1 Serreによる包絡環の表示

この章では，生成元と関係式から定義されるリー環を定義して，$U(\mathrm{sl}_n)$ の包絡間の表示を求めます．また後半では，A_{r-1} 型量子群を定義します．

まずは基本的なことの復習から．

定義 1. $L := \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$.

$$H := \{\sum_{i=1}^{n} x_i E_{ii} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

は部分リー環．これをカルタン部分環という．また，L は $ad(H)$ に関する同時固有分解:

$$L = H \oplus (\bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} E_{ij})$$

を持つ ($[ad(H), ad(H)] = ad([H, H]) = 0$ なので)．これをルート分解という．同時固有値は，H 上では 0, E_ij 上では $x_i - x_j$. $x_i - x_j$ をルートと呼び，$\Delta = \{x_i - x_j\}$ を A_{r-1} 型ルート系と呼ぶ．また，$\alpha_i = x_i - x_{i+1}$ を単純ルートと呼ぶ．

sl_n に対して次の定理を示すことが前半の目標です．

定理 1. $L = \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$ の時，$U(L)$ は次の生成元と基本関係で定義される $\mathbb{C}$ 上の環 U と同型．

生成元:

$$e_i, f_i, h_i \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

基本関係:

$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} h_i \tag{1}$$
$$h_i h_j = h_j h_i \tag{2}$$
$$h_i e_j - e_j h_i = \begin{cases} 2e_i & (i = j) \\ -e_j & (i - j = \pm 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} \tag{3}$$
$$h_i f_j - f_j h_i = \begin{cases} -2f_i & (i = j) \\ f_j & (i - j = \pm 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} \tag{4}$$
$$e_i^2 e_j - 2e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0 \quad (i - j = \pm 1) \tag{5}$$
$$e_i e_j = e_j e_i \quad (\text{else}) \tag{6}$$
$$f_i^2 f_j - 2f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0 \quad (i - j = \pm 1) \tag{7}$$
$$f_i f_j = f_j f_i \quad (\text{else}) \tag{8}$$

1.1 生成元と基本関係で定義されるリー環

生成元と基本関係で定義される結合代数の話のリー環バージョンを話します．これはカッツ・ムーディーリー環との関連で導入されました．

定義 2. 部分リー環 $T(V) \supset L$ が V で生成される時，これをを V で生成される自由リー環と呼び，$L(V)$ とかく．V の基底を $(X_i)_{i\in I}$ とした時には，$L(X \mid i \in I)$ などと書くこともある．

命題 1. 自由リー環 $L(X_i \mid i \in I)$ は普遍写像性質を満たす．

$$\begin{tikzcd} L(X_i \mid i \in I) \arrow[rr, "\exists 1 f"] & & L \\ V \arrow[u] \arrow[urr, "\phi"'] & & \end{tikzcd}$$

Proof. f は存在すれば一意的．実際，hom $f, g : L(X_i \mid i \in I) \to L$ が上の可換図式を満たすとすると，

$$f(X_i) = \phi(X_i) = g(X_i)$$

で生成元上の値が一致するので，$f = g$.

次に存在を示そう．$\hat{f} : T(V) \to U(L)$ を自然な準同型で定める．ϵ は包含写像．

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[rr, "\hat{f}"] & & U(L) \\ L(X_i \mid i \in I) \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[rr, "\hat{f}|_{L(X_i \mid i \in I)}"'] & & L \arrow[u, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

すると

$$\hat{f}(L(X_i \mid i \in I)) \subset \hat{L} := \langle \hat{f}(X_i) \mid i \in I \rangle \subset U(L).$$

