UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

Matematično-fizikalni praktikum

5. naloga: Hitra Fourierova transformacija (FFT)

Žiga Šinigoj, 28191058

Ljubljana, november 2021

1 Uvod

Diskretno Fourierovo transformacijo smo definirali kot

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \exp(2\pi \mathrm{i} kn/N), \qquad k = -\tfrac{N}{2}, \ldots, \tfrac{N}{2},$$

oziroma

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} h_n, \qquad W_N = \exp(2\pi \mathrm{i}/N).$$

Ta postopek ima očitno časovno zahtevnost N^2. Račun pa je mogoče izvesti tudi z bistveno manj operacijami. Osnovni premislek je razcep

$$H_k = H_k^{\mathrm{sod}} + W_N^k H_k^{\mathrm{lih}} ,$$

kjer smo transformiranko H izrazili s transformacijama njenih sodih in lihih členov, pri čemer je vsota vsake od transformacij zdaj dolžine N/2. Gornjo relacijo lahko uporabljamo rekurzivno: če je N enak potenci števila 2, lahko rekurzijo razdrobimo do nizov, ki imajo samo še en člen. Zanj je transformacija identiteta. Za obrat pri eni vrednosti frekvence (pri danem m) je potrebno na vsakem koraku rekurzije le eno množenje s potenco W, korakov pa je $\log_2 N$. Skupna časovna zahtevnost je torej le še $N \log_2 N$.

Da ne iščemo pripadnikov niza po vsej tabeli, si podatke preuredimo. Lahko je pokazati, da je v prvotni tabeli treba med seboj zamenjati podatke, katerih vrstna števila v binarnem zapisu so obrnjena: v novem redu jemljemo člene kar po vrsti. Tudi potenc W ne izražamo vedno znova s sinusi in kosinusi, pač pa jih računamo z rekurzijo. Tak ali podoben postopek je osnova vseh algoritmov hitre Fourierove transformacije (FFT).

Z neko transformacijo iz družine FFT bomo izračunali korelacijsko funkcijo dveh signalov. Korelacija periodičnih funkcij $g(t)$ in $h(t)$ s periodo T je definirana kot:

$$\varphi_{gh}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t+\tau)\, h(t)\, \mathrm{d}t ,$$

oziroma diskretno

$$\varphi_{gh}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g_{k+n}\, h_k .$$

Računamo torej skalarni produkt funkcij, ki sta časovno premaknjeni za τ oziroma n. Če je za določeno vrednost premika ta funkcija višja kot v okolici, potem to pomeni, da sta si funkciji podobni, le da ju je treba premakniti, da se to vidi.

V primeru, da sta funkciji (signala), ki ju primerjamo, enaki, računamo njuno *avtokorelacijsko funkcijo*: ta je mera za to, ali signal ostaja s pretekanjem časa sam sebi podoben. Če je signal slabo koreliran (sam s sabo), korelacija $\varphi_{hh}(n)$ relaksira h kvadratu povprečnega signala $\langle h \rangle^2$, kjer je

$$\langle h \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k .$$

Iz lokalnih maksimov v avtokorelacijski funkciji sklepamo na periodičnosti, bodisi popolne ali približne. Pri periodičnih signalih je tudi avtokorelacijska funkcija striktno periodična, za stohastične procese pa je značilna eksponentna avtokorelacijska funkcija. še bolj nas zanima, kako *hitro* se korelacija izgublja: računamo rajši reskalirano obliko avtokorelacije

$$\widetilde{\varphi}_{hh}(n) = \frac{\varphi_{hh}(n) - \langle h \rangle^2}{\varphi_{hh}(0) - \langle h \rangle^2} ,$$

kjer je imenovalec nekakšno merilo za varianco signala,

$$\sigma^2 = \varphi_{hh}(0) - \langle h \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (h_k - \langle h \rangle)^2 \ .$$

Pri zgornjih enačbah moramo še "peš" poskrbeti za periodično zaključenost signala pri $n = N$, torej da je perioda enaka velikosti vzorca. Če tega ne moremo narediti, je bolj pravilna definicija avtokorelacije

$$\varphi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} h_{k+n}\, h_k \ .$$

