UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I

1. naloga: Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, oktober 2022

1 Uvod

Za nalogo je bilo potrebno preučiti, kako izgleda varčna vožnja, pri kateri poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč. Varčno vožnjo dosežemo z minimizacijo kvadrata komulativnega kvadrata pospeška

$$\int_0^{t_0} a^2(t)\,dt = min, \tag{1}$$

kjer je t_0 čas do prižiga zelene luči na semaforju. Z l_0 bom označil razdaljo do semaforja ob času $t = 0$. Torej mora veljati

$$\int_0^{t_0} v(t)\,dt = l_0, \tag{2}$$

Iščemo optimalni način vožnje, da bo poraba goriva najmanjša in udobnost vožnje največja, pri tem pa moramo upoštevati zahtevo, da v času t_0 opravimo pot l_0. Matematično to opišemo s iskanjem mimimuma funkcionala

$$F(v) = \int_0^{t_0} \mathcal{L}(t, v, \dot{v})\,dt = min \tag{3}$$

, kjer je $\mathcal{L}$ Lagrangeova funkcija, ki poleg kvadrata pospeška vsebuje še vez(2)

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 - \lambda v \tag{4}$$

Z variacijo funkcionala lahko poiščemo njegov ekstrem.

2 Brezdimenzijska oblika in osnovna rešitev

Prepišimo problem v brezdimenzijsko obliko. Uvedemo lahko brezdimenzijske količine

$$\tilde{l} = \frac{l}{l_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}$$

, kjer je $v_0 = \frac{l_0}{t_0}$ in predstavlja trivialno rešitev problema - enakomerno hitrost, s katero moramo voziti, da prevozimo semafor ob prižigu zelene luči. Pogoja 1 in 2 se tako prepišeta v

$$\int_0^1 \tilde{v}(\tilde{t})\,d\tilde{t} = 1, \qquad \frac{v_0^2}{t_0}\int_0^1 \dot{\tilde{v}}^2(\tilde{t})\,d\tilde{t} = min$$

Konstantni faktor pred integralom kvadrata pospeška ne vpliva na minimizacijo integrala, zato lahko zapišemo brezdimenzijski $\tilde{\mathcal{L}}$ kot

$$\tilde{\mathcal{L}} = \dot{\tilde{v}}^2 - \lambda\tilde{v}. \tag{5}$$

Minimum funkcionala dobimo z Euler-Lagrangevo enačbo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\tilde{v}}} - \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\tilde{v}} = 0, \tag{6}$$

iz katere dobimo diferencialno enačbo

$$\ddot{\tilde{v}} = -\frac{\lambda}{2}.$$

Splošna rešitev je oblike

$$\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}) = -\frac{\lambda\tilde{\mathrm{t}}^2}{4} + A\tilde{\mathrm{t}} + B.$$

Na začetku velja $\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}} = 0) = \tilde{v}_1$. Na semaforju pa lahko zahtevamo, da je odvod hitrosti nič ali pa postavimo omejitev hitrosti

$$\dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathrm{t}} = 1) = 0 \qquad \tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}} = 1) = \tilde{v}_2. \tag{7}$$

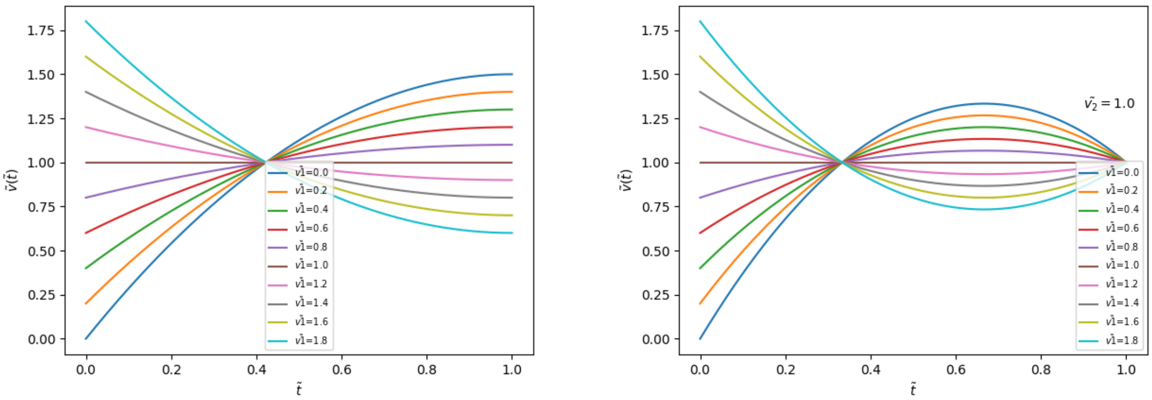
V obeh primerih imamo skupaj z začetnim pogojem in vezjo 3 enačbe za 3 neznane parametre. Ko rešimo sistem enačb, dobimo rešitev za poljubno končno hitrost

