

数字信号处理

作业二

方盛俊 201300035

2022 年 11 月 26 日

作业提交注意事项

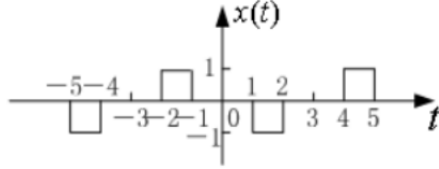
- (1) 本次作业提交截止时间为 **2022/12/2 23:59:59**，截止时间后不再接收作业，本次作业记零分；
- (2) 作业提交方式：使用此 LaTeX 模板书写解答，只需提交编译生成的 pdf 文件，将 pdf 文件以 ftp 方式上传，账号为 dsp2022，密码为 12345asd!@。请远程连接 www.lamda.nju.edu.cn，提交到/D:/courses/DSP2022/HW/HW2 路径下。
- (3) 文件命名方式：学号-姓名-作业号-v 版本号, 例 MG1900000-张三-1-v1；如果需要更改已提交的解答，请在截止时间之前提交新版本的解答，并将版本号加一；
- (4) 未按照要求提交作业，或 pdf 命名方式不正确，将会被扣除部分作业分数。

1 [40pts] 傅里叶级数

设 $x(t)$ 为某一周期信号。

(1) 设 $x(t) = \cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})$, 求 $x(t)$ 的傅里叶级数表达式。

(2) 设 $x(t)$ 的部分图像如下所示:



求 $x(t)$ 的傅里叶级数表达式。

(3) 设 $x(t)$ 的基波周期为 T_0 , 傅里叶级数的系数为 \dot{A}_k , 请用 \dot{A}_k 表示下列傅里叶级数的系数:

(a) $x(t - t_0)$

(b) $x(-t)$

(c) $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, 假设 $\dot{A}_0 = 0$

(d) $\frac{dx(t)}{dt}$

(e) $x(at)$, 其中 $a > 0$

• (1)

$x(t) = \cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})$ 的周期为 $\frac{2\pi}{4}$ 和 $\frac{2\pi}{6}$ 的最小公倍数 π .

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})] dt \\ &= \frac{1}{\pi} [\frac{1}{4} \sin 4t - \frac{1}{6} \cos 6t + \frac{1}{6} \sin(6t + \frac{\pi}{3})] \Big|_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})] \cos 2nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos 4t \cos 2nt + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \sin 6t \cos 2nt + \frac{1}{2} \cos 6t \cos 2nt] dt \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1, & n = 2 \\ \frac{1}{2}, & n = 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos 4t + \sin 6t + \cos(6t + \frac{\pi}{3})] \sin 2nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos 4t \sin 2nt + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \sin 6t \sin 2nt + \frac{1}{2} \cos 6t \sin 2nt] dt \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, & n = 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此我们也有指数函数族分解系数

$$X_n = \begin{cases} X_0 = \frac{1}{2}a_0 \\ X_{-n} = \frac{1}{2}a_n + \frac{j}{2}b_n \\ X_n = \frac{1}{2}a_n - \frac{j}{2}b_n \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4} + j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}), & n = -3 \\ \frac{1}{2}, & n = \pm 2 \\ \frac{1}{4} - j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}), & n = 3 \end{cases}$$

因此三角形式傅里叶级数表达式为

$$x(t) = \cos 4t + \frac{1}{2} \cos 6t + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \sin 6t$$

因此指数形式傅里叶级数表达式为

$$x(t) = [\frac{1}{4} + j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})]e^{-j6t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j4t} + [\frac{1}{4} - j(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4})]e^{j6t}$$

