

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM

6. naloga: Enačba hoda

Žiga Šinigoj, 28191058

Ljubljana, november 2021

1 Uvod

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko toplotno prevodnostjo in določeno zunanjo temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) \quad (1)$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\text{zun}} + e^{-kt}(T(0) - T_{\text{zun}}) .$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x , pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $dy/dx = f(x, y)$, kot na primer (??). Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x . \quad (2)$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h . Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljše ($\mathcal{O}(h^3)$, t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h \left. \frac{dy}{dx} \right|_x , \quad (3)$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2} \left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_x + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x+h} \right] , \quad (4)$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_x = f(x, y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}(h^3)$ lokalno) je približek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] \quad (6)$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}(h^3)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (7)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2 \quad (9)$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd. . .

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x, y(x)) , \\k_2 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_1\right) , \\k_3 &= f\left(x + \frac{1}{2}h, y(x) + \frac{h}{2}k_2\right) , \\k_4 &= f(x + h, y(x) + hk_3) , \\y(x + h) &= y(x) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) .\end{aligned}\tag{10}$$

2 Naloga

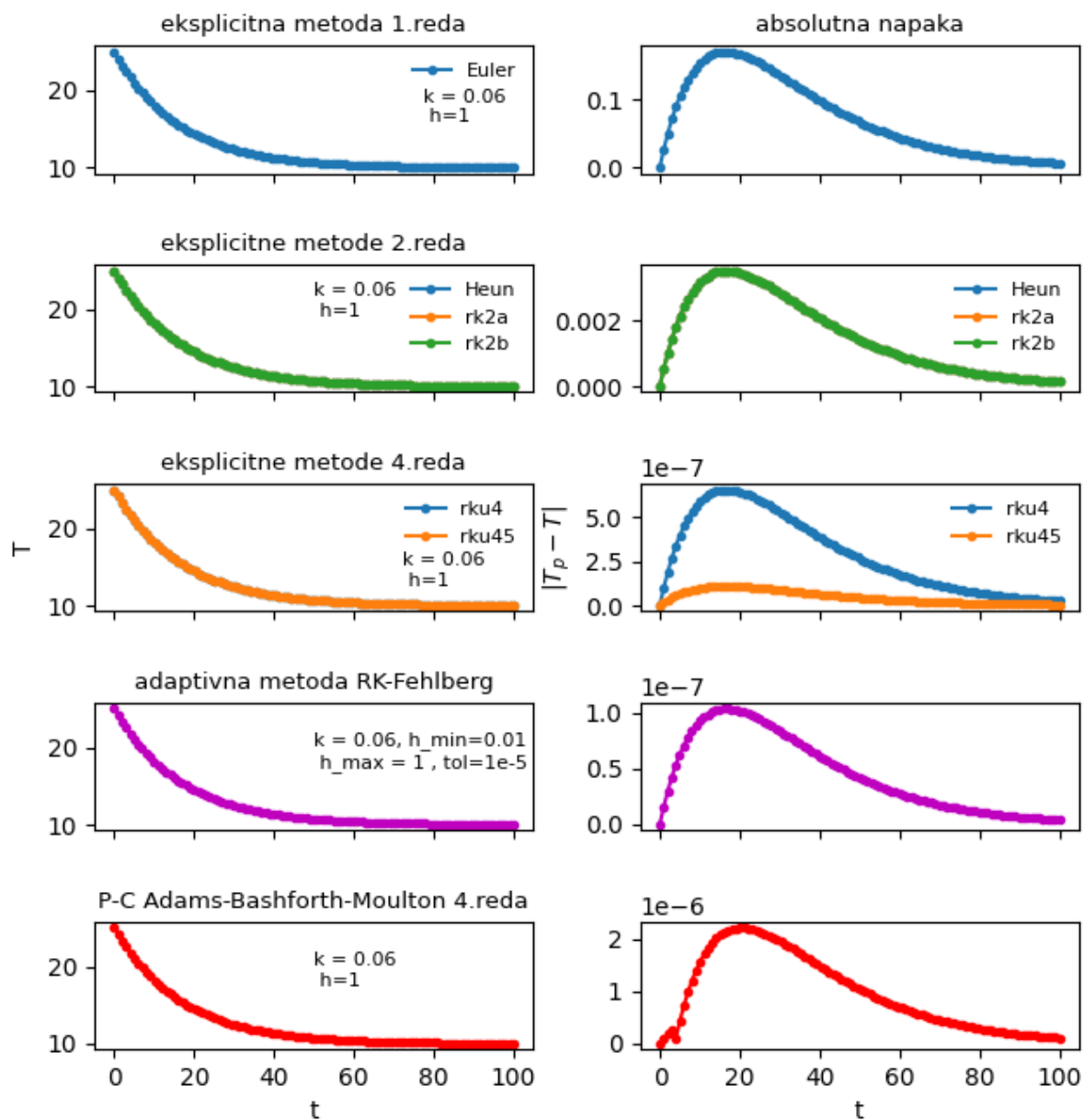
Preizkusi preprosto Eulerjevo metodo ter nato še čim več naprednejših metod(Midpoint, Runge-Kutta 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor . . .) na primeru z začetnima temperaturama $y(0) = 21$ ali $y(0) = -15$, zunanjo temperaturo $y_{\text{zun}} = -5$ in parametrom $k = 0.1$. Kako velik (ali majhen) korak h je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri različnih vrednostih parametra k .