Praktičen račun po zgornji formuli lahko postane za velike vzorce prezamuden. Avtokorelacijo rajši računamo s FFT (DFT) $\mathcal{F}$, saj je korelacija obratna Fourierova transformacija $\mathcal{F}^{-1}$ produkta Fourierovih transformacij $\mathcal{F}$, torej z $G = \mathcal{F}g$ in $H = \mathcal{F}h$ dobimo

$$\varphi_{gh}(n) = \frac{1}{N-n} \mathcal{F}^{-1} \left[G \cdot (H)^* \right]$$

oziroma

$$\varphi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \mathcal{F}^{-1} \left[\, |H|^2 \, \right] \ .$$

Za račun s FTT signale dolžine N najprej prepišemo v dvakrat daljše, periodično zaključene podatkovne nize, $\widetilde{h}_n = h_n$, $\widetilde{h}_{n+N} = 0$ za $n = 0, \ldots, N-1$ in $\widetilde{h}_{n+2N} = \widetilde{h}_n$. Tedaj se avtokorelacija zapiše v obliki

$$\varphi_{hh}(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{2N-1} \widetilde{h}_{k+n}\, \widetilde{h}_k \ ,$$

kar lahko izračunamo s FFT.

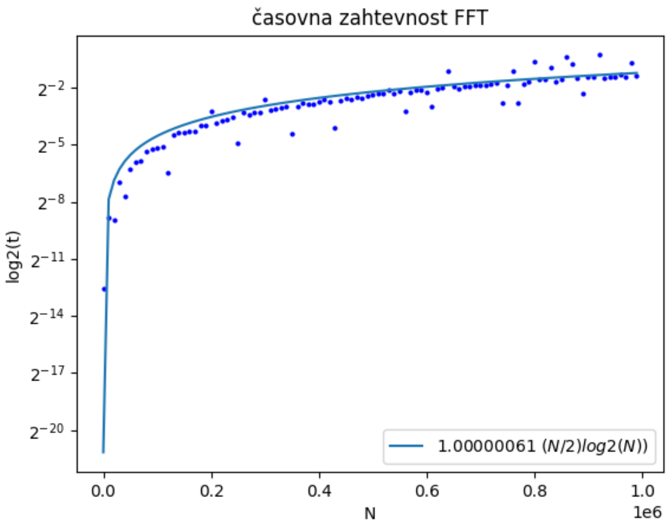
2 Naloga

Na spletni strani MF praktikuma najdeš posnetke oglašanja velike uharice, naše največje sove. Posneti sta dve sovi z minimalnim ozadjem (`bubomono` in `bubo2mono`) in nekaj mešanih signalov, ki zakrivajo njuno oglašanje (`mix`, `mix1`, `mix2` in `mix22`). V signalih `mix2` in `mix22` je oglašanje sove komaj še zaznavno. Izračunaj avtokorelacijsko funkcijo vseh signalov in poskusi ugotoviti, za katero sovo gre pri teh najbolj zašumljenih signalih!

3 Rezultati

3.0.1 Časovna zahtevnost FFT

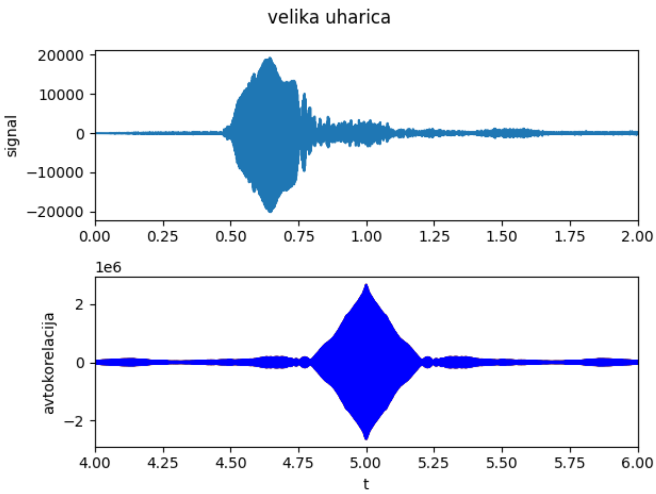
Najprej sem želel pogledati, če se teorija ujema z prakso. Po teoriji je časovna zahtevnost FFT $N/2\ log_2 N$. Pri računanu FFT sem uporabljal fft metodo iz programskega paketa $SciPy$ v Pythonu (slika 1). Iz danega grafa vidim, da to drži, odstopanja na decimalnih mestih bi bila manjša, če bi vzel večjo gostoto in število členov.



