frac{1}{\omega^2}(-\omega^2 e^{4j\omega} - \omega^2 + j\omega e^{4j\omega} - j\omega e^{3j\omega} + j\omega e^{j\omega} + j\omega - e^{3j\omega} + e^{j\omega})e^{-2j\omega}
\end{aligned}
$$

3 [20pts] 傅里叶变换的性质

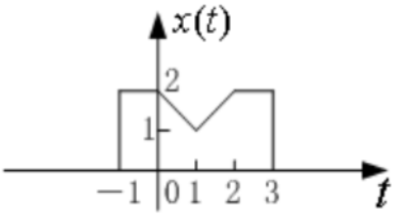
设 $X(j\Omega)$ 是下图所示信号 $x(t)$ 的频谱，试在不计算 $X(j\Omega)$ 具体表达式的情况下完成以下计算：

(1) $X(0)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)d\Omega$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\frac{2sin\Omega}{\Omega}e^{j3\Omega}d\Omega$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$



- (1)

  $$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\mathrm{d}t = 2 + 1.5 + 1.5 + 2 = 7$$

- (2)

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\mathrm{d}\Omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

- (3)

  观察可知 $\dfrac{2\sin\Omega}{\Omega}$ 为一个矩形信号 $r(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 的傅里叶变换 $A\tau \cdot \dfrac{\sin\frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$

  因此令 $\dfrac{\Omega\tau}{2} = \Omega,\ A\tau = 2$ 可得 $\tau = 2,\ A = 1$

  令新函数 $y(t) = x(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)r(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

  $$\begin{aligned} 2\pi y(3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\frac{2\sin\Omega}{\Omega}e^{j3\Omega}\mathrm{d}\Omega \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)r(3-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= 2\pi\int_{3-1}^{3+1} x(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= 2\pi\int_{3-1}^{3} 2\mathrm{d}\tau \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

- (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\Omega)|^2\mathrm{d}\Omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t = 2\pi(2\times 4 + 2\int_1^2 t^2\mathrm{d}t) = \frac{76\pi}{3}$$

4 [20pts] 帕斯瓦尔定理

(1) 计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin 2t}{t}\right)^2 dt$$

(2) 证明帕斯瓦尔定理的一般形式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)y^*(j\Omega)d\Omega$$

- (1)

  观察可知 $\frac{\sin 2t}{t}$ 为一个矩形信号 $X(j\Omega) = \begin{cases} 2\pi A, & |\Omega| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 的反傅里叶变换 $A\tau \cdot \frac{\sin\frac{t\tau}{2}}{\frac{t\tau}{2}}$

  因此令 $\frac{t\tau}{2} = 2t,\ A\tau = 2$ 可得 $\tau = 4,\ A = \frac{1}{2},\ 2\pi A = \pi$

  因此由帕斯瓦尔定理有

  $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin 2t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\pi^2 \mathrm{d}\Omega = 2\pi$

- (2)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\Omega)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}\Omega]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\Omega)[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\Omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)Y^*(j\Omega)\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}$$