

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM

1. naloga: Airyjevi funkciji

Žiga Šinigoj, 28191058

Ljubljana, oktober 2021

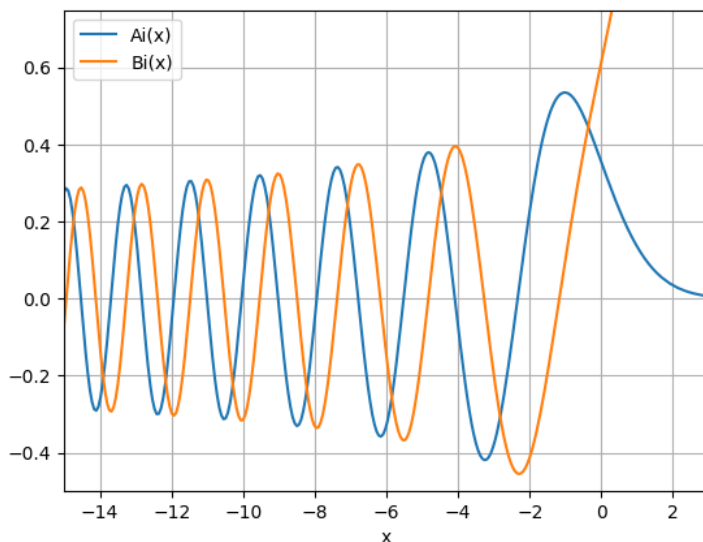
1 Uvod

Airyjevi funkciji Ai in Bi (slika 1) se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljeni v integralni obliki

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt) dt, \quad \text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt) \right] dt.$$



Slika 1: Graf Airyevih funkcij Ai in Bi za realne argumente. Za izračun funkcij je bil uporabljen integralni približek s simpsonovo metodo z mejami $t=0$, $t=50$ in korakom $dt = 5 \cdot 10^{-4}$

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\text{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x), \quad \text{Bi}(x) = \sqrt{3} \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right],$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \text{Ai}(0) = \text{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\text{Ai}'(0) = \text{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z), \quad (z)_0 = 1.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojem. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s}{z^s}, \quad P(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}, \quad Q(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}},$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s + \frac{1}{2})}{54^s s! \Gamma(s + \frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(-\xi), \quad \text{Bi}(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} L(\xi),$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$\begin{aligned}\text{Ai}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[\sin(\xi - \pi/4) Q(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) P(\xi) \right], \\ \text{Bi}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}} \left[-\sin(\xi - \pi/4) P(\xi) + \cos(\xi - \pi/4) Q(\xi) \right].\end{aligned}$$

Če želimo vrste natančno izračunati je potrebno zapisati člene vrst rekurzivno:

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) &= \frac{(1/3 + n) 3 x^3}{(3n + 3)(3n + 2)(3n + 1)} f_n(x) \\ g_{n+1}(x) &= \frac{(2/3 + n) 3 x^3}{(3n + 4)(3n + 3)(3n + 2)} g_n(x) \\ L_{n+1}(x) &= \frac{(5/2 + 3n)(3/2 + 3n)(1/2 + 3n)}{(n + 1)(n + 1/2) x 54} L_n(x) \\ P_{n+1}(x) &= \frac{(-1)(11/2 + 6n)(7/2 + 6n)(5/2 + 6n)(3/2 + 6n)(1/2 + 6n)}{(2n + 3/2)(2n + 1/2)(2n + 2)(2n + 1) x^2 54^2} P_n(x) \\ Q_{n+1}(x) &= \frac{(-1)(17/2 + 6n)(15/2 + 6n)(13/2 + 6n)(11/2 + 6n)(9/2 + 6n)(7/2 + 6n)}{(2n + 3/2)(2n + 5/2)(2n + 3)(2n + 2) x^2 54^2} Q_n(x)\end{aligned}$$

2 Naloga

Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10} . Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10} .