Dodatna naloga: temperatura prostora se lahko še dodatno spreminja zaradi denimo sončevega segrevanja skozi okna, s 24-urno periodo in nekim faznim zamikom δ , kar opišemo z dva- ali triparametrično enačbo

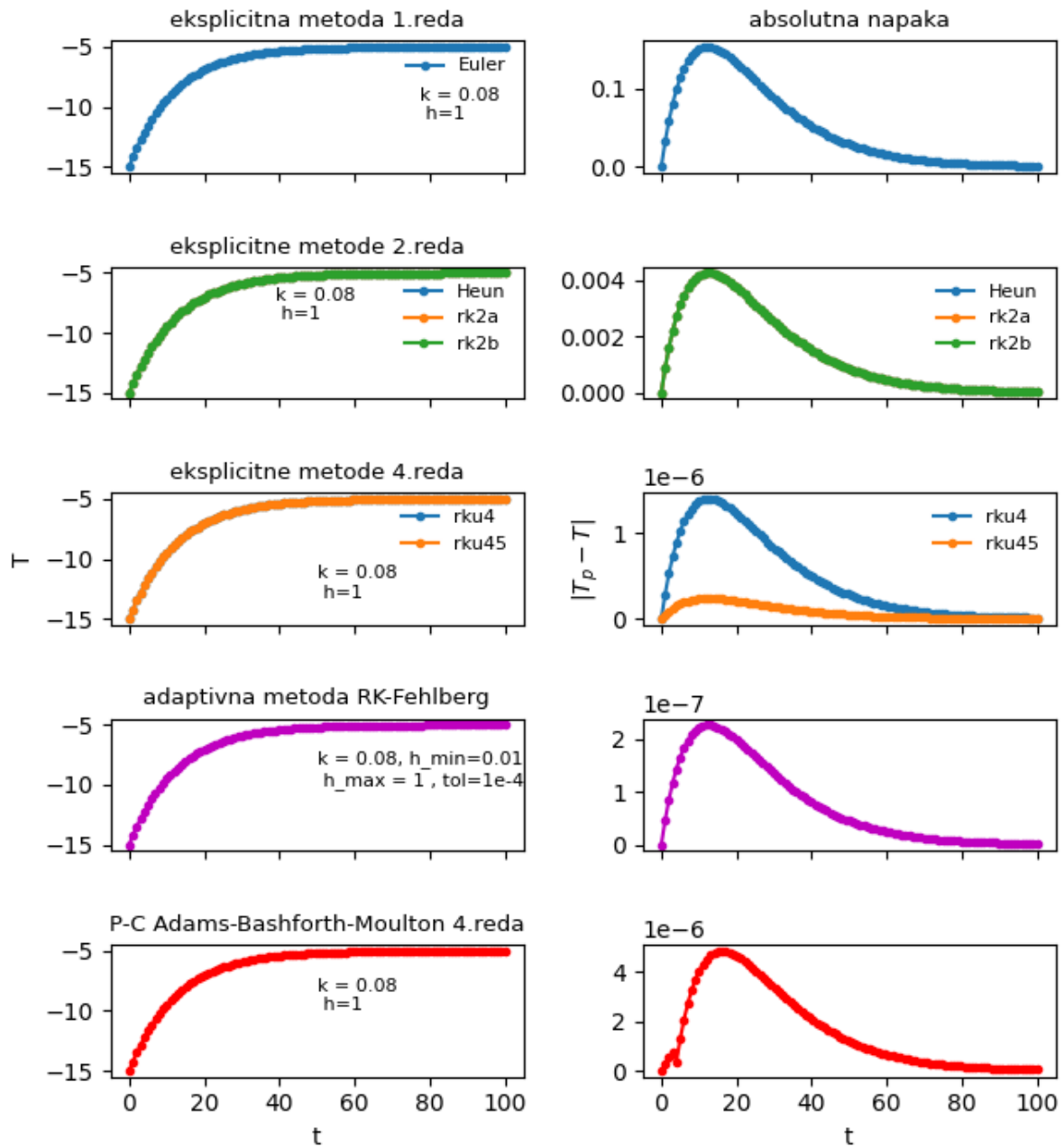
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{zun}}) + A \sin\left(\frac{2\pi}{24}(t - \delta)\right) .\tag{11}$$

