

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM
4. naloga: Fourierova analiza

Žiga Šinigoj, 28191058

Ljubljana, november 2021

1 Uvod

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt \quad (1)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) df \quad (2)$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto (frekvenco) $f = 1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije, kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve (aliasing)*, ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n / N), \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}, \quad (4)$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(\frac{n}{N\Delta}) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N . Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \leq N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + df$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2.$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2 |H_n|^2$.

Z obratno transformacijo lahko tudi rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n / N) \quad (5)$$

(razlika glede na enačbo (4) je le predznak v argumentu eksponenta in utež $1/N$).

2 Naloga

1. Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc. Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovo porazdelitev 'periodično' za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode. Poglej, kaj se dogaja z časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj?
2. Po Fourieru analiziraj 2.3s dolge zapise začetka Bachove partite za violino solo, ki jih najdeš na spletni strani Matematičnofizikalnega praktikuma. Signal iz začetnih taktov partite je bil vzorčen pri 44100Hz, 11025Hz, 5512Hz, 2756Hz, 1378Hz in 882Hz. S poslušanjem zapisov v formatu .mp3 ugotovi, kaj se dogaja, ko se znižuje frekvenca vzorčenja, nato pa s Fourierovo analizo zapisov v formatu .txt to tudi prikaži.
3. **Dodatno:** Napravi Fourierovo analizo signalov, ki jih dobiš pri vaji *Akustični resonator* pri Fizikalnem praktikumu II. Posnetke treh različnih signalov prav tako najdeš na spletni strani.

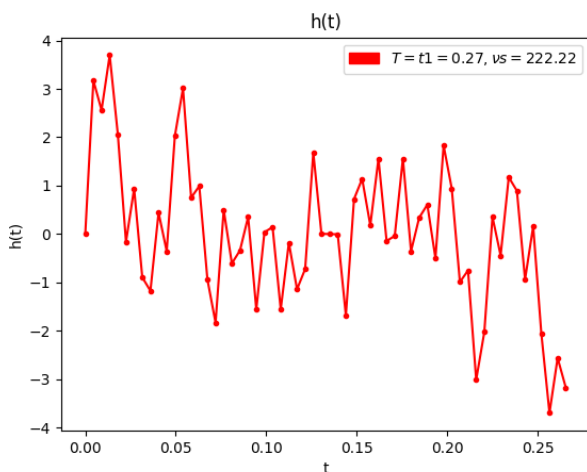
3 Rezultati

3.1 Fourierve transformacije in lastnosti

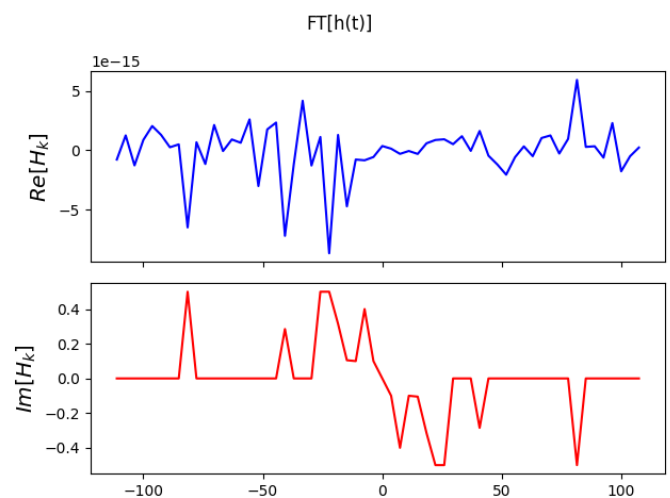
Najprej sem pogledal različne tipe funkcij (periodične, neperiodične, ...) in njihove transformacije, lastnosti in pomankljivosti. Najprej bo v podpoglavju napisana funkcija in nato njena obdelava in analiza. Na grafih predstavlja T periodo vzorčenja in ν_s frekvenco vzorčenja.

3.1.1
$$h(t) = 0.2\sin(2\pi t/t_{01}) + 0.8\sin(2\pi t/(2t_{01})) + 0.2\sin(2\pi t/(3t_{01})) + 0.21\sin(2\pi t/(4t_{01})) + 0.63\sin(2\pi t/(5t_{01})) - \sin(2\pi t/(6t_{01})) + \sin(2\pi t/(7t_{01})) + 0.57\sin(2\pi t/(11t_{01})) + \sin(2\pi t/(22t_{01}))$$

