

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I
11. naloga: Optimalno filtriranje

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, januar 2023

1 Rekonstrukcija poti in hitrosti vozila s Kalmanovim filtrom

Veliko bolj natančno kot samo z GPS podatki lahko določim oziroma rekonstruiram pot vozila, če uporabim Kalmanov filter. Celoten opis Kalmanovega filtra je že v navodilih, sam bom izpisal samo relevantne podatke, ki sem jih uporabil v nalogi. Vektor stanja je

$$\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, v_{x,n}, v_{y,n})^T, \quad (1)$$

kontrolni vektor:

$$\mathbf{c}_n = (a_{x,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{y,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{x,n} \Delta t, a_{y,n} \Delta t)^T. \quad (2)$$

Kovariančna matrika modelskega šuma je

$$Q = Q_n = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} \frac{\Delta t^4}{4} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \frac{\Delta t^3}{2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} \frac{\Delta t^3}{2} & \mathbb{1}_{2 \times 2} \Delta t^2 \end{bmatrix} \sigma_a^2, \quad (3)$$

kjer je $\sigma_a = 0.05 m s^{-2}$. Kovariančna matrika detektorskega šuma je kar diagonalna

$$R_n = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{x,y}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{v,n}^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

kjer je absolutna napaka položaja $\sigma_{x,y} = 25 m$ in napaka hitrosti $\sigma_{v,n} = \max\{0.01 v_n, 1 km/h\}$. Za začetni vektor stanja sem vzel začetne meritve, začetna kovariančna matrika pa je

$$P_0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{r,0}^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma_{v,0}^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

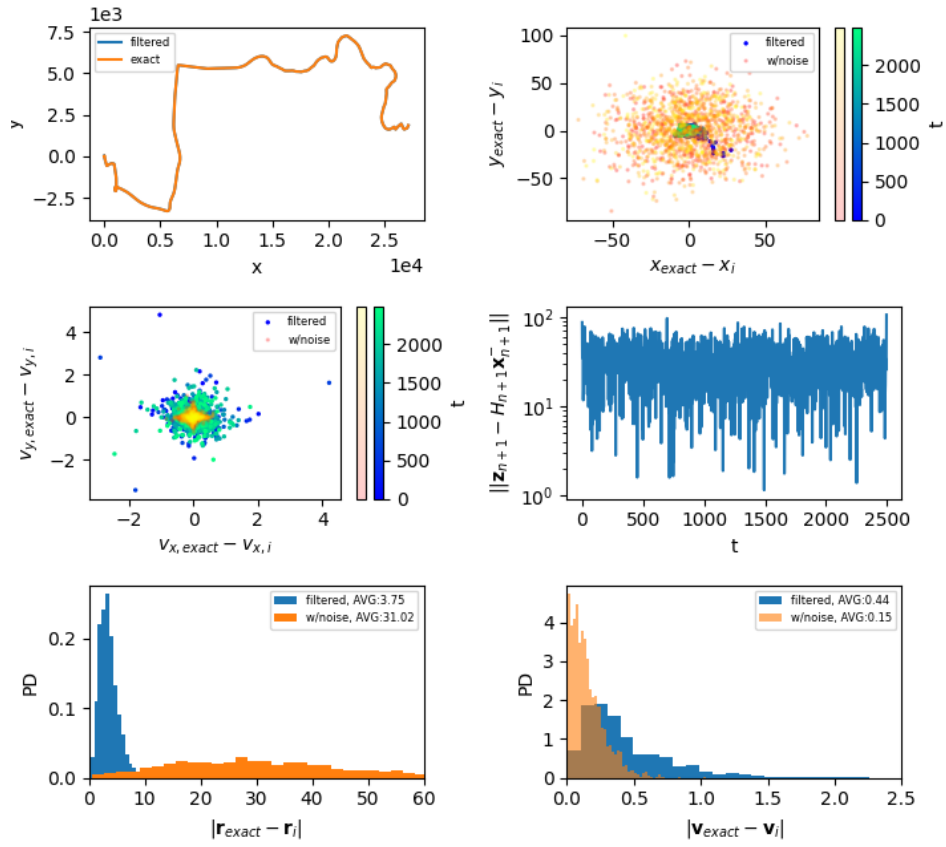
kjer je $\sigma_{r,0} = 10 m$ in $\sigma_{v,0} = \sqrt{5} m/s$. V napovedi modela sem upošteval tudi vektor Gaussovega šuma $\mathbf{w}_n \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, Q)$.

