量子群の表現論

1　はじめに

量子群，特に $A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群を中心にまとめます．詳しい証明は多分省きますが，方針を書いておくつもりです．なるべく理論の全体像がわかるように書きます．単なる Fact 集．セミナー用ノート．文献は，Ariki さんの Represetation over Quantum Algebras of type $A^{(1)}_{r-1}$ がメイン．

2　包絡環と PBW 定理

2.1　リー環

量子群はリー環の包絡環を変形することで得られます．ここではリー環の定義から始めて，包絡環の基本的なことを書きます．目標は PBW 定理です．

Definition 1. $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に blacket などと呼ばれる双線型写像 $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が与えられていて，これが

(1) $[x,y] = -[y,x] \quad (\forall x, y \in \mathfrak{g})$,

(2) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad (\forall x, y, z \in \mathfrak{g})$,

を満たすとき，$\mathfrak{g}$ を**リー環**という．(2) は Jacobi identity という．また (1) は $[x,x] = 0\,(\forall x \in \mathfrak{g})$ と同値. □

これは非結合的環とでも言うべきもの．重要な例は $\mathrm{End}(V)$.

Example 2. $\mathrm{End}(V)$ は

$$[X,Y] = XY - YX$$

でリー環になる．$\mathrm{End}(V)$ をこのリー積でリー環とみなすとき，$\mathrm{gl}(V)$ と書いたりする．これは一般線型リー環，general linear lie algbra などと呼ばれる． □

一般に結合環には上のリー積で，リー環の構造が入ります．
ここから少し基本的な定義が続きます．

Definition 3. 部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ が

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$$

を満たす時，$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の**部分リー環**という．特に，$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$ なら可換部分リー環という．また，

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$$

を満たす時は $\mathfrak{g}$ の**イデアル**であるという． □

Definition 4. リー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ に対し，$\mathbb{C}$ 線形写像 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ が

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$$

を満たす時，ρ をリー環の準同型という．
準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ と V の組 (ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の**表現**という． □

表現あればそこから V に $\mathfrak{g}$ の作用が定まり V は $\mathfrak{g}$-加群になります，逆に $\mathfrak{g}$-加群 V があればそこから表現を定めることができます．また $\mathrm{gl}(V)$ には Example 2 のリー積が入っているので，

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$$

です．

2.2 包絡環

次にリー環の包絡環を定義します．リー環は非結合的な環でしたが，その包絡環を考えることで結合環の話にできます．さらにこれは PBW 基底といういい基底を持ちます．以下単に環といったら $\mathbb{C}$ 上の単位的結合環を考えることにします．

Definition 5. リー環 $\mathfrak{g}$．結合環 A と準同型 $f : \mathfrak{g} \to A$ の組 (A, f) の中で次の意味で universal なものを L の**包絡環**という．

- 別の組 (B, g) がある時，結合代数の準同型 $h : A \to B$ であって，$g = h \circ f$ を満たすものが一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(L) \arrow[dr, dashed, "\exists 1 h"] & \\
& A \\
\mathfrak{g} \arrow[uu, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

リー環 $\mathfrak{g}$ の包絡環を $(\mathrm{U}(L), \iota)$ とかく. $\square$

包絡環に関して次が成立します.

Proposition 6. 包絡環は同型を除いてただ一つ存在する. $\square$

次の手順で示します.

Lemma 7.
- 包絡環は存在すればただ一つ.
- 環 U