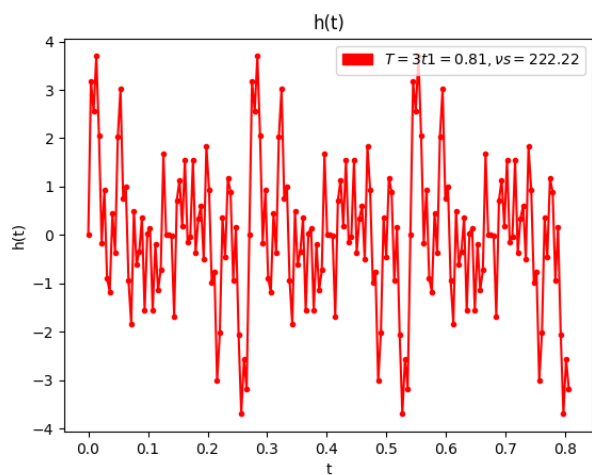
Funkcija $h(t)$ je periodična s periodo $t_{01} = 0.27$ in njenimi večkratniki (slika 1). Perioda vzorčenja je 1 periodo funkcije $h(t)$, ki ima periodo t_{01} . Fourierova transformacija funkcije ima precej slabo ločljivost, to lahko popravimo tako, da vzorčimo več časa (slika 3, 4). Tako dobimo večjo ločljivost vzorca. Pri periodičnih funkcijah se lahko izognemo puščanju tako, da naš vzorec pokrije periodo oz. večkratnik periode. Veljati mora, da je naslednja točka, ki bi jo vzorčili enaka kot naša prva vzorčena točka. Primer neperiodičnega vzorčenja in posledično puščanja prikazujeta sliki 5 in 6. Z večanjem točk vzorčenja večamo dosegljiv frekvenčni interval v frekvenčnem spektru. Spodnjo mejo frekvence vzorčenja predstavlja dvakratnik Nyquistove frekvence. To je najnižja frekvenca vzorčenja pri kateri še ohranimo polno informacijo signala, če se spustimo pod to frekvenco se frekvence, ki so večje od Nyquistove, preslikajo v interval do Nyquistove frekvence (animacija).



