2021《数字信号处理》期中试卷

班级 各晨班 学号 [redacted] 姓名 [redacted]

题号	一	二	三	四	五	总分
得分	20	20	20	19	20	99

一、(共 20=1x4+2x8 分) 填空:

20

1. 判断离散时间系统 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n+1}x(m)$ 的性质:线性(✓),移不变(✓),因果(✗),稳定(✗)。该系统的单位抽样响应:$h(n)$ = $u(n+1)$

2. 序列 $x(n)=2\cos(\frac{3\pi}{4}n-\frac{\pi}{4})+3\sin(\frac{1}{3}n-\frac{\pi}{3})$ 的周期是 ∞

3. 有离散系统函数 $H(z)=\frac{2z-1}{(z+0.5)(z-0.25)}$,对应的差分方程是

$y(n)+0.25y(n-1)-0.125y(n-2)=2x(n-1)-x(n-2)$

4. 有限长序列 $x(n)=\{3, 1, 4, -1, -5, 9, 2, 6;\ n=0,1,\dots,7\}$,且 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$。计算:

$X(4)=$ -11 ,$\sum_{k=0}^{7}X(k)=$ 24

5. 模拟信号最高频率≤10KHz,用 20KHz 采样得到序列 $x(n)$,现计算 2000 点 DFT,$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$,则 k=800 对应的模拟信号频率是 8KHz

6. 一个 8 点序列 $x(n)$的 DFT 为 $X(k)=1-2\cos(\frac{\pi k}{4})+\sin(\frac{\pi k}{2})$,

则 $x(n)=\{$ $\cancel{0}, 1, -1, -\frac{j}{2}, 0, 0, 0, \frac{j}{2}, -1\ \cancel{0}$ $\}$

7. 已知 $X(z)=\frac{z^{-2}}{8-z^{-3}}$,反变换因果序列 $x(n)$ = $\frac{1}{8}\sum_{i=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n-2}\delta(n-2-3i)$

二、(20 分) 两个序列为 $x(n)=\{1, 3, 2, 1;\ n=0, 1, 2, 3\}$,

$h(n)=\{1, 2, 1, 2;\ n=0, 1, 2, 3\}$,计算:

线性卷积 $x(n)*h(n)$,5 点圆周卷积 $x(n)⑤h(n)$,8 点圆周卷积 $x(n)⑧h(n)$。

解：对位相乘

```
     1 3 2 1
     1 2 2 1
   ---------
     2 6 4 2
   1 3 2 1
 2 6 4 2
1 3 2 1
-------------
1 5 9 10 10 5 2
```

∵ $x(n)$、$h(n)$非零范围

均为 $n=0,1,2,3$

∴ $x(n)*h(n)=$

$\{1,5,9,10,10,5,2;\ n=0,1\cdots,6\}$

$x(n)$⑤$h(n)$ 可由 $x(n)*h(n)$

周期延拓混叠，$5<4+4-1=7$

故 $x(n)$⑤$h(n)=$

$\{6,7,9,10,10;\ n=0,1,2,3,4\}$

∵ $8>7$，∴ $x(n)$⑧$h(n)$中

$x(n)*h(n)$部分未混叠

可得 $x(n)$⑧$h(n)=$

$\{1,5,9,10,10,5,2,0;\ n=0,1\cdots,6,7\}$

三.（20 分）已知 $x(n)$和 $y(n)$均为 N 点序列，且 $X(k)=DFT[x(n)]$，$Y(k)=DFT[y(n)]$。

证明：$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)$

解：$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y(k)W_N^{-nk}$

$y^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y^*(k)W_N^{nk}$

$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\sum_{k=0}^{N-1}Y^*(k)W_N^{nk}$

$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$ （交换求和次序）

$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)$

四.（20分）已知因果的 LTI 系统差分方程为 $y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=\frac{1}{2}x(n-1)$

19

1. 求系统函数 $H(z)$ 和收敛区，画出 $H(z)$ 的极零图，求单位脉冲响应 $h(n)$。

2. 若输入 $x(n)=u(n-1)$，初始条件为零，求系统的输出 $y(n)$。

解：1. 等式两边Z变换

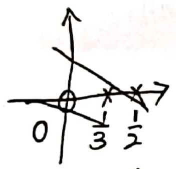
$$Y(z)-\frac{5}{6}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{6}z^{-2}Y(z)=\frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