3 Rezultati

Rešitev enačbe 1 lahko numerično dobimo z različno natančnimi in hitrimi metodami. Poznamo eksplcitne metode več redov, kjer se število redov šteje po številu klicov funkcije za izračun naslednjega koraka, implicitne metode, kjer običajno z polinomom predvidimo naslednjo točko in potem z korekcijo izboljšamo rezultat. Posebnost je adaptivna eksplcitna metoda, kjer se velikost koraka prilagaja, da dosežemo željeno natančnost. Rešitev enačbe 1 z različnimi metodami predstavljata sliki 1 in 2. Prikazana so tudi absolutna odstopanja od prave vrednosti. Natančnost metode je odvisna od dolžine koraka h . Metode višjih redov dosežejo večjo natančnost pri enaki dolžini koraka kot metode nižjih redov. Parameter k v enačbi nam določa hitrost približevanja k asimptotki temperaturi. Zunanja temperatura nam določa samo premik v y smeri. Če je zunanja temperatura nižja od notranje, potem imamo rešitev kot na sliki 1, če pa velja obratno potem toplota teče iz zunanosti proti notranosti in velja rešitev na sliki 2. Spreminjanje širine koraka in koeficienta 'dušenja' prikazujeta animaciji. Pri spreminjanju dolžine koraka opazim, da se napake z večanjem koraka večajo. Napake ohranjajo obliko do neke dolžine koraka, nato pa spremenijo obliko in metoda postane nestabilna. To prikazuje tudi primer oz. slika 3. Animacija, ki prikazuje spreminjanje koeficienta k kaže, da z večanjem vrednosti, kar bi fizikalno pomenilo, da dodajamo izolator, se zmanjševanje temperature upočasnjuje. Če je k majhen je to ekvivalentno materialu, ki dobro prevaja toploto.

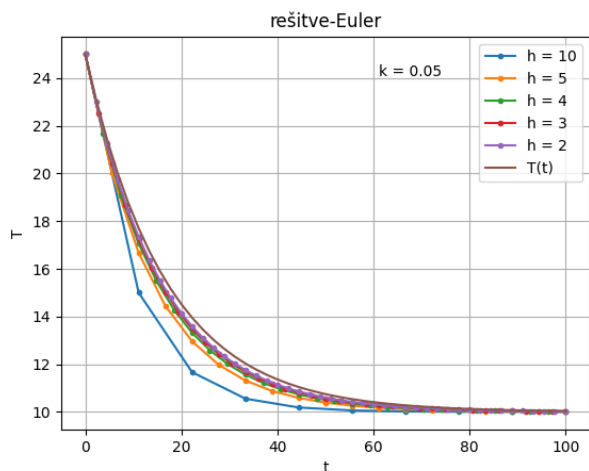


Slika 1: Numerična rešitev enačbe. $T(0) = 25$, $T_{\infty} = 10$. Na grafih je parameter h velikost koraka, k koeficient prevajanja, h_{\min} , h_{\max} in tol pa parametri adaptivne metode, ki določajo minimalni in maksimalni korak ter maksimalno lokalno napako.