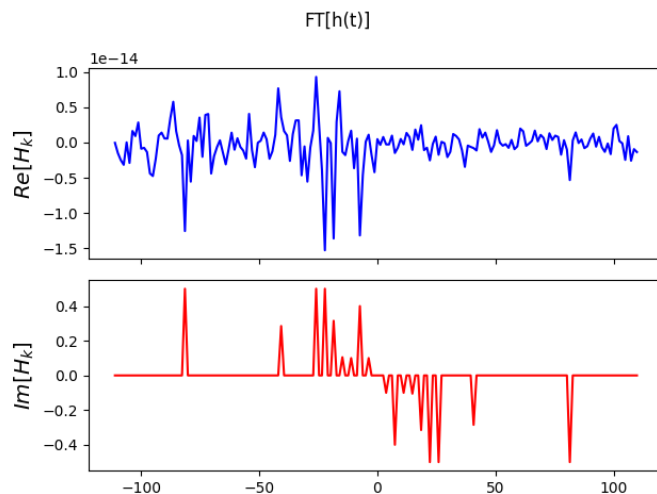
Slika 1



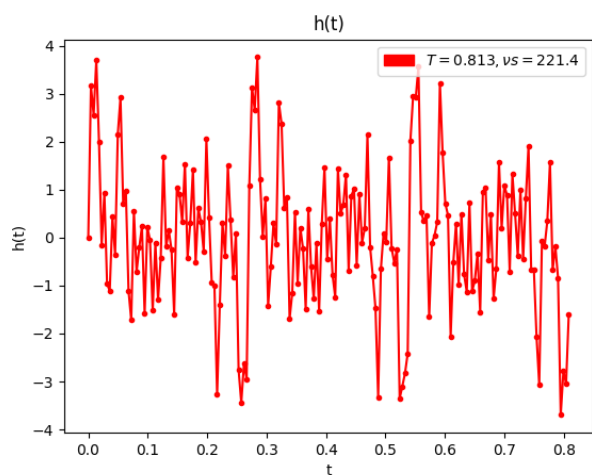
Slika 2



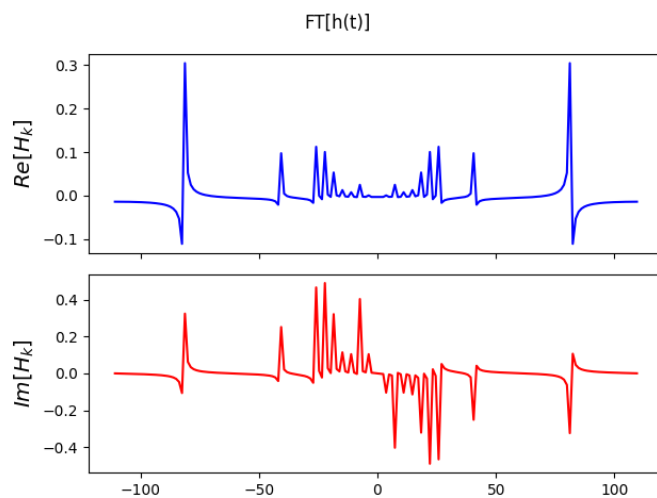
Slika 3



Slika 4

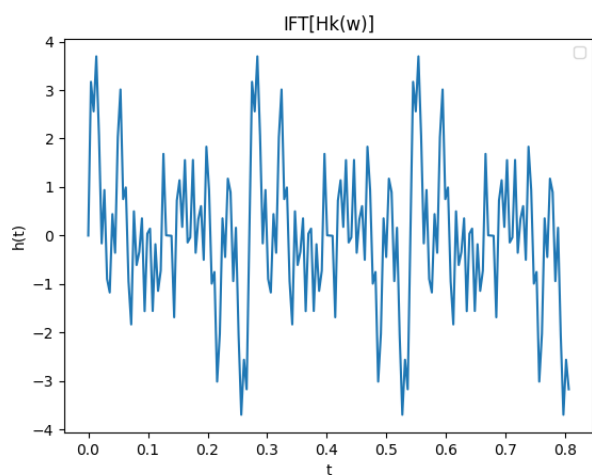


Slika 5

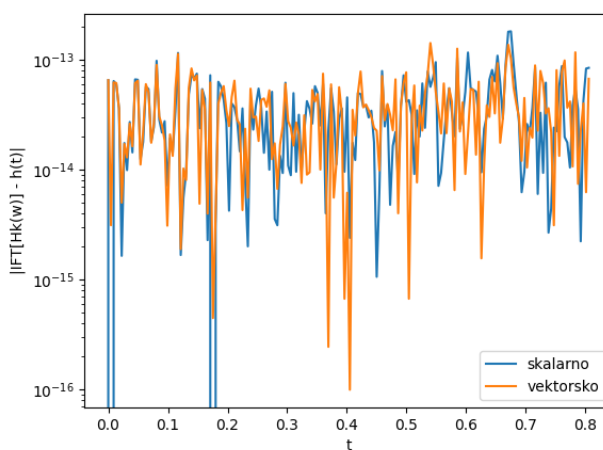


Slika 6

Seveda lahko z majhno spremembo pogledamo tudi inverzno transformacijo in njeno ujemanje z začetno funkcijo (slika 7 in 8)



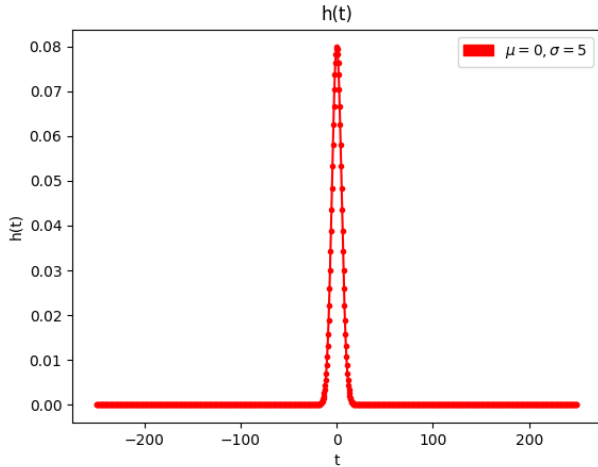
Slika 7



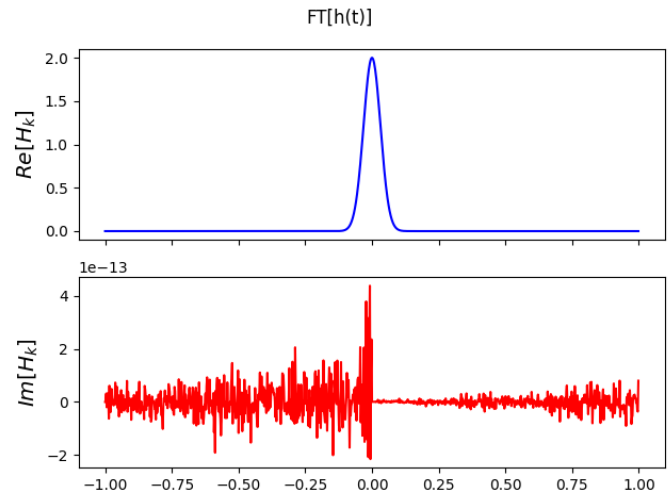
Slika 8

3.1.2 $h(t)$ -Gaussova funkcija

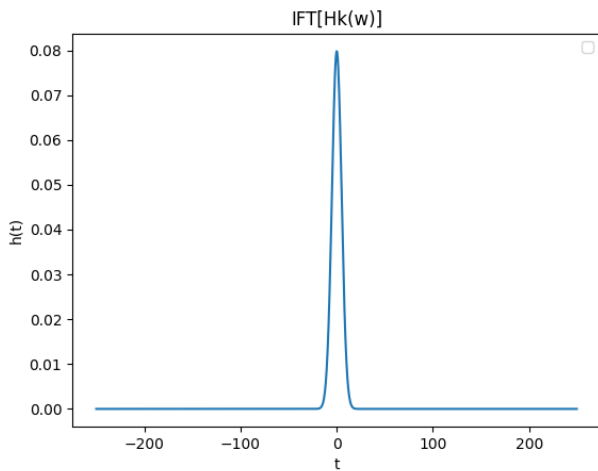
Pri neperiodičnih funkcijah kot je Gaussova funkcija je potrebno biti previden. DFT predpostavlja, da je začetna točka v izhodišču. Če imamo Gaussovo funkcijo centrirano na sredini, potem lahko naredimo dvoje. Funkcijo lahko zamaknemo in potem fourierovo transformacijo pomnožimo s faktorjem premika. Druga možnost, ki sem jo uporabil, je ta da damo vzorčni interval na polovico in ju zamenjamo (to sm naredil z `np.roll()` iz paketa NumPy). Tako dobimo 'periodično' funkcijo, ki jo transformiramo. Po transformaciji spet zamenjamo polovici frekvenčnega spektra, da dobimo Gaussovo funkcijo (slika 9 in 10). Iz frekvenčnega spektra lahko naredimo inverzno transformacijo z enakim postopkom in pogledamo če se vrednosti ujemajo pri obeh metodah transformacije (slika 11 in 12).