$$\tilde{v}(t) = -\frac{3}{2}(1 - \tilde{v}_1)\tilde{\mathrm{t}}^2 + 3(1 - \tilde{v}_1)\tilde{\mathrm{t}} + \tilde{v}_1, \tag{8}$$

in rešitev, če omejimo hitrost na semaforju

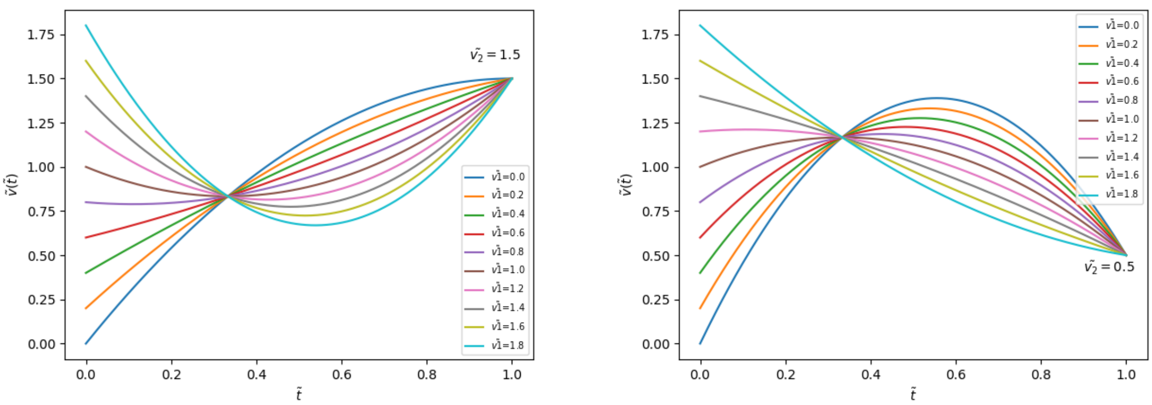
$$\tilde{v}(t) = -3(2 - \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\tilde{t}^2 + 2(3 - 2\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\tilde{t} + \tilde{v}_1, \tag{9}$$

Optimalne hitrostne profile za različne začetne hitrosti, pri ničelnem pospešku na semaforju, prikazuje slika 1(a). Vse rešitve imajo en vozel. V primeru ko imamo na semaforju radar (slika 1(b), 2)) pa lahko spreminjamo začetno in končno hitrost na semaforju. V tem primeru imajo vse rešitve po dva vozla. Ploščina pod vsako krivuljo mora biti enaka 1.



(a) (b)

Slika 1: a)Hitrostni profili pri različnih začetnih hitrostih $\tilde{v}_1$, pri poljubni končni hitrosti. b)Hitrostni profili pri različnih začetnih hitrostih $\tilde{v}_1$, pri omejitvi hitrosti na radarju ($\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$).



(a) (b)

Slika 2: Hitrostni profili pri različnih začetnih hitrostih $\tilde{v}_1$, pri omejitvi hitrosti na radarju ($\tilde{v}_2$).