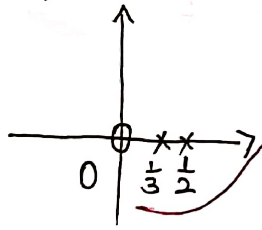
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$=\frac{3z}{6z^2-5z+1}=\frac{3}{2z-1}-\frac{3}{3z-1}$$

极点：$z=\frac{1}{2}$、$z=\frac{1}{3}$　　ROC：$|z|>\frac{1}{2}$

零点：$z=0$　$z=\infty$　　含 $z=\infty$





$x(n)=h(n)$ 时 $X(z)=1$

响应 $Y(z)=H(z)=\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

∵ 该LTI系统因果，ROC：$|z|>\frac{1}{2}$

则由逆变换及时移定理知

响应 $y(n)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}u(n-1)$

2、$x(n)=u(n-1)$　$X(z)=\frac{1}{z-1}$

响应 $Y(z)=H(z)X(z)=\frac{3z}{(3z-1)(2z-1)(z-1)}$

极点：$\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$　　零点：$0,\infty$

故 $y(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{3z^n}{(3z-1)(2z-1)(z-1)}dz$

由留数定理：~~n≥0时~~ 取 $z>1$ 的圆周围道

$n\geq 3$ 时围道外无极点

$\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}]|_{z=\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\frac{1}{6}$

$\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}]|_{z=\frac{1}{2}}=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

$\mathrm{Res}[Y(z)z^{n-1}]|_{z=1}=\frac{3}{2}$

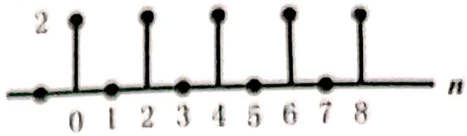
故 $y(n)=u(n-3)\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right]$

$=u(n-2)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]$

五. （20 分）已知序列 $x_1(n)$ 如下图所示 $(0 \le n \le 8)$。

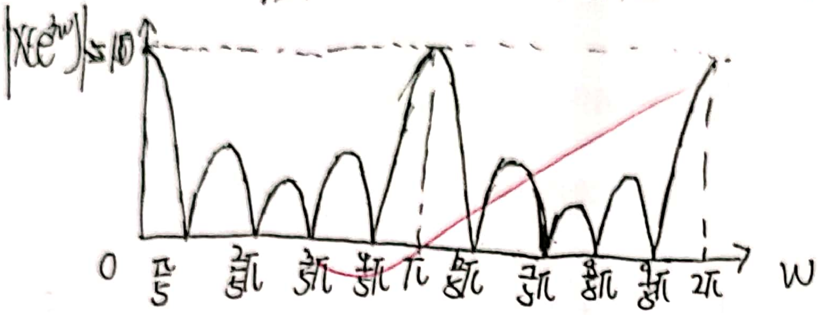
1. 求 $X_1(e^{j\omega}) = DTFT[x_1(n)]$，并在 $[0\sim2\pi)$ 上大致画出幅度频谱 $|X_1(e^{j\omega})|$。

2. 计算 10 点的 $X_1(k) = DFT[x_1(n)]$。



3. 若对 $X_1(e^{j\omega})$ 在 $[0\sim2\pi)$ 均匀采样 8 个点得到 $X_2(k)$，计算 $x_2(n) = IDFT[X_2(k)]$。

解：1. $X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}=2(1+e^{-j2\omega}+e^{-j4\omega}+e^{-j6\omega}+e^{-j8\omega})=2e^{-j4\omega}\frac{\sin5\omega}{\sin\omega}$



2. $N=10$ $X_1(k)=X_1(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{10}k}=2[1+e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+e^{-j\frac{4\pi}{5}k}+e^{-j\frac{6\pi}{5}k}+e^{-j\frac{8\pi}{5}k}]=2e^{-j\frac{4\pi}{5}k}\frac{\sin\pi k}{\sin\frac{\pi}{5}k}$

$X_1(k)=\begin{cases}10 & k=0,5\\ 0 & 其他\end{cases}$

3. $N=8$ $X_2(k)=X_1(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}=2[1+e^{-j\frac{2\pi}{4}k}+e^{-j\frac{4\pi}{4}k}+e^{-j\frac{6\pi}{4}k}+e^{-j\frac{8\pi}{4}k}]$

$=4+2e^{-j2\frac{\pi k}{4}}+2e^{-j4\frac{\pi}{4}k}+2e^{-j6\frac{\pi k}{4}}$.

$x_2(n)=IDFT[X_2(k)]=4\delta(n)+2\delta(n-2)+2\delta(n-4)+2\delta(n-6)$ 产生混叠