• (2)

$$x(t) \text{ 的周期为 } T = 6, \text{ 则 } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}.$$

$$a_0 = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 x(t) dt = \frac{1}{6} \int_{-2}^{-1} -1 dt + \frac{1}{6} \int_1^2 1 dt = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{6} \int_{-3}^3 x(t) \cos \frac{\pi}{3} n t dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{-2}^{-1} \cos \frac{\pi}{3} n t dt + \frac{1}{3} \int_1^2 -\cos \frac{\pi}{3} n t dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi}{3} n t \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi}{3} n t \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{\pi n} \left[-\sin \left(\frac{\pi n}{3} \right) + \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] + \frac{1}{\pi n} \left[\sin \left(\frac{\pi n}{3} \right) - \sin \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{6} \int_{-3}^3 x(t) \sin \frac{\pi}{3} n t dt \\ &= \frac{1}{3} \int_{-2}^{-1} \sin \frac{\pi}{3} n t dt + \frac{1}{3} \int_1^2 -\sin \frac{\pi}{3} n t dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi}{3} n t \right) \Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi}{3} n t \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{\pi n} \left[-\cos \left(\frac{\pi n}{3} \right) + \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] + \frac{1}{\pi n} \left[-\cos \left(\frac{\pi n}{3} \right) + \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[-\cos \left(\frac{\pi n}{3} \right) + \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

因此傅里叶级数表达式为

$$x(t) = \frac{2}{\pi n} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\cos \left(\frac{\pi n}{3} \right) + \cos \left(\frac{2\pi n}{3} \right) \right] \sin \frac{\pi}{3} n t$$

• (3)

(a)

周期仍然为 T_0 , 因此 ω 不变.

$$\begin{aligned}
A_k &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t-t_0)e^{-jk\omega t} dt \\
&= e^{-jk\omega t_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t-t_0)e^{-jk\omega(t-t_0)} d(t-t_0) \\
&= e^{-jk\omega t_0} \dot{A}_k
\end{aligned}$$

(b)

周期仍然为 T_0 , 因此 ω 不变.

$$\text{由于 } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$$

$$\text{则有 } x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{j(-k)\omega t} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{-k'} e^{jk'\omega t}$$

$$\text{因此有 } A_k = \dot{A}_{-k}$$

(c)

$$\text{由于 } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$$

$$\text{则有 } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = 0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \dot{A}_k \left(-\frac{j e^{jk\omega t}}{k\omega} \right) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} -\frac{j \dot{A}_k}{k\omega} e^{jk\omega t}$$

$$\text{因此有 } A_0 = 0, A_k = -\frac{j \dot{A}_k}{k\omega}, k \neq 0$$

(d)

$$\text{由于 } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$$

$$\text{则有 } \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k (jk\omega e^{jk\omega t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega \dot{A}_k e^{jk\omega t}$$

$$\text{因此有 } A_k = jk\omega \dot{A}_k$$

(e)

$$\text{周期变为 } T = \frac{T_0}{a}, \text{ 因此 } \omega = a\omega_0.$$

$$\text{由于 } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\text{则有 } x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_0 at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega t}$$

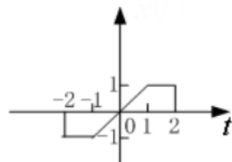
$$\text{因此有 } A_k = \dot{A}_k$$

2 [20pts] 傅里叶变换

求下列信号的傅里叶变换：

(1) $x(t) = e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)]$

(2) $x(t) = h(t) + h'(t)$ ，其中 $h(t)$ 的图像如下图所示。



• (1)

由于 $x(t) = e^{-3t} [u(t+2) - u(t-3)]$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-2}^3 e^{-3t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \left(\frac{1}{-(3+j\omega)} e^{-(3+j\omega)t} \right) \Big|_{-2}^3 \\ &= \left(\frac{1}{-(3+j\omega)} e^{-3 \cdot (3+j\omega)} - \frac{1}{-(3+j\omega)} e^{2 \cdot (3+j\omega)} \right) \\ &= \frac{1}{3+j\omega} e^{6+j2\omega} - \frac{1}{3+j\omega} e^{-9-j3\omega} \end{aligned}$$