Dodatna naloga: Ničle funkcije Ai pogosto srečamo v matematični analizi pri določitvi intervalov ničel specialnih funkcij in ortogonalnih polinomov ter v fiziki pri računu energijskih spektrov kvantnomehanskih sistemov. Poišči prvih sto ničel $\{a_s\}_{s=1}^{100}$ Airyjeve funkcije Ai in prvih sto ničel $\{b_s\}_{s=1}^{100}$ funkcije Bi pri $x < 0$ ter dobljene vrednosti primerjaj s formulama

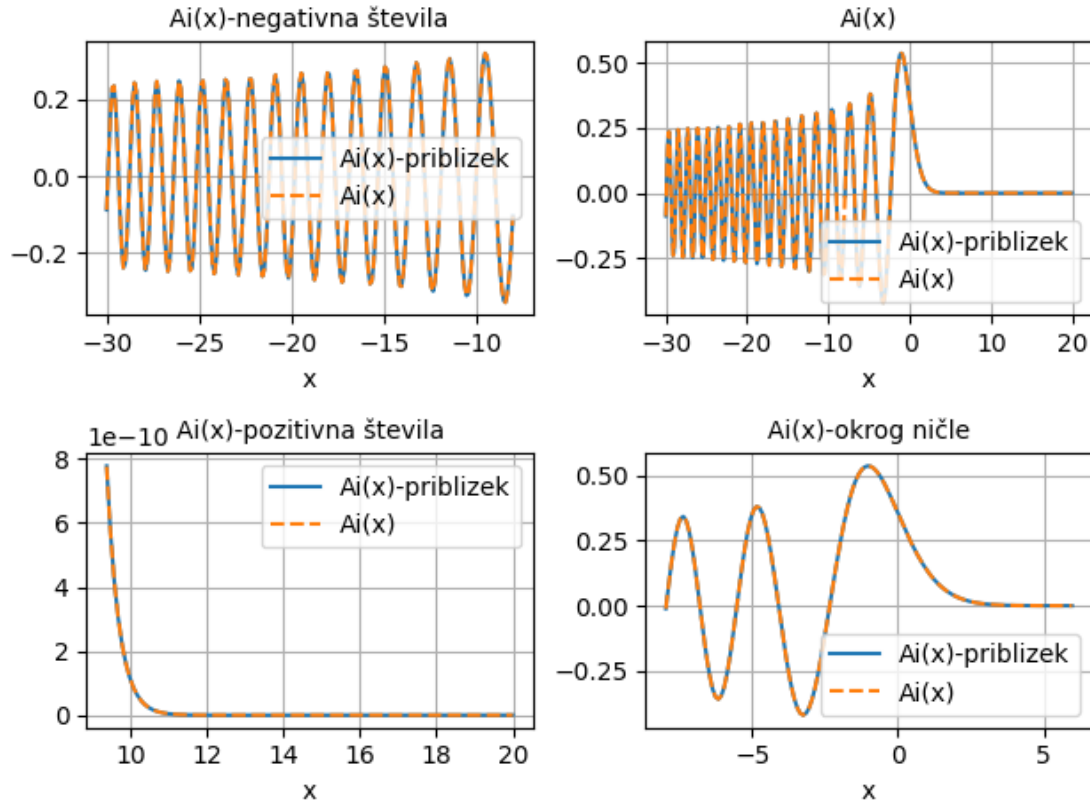
$$a_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-1)}{8}\right), \quad b_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-3)}{8}\right), \quad s = 1, 2, \dots,$$

kjer ima funkcija f asimptotski razvoj

$$f(z) \sim z^{2/3} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \frac{108056875}{6967296} z^{-8} + \dots \right).$$

