

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Teorija dinamičnih sistemov
Zaključna naloga

Dvojni Fermijev pospeševalnik

Žiga Šinigoj

Ljubljana, julij 2024

1 Uvod

Fermijev pospeševalnik je 1D fizikalni model sestavljen iz kroglice mase m in dveh sten neskončnih mas, med katerima kroglica elastično trka. Pri tem se ena od sten periodično premika. V nalogi nas zanima difuzija v odvisnosti od razmerja mas za posplošen model Fermijevega pospeševalnika, ko imamo med stenama dve kroglici z masama m_1 in m_2 . Naloge sem se lotil tako, da sem najprej študiral Fermijev pospeševalnik, nato naredil posplošitev na dve kroglici mas m_1, m_2 in nazadnje še posplošitev na N kroglic poljubnih mas.

2 Fermijev pospeševalnik

Obravnavamo kroglico mase m_1 s hitrostjo $\tilde{v}(\tilde{t}) \in \mathbb{R}$ in položajem $\tilde{x}(\tilde{t})$, ki prožno trka med stenama. Leva stena naj bo fiksna pri $\tilde{x}_l(\tilde{t}) = 0$, položaj desne stene se spreminja kot $\tilde{l}(\tilde{t}) = \langle l \rangle + \tilde{a}_0 \cos(\omega \tilde{t} + \phi_0)$, kjer je \tilde{a}_0 amplituda osciliranja stene, ω njena frekvenca in $\langle l \rangle$ povprečna razdalja med stenama. Hitrost premične stene je $\tilde{v}_s(\tilde{t}) = -\tilde{a}_0 \omega \sin(\omega \tilde{t} + \phi_0)$. Najprej lahko prepišemo enačbe v brezdimenzijsko obliko. Definiramo brezdimenzijski čas $t = \omega \tilde{t}$ ($\omega \equiv 1$) in reskaliramo razdalje ter hitrosti

$$l(t) = \tilde{l}(\tilde{t})/\langle l \rangle = 1 + \epsilon \cos(t + \phi_0) , \quad (1)$$

$$v_s(t) = -\epsilon \sin(t + \phi_0) , \epsilon = \tilde{a}_0/\langle l \rangle \quad (2)$$

$$x(t) = \tilde{x}(\tilde{t})/\langle l \rangle , \quad (3)$$

$$v(t) = \tilde{v}(\tilde{t})/(\langle l \rangle \omega) . \quad (4)$$

Kanonični spremenljivki sta v tem primeru hitrost kroglice ob trku $v(t)$ in fazni zamik stene $\phi(t) = t + \phi_0$. V diskretni sliki dobimo

$$x_n = x(t_n) , \quad (5)$$

$$v_n = v(t_n) , \quad (6)$$

$$l_n = 1 + \epsilon \cos(\phi_n) , \phi_n = t_n + \phi_0 , \quad (7)$$

$$v_{ln} = -\epsilon \sin(\phi_n) . \quad (8)$$

V primeru Fermijevega pospeševalnika je mogoče analitično zapisati preslikavo med trki z desno steno [1], [2] vendar, bom za potrebe posplošitve, obravnaval posebej tudi trk z levo steno, ki bo pozneje postala kroglica.

Pri trkih, se lahko zgodijo tri stvari:

- Kroglica trči ob levo steno in se elastično odbije $v_{n+1} = -v_n$, $x_{n+1} = 0$.
- Kroglica trči v desno steno, po trku z levo steno.
- Kroglica trči ob desno steno, po trku z desno steno.

Koristno je obravnavati trke z desno steno v območju cone trčenja $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$. V tem primeru bomo iskali ničlo primerne funkcije na območju $(0, 2\pi]$.