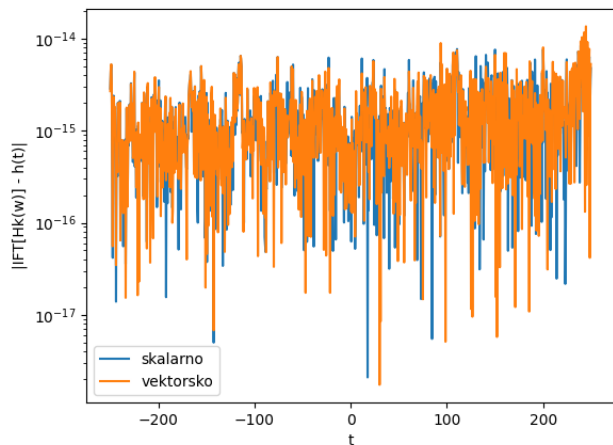
Slika 9



Slika 10



Slika 11

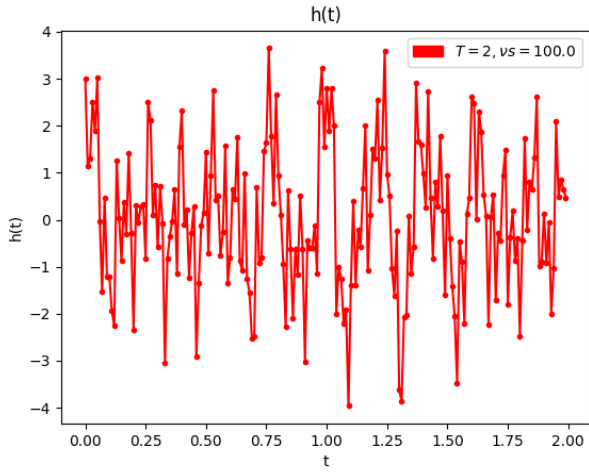


Slika 12: Razlika originalne Gaussove funkcije in Gaussove funkcije po transformacijah pri čemer sta DFT in IDFT izračunana na dva načina - vektorsko in skalarno.

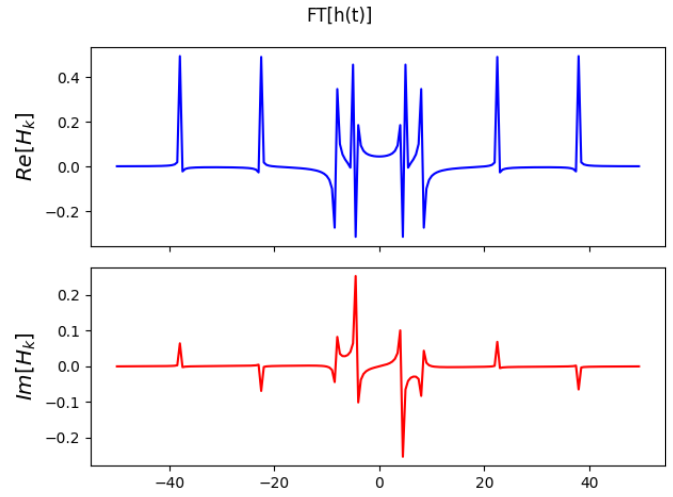
3.1.3 $h(t) = \sin(2\pi t/0.23) + \cos(2\pi t/0.2) + \cos(2\pi t/0.0444) + \cos(2\pi t/0.02633) + \sin(2\pi t/0.121679)$

Funkcija $h(t)$ je sestavljena iz lihih in sodih, zato bomo frekvence dobili v imaginarnem in realnem delu. Ker funkcija ni periodična bomo v frekvenčnem spektru dobili nekaj puščanja (slika 13, 14). Pri tem mislim to, da katerokoli točko vzamemo za konec vzorčenja, bodo pri funkcijah z različnimi periodami nekatere, ki ne končajo svoje periode v naši zadnji točki. Če želimo poudariti frekvence signala lahko uporabimo zero padding metodo, kjer dodamo ničle na konec intervala in tako navidezno izboljšamo meritev (slika ??). To pa ne vedno pomeni, da smo stvar izboljšali, na sliki dobimo dobro frekvenčno sliko sodih funkcij. V frekvenčnem spektru lihih funkcij pa smo ojačali tudi frekvence, ki niso vir našega signala, ampak po mojem

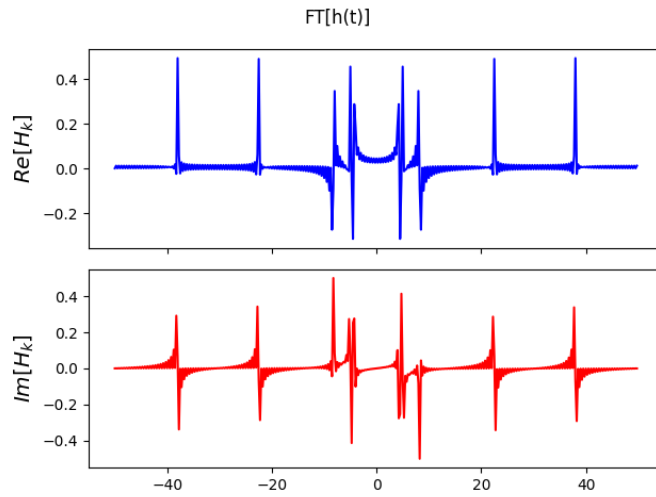
posledica puščanja.



