离散数学作业15 - 代数系统引论

Problem 1

设$A=\{0，1\}$，$S=A^A$，

(1) 试列出S中的所有函数。

(2) 给出S上合成运算的运算表。

Problem 2

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

(1) 整数集合Z和普通的减法运算。

(2) 非零整数集合Z^*和普通的除法运算。

(3) 全体$n\times n$实数矩阵集合$M_n(R)$和矩阵加法及乘法运算，其中$n\geq 2$。

(4) 全体$n\times n$实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中$n\geq 2$。

(5) 正实数集合R^+和$\circ$运算，其中$\circ$运算定义为：
$$\forall a，b\in R^+，a\circ b=ab-a-b$$

(6) $n\in Z^+$，$nZ=\{nz|z\in Z\}$，nZ关于普通加法和乘法运算。

(7) $A=\{a_1，a_2，...，a_n\}$，$n\geq 2$。$\circ$运算定义如下：
$$\forall a，b\in A，a\circ b=b$$

(8) $S=\{2x-1|x\in Z^+\}$关于普通加法和乘法运算。

(9) $S=\{0，1\}$，S关于普通加法和乘法运算。

(10) $S=\{x|x=2^n，n\in Z^+\}$，S关于普通的加法和乘法运算。

Problem 3

R为实数集，定义以下6个函数f_1，f_2，...，f_6。$\forall x$，$y \in R$ 有

$f_1(<x，y>) = x + y$，　$f_2(<x，y>) = x - y$，

$f_3(<x，y>) = x \cdot y$，　$f_4(<x，y>) = max(x，y)$，

$f_5(<x，y>) = min(x，y)$，　$f_6(<x，y>) = |x - y|$

(1) 指出哪些函数是R上的二元运算。

(2) 对所有R上的二元运算说明是否为可交换、可结合、幂等的。

(3) 求所有R上二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。

Problem 4

设$S = \{1，2，...，10\}$，问下面定义的运算能否与S构成代数系统$< S，* >$?如果能构成代数系统则说明$*$运算是否满足交换律、结合律，并求$*$运算的单位元和零元。

(1) $x * y = gcd(x，y)$，$gcd(x，y)$是x与y的最大公约数。

(2) $x * y = lcm(x，y)$，$lcm(x，y)$是x与y的最小公倍数。

(3) $x * y =$大于等于x和y的最小整数。

(4) $x * y =$质数p的个数，其中$x \le p \le y$。

Problem 5

设$S = \{f | f$是$[a，b]$上的连续函数$\}$，其中$a，b \in R，a < b$，问S关于下面每个运算是否构成代数系统？如果能构成代数系统，说明该运算是否适合交换律和结合律，并求出单位元和零元。

(1) 函数加法，即$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$，$\forall x \in [a，b]$

(2) 函数减法，即$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$，$\forall x \in [a，b]$

(3) 函数乘法，即$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$，$\forall x \in [a，b]$

(4) 函数除法，即$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$，$\forall x \in [a，b]$

Problem 6

设$A=\{a，b\}$，试给出A上一个不可交换、也不可结合的二元运算。

Problem 7

下面各集合都是N的子集，它们能否构成代数系统$V=<N，+>$的子代数：

(1) $\{x|x\in N\wedge x$的某次幂可以被16整除$\}$

(2) $\{x|x\in N\wedge x$与5互素$\}$

(3) $\{x|x\in N\wedge x$是30的因子$\}$

(4) $\{x|x\in N\wedge x$是30的倍数$\}$

Problem 8

(1) 证明$f(x)=x^3+3x+3$在Q上不可约。

(2) 设u是$f(x)$的一个根。以$a+bu+cu^2$形式表示u^{-1}和$(1+u)^{-1}$。