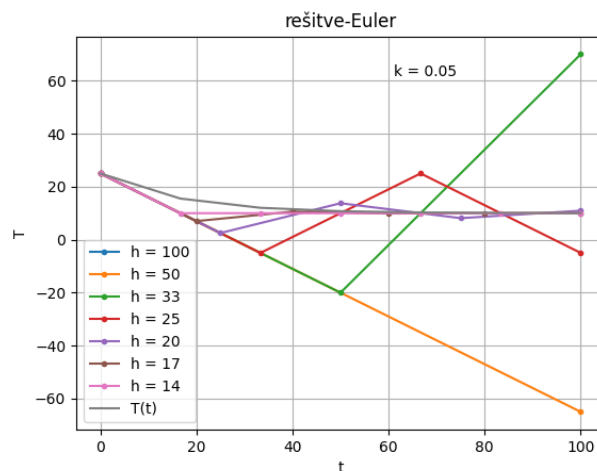


Slika 2: Numerična rešitev enačbe. $T(0) = -15$, $T_{zun} = -5$. Na grafih je parameter h velikost koraka, k koeficient prevajanja, h_{min} , h_{max} in tol pa parametri adaptivne metode, ki določajo minimalni in maksimalni korak ter maksimalno lokalno napako.

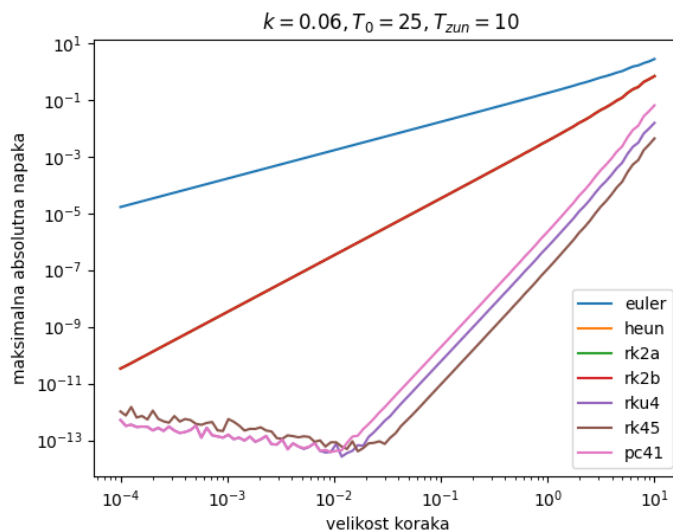
Natančnost in stabilnost metod je odvisna od velikosti koraka h . Za zgled sem vzel kar Eulerjevo metodo (slika 3 in 4) za katero velja $-2 < hk < 0$. V mojem primeru je $k = 0.05$, kar pomeni, da mora biti velikost koraka $h < 40$. Iz grafov opazim, da so nekatere rešitve pri koraku nižjem od 40 precej neuporabne. Metode pač pri določeni velikosti koraka ponorijo in postanejo neuporabne. Zanimivo se mi je zdelo tudi pogledati odstopanja metod od prave vrednosti v odvisnosti od velikosti koraka za različne metode. To lahko naredimo samo če poznamo analitično rešitev (5). Pričakoval bi, da se z zmanjševanjem koraka vedno bolj približujemo analitični vrednosti dokler ni korak okrog reda 10^{-16} in se zaradi numeričnih napak natančnost zmanjša. Iz grafa vidim, da metode višjih redov konvergirajo hitreje in dosežejo maksimalno natančnost pri relativno veliki velikosti koraka, nato pa se natančnost z zmanjševanjem koraka manjša. Za metode prvega in drugega reda pa se zdi, kot da bodo dosegle natančnost pri predvidenih vrednostih velikosti koraka.