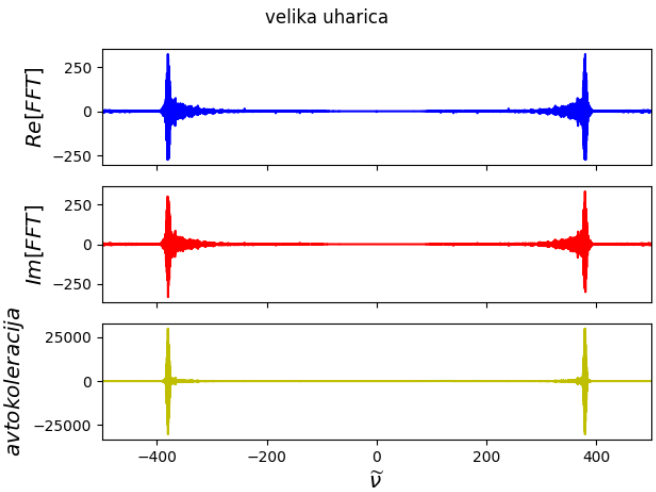
Slika 1

3.1 Velika uharica

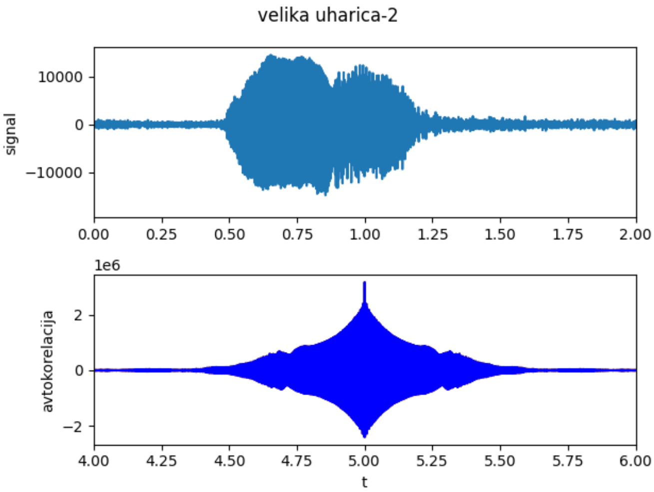
Za izračun Fourierove transformacije sem uporabil fft funkcijo iz $SciPy$, za izračun koleracije sem uporabil svojo implementirano funkcijo in $signal.correlate$ prav tako iz knjižnice $SciPy$. Pri moji implementaciji sem dodal še zero-padding, da se frekvenčni spektri ne prekrivajo.
Spodnji grafi prikazujejo na levi strani časovno sliko signala in avtokoleracijo, na desni pa signal in avtokoleracijo v frekvenčnem spektru. Z uporabo avtokoleracije se znebimo šuma v signalu. Ker množimo dve enaki premaknjeni funkciji in integriramo, izločimo vse naključne signale. Veliko lažje je če to naredimo preko Fourierove transformacije, saj je v splošnem potrebno samo množiti funkcijo v frekvenčnem spektru z konjugirano vrednostjo in jo transformirati nazaj. V frekvenčnem spektru dobimo tako samo realni del signala. Čeprav je veliko lažje ugotoviti za katero sovo gre v frekvenčnem spektru mislim, da to nekako pokaže tudi avtokoleracija v času. Pri uharici z višjim tonom je očiščen signal bolj stisnjen kar pomeni, da je 'povprečna' valovna dolžina signala manjša in s tem večja frekvenca. Pri veliki uharici 2, pa je signal bolj razširjen in velja ravno obratno. Seveda pa se frekvenca glasu sove bolje vidi v očiščenem frekvenčnem spektru.