3 Drugačna oblika funkcionala

Poglejmo si sedaj rešitve, če vzamemo tudi višje potence pospeška. Fizikalno so zanimive samo sode potence, saj je bi nam minimizacija lihih potenc omogočila vožnjo vzvratno, kar pa je prepovedano. Lagrangeova funkcija je tako oblike

$$\tilde{\mathcal{L}} = \dot{\tilde{v}}^{2p} - \lambda\tilde{v}. \tag{10}$$

Pripadajoča E-L enačba nam da

$$2p(2p-1)\dot{\tilde{v}}^{2p-2}\ddot{\tilde{v}} + \lambda = 0, \tag{11}$$

enačbo lahko z uvedbo nove spremenljivke $\dot{\tilde{v}} = u$, $du = \ddot{\tilde{v}} d\tilde{\mathrm{t}}$ integriramo

$$\int \tilde{u}^{2p-2} \mathrm{d}u = -\int \frac{\lambda}{4p^2 - 2p} d\tilde{\mathrm{t}} \tag{12}$$

in dobimo

$$u^{2p-1} = -\frac{\lambda \tilde{\mathrm{t}}}{2p} + A. \tag{13}$$

Enačbo še enkrat integriramo in dobimo hitrostni profil

$$\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}) = -\frac{2p-1}{\lambda} \left(A - \frac{\lambda \tilde{\mathrm{t}}}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + B. \tag{14}$$

Sedaj je potrebno vstaviti robne pogoje, da določimo konstante A, λ, B. Robna pogoja in vez sta

$$\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}} = 0) = \tilde{v}_1, \qquad \dot{\tilde{v}}(\tilde{\mathrm{t}} = 1) = 0, \qquad \int_0^1 \tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}) \, d\tilde{\mathrm{t}} = 1. \tag{15}$$

Iz robnih pogojev dobimo

$$B = \tilde{v}_1 + \frac{2p-1}{\lambda} A^{\frac{2p}{2p-1}}, \qquad A = \frac{\lambda}{2p}. \tag{16}$$

Konstanto λ dobimo iz vezi

$$\int_0^1 \tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}) \, d\tilde{\mathrm{t}} = 2^{\frac{1}{1-2p}} \left(\frac{\lambda}{p} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \frac{2p-1}{4p-1} + \tilde{v}_1 = 1 \tag{17}$$

Po nekaj poenostavljanja dobimo končni rezultat

$$\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}) = \tilde{v}_1 + \frac{(4p-1)}{2p} (1 - \tilde{v}_1) \left(1 - (1 - \tilde{\mathrm{t}})^{\frac{2p}{2p-1}} \right). \tag{18}$$

Hitrostni profil pri različnih vrednostih parametra p in različnih začetnih hitrostih prikazuje slika 3(a). Zanimivo bi bilo pogledati, kako se spreminja ukrivljenost hitrosti kot funkcija parametra p. Ukrivljenost v neki točki na krivulji dobimo kot

$$\kappa(\tilde{\mathrm{t}}) = \frac{\ddot{\tilde{v}}(\tilde{\mathrm{t}})}{(1 + \dot{\tilde{v}}^2(\tilde{\mathrm{t}}))^{\frac{3}{2}}} \tag{19}$$

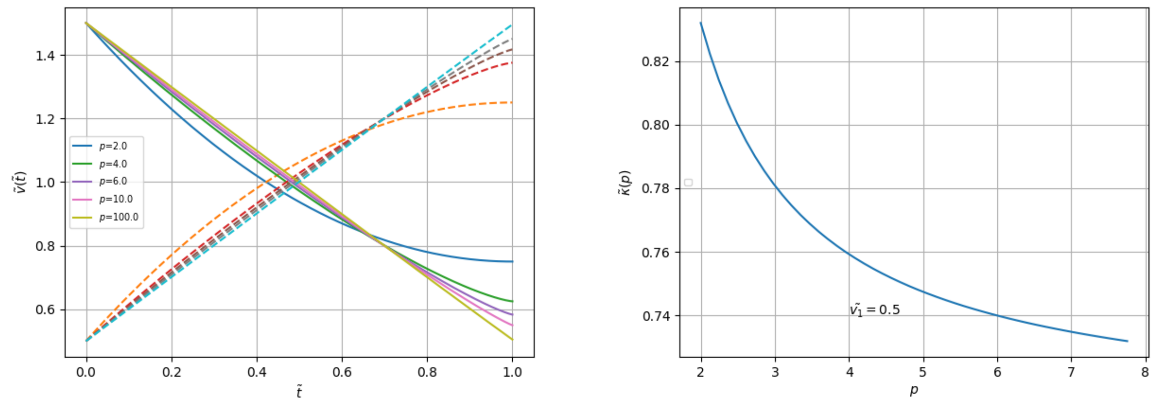
Za merilo ukrivljenosti celotne krivulje sem vzel

$$\tilde{\kappa} = \int_0^1 \kappa(\tilde{\mathrm{t}}) \, d\tilde{\mathrm{t}} \tag{20}$$