Če kroglica najprej trči z levo steno, bo po trku prispela v območje cone trčenja ob času $T_n = (1 - \epsilon)/v_n$. S steno bo trčila takrat, ko bosta položaja kroglice in stene enaka

$$v_n \tau = \epsilon + \epsilon \cos(t_n + T_n + \tau + \phi_0) , \quad (9)$$

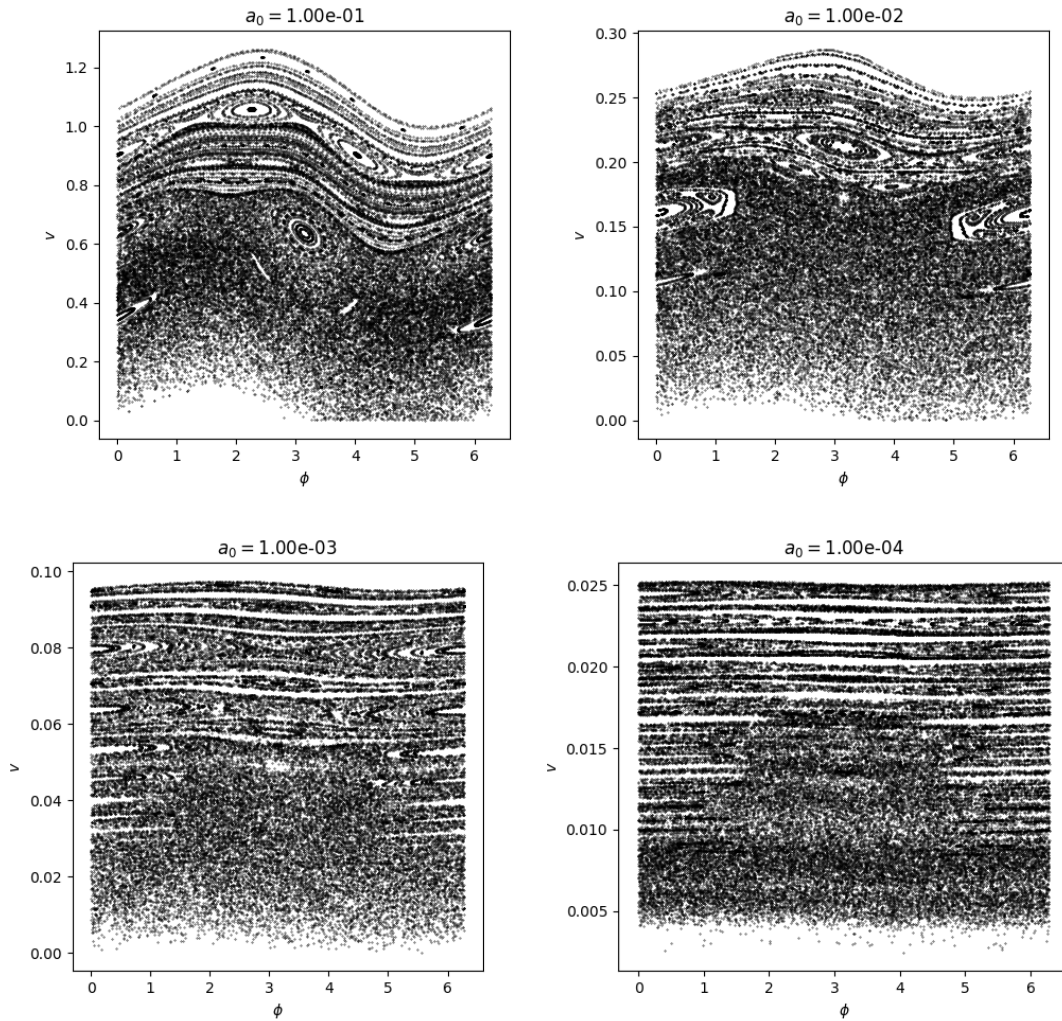
v tem primeru iščemo najmanjšo ničlo funkcije $g(\tau) = \epsilon + \epsilon \cos(t_n + T_n + \tau + \phi_0) - v_n \tau$ na intervalu $(0, 2\pi]$.

Če kroglica trči z desno steno, po trku z desno steno, potem se bo to zgodilo na razdalji

$$v_n \tau = \epsilon \cos(t_n + \tau + \phi_0) - \epsilon \cos(t_n + \phi_0) , \quad (10)$$

v tem primeru iščemo najmanjšo ničlo funkcije $f(\tau) = \epsilon \cos(t_n + \tau + \phi_0) - \epsilon \cos(t_n + \phi_0) - v_n \tau$ na intervalu $(0, 2\pi]$. Naslednji čas trka je najmanjša ničla funkcij $f(\tau)$ in $g(\tau)$. S tem dobimo čas trka $t_{n+1} = t_n + \tau$. Nova hitrost in položaj sta tako $v_{n+1} = 2v_{s(n+1)} - v_n$, $x_{n+1} = l_{n+1}$.