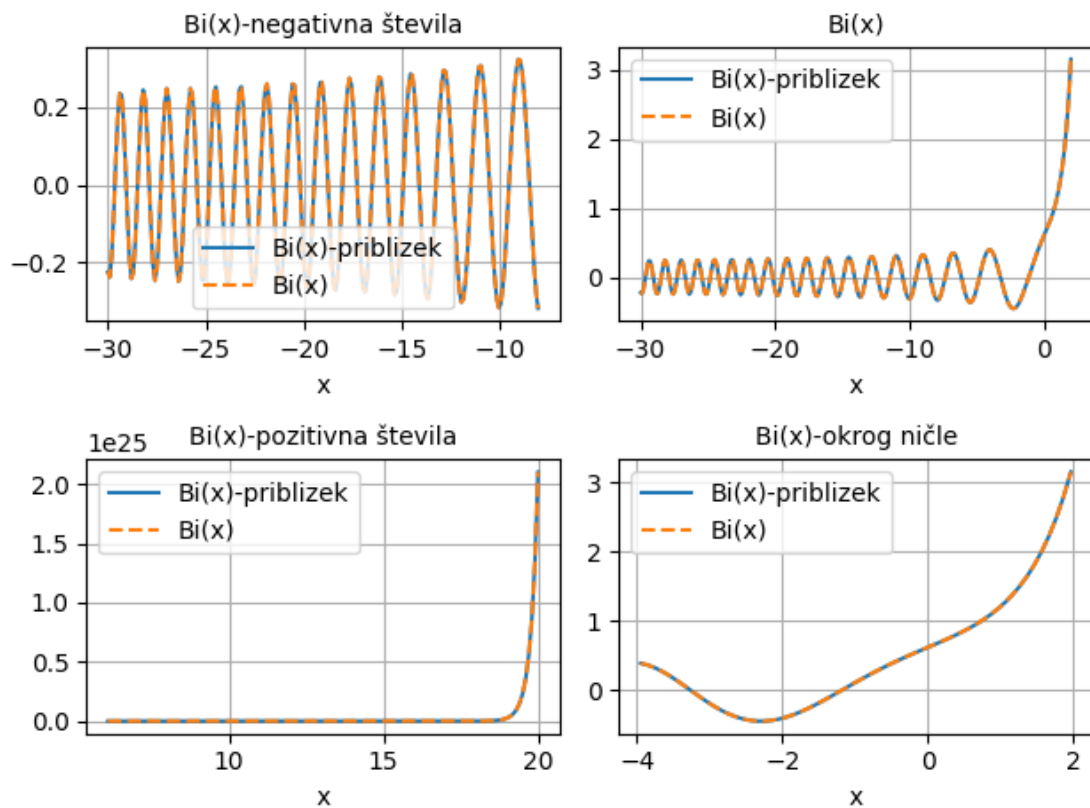
3 Rezultati

Z rekurzivnimi formulami sem izračunal vsote vrst, ki so potrebne za izračun funkcij $Ai(x)$ in $Bi(x)$. Vsoto sem ustavil ko je bil dodani člen k vrsti pod željeno natančnostjo $1e-10$. Če je več vrst tvorilo $Ai(x)$ oz. $Bi(x)$ lahko ta parameter še zmanjšamo, saj lahko obe prineseta napako na deseti decimaliki. Če sta obe vrsti naraščajoči kot v primeru razvoja okrog $x=0$, sem vzel za zaustavljalni pogoj kar vsoto obeh dodatkov pod $1e-10$. Izračunane vrste je potrebno pomnožiti s konstantami oz. funkcijami da dobimo Airyjevi funkciji. Te prinesejo nekaj napake, ampak za našo natančnost ne vplivajo na končni rezultat. V Pythonu sem uporabljal knjižnico Numpy in Math in SciPy za izračun vrednosti željenih funkcij. Preizkusil sem tudi knjižnici Decimal in Mpmath ampak nisem opazil razlik v izračunih na 10 decimaliki. Razlike se pojavijo nekje na 16 oz. 17 decimalnem mestu.

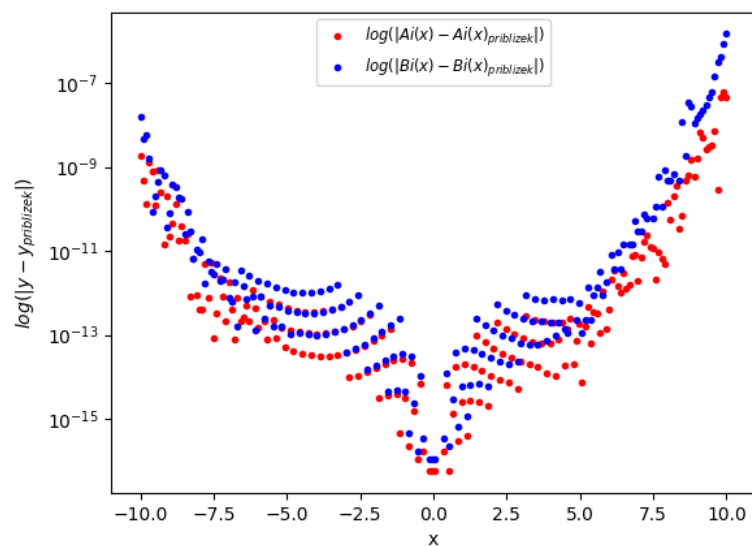


Slika 2: Graf Ai v različnih območjih za realne argumente. Za pravo vrednost $Ai(x)$ sem vzel Airyjevo funkcijo iz paketa SciPy.

