

离散数学作业16 - 群论引导

Problem 1

判断下列集合关于指定的运算是否构成半群，独异点和群：

- (1) a 是正实数， $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ ，运算是普通乘法。
- (2) \mathbb{Q}^+ 为正有理数，运算是普通乘法。
- (3) \mathbb{Q}^+ 为正有理数，运算是普通加法。
- (4) 一元实系数多项式的集合关于多项式的加法。
- (5) 一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法。
- (6) $U_n = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge x^n = 1\}$ ， n 为某个给定正整数， \mathbb{C} 为复数集合，运算是复数乘法。

Problem 2

$S = \{a, b, c\}$ ， $*$ 是 S 上的二元运算，且 $\forall x, y \in S, x * y = x$ 。

- (1) 证明 S 关于 $*$ 运算构成半群。
- (2) 试通过增加最少的元素使得 S 扩张成一个独异点。

Problem 3

设 $V = \langle \{a, b\}, * \rangle$ 是半群，且 $a * a = b$ ，证明：

- (1) $a * b = b * a$
- (2) $b * b = b$

Problem 4

设 $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$, 证明 G 关于矩阵乘法构成一个群。

Problem 5

设 G 为群, 证明 e 为 G 中惟一的幂等元。

Problem 6

设 G 为群, $a, b, c \in G$, 证明:

$$|abc| = |bca| = |cab|$$

Problem 7

证明偶数阶群必含2阶元。

Problem 8

设 G 为非 *Abel* 群, 证明 G 中存在非单元 a 和 b , $a \neq b$, 且 $ab = ba$ 。

Problem 9

设 $i = \sqrt{-1}$, 证明 $S = \{1, -1, i, -i\}$ 是复数上的乘法群。