Pri numeričnem reševanju je prednost takega zapisa ta, da imamo vedno ničlo, saj vedno obstaja trk z levo steno in tudi trk od leve stene proti desni, tudi če nima funkcija $g(\tau)$ ničle. To pomeni, da se je dotaknila stene natanko (do določene natančnosti iskanja ničle) na robu cone trčenja. Najprej sem algoritme napisal v *Pythonu* in iskal ničle s *Scipy* metodo *root_scalar*, ki po privzetem uporablja Bisekcijsko metodo. Ta je v redkih primerih našla ničlo, kjer je ne bi smela. Za veliko boljše se je izkazala Brentova metoda. Najprej sem si pogledal nekaj faznih diagramov, ki so prikazani na sliki 1



Slika 1: Fazni diagrami Fermijevega pospeševalnika za nekaj različnih amplitud stene $\epsilon = a_0$.

Na sliki (1) lahko opazimo območje majhnih hitrosti, kjer imamo kaotično obnašanje (kaotično morje) in območje večjih hitrosti, kjer je gibanje lahko tudi periodično. Prisotni so tudi KAM otoki okrog periodičnih orbit. Ocena za mejo med kaotičnim morjem in periodičnim gibanjem je $v \approx 2\sqrt{\epsilon}$ [2]. Z večanjem amplitude stene se hitrost kroglice v orbiti bolj spreminja (bolj

ukriviljen fazni prostor periodičnega gibanja). V nalogi nas zanima difuzijska konstanta oz. difuzija kinetične energije. Izračunamo jo po enačbi

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \langle (v_n - v_0)^2 \rangle, \quad (11)$$

kjer sem vzel pri izračunu vedno samo velikost hitrosti in ne smeri, saj nas zanima difuzija kinetične energije. Hitrost v_n je hitrost delca ob n -tem trku z desno, premično steno. Bra-ket oklepaj označuje ansambelsko povprečje

$$\langle (v_n - v_0)^2 \rangle = \lim_{NP \rightarrow \infty} \frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} (v_n^i - v_0^i)^2, \quad (12)$$

kjer NP označuje število začetnih pogojev. Difuzijo lahko izračunamo tudi preko računanja diferenc $v_{n+1} - v_n$, in sicer kot

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{\tau=-(n-1)}^{(n-1)} C_{vv}(\tau) - \frac{1}{2n} \sum_{\tau=-(n-1)}^{(n-1)} |\tau| C_{vv}(\tau) \right), \quad (13)$$

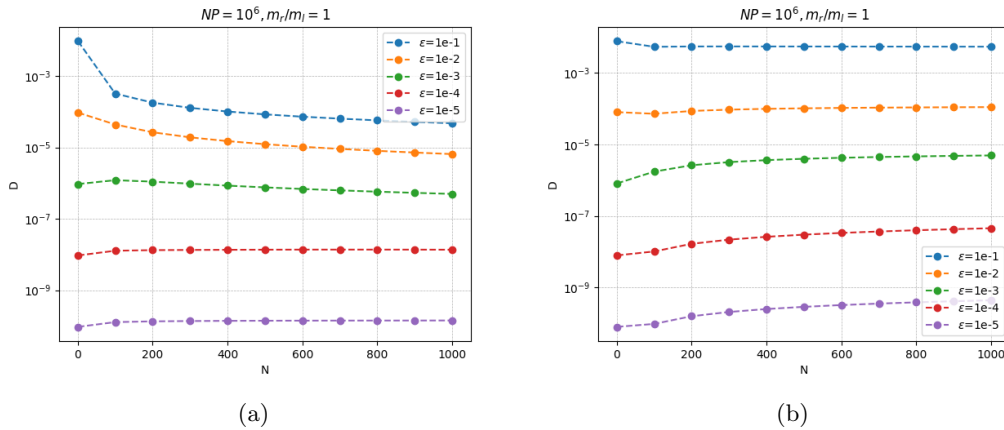
kjer je $C_{vv}(\tau) = \langle v_0 v_{n=\tau} \rangle$. Zgornji izraz lahko prepišemo v

$$D = \frac{1}{2} C_{vv}(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} C_{vv}(\tau) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{\tau=1}^{(n-1)} |\tau| C_{vv}(\tau). \quad (14)$$

V limiti lahko zanemarimo drugi člen v enačbi (14), vendar sem ga v mojih izračunih pustil.