Kumulativno ukrivljenost v odvisnosti od parametra p prikazuje slika 3(b). Kumulativno ukrivljenost sem lahko izračunal samo za nekaj začetnih vrednosti parametra p, saj začne integral hitro divergirati. Mogoče bi bilo bolj smiselno vzeti kakšen drug kriterij ali pa računati diskretno (vsota) - izračun ukrivljenosti iz 3 sosednjih točk, kjer bi prispevale samo točke, ki so ukrivljene. Poglejmo še limito $p \to \infty$

$$\lim_{p\to\infty} \tilde{v} = \tilde{v}_1 + \frac{1}{2} \lim_{p\to\infty} \left(4 + \frac{1}{p} \right) (1 - \tilde{v}_1) \left(1 - (1 - \tilde{\mathrm{t}})^{\lim_{p\to\infty} \left(\frac{2p}{p(2-1/p)} \right)} \right) = \tilde{v}_1 + 2(1 - tv_1)\tilde{\mathrm{t}}. \tag{21}$$

V limiti dobimo enakomerno gibanje.



(a) (b)

Slika 3: a)Hitrostni profili pri različnih vrednostih parametra p. Črtkane krivulje prikazujejo profil pri začetni hitrosti $\tilde{v_1} = 0.5$, polne krivulje pa profil pri začetni hitrosti $\tilde{v_1} = 1.5$. b)Kumulativna ukrivljenost kot funkcija parametra p.

4 Omejitev velikosti hitrosti

Če želimo omejiti velikost hitrosti, dodamo v Lagrangeovo funkcijo kvadratni člen

$$\tilde{\mathcal{L}} = \dot{\tilde{v}}^2 + C\tilde{v}^2 - \lambda\tilde{v}, \tag{22}$$

iz Euler-Lagrangeovih enačb dobimo

$$2\ddot{\tilde{v}} - 2C\tilde{v} + \lambda = 0. \tag{23}$$

V stacionarnem stanju ima enačba rešitev

$$\tilde{v} = \frac{\lambda}{2C}, \tag{24}$$

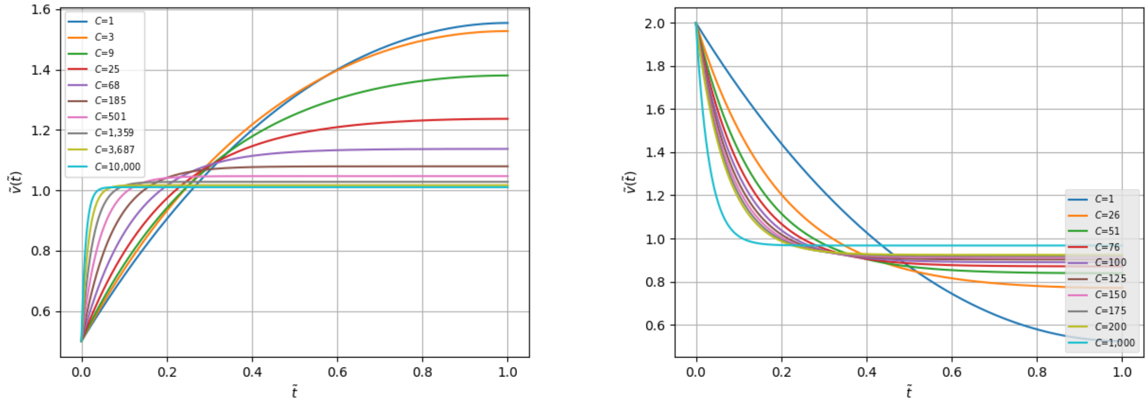
za splošno obliko rešitve pa uporabimo nastavek

$$\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}) = \frac{\lambda}{2C} + Ae^{\sqrt{C}\tilde{\mathrm{t}}} + Be^{-\sqrt{C}\tilde{\mathrm{t}}}. \tag{25}$$

