

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM

11. naloga: Reševanje PDE z metodo Galerkina

Žiga Šinigoj, 28191058

Ljubljana, januar 2022

1 Uvod

Pri opisu enakomernega laminarnega toka viskozne in nestisljive tekočine po dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta p' se Navier-Stokesova enačba poenostavi v Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 v = \Delta v = -\frac{p'}{\eta},$$

kjer je v vzdolžna komponenta hitrosti, odvisna samo od koordinat preseka cevi, η pa je viskoznost tekočine. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost tekočina enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int_S v \, dS = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta},$$

kjer je koeficient C odvisen samo od oblike preseka cevi ($C = 1$ za okroglo cev). Določili bomo koeficient za polkrožno cev z radijem R . V novih spremenljivkah $\xi = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ se problem glasi

$$\Delta u(\xi, \varphi) = -1, \quad u(\xi = 1, \varphi) = u(\xi, 0) = u(\xi, \varphi = \pi) = 0,$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(\xi, \varphi) \xi \, d\xi \, d\varphi}{(\pi/2)^2}.$$

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo¹ se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. Da bi se izognili računanju lastnih (za ta primer Besselovih) funkcij in njihovih ničel, ki jih potrebujemo v razvoju, lahko zapišemo aproksimativno rešitev kot linearno kombinacijo nekih poskusnih (*trial*) funkcij

$$\tilde{u}(\xi, \varphi) = \sum_{i=1}^N a_i \Psi_i(\xi, \varphi), \quad (1)$$

za katere ni nujno, da so ortogonalne, pač pa naj zadoščajo robnim pogojem, tako da jim bo avtomatično zadoščala tudi vsota (1). Ta pristop nam pride prav v kompleksnejših geometrijah, ko je uporabnost lastnih funkcij izključena in potrebujemo robustnejši pristop. Približna funkcija \tilde{u} seveda ne zadosti Poissonovi enačbi: preostane majhna napaka ε

$$\Delta \tilde{u}(\xi, \varphi) + 1 = \varepsilon(\xi, \varphi).$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije Ψ_i ,

$$(\varepsilon, \Psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

V splošnem bi lahko zahtevali tudi ortogonalnost ε na nek drug sistem utežnih (*weight*) oziroma testnih (*test*) funkcij Ψ_i . Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (*Methods of Weighted Residuals*) z izbiro $\Psi_i = \Psi_i$. Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente a_i

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i), \quad b_i = (-1, \Psi_i),$$

tako da je koeficient za pretok enak

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j.$$

Za kotni del poskusne funkcije obdržimo eksaktne funkcije $\sin((2m+1)\varphi)$, Besselove funkcije za radialni del pa nadomestimo s preprostejšimi funkcijami $\xi^{2m+1}(1-\xi)^n$. Pozor: indeks i pomeni seveda dvojni indeks (šteje obenem m in n)². Zaradi ortogonalnosti po m razpade matrika A v bloke, obrneš pa jo lahko s kako pripravljeno rutino, npr. s spodnjim in zgornjim trikotnim razcepom `ludcmp` in `lubksb` iz NRC.

¹Spomni se na primer na vodikov atom v sferični geometriji, kjer smo imeli $\hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ in $\hat{L}_z Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$.

²Glej tudi prilogo na spletni učilnici.

2 Naloga

Izračunaj koeficient C . V ta namen moraš dobiti matriko A in vektor b ; preuči, kako je natančnost rezultata (vsote za koeficient C) odvisna od števila členov v indeksih m in n . Zaradi ortogonalnosti po m lahko oba učinka preučuješ neodvisno.