Globalna difuzija je prisotna v kaotičnem morju, zato je potrebno začetne pogoje vzeti iz tam. Za začetne pogoje sem vzel hitrosti iz intervala $v_0 \in [10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}]$ in $\phi_0 \in [0, 2\pi)$.

Za računanje ansambelskih povprečij je *Python* prepočasen, zato sem prepisal kodo v *C++*. Za iskanje ničel sem uporabil algoritem *toms748_solve* iz knjižnice *Boost*. S tem sem lahko računal evolucijo do 10^6 začetnih pogojev v razumljivem času (\sim dan). Difuzijsko konstanto v odvisnosti od števila trkov kroglice ob desno steno prikazuje slika 2. Odvisnost difuzijske



Slika 2: Odvisnost difuzijske konstante od števila trkov posamezne kroglice N . a) Izračun preko enačbe (11). b) Izračun preko enačbe (14). NP označuje število začetnih pogojev.

konstante od N je različna za različen način računanja (slika 2), kar je presenetljivo. Napake v kodi nisem našel. Rezultati se predvsem razlikujejo za velike ϵ . Prav tako se rezultati za velike ϵ razlikujejo od rezultatov iz [2]. Rezultate iz [2] sem poskušal rekonstruirati po njihovem članku,

z enakimi velikostmi ansambllov, in nisem uspel dobiti njihovih odvisnosti.

Za majhne vrednosti N se difuzija linearno spreminja v odvisnosti od ϵ^2 , kar napoveduje tudi teorija. Začetna odvisnost (pozitivni ali negativni naklon) je predvsem odvisna od začetnih pogojev. Za velike vrednosti N pa so rezultati enaki. Graf na sliki (2) nakazuje na to, da za velike ϵ , difuzija ni sorazmerna z ϵ^2 . Če bi moral izbirati, bi izbral za pravilne rezultate izračune po enačbi 11, saj je manj možnosti za napake pri izračunu.

Kljub temu, da sem veliko časa posvetil razlikam v rezultatih pri izračunu difuzijske konstante na dva načina, tudi pri dvojnem in splošnem pospeševalniku, ne bom vključil rezultatov po enačbi (14) saj mislim, da so napačni.

3 Dvojni Fermijev pospeševalnik

Pri dvojnem Fermijevem pospeševalniku imamo še, poleg desne kroglice z maso m_r , ki trka elastično v premično steno, levo kroglico z maso m_l , ki trka elastično ob desno kroglico in ob levo nepremično steno. Možni trki ob času $t_{n+1} = \tau + t_n$ so sedaj:

- Leva kroglica trči ob nepremično steno ob času $\tau = \frac{x_{l,n}}{v_{l,n}}$

- Kroglici trčita med sabo ob času

$$\tau = \frac{x_{r,n} - x_{l,n}}{v_{l,n} - v_{r,n}} \quad (15)$$

- Desna kroglica trči ob desno steno po trku z levo kroglico:

Čas do cone trka

$$\tau = \frac{1 - \epsilon - x_{r,n}}{v_{r,n}} \quad (16)$$

Desna kroglica in desna stena trčita ob času

$$v_{r,n}\tau = \epsilon + \epsilon \cos(t_n + T_n + \tau + \phi_0) \quad (17)$$

- Desna kroglica trči v desno steno po trku z desno steno (v coni trčenja) ob času:

$$v_{r,n}\tau = \epsilon \cos(t_n + \tau + \phi_0) - (x_{r,n} - 1) \quad (18)$$

Najmanjši čas τ iz zgornjih možnosti nam določa naslednji trk. Ob vsakem trku ustrezno posodobimo hitrosti in položaje. Za trk med kroglicama velja