Slika 13



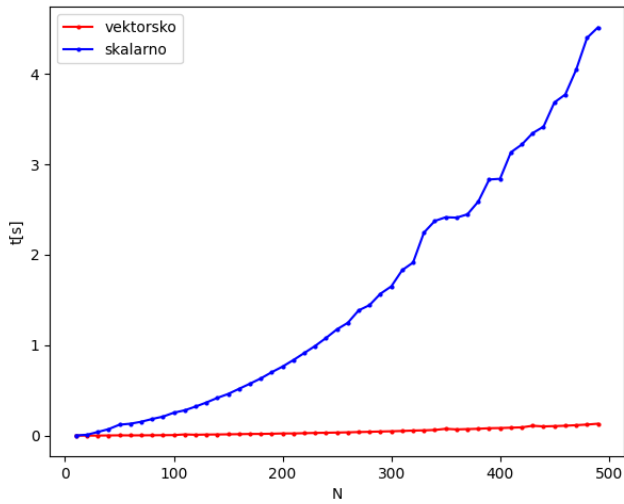
Slika 14



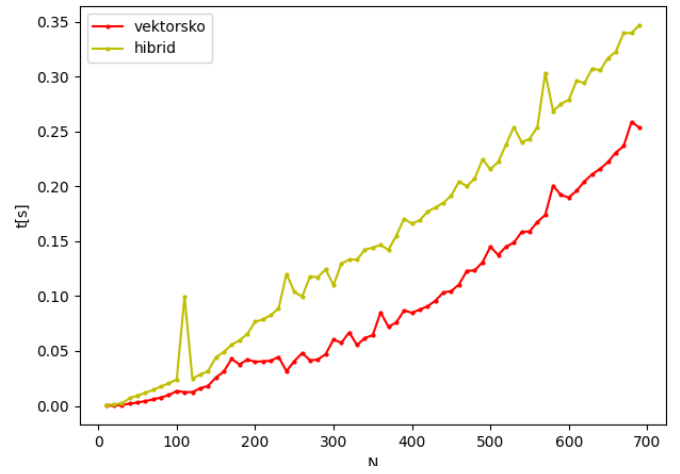
Slika 15

3.1.4 Hitrost in poraba pomnilnika

Primerjal sem hitrosti obeh metod DFT, kjer ena izračuna transformacijo tako, da naredi matriko in matrično množi, druga pa računa elemente preko dveh zank. Druga metoda ima dve zanki kar pomeni, da je $t \propto n^2$. Časovno odvisnost podaja slika 16. Težava vektorske metode je ta, da izračuna celotno matriko. Velike matrike porabijo veliko RAM-a. To se predvsem vidi v naslednji nalogi, ko imamo veliko vzorcev. Zato sem naredil še 'hibrid', torej mešanico med prvo in drugo metodo. Za izračun ene frekvence potrebujemo eno vrstico matrike in vektor iz časovnega prostora. Metoda posledično uporablja samo eno zanko (slika 17).



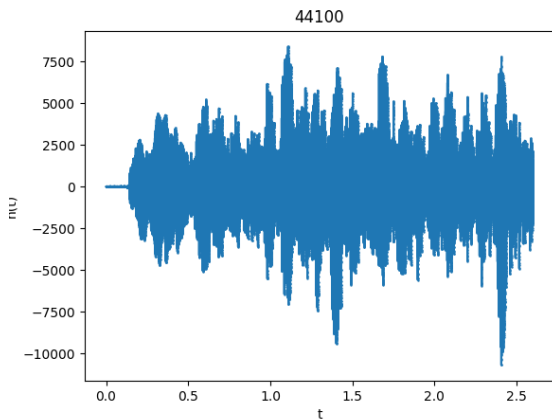
Slika 16



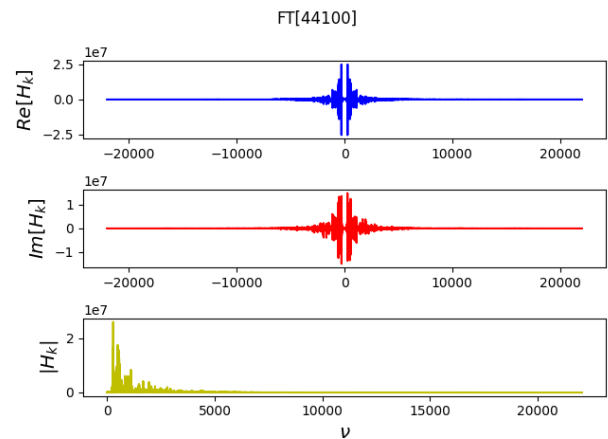
Slika 17

3.2 Bachova partita

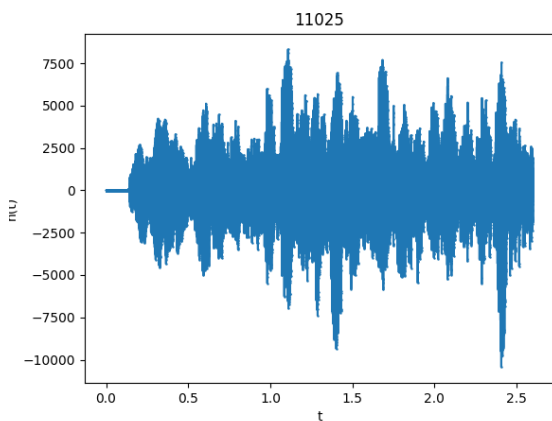
Pri različnih vrekvencah vzorčenja Bachove partite opazim, da se z zmanjševanjem frekvence vzorčenja kvari melodija. Najverjetneje prihaja z zmanjševanjem frekvence do potujevanja signala in se višje frekvence preslikujejo v frekvence do Nyquistove in posledično vsebuje melodija vedno več nižjih frekvenc. To lahko opazimo tudi z opazovanjem spektra. Pri zmanjševanju frekvence vzorčenja lahko tudi opazimo, da se večja reža med negativnimi in pozitivnimi frekvencami. Razloga za to ne vem, mogoče je zaradi preslikave višjih frekvenc z majhno amplitudo v začetek spektra, ampak se frekvence ob preslikavi seštevajo, zato nisem ravno prepričan.