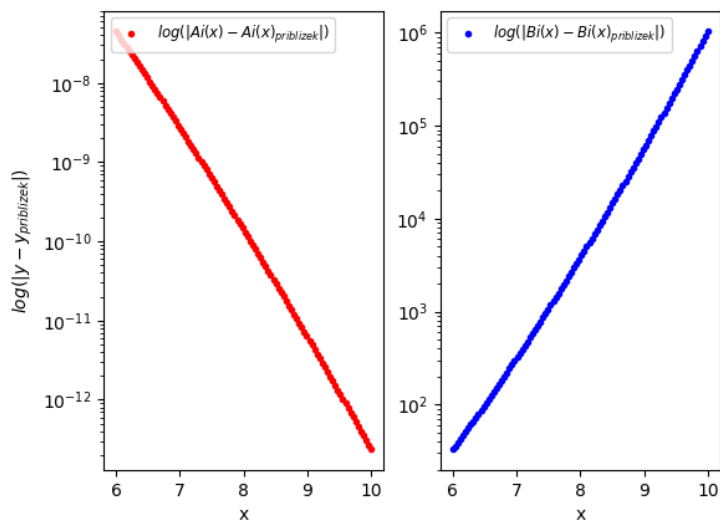
Iz slike 2 lahko vidimo, da se približek okrog $x = 0$ ujema samo za majhne vrednosti x -a. Približek za funkcijo $Bi(x)$ (slika 3) je prav tako okrog $x=0$ dober samo za majhne vrednosti argumenta. Težave nastanejo tudi pri asimptotskem približku za pozitivne vrednosti, saj začne $Bi(x)$ hitro naraščati. Da preverimo dejansko ujemanje je potrebno pogledati razlike med približkom in pravo vrednostjo po absolutni vrednosti (slike 4, 5, 6). Relativno natančnost približka prikazujejo slike 7, 8, 9.



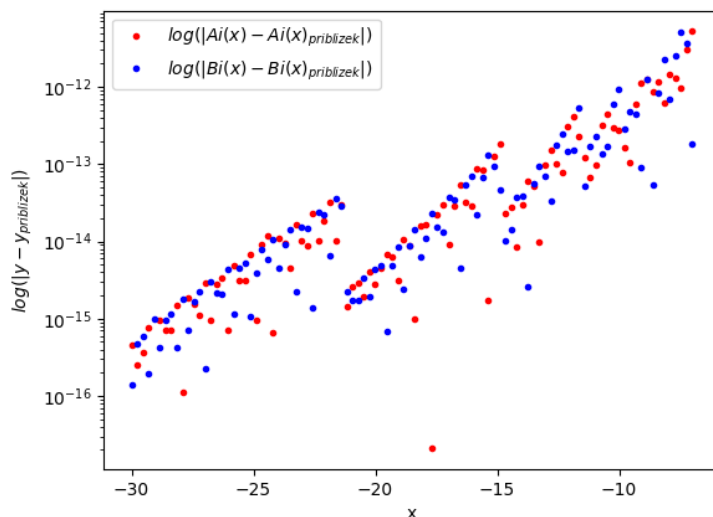
Slika 3: Graf Bi v različnih območjih za realne argumente. Za pravo vrednost $Bi(x)$ sem vzel Airyjevo funkcijo iz paketa SciPy.



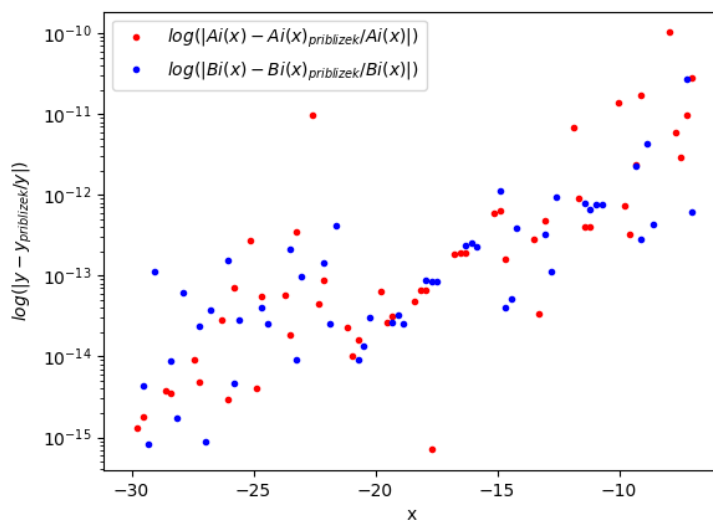
Slika 4: Razlika med pravo vrednostjo in približkom po absolutni vrednosti za obe Airyjevi funkciji. Približek se ujema za $|x| = 8$.