特に，

$$\hat{f}(L(X_i \mid i \in I)) \subset L$$

よって，$\hat{f}$ を制限すれば良い． $\square$

特に，リー環 L の元の族 $\{a_i\}_{i\in I}$ を取ると，

$$f(X_i) = a_i$$

となるような f がただ一つ存在する．

リー環 L とその元の族 $\{a_i\}_{i\in I}$ を取る．$F \in L(X_i \mid i \in I)$ に対し，

$$F|_{X_i = a_i} := f(F) \in L$$

とする．$L(X_i \mid i \in I) \supset \{F_j\}_{j\in J}$ で生成されるイデアル $I = \langle F_i \mid i \in I \rangle$ は，

$$\mathcal{I} := \left\{ \sum [H_1, [H_2, [\cdots [H_r, F_j]]]] \right\} \quad (H_i \in L(X_i \mid i \in I), j \in J)$$

という形をしている．この時，

$$L(X_i \mid i \in I)/\mathcal{I}$$

を $(X_i)_{i\in I}$ を生成元とし，$F_j = 0$ を基本関係とするリー環という．ここで，$\overline{X_i} = a_i$ とかけば，これは a_i を生成元とし，$F|_{X_j = a_j}$ を基本関係とするリー環ともいう．

これは次の普遍写像性質で特徴付けられる．

命題 2. L を $\{a_i\}_{i\in I}$ を生成元とし，$F|_{X_j=a_j}$ を基本関係とするリー環とする．リー環 H と，その元の族 $\{b_i\}_{i\in I}$ が

$$F|_{X_j=b_j}=0$$

を満たすとする．この時 hom $h:L\to H$ で $h(a_i)=b_i$ を満たすものがただ一つ存在する．

Proof. h は生成元で定義されているから，存在すれば一意的なのは明らか．自由リー環の普遍性により，

$$f(X_i)=b_i$$

となる hom$f:L(X_i\mid i\in I)\to H$ がある．この f に関して，

$$f(F_j)=0$$

なので，$f(\langle F_j\rangle)=0$. したがって，

$$h:L(X_i\mid i\in I)/\langle F_j\rangle\to H$$

を誘導し，実際 $h(a_i)=b_i$ になっている． □

少し話が逸れるが（前の章に入れるべきだが），生成元と基本関係式で定義される結合代数に関する同様の補題（普遍写像性質）を示しておく．

補題 1. A を a_i により生成され，$F_j|_{X_i=a_i}$ を基本関係とする結合代数とする．結合代数 B とその元の族 b_i があって，$F_j|_{X_i=b_i}$ を満たすとする．この時，結合代数の hom$h:A\to B$ であって $h(a_i)=b_i$ を満たすものがただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} T(L)/\mathcal{I} \arrow[r, "\exists 1h"] & T(L)/\mathcal{J} \\ L \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ここで, $\mathcal{I}\subset\mathcal{J}$.

Proof. h があれば,

$$h(F_j|_{X_i=a_i})=F|_{X_i=b_i}.$$

でなくてはならないから，$h:A\to B$ を $h(F_j|_{X_i=a_i})=F|_{X_i=b_i}$ で定めて，これが well-defined な結合代数の準同型であることを示す．$F|_{X_i=b_i},G|_{X_i=b_i}\in A=T(V)/(I)$ が $F|_{X_i=b_i}=G|_{X_i=b_i}$ なら $F-G\in\mathcal{I}$ なので,

$$F|_{X_i=b_i}-G|_{X_i=b_i}=(F-G)|_{X_i=b_i}=0$$

がわかる．したがって h は矛盾なく定まる．h が準同型なのは明らか． □

命題 3. L を $\{a_i\}_{i\in I}$ を生成元とし，$F|_{X_j=a_j}$ を基本関係とするリー環とする．$F_j\in L(X_i\mid i\in I)$ を包含写像で $T(V)$ の元とみなそう．このもとで，$\{\overline{a_i}\}_{i\in I}$ を生成元とし，$F|_{X_j=\overline{a_i}}$ を基本関係とする結合代数を A とする．この時,

$$U(L)\cong A$$

Proof. A は L と同じ基本関係を満たすから，$\exists f : L \to A$ で

$$f(a_i) = \overline{a_i}$$

となるリー環の hom がある．A が普遍的であることを言えば良い．すなわち，B を結合代数，$g : L \to B$ をリー環の hom とする時．

$$h \circ f = g$$

となる結合代数の hom $g : A \to B$ がただ一つ存在することを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\exists 1 h"] & & B \\ L \arrow[u, "f"] \arrow[urr, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

