离散数学作业19-代数格

习题1

下图给出了6个偏序集所对应的的哈斯图，判断其中哪些是格，哪些不是格，如果不是格的话，说明理由.

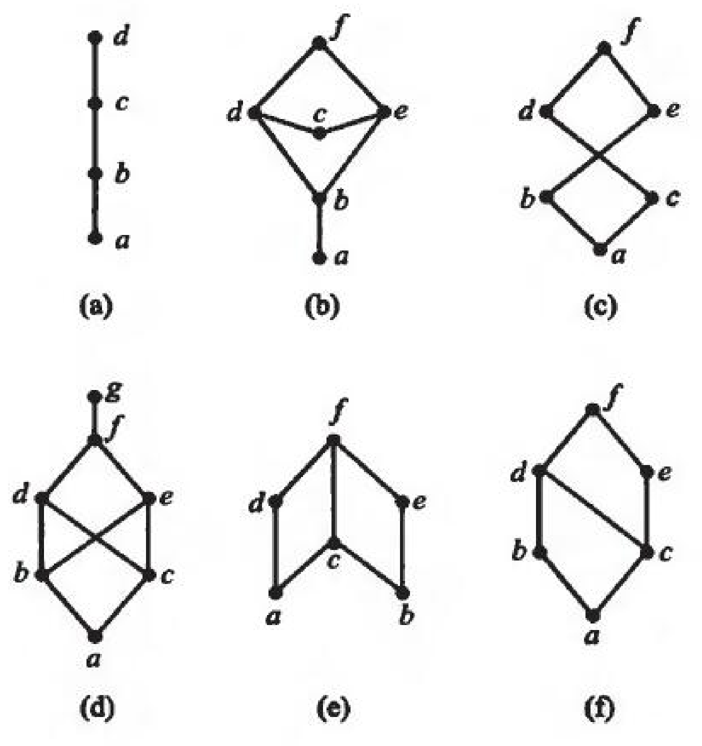

Figure 1

习题2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

a) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

b) $L=\{1,2,3,6,12\}$;

c) $L=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$;

d) $L=\{1,2,2^2,...\}$.

习题3

设L是格，求以下公式的对偶式：

a) $a\wedge(a\vee b)\preceq a$;

b) $a\vee(b\wedge c)\preceq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

c) $b\vee(c\wedge a)\preceq(b\vee c)\wedge a$.

习题4

设L是格，$a,b,c\in L$,且$a\preceq b\preceq c$，证明：$a\vee b=b\wedge c$.

习题5

针对下图所给的格L_1，求出L_1的所有子格.

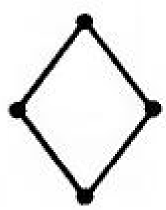

Figure 2

习题6

针对习题1中的每个格，如果格中的元素存在补元，则求出这些补元.

习题7

说明习题1中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格，并说明理由.

习题8

设$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$是有界格，证明$\forall a \in L$，有$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$.

习题9

如果S是群G的子集，则S所生成的子群$\langle S\rangle$是包含所有S的元素的G的最小子群。这意味着它是包含S元素的所有子群的交集。等价的说$\langle S\rangle$是可以用S的元素和它们的逆元中的有限多个元素的乘积表达的G的所有元素的子群。设G是一个群,$L(G)$是G的所有子群的集合。在$L(G)$上定义偏序关系$\leq$为集合包含关系$\subseteq$。对于任意的$A, B \in L(G)$,定义$A \wedge B \xlongequal{def} \langle A \cap B\rangle$，$A \vee B \xlongequal{def} \langle A \cup B\rangle$，试证明：$\langle L(G), \vee, \wedge\rangle$是一个代数格，$\langle L(G), \leq\rangle$是一个偏序格，且二者同一。