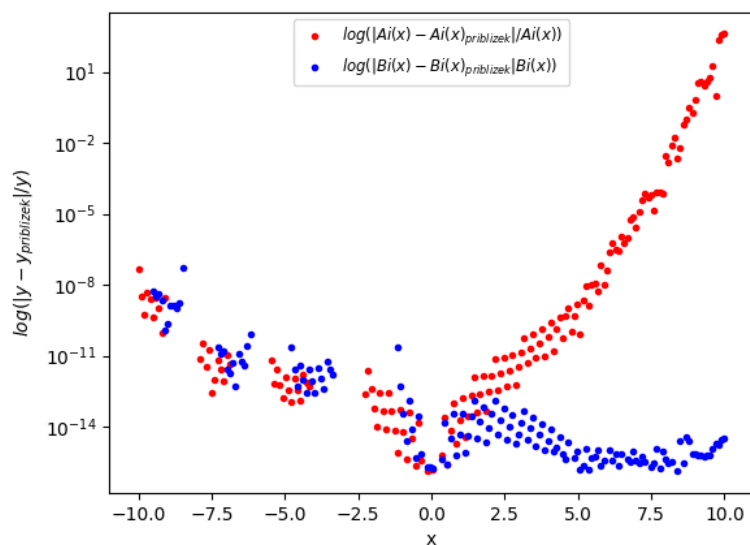
Slika 5: Graf razlike približka in prave vrednosti po absolutni vrednosti za $Ai(x)$ in $Bi(x)$. $Ai(x)$ začne padati proti ničli in se njena napaka manjša. $Bi(x)$ pa začne divergirati in približek postane slab. Skleпам da potem postanejo velike razlike zaradi natančnosti zapisa velikih števil.



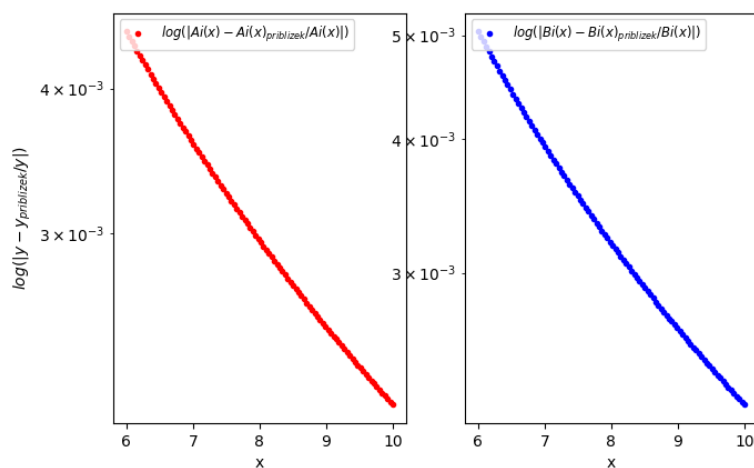
Slika 6: Graf razlike približka in prave vrednosti po absolutni vrednosti za $Ai(x)$ in $Bi(x)$. Vidimo da napaka pada ko se x manjša.



Slika 7: Graf relativne razlike približka in prave vrednosti $Ai(x)$ in $Bi(x)$ za negativne vrednosti argumenta.