$h \circ f$ と g が共にリー環の hom であることはわかっているので，L の生成元の上で一致することを確認すれば良い．

$$\begin{aligned} & h \circ f = g \\ \Longleftrightarrow\ & h(f(a_i)) = g(a_i) \quad (\forall i) \\ \Longleftrightarrow\ & h(\overline{a_i}) = g(a_i) \quad (\forall i) \end{aligned}$$

g はリー環の hom なので，

$$F_j|_{X_i = g(a_i)} = 0$$

が B をリー環, $F_j \in L(X_i \mid i \in I)$ と思って成り立つ (B を結合代数，$F_j \in T(V)$ でなく)(リー環の hom としての話なので)．よって，$F_j|_{X_i = g(a_i)} = 0$ は，B を結合代数，$F_j \in T(V)$ と思っても成り立つ．よって，$h(\overline{a_i}) = g(a_i)$ を満たす結合代数の hom

$$h : A \to B$$

がただ一つ存在する． □

ここでようやく本題に戻れる．

Th1's proof. sl_n が e_i, f_i, h_i で生成され，同じ基本関係を満たすリー環であることを示せばよい．

sl_n の基底として，

$$h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \tag{9}$$

$$e_i = E_{i,i+1} \tag{10}$$

$$f_i = E_{i+1,i} \tag{11}$$

が取れる．これらが Th1 の基本関係を満たすことは，行列計算でわかる．

L を E_i, F_i, H_i を生成元とし，Th1 の基本関係を e を E などで置き変えたもの基本関係とするリー環とする．sl_n と L の間に同型写像を構成しよう．生成元と基本関係で定義された結合代数の普遍性より hom $f : L \to \mathrm{sl}_n$ で，

$$f(H_i) = h_i,\ f(E_i) = e_i,\ f(F_i) = f_i$$

となるものがただ一つある．この f が同型であることを示せば良い．生成元が対応しているので，全射は明らか．

□

1.2　A_{r-1} 型の量子群

$\alpha_j\left(h_i\right) := 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}$.

定義 3. $K = \mathbb{Q}(q)$ を一変数有理函数体とする．次の生成元と基本関係で定義される K 上の単位的結合環を $U_q(\mathrm{sl}_r)$ をと書き，A_{r-1} 型量子群と呼ぶ．

生成元:

$$t_i^{\pm 1}, e_i, f_i \quad (i = 0, \cdots r-1)$$

基本関係:

$$\begin{gathered} {}_i e_j t_i^{-1} = v^{\alpha_j(h_i)} e_j, \quad t_i f_j t_i^{-1} = v^{-\alpha_j(h_i)} f_j \\ \left[e_i, f_j\right] = \delta_{ij} \tfrac{t_i - t_i^{-1}}{v - v^{-1}} \end{gathered} \tag{12}$$

$$[t_i, t_j = 0, \quad t_i t_i^{-1} = t_i^{-1} t_i = 1 \tag{13}$$

$$\begin{gathered} e_i^2 e_j - \left(v + v^{-1}\right) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0, (i - j = \pm 1) \\ e_i e_j = e_j e_i (\mathrm{else}) \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} f_i^2 f_j - (v + v^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, (i - j = \pm 1) \\ f_i f_j = f_j f_i (\mathrm{else}) \end{gathered} \tag{15}$$

最後の 4 つを Serre の関係式という．この環の表現も L の表現を変形することで得られる (特に $q = 1$ では包絡環と一致する)．また余積を

$$\begin{gathered} \Delta\left(t_i\right) = t_i \otimes t_i, \Delta\left(e_i\right) = 1 \otimes e_i + e_i \otimes t_i^{-1} \\ \Delta\left(f_i\right) = f_i \otimes 1 + t_i \otimes f_i \end{gathered}$$

と変形することでテンソル積表現も作れる．

命題 4. $\Delta : U_q(L) \to U_q(L) \otimes U_q(L)$ は環の準同型．