3 Rezultati

3.1 Analitična rešitev

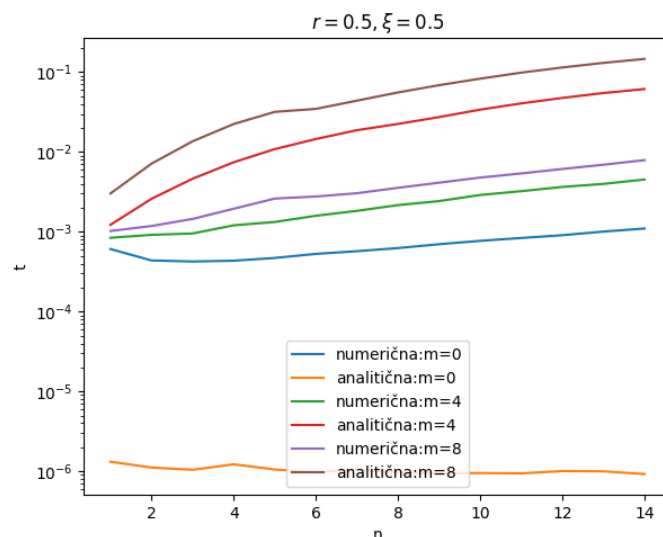
Analitična rešitev amplitudne enačbe je podana kot

$$u(\xi, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} = C_{ms} J_{2m+1}(y(2m+1)s\xi) \sin((2m+1)\varphi)$$

Če naredim skalarni produkt z analitično rešitvijo, kar je ekvivalentno temu, da homogenost razvijem po baznih funkcijah, lahko dobim iskane koeficiente kot

$$C_{ms} = \frac{4}{(1+2m)(y(2m+1)s)^2} \frac{\int_0^1 J_{2m+1}(y(2m+1)s\xi) \xi d\xi}{\int_0^1 J_{2m+1}(y(2m+1)s\xi)^2 \xi d\xi} \quad (3)$$

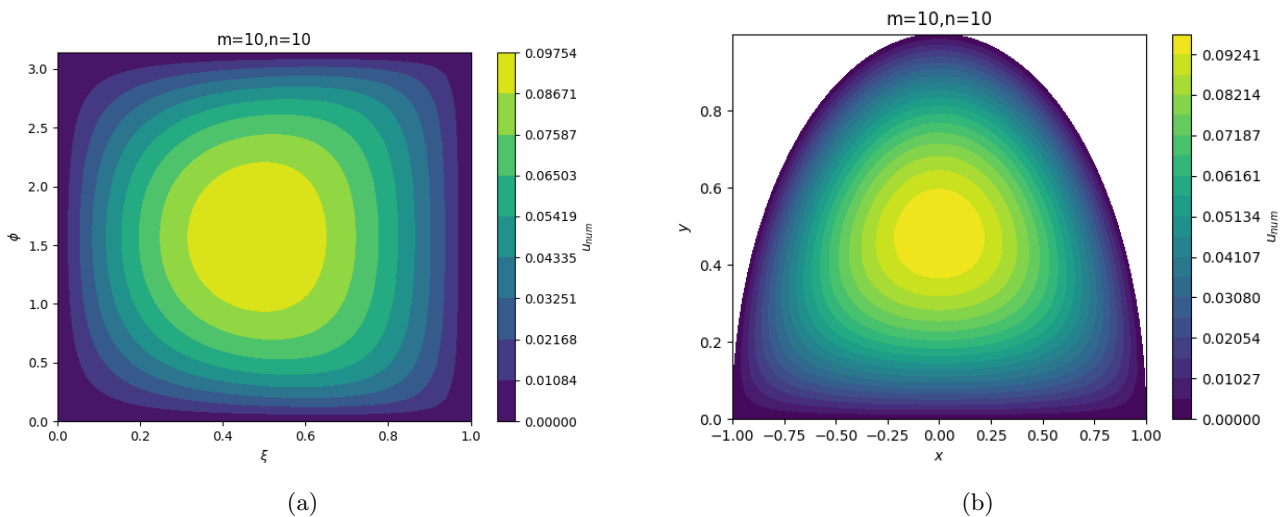
Integrale Besslovih funkcij sem dobil z metodo *quad* iz paketa Scipy. Najprej sem za računanje vsot uporabil for zanke, kar je precej zamudno. Koeficiente sem zato raje zapisal v matriki in potem množil in seštel z baznimi funkcijami. Prednost metode Galerкина je v tem primeru ta, da lahko izračunamo veliko večjo vsoto in se bolj približamo pravi rešitvi kot pa z analitično rešitvijo, kjer moram prav tako sešteti neskončno vsoto. Časovno zahtevnost izračuna brezdimenzijske hitrosti v dani točki prikazuje slika 1. Računanje koeficientov pri analitični vrednosti se izkaže za zelo zamudno ko dodajamo člene. Časovna razlika je okrog enega reda velikosti.