$$x_{l,(n+1)} = x_{r,(n+1)} = x_{l,n} + v_{l,n}\tau \quad (19)$$

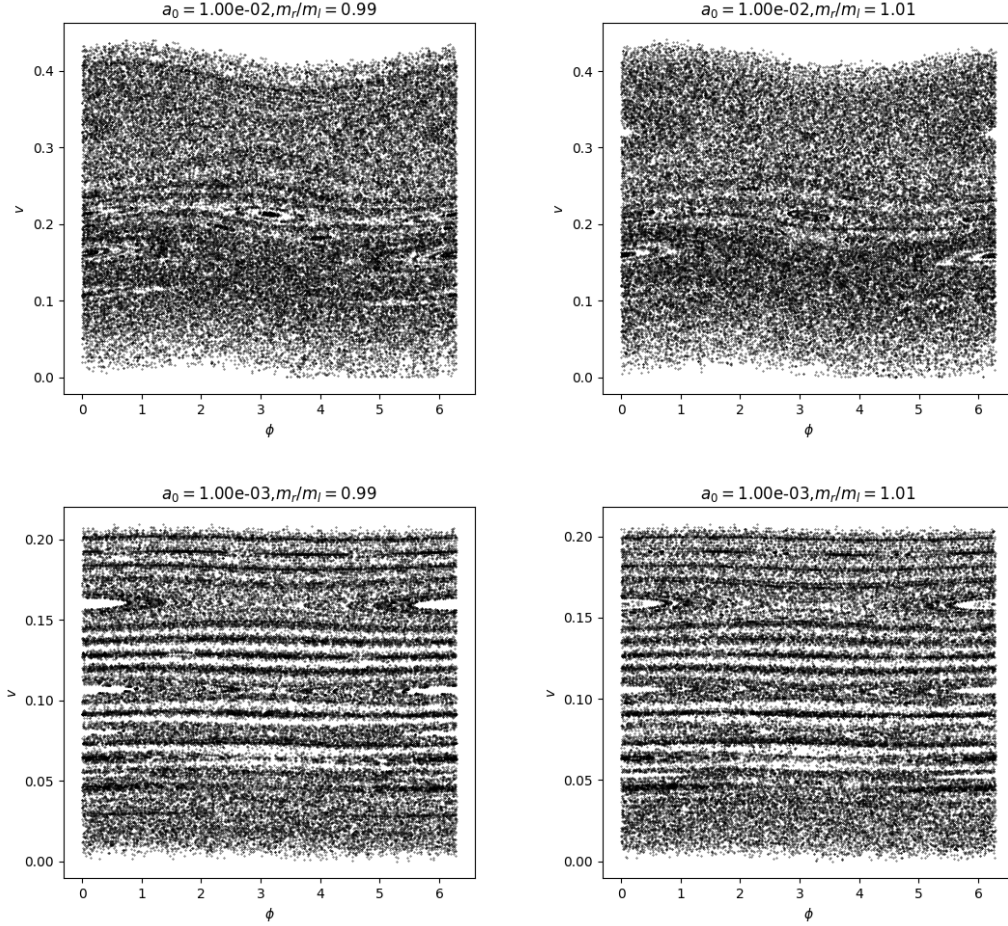
$$v_{l,(n+1)} = \frac{m_l - m_r}{m_l + m_r}v_{l,n} + \frac{2m_r}{m_l + m_r}v_{r,n} \quad (20)$$

$$v_{r,(n+1)} = \frac{m_r - m_l}{m_l + m_r}v_{r,n} + \frac{2m_l}{m_l + m_r}v_{l,n} \quad (21)$$

V praksi pa je potrebno biti pazljiv na morebitne dvojne trke. Čas trka z desno steno dobimo z iskanjem ničle nelinearne enačbe. Ničlo lahko najdemo do določene tolerance natančno. Zgornjo mejo za natančnost določa numerična natančnost spremenljivk in decimalni zapis. V praksi se skoraj nikoli ne zgodi, da bi žogici trčili sočasno (npr. vsaka v svojo steno). Kljub temu nam sočasnost trka določa natančnost iskanja ničle nelinearne enačbe. Če je na primer razlika časov trkov leve kroglice z levo steno in desne kroglice z desno steno manjša od tolerance, pri čemer je čas trka leve kroglice manjši, potem bi bila zaporedna obravnava trkov napačna, saj bi po prvi posodobitvi količin bilo nemogoče najti ničlo nelinearne enačbe. Če sta trka sočasna (do tolerance natančno), potem najprej obravnavam trk med kroglicama in potem z eno od sten.

Če kroglici trčita vsaka v svojo steno, potem ni pomemben vrstni red. Za toleranco sem vzel čas $\tau_{tol} = 10^{-7}$.