• (2)

$$\text{由于 } h(t) = \begin{cases} -1, & -2 \leq t < -1 \\ t, & -1 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{因此有 } x(t) = h(t) + h'(t) = \begin{cases} -\delta(t), & t = -2 \\ -1, & -2 \leq t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < 2 \\ -\delta(t), & t = 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\
&= -e^{j2\omega} + \int_{-2}^{-1} -e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^1 (t+1)e^{-j\omega t} dt + \int_1^2 e^{-j\omega t} dt - e^{-j2\omega} \\
&= -e^{j2\omega} + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{j\omega t + j\omega + 1}{\omega^2} e^{-j\omega t} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_1^2 - e^{-j2\omega} \\
&= -e^{j2\omega} + \frac{j(e^{j\omega} - 1)e^{j\omega}}{\omega} + \frac{(2j\omega - e^{2j\omega} + 1)e^{-j\omega}}{\omega^2} + \frac{j(1 - e^{j\omega})e^{-2j\omega}}{\omega} - e^{-j2\omega} \\
&= \frac{1}{\omega^2} (-\omega^2 e^{4j\omega} - \omega^2 + j\omega e^{4j\omega} - j\omega e^{3j\omega} + j\omega e^{j\omega} + j\omega - e^{3j\omega} + e^{j\omega}) e^{-2j\omega}
\end{aligned}$$

3 [20pts] 傅里叶变换的性质

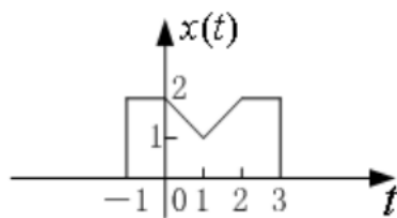
设 $X(j\Omega)$ 是下图所示信号 $x(t)$ 的频谱，试在不计算 $X(j\Omega)$ 具体表达式的情况下完成以下计算：

(1) $X(0)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) d\Omega$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) \frac{2\sin\Omega}{\Omega} e^{j3\Omega} d\Omega$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$



- (1)

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 2 + 1.5 + 1.5 + 2 = 7$$

- (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) d\Omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

- (3)

观察可知 $\frac{2\sin\Omega}{\Omega}$ 为一个矩形信号 $r(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 的傅里叶变换 $A\tau \cdot \frac{\sin \frac{\Omega\tau}{2}}{\frac{\Omega\tau}{2}}$

因此令 $\frac{\Omega\tau}{2} = \Omega$, $A\tau = 2$ 可得 $\tau = 2$, $A = 1$

令新函数 $y(t) = x(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) r(t - \tau) d\tau$

$$\begin{aligned} 2\pi y(3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) \frac{2\sin\Omega}{\Omega} e^{j3\Omega} d\Omega \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) r(3 - \tau) d\tau \\ &= 2\pi \int_{3-1}^{3+1} x(\tau) d\tau \\ &= 2\pi \int_{2}^{4} 2 d\tau \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

- (4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi(2 \times 4 + 2 \int_1^2 t^2 dt) = \frac{76\pi}{3}$$

4 [20pts] 帕斯瓦尔定理

(1) 计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin 2t}{t} \right)^2 dt$$

(2) 证明帕斯瓦尔定理的一般形式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)y^*(j\Omega)d\Omega$$

• (1)

观察可知 $\frac{\sin 2t}{t}$ 为一个矩形信号 $X(j\Omega) = \begin{cases} 2\pi A, & |\Omega| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ 的反傅里叶变换 $A\tau$.

$$\frac{\sin \frac{t\tau}{2}}{\frac{t\tau}{2}}$$

因此令 $\frac{t\tau}{2} = 2t$, $A\tau = 2$ 可得 $\tau = 4$, $A = \frac{1}{2}$, $2\pi A = \pi$

因此由帕斯瓦尔定理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin 2t}{t} \right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \pi^2 d\Omega = 2\pi$$

• (2)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\Omega)e^{-j\Omega t} d\Omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\Omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \right] d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)Y^*(j\Omega)d\Omega \end{aligned}$$