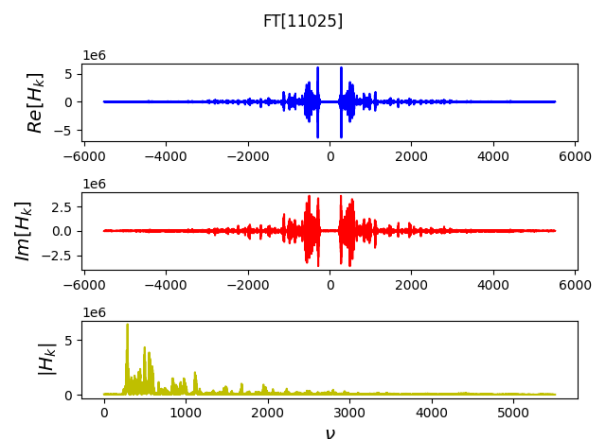
Slika 18



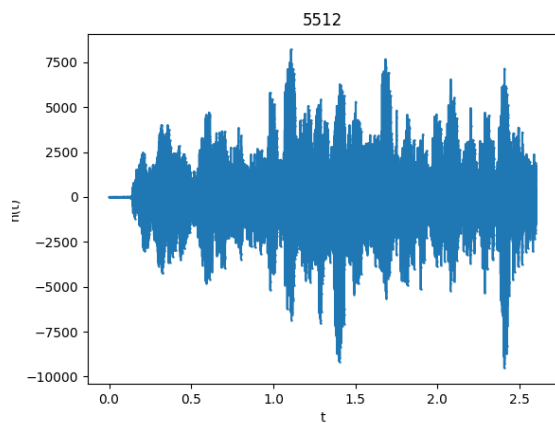
Slika 19



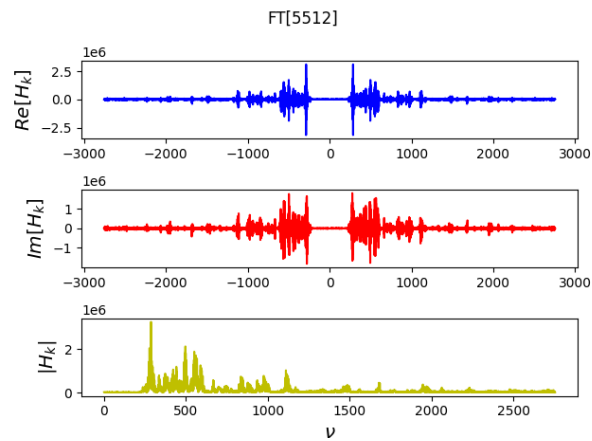
Slika 20



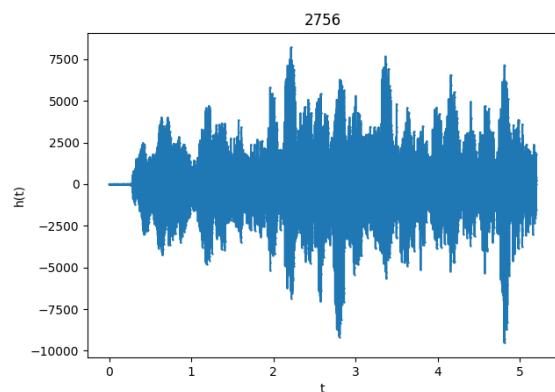
Slika 21



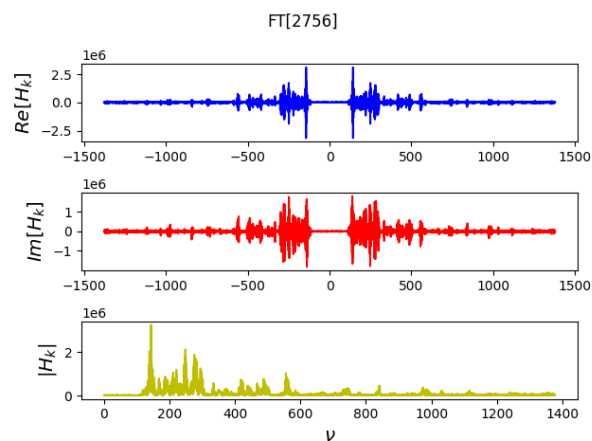
Slika 22



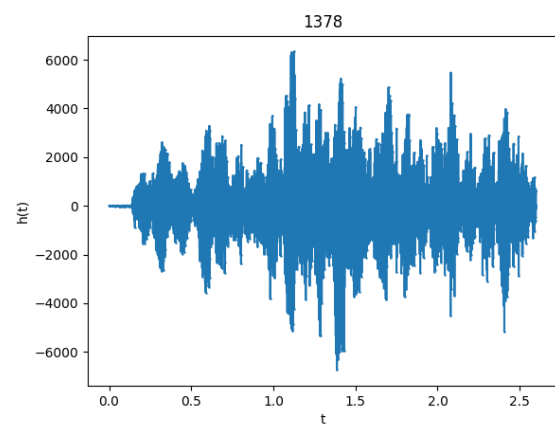
Slika 23



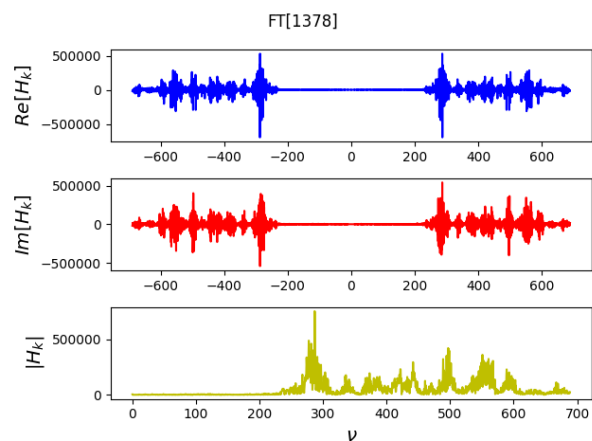
Slika 24



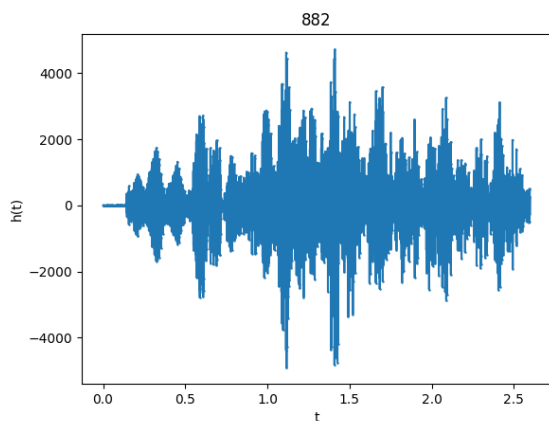
Slika 25



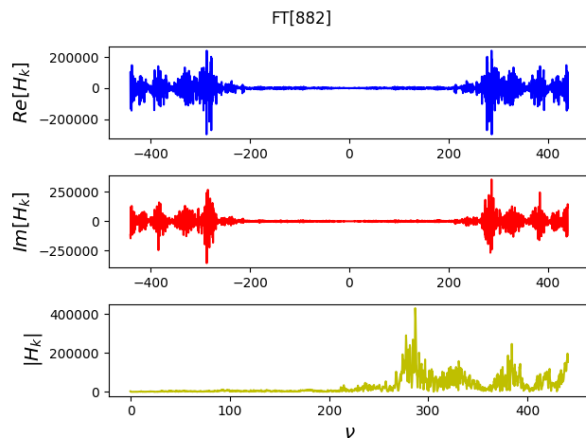
Slika 26



Slika 27



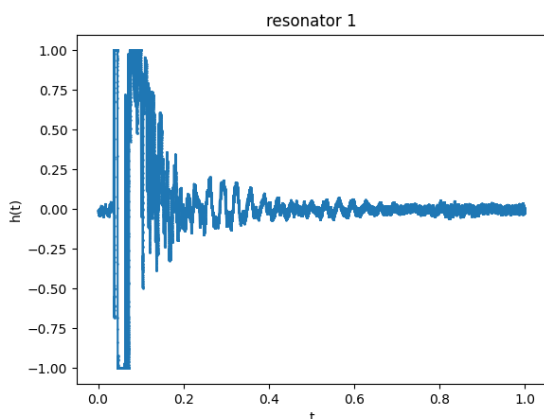
Slika 28



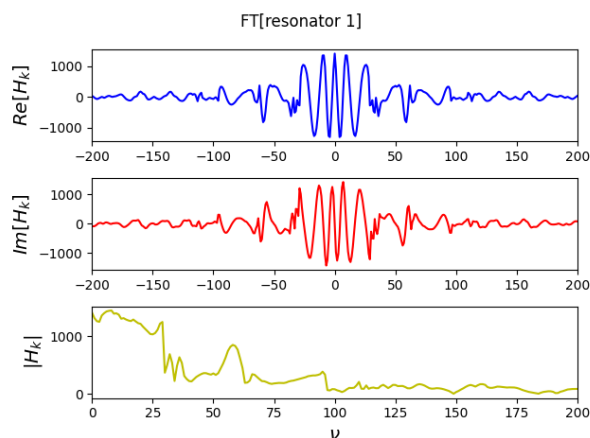