Slika 1: Časovna zahtevnost izračuna hitrosti v dani točki pri analitični in 'numerični' rešitvi v odvisnosti od števila členov v vsoti (n in m).

3.2 Numerična rešitev

Da dobim rešitev z metodo Galerkina sem rešil matrični sistem, kjer je matrika bločno diagonalna. Sistem sem reševal z metodo *spsolve* iz paketa SciPy, metoda je namenjena reševanju razpršenih matrik in je po hitrosti takoj za metodo *solvebanded*, ki je namenjena reševanju trikotnega sistema (10. naloga). Iz rešitve dobim koeficiente v vsoti, ki so pomnoženi z baznimi funkcijami. Rešitev sem narisal na mreži 50x50 točk. Velikost mreže ni bistvena v tem primeru, saj je natančnost v dani točki odvisna od števila členov v vsoti. Oznaka npr. $m=10$ pomeni, da ima vsota po m dejansko 11 členov, saj se indeks začne z 0. Pri velikosti posameznega bloka v matriki (n), pa se indeks začne z 1 in npr. $n=10$ ustreza vsoti desetim členom po n . Numerično rešitev hitrostnega profila prikazuje slika 2

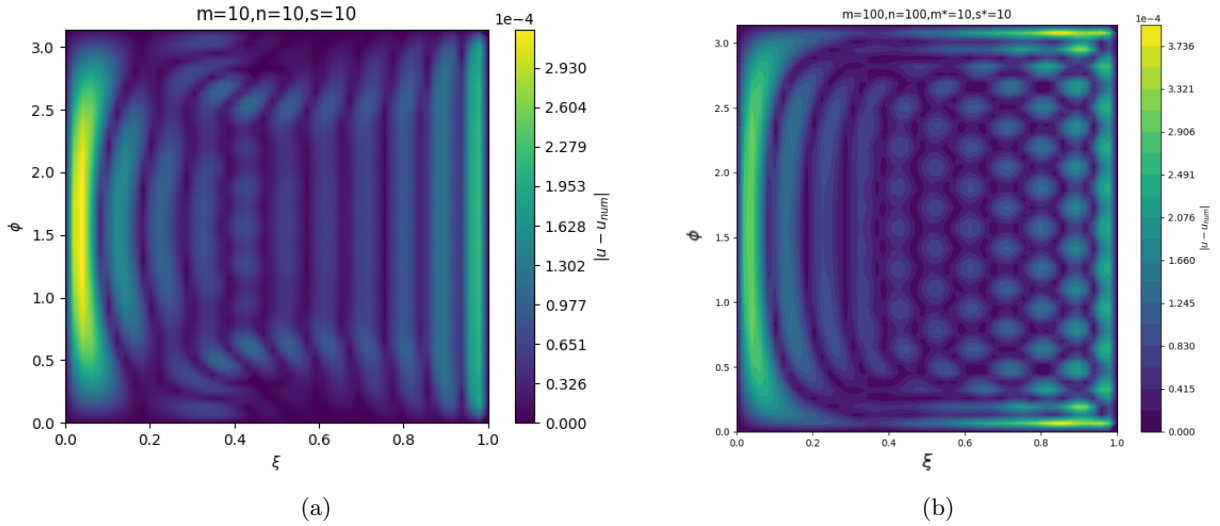


Slika 2: a) Numerična rešitev hitrostnega profila v polarnih koordinatah. b) Numerična rešitev hitrostnega profila v kartezičnih koordinatah. Števili m in n označujeta število členov v posamezni vsoti.