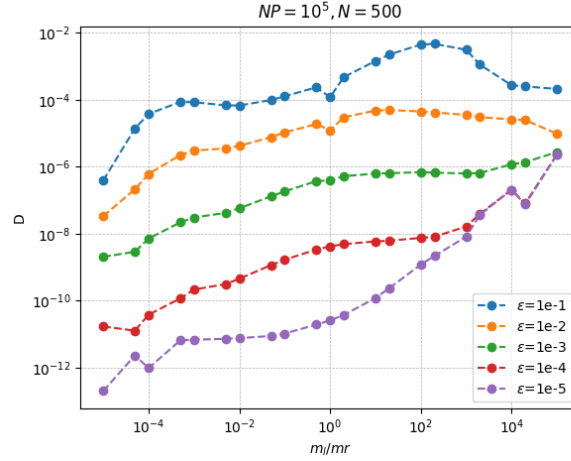
Fazni prostor je pri masnem razmerju $m_r/m_l = 1$ enak kot v primeru Fermijevega pospeševalnika (slika 1). V primeru, da malo spremenim masno razmerje, se fazni prostor precej spremeni (slika 3). Če masno razmerje povečam še za kakšen procent, potem na sliki ni več videti periodičnih orbit in vse zglada kot kaotično morje.



Slika 3: Fazni diagrami Fermijevega pospeševalnika za dve različni amplitudi stene $\epsilon = a_0$ in dve različni masni razmerji m_r/m_l .

Odvisnost difuzijske konstante od masnega razmerja prikazuje slika 4. Hitrost desne kroglice sem odčital ob vsakem trku, torej ob trku s prečno steno in z levo kroglico. V obeh primerih difuzijska konstanta narašča z naraščanjem razmerja m_l/m_r . V limiti, ko je $m_r \gg m_l$, desna kroglica skoraj ne vidi leve kroglice in hitrost se ji malo spreminja ob vsakem trku. V limiti, ko je $m_l \gg m_r$, desna kroglica veliko trka med levo in prečno steno in hitrost se ji naglo spreminja. V tej limiti vidi desna kroglica dve prečni steni, med katerima trka. Intuitivno bi pričakoval, da obstaja nekje razmerje (maksimum), kjer je največji prenos kinetične energije na opazovano kroglico. To je mogoče opaziti pri $\epsilon = 0.1, 0.01$. Pri lažjih opazovanih kroglicah najbrž nismo še dosegli vrha. Zanimivo je tudi, da lahko dosežemo velik prenos kinetične energije za majhne ϵ in za lahko desno kroglico. Je pa potrebno biti nekoliko previden pri ekstremnih masnih razmerjih, saj so lahko precej izrojeni (npr. ko so stena in kroglice zelo blizu in kroglica na sredini je zanemarljive mase). Odvisnost na sliki 4a je linearna za majhne ϵ in za majhna masna razmerja. Vdolbina pri $m_l/m_r = 1$ in $\epsilon = 0.1, 0.01$ je predvsem zaradi izračuna. Pri tem

masnem razmerju se hitrost, ko desna kroglica zadane levo ne spremeni, algoritem pa jo odčita in je posledično število trkov večje in deljenje z N povzroči manjšo vrednost. Zanimivo je, da majhni premiki desne stene in veliko masno razmerje povzroči tak prenos kinetične energije. Pričakoval bi, da so boljši večji premiki stene.

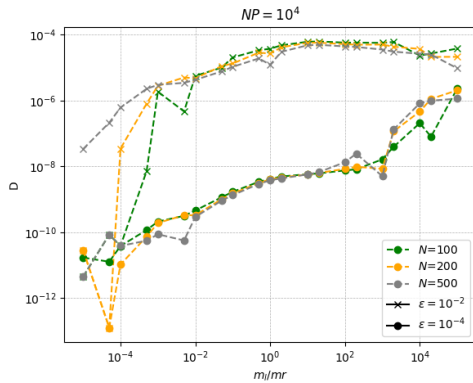


(a)

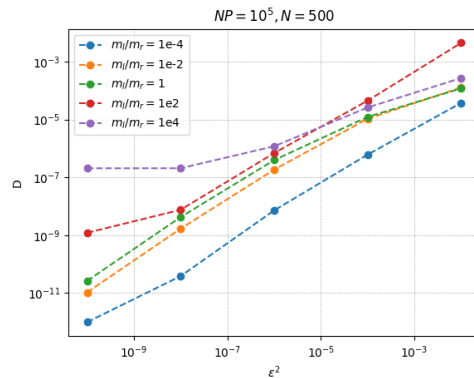
Slika 4: Difuzijska konstanta v odvisnosti od masnega razmerja m_l/m_r . Računano po enačbi (11).