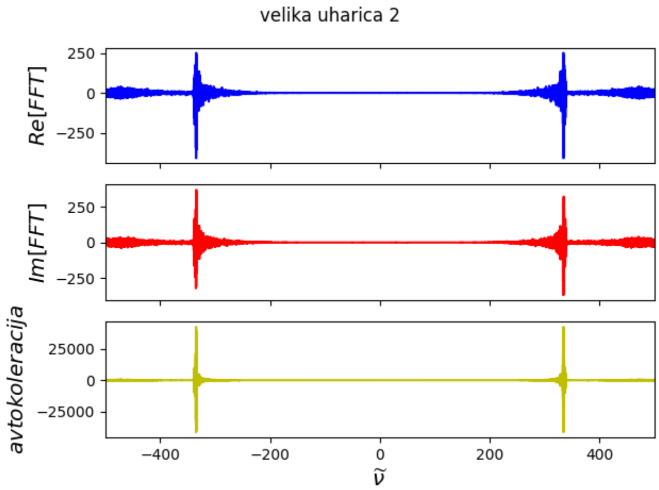
Slika 2



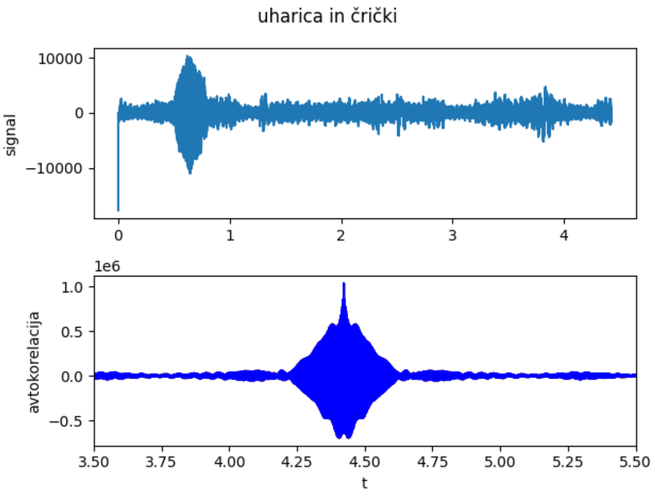
Slika 3



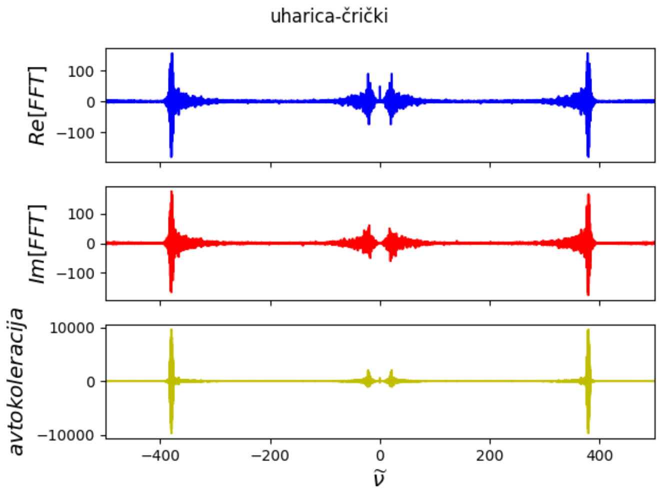
Slika 4



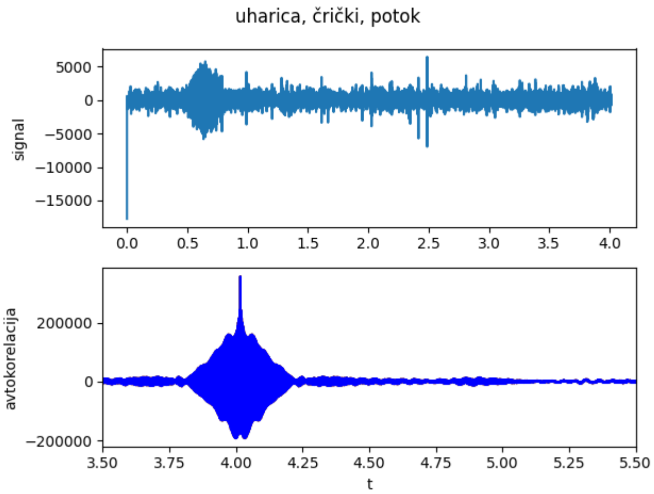
Slika 5



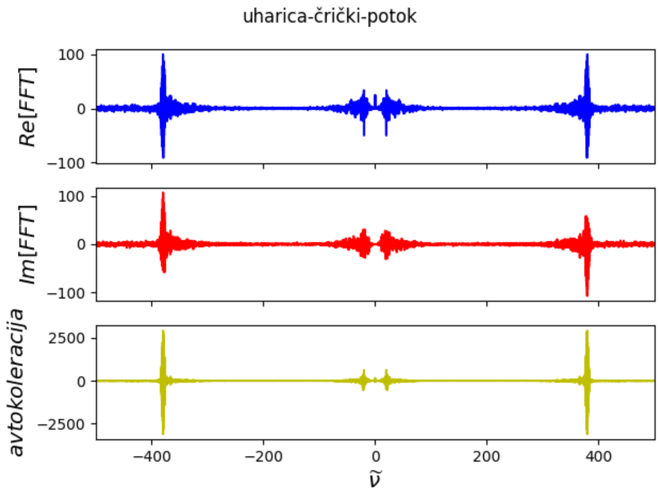
Slika 6



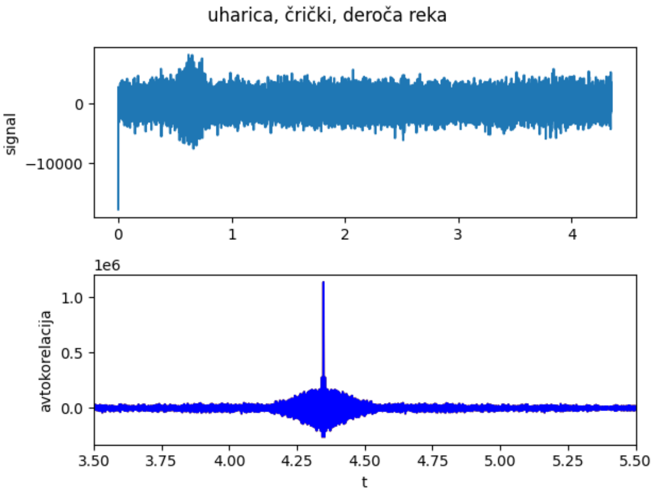
Slika 7



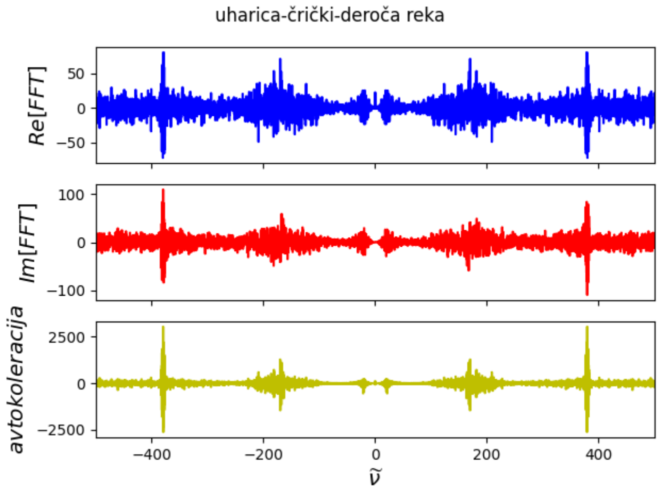
Slika 8