Ker smo omejili tudi velikost hitrosti, je zanimiv samo robni pogoj, kjer imamo ničeln pospešek na semaforju. Če imamo omejeno hitrost na semaforju, bo ob enaki začetni in končni hitrosti krivulja konstanta. Če sta začetna in končna hitrost različni, bosta ekstrema hitrosti v robnih točkah.
Ob enakih zahtevah kot v (15) dobimo iskane parametre λ, A, B

$$\begin{aligned}
B &= \tilde{v}_1 - \frac{\lambda}{2C} - A \\
A &= \frac{2C^{3/2}e^{\sqrt{C}} - \lambda + e^{\sqrt{C}}\lambda - \sqrt{C}e^{\sqrt{C}}\lambda + 2C\tilde{v}_1 - 2Ce^{\sqrt{C}}\tilde{v}_1}{2C(-1+e^{\sqrt{c}})^2} \\
\lambda &= \frac{2C\sqrt{C}(e^{2\sqrt{C}}+1) + \tilde{v}_1 - e^{2\sqrt{C}}\tilde{v}_1}{e^{2\sqrt{C}}(\sqrt{C}-1) + 1 + \sqrt{C}}
\end{aligned}$$

Ob dodatnem členu v Lagrangeovi funkciji smo dobili poleg začetne hitrosti še prosti parameter C. Večji kot je parameter C, manjša bo končna hitrost avtomobila. Posledično bo večji pospešek, saj vsako poznejše prečkanje osi $\tilde{v}_1 = 1$ pomeni večjo končno hitrost. Če želimo minimizirati velikost hitrosti je nujno hitro približevanje hitrosti $\tilde{v}_1 = 1$ (slika 4). V limiti ko gre $C \to \infty$ bi dobili Heavisidovo funkcijo. Pospešek bi bil neskončen, kar definitivno ni udobna vožnja.



(a) (b)

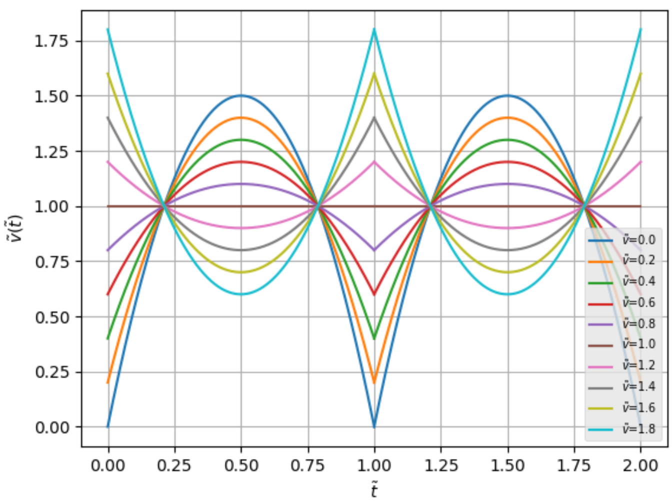
Slika 4: a)Hitrostni profili pri začetni hitrosti $\tilde{v}_1 = 0.5$ in različnih vrednostih parametra C. Hitrostni profili pri začetni hitrosti $\tilde{v}_1 = 2.0$ in različnih vrednostih parametra C.

5 Zaporedni semaforji

Obravnavajmo vožnjo skozi zaporedne semaforje, ki so na enakih medsebojnih razdaljah l_0. Vsi naj gorijo zeleno ob času t_0. Uporabimo lahko osnovno rešitev za radar (9), pri čemer uporabimo periodične robne pogoje $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$ in dobimo rešitev

$$\tilde{v}(t) = -6(1 - \tilde{v}_1)\tilde{\mathrm{t}}^2 + +(1 - \tilde{v}_1)\tilde{\mathrm{t}} + \tilde{v}_1, \tag{26}$$

Kot je razvidno iz slike (5) je pospešek nezvezen v robnih točkah. Če želimo zveznost moramo pripisati še periodični robni pogoj za odvod hitrosti na robu. Težava je, da dobimo iz osnovnega Lagrangeiana (4) diferencialno enačbo drugega reda. Iz rešitve sledijo 3 prosti parametri, kjer uporabimo 2 robna pogoja in vez, da jih določimo.



