1　$A_{r-1}^{(1)}$ 型の量子群

この章ではカッツ・ムーディリー環を定義して，少し基本的なことをやった後で，$A_{r-1}^{(1)}$ 型の量子群を定義します．まず．このノートで扱う $A_{r-1}^{(1)}$ 型とは，sl の変形．

$$L = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

ここでリー積は

$$\begin{aligned}
[X \otimes t^n, Y \otimes t^m] &= [X, Y] \otimes t^{n+m} + n(trXY)\delta_{0,n+m}c \\
[c, X \otimes t^n] &= 0 \\
[d, X \otimes t^n] &= nX \otimes t^n, \\
[c, d] &= 0
\end{aligned}$$

これの生成元と基本関係による表示のために Kac-Moody リー環をまずやります．

1.1　カッツ・ムーディリー環

基本的なアイデアはカルタン行列からリー環を構成すること．

定義 1. 正方行列 $A = (a_{ij}) \quad (a_{ij} \in \mathbb{Z})$ が

$$\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j) \\ a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0 \end{cases}$$

を満たす時，(一般) カルタン行列という．

定義 2. カルタン行列 $A = (a_{ij})_{i \leq i \leq r}$ の実現 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^v) \overset{def}{\iff}$,

(1) $\mathfrak{h}$:ベクトル空間

(2) $\Pi = \{\alpha_i\}_{0 \leq i < r} \subset \mathfrak{h}$:一次独立

(3) $\Pi^v = \{h_j\}_{0 \leq j < r} \subset \mathfrak{h}^*$:一次独立

(4) $\dim \mathfrak{h} = 2r - rankA$

(5) $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$

このノートで考えるのは，$A_{r-1}^{(1)}$ 型のカルタン行列．例えば，

例 1. $r = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$r \geq 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$r \geq 3$ の時，このカルタン行列の実現を考える．

$$\mathfrak{h} = (\bigoplus \mathbb{C}h_i) \oplus \mathbb{C}d$$
$$\mathfrak{h}^* = (\bigoplus \mathbb{C}\alpha_i) \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$$
$$\Pi = \{\alpha_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$$
$$\Pi^\vee = \{h_j\}_{0 \leq j \leq r-1}$$

ただし，ここで α_i と h_i は次を満たす $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の基底．

$$\alpha_i(h_j) = \begin{cases} 2 & (i = j) \\ -1 & (i - j \equiv \pm 1 (\mathrm{mod} r)) \\ 0 & (\mathrm{else}) \end{cases}$$
$$\alpha_i(d) = \delta_{i0}, \quad \Lambda_0(h_j) = \delta_{0j}, \quad \Lambda_0(d) = 0$$

定義 3. $\tilde{L}(V)$ を次の生成元と基本関係で定義されるリー環とする．
　生成元:

$$(\bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathbb{C}e_i) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathbb{C}f_i)$$

　基本関係:

$$[h, e_i] = \alpha_i(h)e_i$$
$$[h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$$
$$[h, h'] = 0 \quad (h, h' \in \mathfrak{h})$$

　$\mathcal{R}_{max}$ をイデアル $\tilde{L}(V) \supset \mathcal{R}$ で $\mathfrak{h} \cap \mathcal{R} = 0$ を満たすもののうち最大のものとする．
　この時，$\tilde{L}(V)/\mathcal{R}_{max}$ をカルタン行列 A の定義する Kac-Moody リー環と呼び，$L(A)$ で表す．
　$\tilde{L}(V)$ や $L(A)$ の $ad(\mathfrak{h})$ に関する非ゼロ同時固有値をルートと呼び，同時固有分解をルート分解と呼ぶ．

定理 1. 簡単のため，$A^{(1)_{r-1}}$ 型 $(r \geq 3)$ を考える．$L(A)$ は次の生成元と基本関係で定義されるリー環．
　生成元:

$$(\bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathbb{C}e_i) \oplus \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{i=0}^{r-1} \mathbb{C}f_i)$$

基本関係:

$$\begin{aligned}
[h, e_i] &= \alpha_i(h)e_i \\
[h, f_i] &= -\alpha_i(h)f_i \\
[e_i, f_j] &= \delta_{ij}h_i \\
[h, h'] &= 0 \quad (h, h' \in \mathfrak{h}) \\
[e_i[e_i, e_j]] &= 0 \quad (i - j \mod 1) \\
[e_i, e_j] &= 0 \quad (\text{else}) \\
[f_i[f_i, f_j]] &= 0 \quad (i - j \mod 1) \\
[f_i, f_j] &= 0 \quad (\text{else})
\end{aligned}$$

命題 1. $L(A)$ のなかで上の関係式は全て成立.

