2018—2019 第一学期“信号与系统”期中试卷

[redacted]

89

1．填空和简答（18 分）

18

（1）(2 分) 计算：$(2\sin t-3t)\delta(-t+\frac{\pi}{3})+\int_0^{\infty}(2\sin t+3t)\delta(-t-\frac{\pi}{3})dt=$ $(\sqrt{3}-\pi)\delta(t-\frac{\pi}{3})$

（2）(2 分) 计算：$[t\,u(t+1)]*u(t-2)=$ $(\frac{1}{2}t^2-2t+\frac{3}{2})u(t-1)$

（3）(2 分) 化简：$\sin(\frac{2}{3}\pi t+\frac{1}{3}\pi)*\delta(t+0.25)=$ $\cos(\frac{2}{3}\pi t)$

（4）(2 分) 求 $\frac{1}{t}$ 的傅立叶变换：$j\pi\,\mathrm{sgn}(-w)$ [先求出 $\frac{1}{w}$，再用对称性]

（5）(4 分)已知 $r(t)=2e(0.5t)\cdot\cos(t-1)$，请判断该系统：(判断题)

是线性的（ √ ）、时不变的（ X ）、因果的（ X ）、稳定的（ √ ）。

（6）(6 分)下图所示周期信号 $f(t)$，(1)大致画出指数形式傅立叶级数的幅度频谱。

(2)其三角函数形式的傅立叶级数中相关分量的系数：

直流 $a_0=$ 1 、$a_1=$ 0 、$b_1=$ $-\frac{4}{\pi}$ 、$a_8=$ 0 、$b_8=$ 0 。

$a_0=\frac{1}{8}\int_{-4}^{0}2dt=\frac{1}{8}\times2\times4=1$

$a_n=\frac{2}{8}\int_{-4}^{0}2\cos(n\cdot\frac{\pi}{4}t)dt=0$

$b_n=\frac{2}{8}\int_{-4}^{0}2\sin(n\cdot\frac{\pi}{4}t)dt$

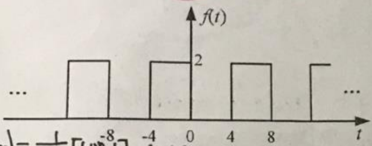
$=\frac{2}{n\pi}[(-1)^n-1]$

$b_1=\frac{2}{\pi}[-1-1]$

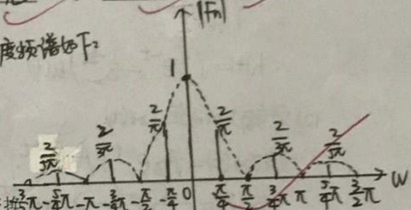
$=-\frac{4}{\pi}$

$\begin{cases}F_0=1\\F_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{jn\pi}[(-1)^n-1]\quad(n\neq0)\end{cases}$

$b_8=0$



幅度频谱如下：



2．(12 分)分别求下列信号的单边拉普拉斯变换

11

（1）$f_1(t)=(t^2-1)e^{-t}u(t-1)$　（2）$f_2(t)=2\sin\pi(t-1)[u(t-1.5)-u(t-3.5)]$

解：(1) $f_1(t)=[(t-1)^2+2(t-1)]e^{-t}u(t-1)$

$=e^{-1}[(t-1)^2e^{-(t-1)}u(t-1)+2(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)]$

$\mathcal{L}[t^2e^{-t}u(t)]=\frac{d^2}{ds^2}(\frac{1}{s+1})=\frac{2}{(s+1)^3}$

$\therefore\mathcal{L}[(t-1)^2e^{-(t-1)}u(t-1)]=\frac{2}{(s+1)^3}\cdot e^{-s}$

$\mathcal{L}[te^{-t}u(t)]=-\frac{d}{ds}(\frac{1}{s+1})=\frac{1}{(s+1)^2}$

$\therefore\mathcal{L}[2(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)]=\frac{2}{(s+1)^2}e^{-s}$

$\therefore$ 原式 $=2e^{-1-s}[\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^3}]$

(2) $f_2(t)=2\sin\pi(t-1)u(t-1.5)-2\sin\pi(t-1)u(t-3.5)$

$=2\sin[\pi(t-1.5)+\frac{\pi}{2}]u(t-1.5)-2\sin[\pi(t-3.5)+2\pi+\frac{\pi}{2}]u(t-3.5)$

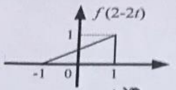
$=2\cos\pi(t-1.5)u(t-1.5)-2\cos\pi(t-3.5)u(t-3.5)$