Pogledamo si lahko še kako se spreminja difuzijska konstanta v odvisnosti od masnega razmerja za različne N (slika 5a). Spremembe se poznajo predvsem pri robnih vrednostih difuzijske konstante. Zanimiva je velika odvisnost pri majhnih masnih razmerjih. Zdi se kot da se odvisnost večja z večanjem ϵ . Difuzijska konstanta je praktično neodvisna od N v intervalu $m_l/m_r \in (10^{-2}, 10^2)$.

Za Fermijev pospeševalnik velja, da je difuzijska konstanta sorazmerna z ϵ^2 pri majhnih N [2]. Moji rezultati so malce drugačni. Za majhne ϵ je odvisnost približno linearna, potem pa dobim anomalno difuzijo za velike ϵ in masnem razmerju $m_l/m_r = 1$ (slika 5b). Pri velikih masnih razmerjih se difuzija poveča pri majhnih ϵ .



(a)



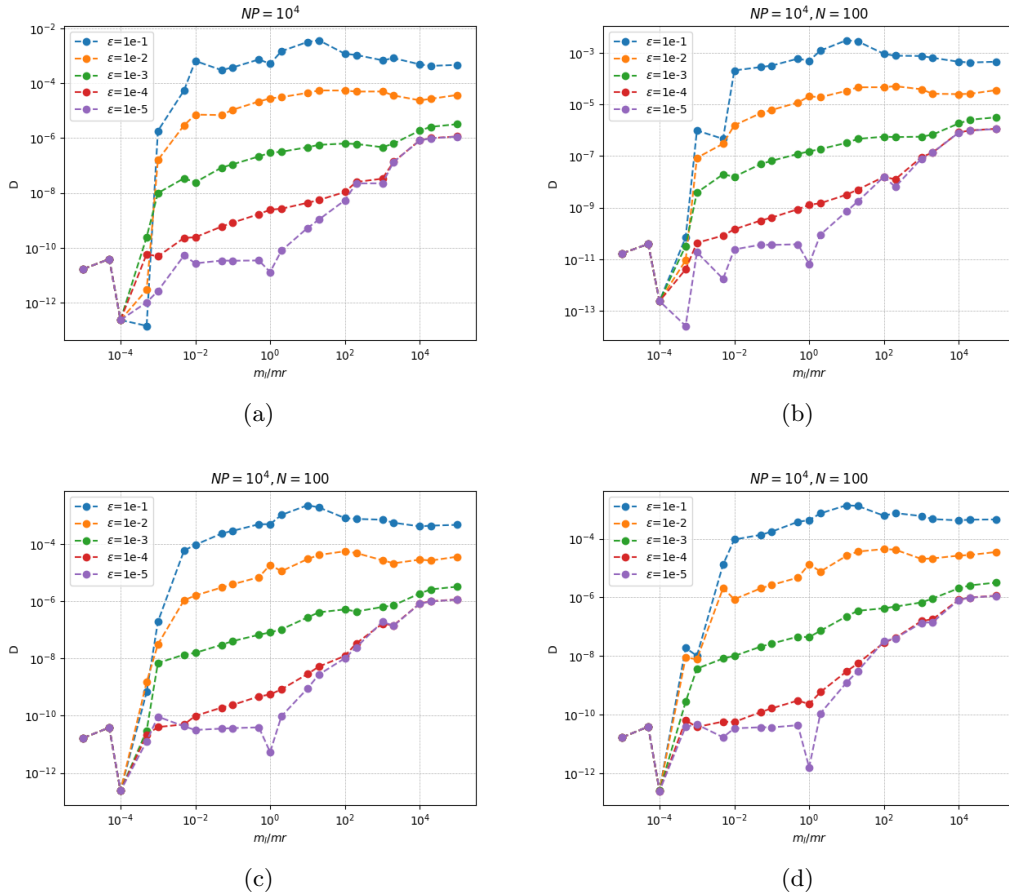
(b)

Slika 5: a) Difuzijska konstanta v odvisnosti od masnega razmerja pri različnih N . Računano po enačbi (11). b) Difuzijska konstanta v odvisnosti od ϵ^2 pri različnih masnih razmerjih. Računano po enačbi (11).