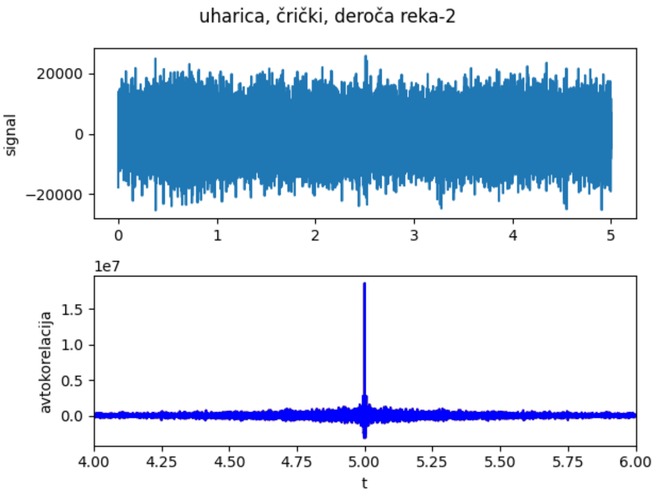
Slika 9



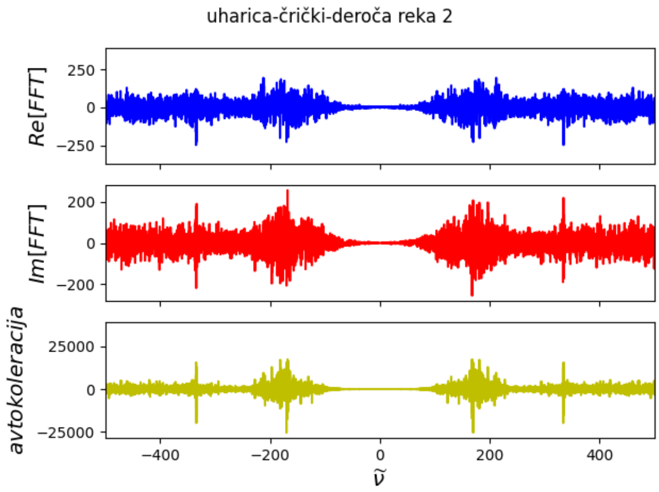
Slika 10



Slika 11

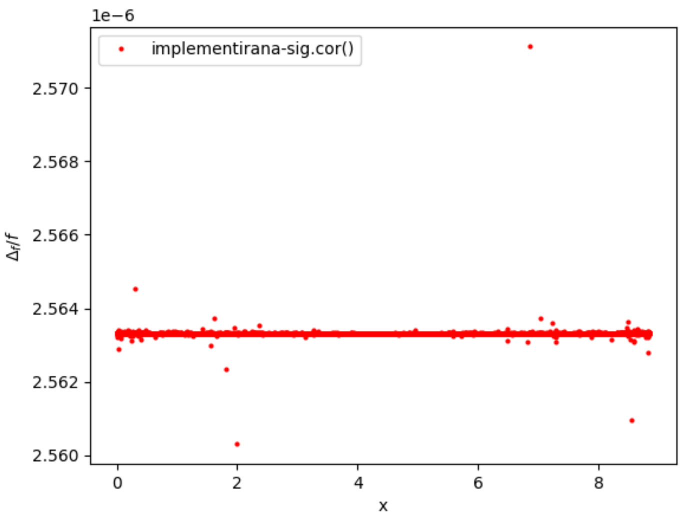


Slika 12



Slika 13

Oglejmo si še relativno napako implementirane funkcije za avtokoleracijo (slika 14). Za pravo vrednost sem vzel vrednosti, ki jih da *signal.correlate*().



Slika 14

3.2 Zaključek

Hitra fourierova transformacija je zaradi časovne zahtevnosti zelo uporabna. Z njo lahko računamo transformacije pri velikh frekvencah vzorčenja realnih signalov, kar pa ne nujno velja za ostale metode. Z avtokoleracijo lahko izluščimo željen spekter signala in se znebimo odvečnega šuma. Pri transformacijah je potrebno paziti na zasuk podatkov, da dobimo prave slike v časovnem in frekvenčnem spektru.