Slika 29

3.3 Akustični resonator

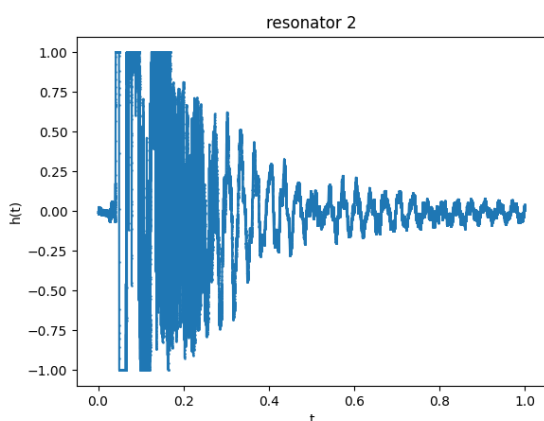
Pri transformaciji vzorcev akustičnega resonatorja sem vzel samo prve 4 vzorce iz spletne učilnice, saj nisem uspel odpreti ostalih. Števila na grafih od 1 do 3 pomenijo moč udarca, kjer je 1 blag udarec. Pri blažjih udarcih so zastopane nižje frekvence in je spekter moči manjši po velikosti. Z večanjem udarca se večajo frekvence in njihova gostota ter moč. V resonatorju bi načeloma morali videti lastne frekvence in njihove večkratnike, torej vrhove v frekvenčnem spektru, kar pa je precej težko videti.