Slika 5: Hitrostni profil v primeru, ko imamo zaporedne semaforje, pri različnih začetnih hitrostih.

Če dodamo še robna pogoja za pospešek, imam 4 robne pogoje in vez, kar pomeni da potrebujemo diferencialno enačbo 4. reda. Ker je hitrost v zgornjem primeru nezvezna funkcija ima pospešek velike spremembe v robnih točkah. V ta namen, bi bilo dobro minimizirati spremembe pospeška. Lagrangeianu dodamo člen, ki nas pripelje do enačbe 4. reda in minimizira spremembe pospeška

$$\tilde{\mathcal{L}} = \ddot{\tilde{v}}^2 + \dot{\tilde{v}}^2 + \tilde{v}^2 - \lambda\tilde{v} \tag{27}$$

Iz E-L enačb dobimo diferencialno enačbo 4. reda

$$\tilde{v}^{(4)} + \tilde{v}^{(2)} + \tilde{v} = \lambda/2, \tag{28}$$

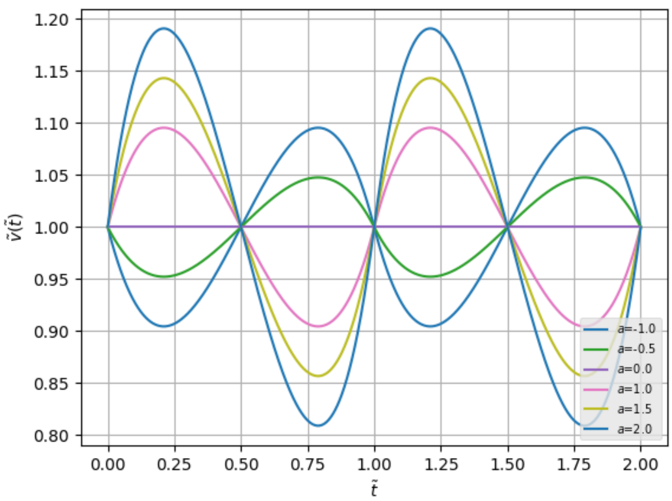
ki ima rešitev

$$\tilde{v} = \frac{\lambda}{2} + Ae^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\mathrm{t}}}\cos(\tilde{\mathrm{t}}/2) + Be^{\frac{-\sqrt{3}}{2}\tilde{\mathrm{t}}}\cos(\tilde{\mathrm{t}}/2) + Ce^{\frac{-\sqrt{3}}{2}\tilde{\mathrm{t}}}\sin(\tilde{\mathrm{t}}/2) + De^{\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\mathrm{t}}}\sin(\tilde{\mathrm{t}}/2). \tag{29}$$

Uporabimo robne pogoje in vez

$$\tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}=0) = \tilde{v}_1 = \tilde{v}(\tilde{\mathrm{t}}=1), \qquad \tilde{a}(\tilde{\mathrm{t}}=0) = a_1 = \tilde{a}(\tilde{\mathrm{t}}=1), \qquad \int_0^1 \tilde{v}(\tilde{t})\, d\tilde{t} = 1, \tag{30}$$

da dobimo vrednosti konstant A,B,C,D,λ. Sistem enačb sem rešil s programom *Mathematica* in dobil numerične vrednosti. Sedaj lahko nastavljamo pospešek v začetni oz. končni točki. Rešitev vožnje za zaporedne semaforje prikazuje slika 6.



Slika 6: Hitrostni profil v primeru, ko imamo zaporedne semaforje, pri različnih začetnih pospeških.

6 Zaključek

Pri nalogi smo spoznali osnove variacijskega računa in njegovo uporabnost. Način vožnje skozi semafor se razlikuje, glede na naše zahteve. Za udobno vožnjo je potrebno paziti na zveznost hitrosti in tudi pospeška.