$\because\mathcal{L}[\cos\pi t\,u(t)]=\frac{s}{s^2+\pi^2}$

$\therefore\mathcal{L}[f_2(t)]=(\frac{2s}{s^2+\pi^2})(e^{-1.5s}+e^{-3.5s})$

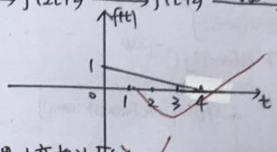
3. (15 分)已知信号 $f(2-2t)$ 的波形如下图所示，（1）画出信号 $f(t)$ 的波形。（2）计算 $f(2-2t)$ 的傅立叶变换。

10



解 (1) $f(2-2t) \xrightarrow{反褶} f(2t+2) \xrightarrow{尺度} f(t+2) \xrightarrow{时移} f(t)$

∴ f(t) 波形为



(2) 记 f(t) 的傅里叶变换为 $F(w)$

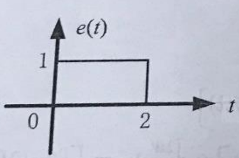
$\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$

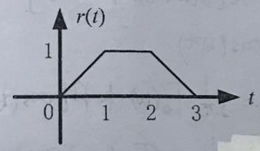
$\mathcal{F}[f(-2t)] = \frac{1}{|-2|} F(-\frac{w}{2}) = \frac{1}{2} F(-\frac{w}{2})$

$\mathcal{F}[f(2-2t)] = \mathcal{F}[f[-2(t-1)]] = \frac{1}{2} F(-\frac{w}{2}) e^{-jw}$

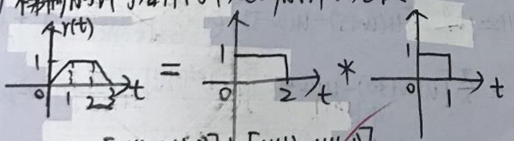
4. (15 分) 已知某线性时不变系统，激励 $e(t)$ 时零状态响应 $r(t)$ 如下图所示。求
（1）系统的单位冲激响应 $h(t)$，并画出 $h(t)$ 波形。
（2）若激励信号 $e_1(t) = t\,u(t)$，对应的零状态响应为 $r_1(t)$，求 $r_1(2)$。

14





解 (1) 梯形脉冲可看作两个矩形脉冲的卷积



即 $r(t) = [u(t)-u(t-2)] * [u(t)-u(t-1)]$

又 $r(t) = e(t) * h(t)$ 且 $e(t) = u(t)-u(t-2)$

∴ $h(t) = u(t)-u(t-1)$

(2) $r_1(t) = e_1(t) * h(t)$

$= [t\,u(t)] * [u(t)-u(t-1)]$

$= \left[\int_{-\infty}^{t} \tau u(\tau) d\tau\right] * [\delta(t)-\delta(t-1)]$

$= \int_{-\infty}^{t} \tau u(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t-1} \tau u(\tau) d\tau$

$= \int_0^t \tau d\tau\, u(t) - \int_0^{t-1} \tau d\tau\, u(t-1)$

$= \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^t u(t) - \frac{1}{2}\tau^2 \Big|_0^{t-1} u(t-1)$

$= \frac{1}{2} t^2 u(t) - \frac{1}{2}(t-1)^2 u(t-1)$

∴ $r_1(2) = \frac{1}{2} \times 4\, u(2) - \frac{1}{2} \times 1\, u(1)$

$= 2u(2) - \frac{1}{2} u(1)$

= ?

18

5. (20 分) 已知：时域信号 $f_0(t)=5Sa(5t-10)$，且 $f(t)=f_0(t)\cdot\cos(25t)$

(1) 求信号 $f_0(t)$ 的傅氏变换 $F_0(\omega)$，并画出其频谱图。

(2) 求 $f(t)$ 的傅氏变换 $F(\omega)$，并画出其频谱图。

解(1) $f_0(t)=5Sa[5(t-2)]$

记 $g(t)=5Sa(5t)$

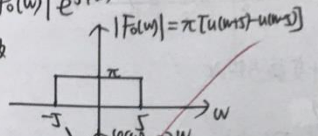
由FT的对称性可知，

$G(w)=\pi[u(w+5)-u(w-5)]$

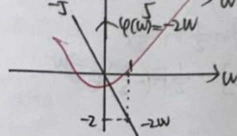
$\therefore F_0(w)=\pi[u(w+5)-u(w-5)]e^{-j2w}$