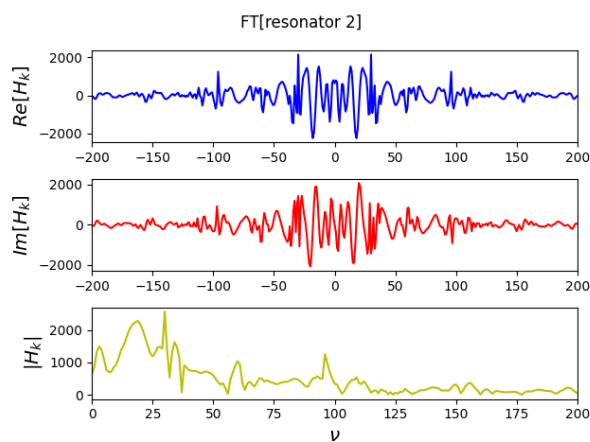
Slika 30



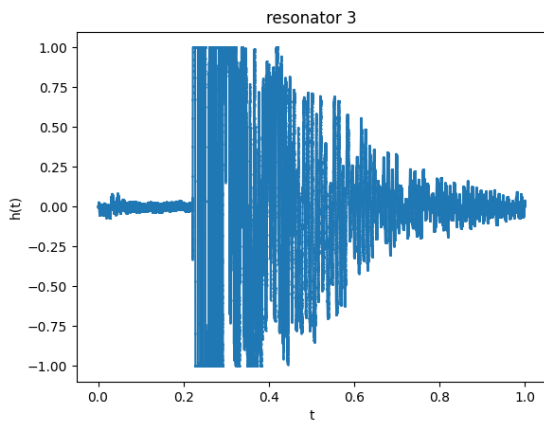
Slika 31



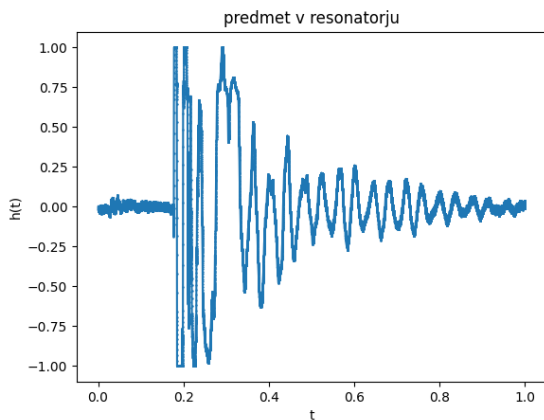
Slika 32



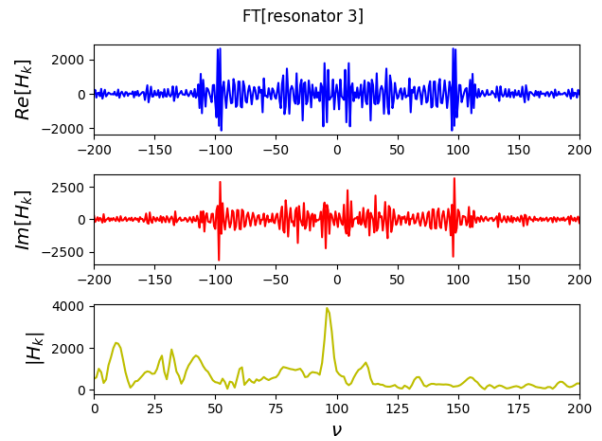
Slika 33



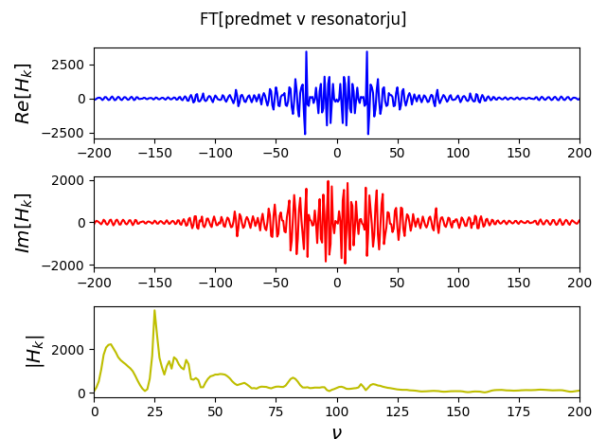
Slika 34



Slika 36



Slika 35



Slika 37

3.4 Zaključek

Ob reševanju naloge sem se spoznal s težavami, na katere lahko naletim pri diskretni Fourierovi transformaciji in kakšne so rešitve oz. načini da rezultate izboljšam. Pri zajemanju podatkov je pomembna frekvenca vzorčenja, pri transformacijah pa razne simetrije in zamikanje podatkov in računska oz. prostorska zahtevnost transformacije.