

离散数学作业15 - 代数系统引论

Problem 1

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

- (1) 试列出 S 中的所有函数。
- (2) 给出 S 上合成运算的运算表。

Problem 2

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭:

- (1) 整数集合 Z 和普通的减法运算。
- (2) 非零整数集合 Z^* 和普通的除法运算。
- (3) 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(R)$ 和矩阵加法及乘法运算, 其中 $n \geq 2$ 。
- (4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算, 其中 $n \geq 2$ 。
- (5) 正实数集合 R^+ 和 \circ 运算, 其中 \circ 运算定义为:

$$\forall a, b \in R^+, a \circ b = ab - a - b$$

- (6) $n \in Z^+$, $nZ = \{nz | z \in Z\}$, nZ 关于普通加法和乘法运算。

- (7) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$ 。 \circ 运算定义如下:

$$\forall a, b \in A, a \circ b = b$$

- (8) $S = \{2x - 1 | x \in Z^+\}$ 关于普通加法和乘法运算。

- (9) $S = \{0, 1\}$, S 关于普通加法和乘法运算。

- (10) $S = \{x | x = 2^n, n \in Z^+\}$, S 关于普通的加法和乘法运算。

Problem 3

R 为实数集, 定义以下6个函数 f_1, f_2, \dots, f_6 。 $\forall x, y \in R$ 有

$$f_1(< x, y >) = x + y, \quad f_2(< x, y >) = x - y,$$

$$f_3(< x, y >) = x \cdot y, \quad f_4(< x, y >) = \max(x, y),$$

$$f_5(< x, y >) = \min(x, y), \quad f_6(< x, y >) = |x - y|$$

- (1) 指出哪些函数是 R 上的二元运算。
- (2) 对所有 R 上的二元运算说明是否为可交换、可结合、幂等的。
- (3) 求所有 R 上二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。

Problem 4

设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, * \rangle$?如果能构成代数系统则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并求 $*$ 运算的单位元和零元。

- (1) $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数。
- (2) $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数。
- (3) $x * y =$ 大于等于 x 和 y 的最小整数。
- (4) $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$ 。

Problem 5

设 $S = \{f | f \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数}\}$, 其中 $a, b \in R, a < b$, 问 S 关于下面每个运算是否构成代数系统? 如果能构成代数系统, 说明该运算是否适合交换律和结合律, 并求出单位元和零元。

- (1) 函数加法, 即 $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in [a, b]$
- (2) 函数减法, 即 $(f - g)(x) = f(x) - g(x), \forall x \in [a, b]$
- (3) 函数乘法, 即 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in [a, b]$
- (4) 函数除法, 即 $(f/g)(x) = f(x)/g(x), \forall x \in [a, b]$

Problem 6

设 $A = \{a, b\}$, 试给出 A 上一个不可交换、也不可结合的二元运算。

Problem 7

下面各集合都是 \mathbb{N} 的子集, 它们能否构成代数系统 $V = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ 的子代数:

(1) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 的某次幂可以被 } 16 \text{ 整除}\}$

(2) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 与 } 5 \text{ 互素}\}$

(3) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的因子}\}$

(4) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的倍数}\}$

Problem 8

(1) 证明 $f(x) = x^3 + 3x + 3$ 在 \mathbb{Q} 上不可约。

(2) 设 u 是 $f(x)$ 的一个根。以 $a + bu + cu^2$ 形式表示 u^{-1} 和 $(1 + u)^{-1}$ 。