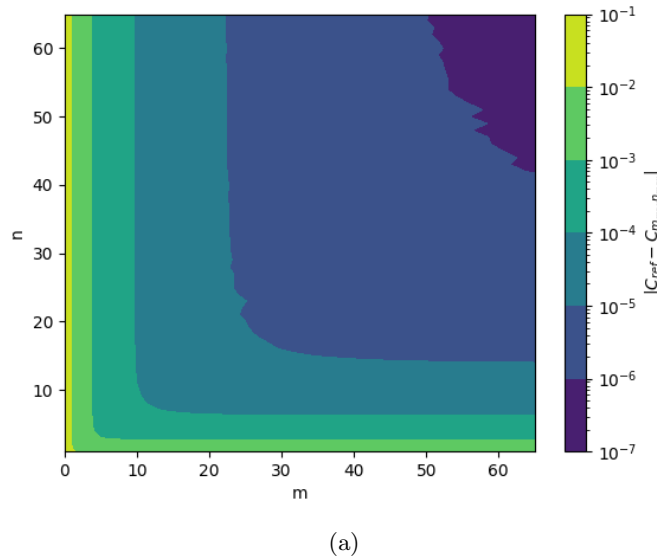
Smiselno se je vprašati kako natančna je numerična rešitev. Odstopanje od analitične rešitve pri enakem številu členov v vsoti prikazuje slika 3a. Odstopanje od analitične rešitve pri stokrat večjem številu členov v numerični vsoti pa prikazuje slika 3b. Pri enakem številu členov dobimo precej natančno numerično rešitev, ki odstopa na četrti decimalki. Pri večjem številu členov v numerični rešitvi se napaka malce poveča, kar pa je malce nenavadno. Če bi bila naša analitična rešitev popolnoma pravilna, bi se z večjim številom členov v numeričnem približku napaka morala zmanjšati. To najverjetneje pomeni, da je analitična rešitev samo približek in z večjim številom numeričnih členov mogoče dosežemo celo bolj natančno rešitev kot pa analitični približek s stokrat manj členi. Pri analitični rešitvi smo omejeni na časovno zahtevnost izračuna koeficientov.

Za določitev pretoka skozi cev je potrebno vedeti faktor pred fizikalnimi količinami. Konstanta je odvisna od oblike preseka cevi. Za izračun konstante lahko rešim sistem z bločno diagonalno matriko in vektorjem \mathbf{b} ter rezultat pomnožim z enakim vektorjem \mathbf{b} ter konstanto. Za rešitev sem vzel vrednosti konstante C , ki jo dobim z reševanjem sistema velikosti $m=100$, $n=100$, kar pomeni 101 bločnih matrik velikosti 100×100 na diagonali v eni matriki. To je tudi referenčna vrednost konstante na sliki 4, ki prikazuje natančnost izračuna konstante v odvisnosti od velikosti in števila podmatrik. Vrednost iskane konstante znaša

$$C_{ref} = 0.757721876571637$$



Slika 3: a) Absolutna razlika med analitično in numerično rešitvijo pri enakem številu členov v vsoti. b) Absolutna razlika med analitično in numerično rešitvijo s stokrat več členi v vsoti, m in n označujeta število elementov v vsoti pri numerični rešitvi, m^* in s^* pa število členov v analitični rešitvi.



Slika 4: a) Absolutno odstopanje vrednosti koeficienta od referenčne vrednosti ($m=100$ $n=100$) v odvisnosti od števil m in n .

4 Zaključek

Metoda Galerkina je zelo uporabna. Do precej natančne rešitve problema lahko pridem tudi brez poznavanja lastnih funkcij sistema. Tudi če poznam analitično rešitev sistema, ta ni vedno enostavno izračunljiva in je lahko omejena z numeričnimi omejitvami (v tem primeru s časovno zahtevnostjo izračuna) se izkaže, da je lahko metoda zelo dober približek pridobljen v krajšem času.