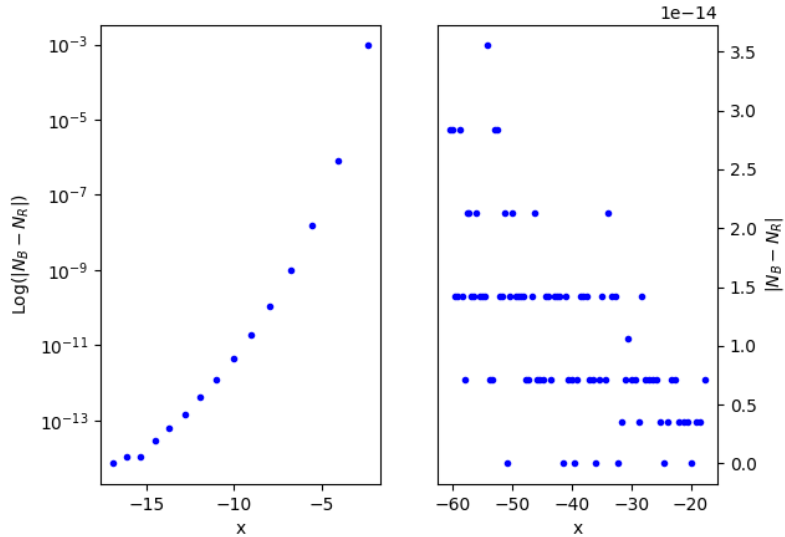
Slika 8: Graf relativne razlike približka in prave vrednosti $Ai(x)$ in $Bi(x)$ za vrednosti argumenta okrog $x=0$.



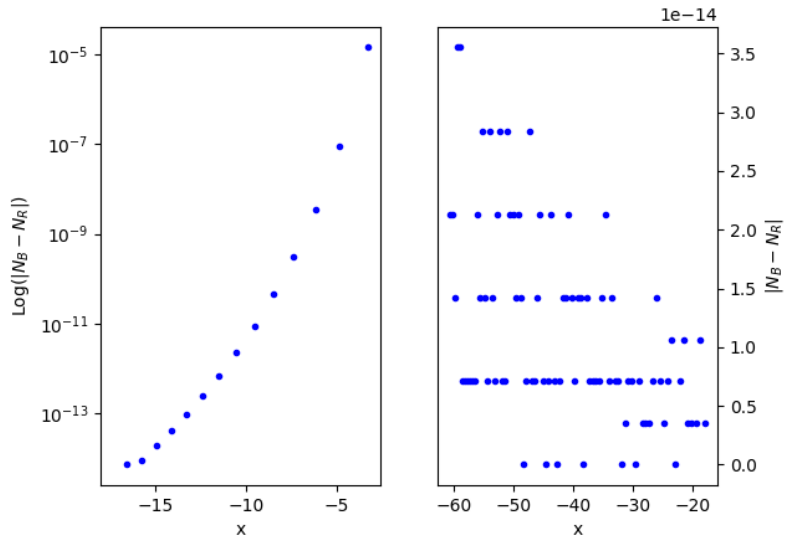
Slika 9: Graf relativne razlike približka in prave vrednosti $Ai(x)$ in $Bi(x)$ za pozitivne vrednosti argumenta. Maksimalna natančnost je nekaj manj kot 10^{-3} .

3.1 Dodatna naloga

Ničle funkcije sem poiskal z bisekcijo. Območje iskanja sem razdelil na majhne intervale. Najprej je funkcija preverila če je na danem intervalu ničla, če je ni bilo je nadaljevala z drugim intervalom. Če se je na intervalu nahajala ničla je funkcija uporabila bisekcijsko metodo. Smiselno se mi je zdelo prikazati razliko med pravo ničlo funkcije in ničlo, ki jo je našla bisekcijska metoda (slika 10 in 11). Natančnost bisekcije se manjša ko se bliža izhodišču.



Slika 10: Graf absolutne razlike med pravo ničlo (N_R) in ničlo najdeno z bisekcijsko metodo (N_B) za funkcijo $\text{Ai}(x)$.



Slika 11: Graf absolutne razlike med pravo ničlo (N_R) in ničlo najdeno z bisekcijsko metodo (N_B) za funkcijo $\text{Bi}(x)$.

4 Zaključek

Naloga je zahtevala kar nekaj dela. Za pridobiti natančne rezultate je potrebno veliko truda in pri nalogi vidimo, da nimamo rezultata pri željeni natančnosti na celotni realni osi, ampak samo na določenih intervalih. Pri natančnih izračunih je dobro vedeti kako si računalnik zapisuje števila in računa z njimi, saj lahko drugače pride do napačnih rezultatov in posledično napačnih interpretacij.