Slika 3: Rešitev enačbe pri različnih dolžinah koraka h .



Slika 4: Rešitev enačbe pri različnih dolžinah koraka h .



Slika 5: Maksimalna absolutna napaka pri dani velikosti koraka.

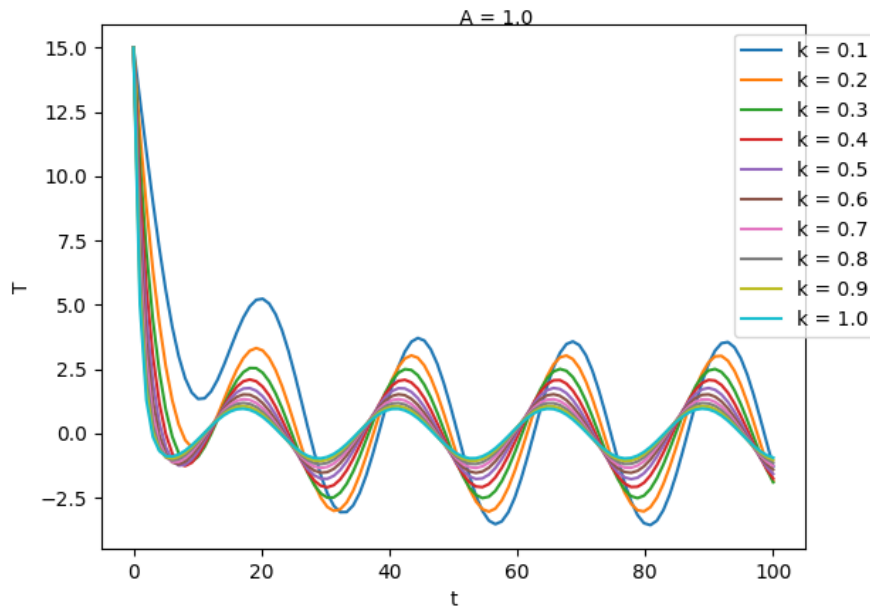
Preveril sem še časovno zahtevnost. Spreminjal sem število točk v intervalu in meril čas, ki ga porabi metoda, da pride do rešitve. Izkaže se, da ima premica zelo majhno strmino za prvih 10000 točk, zato sem vzel kar povprečje vseh časov pri danih korakih. Metode višjega reda so malce počasnejše, ampak še vedno enakega reda. Posebnost je adaptivna metoda RKF, kjer se korak prilagaja, dokler rešitev ne dožee zahtevane natančnosti, zato je tudi počasnejša.

metoda	$t[s]$
Euler	1.34e-04
Heun	2.23e-04
RK2a	2.33e-04
RK2b	2.23e-04
RK4	4.20e-04
RK45	8.57e-04
RKF	1.39e-03
PC4	3.37e-04

Tabela 1: Povprečni čas, ki ga potrebuje metoda za izračun rešitve.

3.1 Dodatna naloga

V diferencialni enačbi imamo še dodaten člen, ki predstavlja periodično gretje. Rešitev sem dobil z metodo RK45 (slika 6). Spreminjanje amplitude ob različnih vrednostih parametra k sem predstavil v animaciji, kot tudi spreminjanje amplitude in faze ob danih vrednostih k .



Slika 6: Rešitev enačbe 11. $T(0) = 15$, $T_{zun} = 0$, $\delta = 0.1$.

4 Zaključek

Namen naloge je bil, da se boljše spoznam z metodami reševanja enačb hoda. Različne metode imajo svoje prednosti in slabosti, odvisno od tega kaj potrebujemo. Za natančnost so boljše metode višjega reda, za hitrost pa preprostejše in manj natančne metode. Pri iskanju rešitve je treba biti pozoren na to, da se nahajamo v območju kjer je metoda stabilna, sploh če ne poznamo analitične rešitve.