

离散数学作业13 - 关系的闭包和等价

Problem 1

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系并由以下矩阵表示。

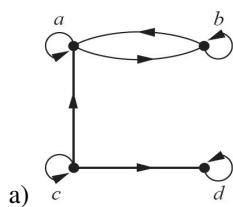
$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

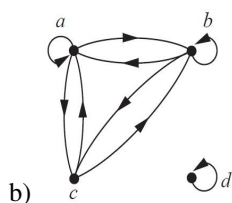
求表示下述关系的矩阵。

- a) $R_1 \cup R_2$
- b) $R_1 \cap R_2$
- c) $R_2 \circ R_1$
- d) $R_1 \circ R_1$
- e) $R_1 \oplus R_2$

Problem 2

确定下面所示的有向图表示的关系是否为自反的、反自反的、对称的、反对称的和传递的。





Problem 3

设 R 是集合 A 上的关系，解释怎样用表示 R 的有向图得到表示关系的补 \bar{R} 的有向图？

Problem 4

假设关系 R 是对称的，证明 R^* 是对称的。

Problem 5

使用沃舍尔算法找出下列关系的传递闭包。

a) $\{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$

b) $\{(a, e), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c), (e, e)\}$

Problem 6

设 R 是正整数的有序对集合上的关系， $((a, b), (c, d)) \in R$ 当且仅当 $a + d = b + c$ 。证明 R 是等价关系。

Problem 7

设 R 是所有二进位串的集合上的关系， sRt 当且仅当 s 和 t 包含相同个数的1，证明 R 是等价关系。

Problem 8

当 n 为下列各数时，同余类 $[n]_5$ （即 n 关于模5同余的等价类）是什么？

- a) 2
- b) 3
- c) 6
- d) -3

Problem 9

下面哪些子集族是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的划分？

- a) $\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}$
- b) $\{1\}, \{2, 3, 6\}, \{4\}, \{5\}$
- c) $\{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}$
- d) $\{1, 4, 5\}, \{2, 6\}$

Problem 10

假设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的等价关系， P_1 和 P_2 分别是对应于 R_1 和 R_2 的划分。证明 $R_1 \subseteq R_2$ ，当且仅当 P_1 是 P_2 的加细。

Problem 11

令 R 是有限非空集合 A 上的一个等价关系，试证明：

$$|R| \cdot |A/R| \geq |A|^2$$

（此处 A/R 是集合 A 依据 R 做划分而得到的商集。）