又由于 $F_0(w)=|F_0(w)|e^{j\varphi(w)}$

$\therefore$ 幅度频谱为



相位频谱为



(2) $\mathcal{F}[\cos(25t)]=\mathcal{F}[\frac{1}{2}(e^{j25t}+e^{-j25t})]$

$=\frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j25t}+e^{-j25t}]$

$=\pi[\delta(w+25)+\delta(w-25)]$

$\because f(t)=f_0(t)\cdot\cos(25t)$

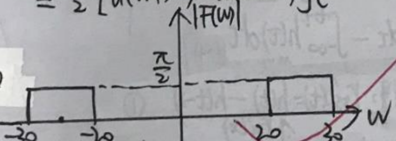
$\therefore \mathcal{F}[f(t)]=F(w)=\frac{1}{2\pi}F_0(w)*\mathcal{F}[\cos(25t)]$

$=\frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\cancel{\pi}[u(w+5)-u(w-5)]e^{-j2w}*\pi[\delta(w+25)+\delta(w-25)]$

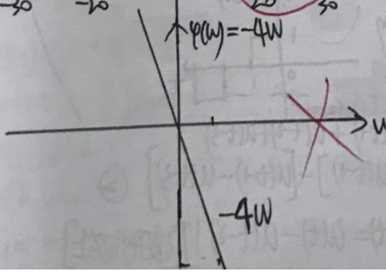
$=\frac{\pi}{2}[u(w+5)-u(w-5)]e^{-j2w}*[\delta(w+25)+\delta(w-25)]$

$=\frac{\pi}{2}[u(w+30)-u(w+20)]e^{-j2(w+25)}+\frac{\pi}{2}[u(w-20)-u(w-30)]e^{-j2(w-25)}$

$\therefore$ 幅度频谱为



相位频谱为



19

6.（20 分）给定 LTI 系统微分方程 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+3e(t)$

若激励信号 $e(t)=u(t-1)$，起始状态为： $r(0_-)=1$，$r'(0_-)=2$。

试求单位冲激响应 $h(t)$、零输入响应 $r_{zi}(t)$、零状态响应 $r_{zs}(t)$，以及自由响应和强迫响应分量。

解：(1) 冲激响应 $h(t)$

$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta'(t)+3\delta(t)$

特征方程为 $\alpha^2+3\alpha+2=0$

$\Rightarrow \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-2$

$2\times$ 设 $h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-2t})u(t)$

$3\times$ $h'(t)=(-A_1e^{-t}-2A_2e^{-2t})u(t)+(A_1+A_2)\delta(t)$

$1\times$ $h''(t)=(A_1e^{-t}+4A_2e^{-2t})u(t)+(-A_1-2A_2)\delta(t)+(A_1+A_2)\delta'(t)$

$\therefore r''(t)+3r'(t)+2r(t)=(2A_1+A_2)\delta(t)+(A_1+A_2)\delta'(t)$

$\therefore \begin{cases}2A_1+A_2=3\\ A_1+A_2=1\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}A_1=2\\ A_2=-1\end{cases}$

$\therefore h(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

(2) 零输入响应 $r_{zi}(t)$

设 $r_{zi}(t)=A_3e^{-t}+A_4e^{-2t}$.

$r_{zi}'(t)=-A_3e^{-t}-2A_4e^{-2t}$.

又 $\begin{cases}r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=A_3+A_4=1\\ r_{zi}'(0_+)=r_{zi}'(0_-)=-A_3-2A_4=2\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}A_3=4\\ A_4=-3\end{cases}$

$\therefore r_{zi}(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}$

(3) 零状态响应 $r_{zs}(t)$

$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$

$=(2e^{-t}-e^{-2t})u(t)*u(t-1)$

$=\int_{-\infty}^{t}(2e^{-\tau}-e^{-2\tau})u(\tau)d\tau*\delta(t-1)$

$=\int_{-\infty}^{t-1}(2e^{-\tau}-e^{-2\tau})u(\tau)d\tau$

$=\int_{0}^{t-1}(2e^{-\tau}-e^{-2\tau})d\tau\, u(t-1)$

$=(-2e^{-\tau}+\frac{1}{2}e^{-2\tau})\Big|_0^{t-1}u(t-1)$

$=\left[-2e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}+\frac{3}{2}\right]u(t-1)$

(4) 自由及强迫响应分量

由于 $r_{zi}(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}$

$r_{zs}(t)=\left[-2e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}+\frac{3}{2}\right]u(t-1)$

$\therefore$ 自由响应分量为 $4e^{-t}-3e^{-2t}-2e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}$

强迫响应分量为 $\frac{3}{2}$.