命題 2. (1)

$$\begin{aligned}
&A : \text{カルタン行列} \\
&L(A) \\
&V_+ = \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathfrak{C} e_i \\
&V_- = \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathfrak{C} f_i \\
L(V) := &(V := V_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus V_- \text{で生成される自由リー環}) \\
&\tilde{L}(V)
\end{aligned}$$

この時，三角分解が成立.

$$\tilde{L}(V) = L(V_+) \oplus \mathfrak{h} \oplus L(V_-)$$

各直和成分はルート分解を持ち，各ルートは，$L(V_+)$ 上では $(\oplus Z_{\geq 0}\alpha_i) \setminus \{0\}$ の元. $\mathfrak{h}$ 上では 0. $L(V_-)$ 上では $(\oplus Z_{\leq 0}\alpha_i) \setminus \{0\}$ の元.

(2) $\mathcal{R}_{max}$ は存在して一意.

(3) $\mathcal{R}_\pm := \mathcal{R}_{max} \cap V_\pm$ とすると,

$$g(A) = (g(V_+)/R_+) \oplus h \oplus (g(V_-)/R_-)$$

(4) $L(A)$ のルート分解を考えると，同時固有値が 0 になるのは $\langle$ の元に限る．また

$$\begin{aligned}
\Delta &:= \text{ルート系} \\
\Delta_+ &:= \Delta \cap (\oplus Z_{\geq 0}\alpha_i) \\
\Delta_- &:= \Delta \cap (\oplus Z_{\leq 0}\alpha_i)
\end{aligned}$$

とすると,

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$$

命題 3. $\exists(L \supset \mathfrak{h}, \{e_i, f_i\}, \Pi = \{\alpha_i\} \subset \mathfrak{h}^*, \Pi^v = \{h_i\} \subset \mathfrak{h})$ s.t.,

(1) $L = \langle e_0, f_0, \ldots, e_{r-1}, f_{r-1}, \mathfrak{h} \rangle$

(2)

$$\begin{aligned}[e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \\ [h, e_i] &= \alpha_i(h) e_i, \\ [h, f_i] &= -\alpha_i(h) f_i\end{aligned}$$

(3) $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^v)$ はカルタン行列 A の実現.

(4) L の中で $\mathcal{R} \cap \mathfrak{h} = 0$ となるイデアルは $\mathcal{R} = 0$

この時，L はカルタン行列 A から定まる Kac-Moddy リー環 $L(A)$ と同型.

2 $A^{(1)}_{r-1}$ 型の量子群

次の生成元と基本関係で定義される $\mathbb{Q}(v)$ 上の単位的結合環を $A^{(1)}_{r-1}$ $(r \geq 3)$ 型の量子群という

生成元:

$$t_i^{\pm 1}, v^{\pm 1}, f_i, e_i$$

基本関係:

$$\begin{gathered}t_i e_j t_i^{-1} = v^{\alpha_j(h_i)} e_j, \quad t_i f_j t_i^{-1} = v^{-\alpha_j(h_i)} f_j \\ v^d e_j v^{d-1} = v^{\delta_{0j}} e_j, \quad v_d f_j v_d^{-1} = v^{-\delta_{0j}} f_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{v - v^{-1}} \\ \left[v^d, t_i\right] = 0, \quad [t_i, t_j] = 0, \\ v_d v_d^{-1} = v_d^{-1} v_d = 1, \quad t_i t_i^{-1} = t_i^{-1} t_i = 1 \\ e_i^2 e_j - \left(v + v^{-1}\right) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0, (i - j = \pm 1) \\ e_i e_j = e_j e_i (\text{else}) \\ f_i^2 f_j - (v + v^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, (i - j = \pm 1) \\ f_i f_j = f_j f_i (\text{else})\end{gathered}$$

$r = 2$ の時は，セールの関係式が

$$\begin{gathered}e_i^3 e_j - \left(v^2 + 1 + v^{-2}\right) e_i^2 e_j e_i + \left(v^2 + 1 + v^{-2}\right) e_i e_j e_i^2 - e_i e_i^3 = 0 (i \neq j) \\ f_i^3 f_j - \left(v^2 + 1 + v^{-2}\right) f_i^2 f_j f_i + \left(v^2 + 1 + v^{-2}\right) f_i f_j f_i^2 - f_j f_i^3 = 0 (i \neq j)\end{gathered}$$