4 Splošen Fermijev pospeševalnik

Imejmo poljubno število kroglic q mas m_1, \dots, m_q , ki trkajo prožno med sabo in s stenama. Primer je manjša posplošitev dvojnega Fermijevega pospeševalnika. Poznamo že enačbe za čas trka q -te kroglice z desno steno (17, 18), prav tako čas trka med dvema kroglicama (15) in čas trka prve kroglice z levo steno. Ob vsakem koraku izračunam minimalne čase trkov med kroglicami in vzamem najmanjšega. Ob tem izračunam tudi časa trkov z levo in desno, premično steno. Izberem najmanjši čas in pogledam, če se v okviru tolerančnega časa zgodi še trk z desno steno (če ta čas ni že najmanjši). Če se, potem obravnavam sočasno še trk z desno steno. Vedno najprej obravnavam trke med kroglicami in potem kroglice s steno, če bi slučajno prišlo do trčenja ob istem času. Če je najmanjši čas trkov med kroglicami tudi globalno najmanjši, potem v seznamu časov trkov med kroglicami pogledam, če je še kakšen čas enak in posodobim kroglice od leve stene proti desni steni. Sočasnost trka z desno steno in ostalimi trki določa toleranca $\tau_{tol} = 10^{-7}$. Posebej obravnavam tudi enakosti časov, vendar je enakost vseh treh časov malo verjetna, prav tako enakost časov med trkom prve kroglice z levo steno in druge s prvo. Ker so vse enačbe linearne, razen čas trka med zadnjo kroglico in desno steno, ni težav s sočasnostjo.

Difuzijo sem računal po enačbi (11). Trk q -te kroglice z desno steno ali z $(q - 1)$ -to kroglico predstavlja n -ti korak algoritma ($N = 100$ na sliki 6 predstavlja 100 trkov opazovane kroglice s steno ali sosednjo kroglico). Z večanjem števila kroglic v sistemu postane simulacija časovno precej potratna, zato sem se ustavil pri 32 kroglicah.



Slika 6: Difuzijska konstanta v odvisnosti od masnega razmerja pri različnih ϵ . a) 4 kroglice med stenama. b) 8 kroglic med stenama. c) 16 kroglic med stenama. d) 32 kroglic med stenama.

Za primer ko imamo verigo kroglic mas $m_1, m_2, m_1, m_2, \dots$ sem izračunal difuzijsko konstanto v odvisnosti razmerja $m_1/m_2 = m_r/m_r$ (slika 6) za različno dolžino verige.

Odvisnost difuzijske konstante se ne bistveno spreminja z večanjem verige. To je mogoče na nek način pričakovano, saj smo vso dinamiko že opisali z dvojnimi Fermijevimi pospeševalnikom. Pri majhnih masnih razmerjih se različne amplitude stene srečajo v isti točki. To je predvsem zaradi majhnega števila iteracij N (slika 5a). Pri $\epsilon = 0.1, 0.01$ imamo maksimum difuzije pri danem masnem razmerju. Za ostale ϵ pa maksimuma ni ali pa še ni dosežen.

5 Zaključek

V nalogi sem obravnaval Fermijev pospeševalnik, kjer sem kljub zelo podobnim faznim portretom, dobil nekoliko drugačne rezultate kot v [2]. Pri posplošitvi na dvojni pospeševalnik sem dobil v primeru $m_l/m_r = 1$ enake rezultate kot pri Fermijevem pospeševalniku. Difuzijska konstanta narašča z masnim razmerjem $m_l/m_r = 1$, vendar narašča bolj z manjšim ϵ . Pri posplošitvi na $2N$ kroglic nisem odkril velikih razlik v primerjavi z dvojnimi Fermijevimi pospeševalnikom.

Literatura

- [1] E. D. Leonel, J. K. Leal da Silva, S. O. Kamphorst, *On the dynamical properties of a Fermi accelerator model*, Physica A, **331**, 435 (2004).
- [2] A. L. Livorati, C. P. Dettmann, I. L. Caldas, E. D. Leonel, *On the statistical and transport properties of a non-dissipative Fermi-Ulam model*, Chaos, **25**, (2015).