OPOMBA: Ko bom razpravljal o rezultatih bom grafe indeksiral kot matrične elemente, npr. slika 1(0,0) predstavlja graf v zgornjem levem kotu na sliki 1, slika 1(2,0) predstavlja graf v spodnjem levem kotu itd.

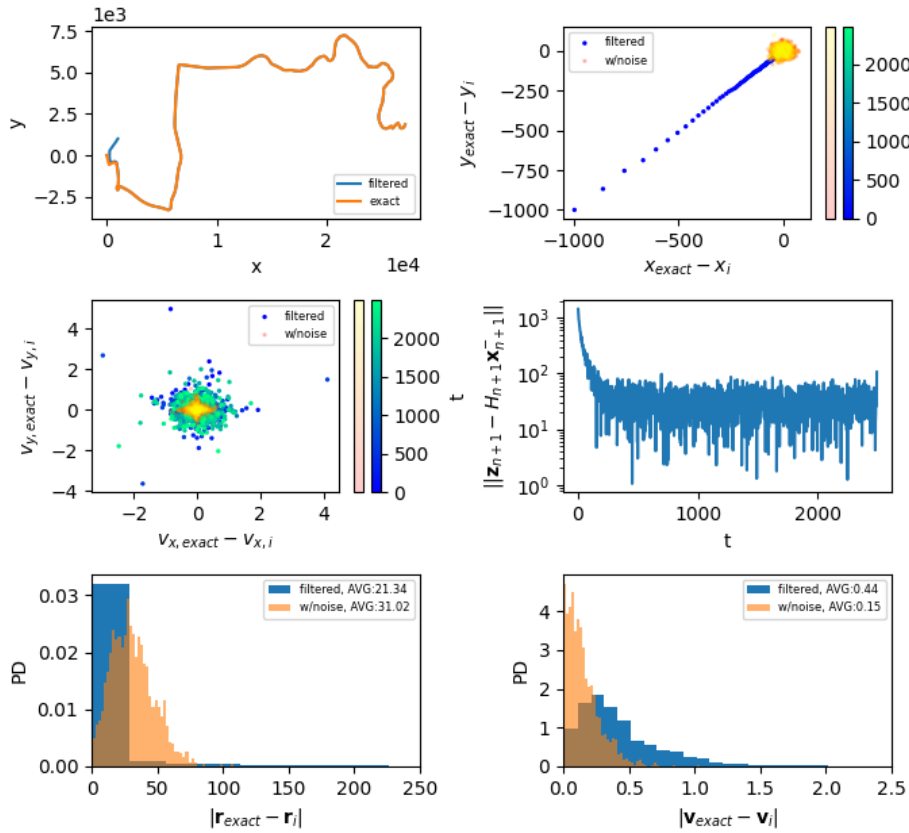
1.1 S podanimi podatki o lokaciji, hitrosti in pospeški

Najprej sem filtriral primer, kjer sem imel na voljo vse meritve (položaj, hitrost, pospešek). Rezultati filtriranja so prikazani na sliki 1,3,4. Ko uporabim vse možne meritve dobim najbolj natančne rezultate. Slika 1(0,0) prikazuje točno rešitev in filtrirano rešitev. Na tako veliki skali ne vidimo morebitnih odstopanj, zato je smiselno pogledati odstopanja od pravih rešitev. Odstopanja položajev in hitrosti od pravih vrednosti v odvisnosti od časa prikazujeta grafa 1(0,1) in 1(1,0). Vidim lahko očitno razliko v natančnosti, če uporabim filter in če uporabim samo zašumljene GPS podatke. Filtrirani podatki na začetku odstopajo vendar hitro padejo v območje minimalnega odstopanja. Veliko nam pove tudi histogram odstopanj položajev in hitrosti 1(2,0), 1(2,1). Pričakovana vrednost odstopanja od pravilne rešitve se bistveno zmanjša v primeru položaja vozila, skoraj za deset krat. V primeru hitrosti pa Kalmanov filter nekoliko poslabša natančnost, saj je pričakovana vrednost odstopanja velikosti hitrosti nekoliko večja, kar je nekoliko presenetljivo. Mogoče je to tudi posledica premajhne variance detektorskega šuma.

Pogledal sem tudi primer, ko začetni položaj zelo odstopa od pravilnega. Za začetni položaj sem vzel $x_0 = 1000, y_0 = 1000$. Rezultati filtriranja so prikazani na sliki 2. Filtrirani rezultati hitro konvergirajo k natančni rešitvi slika 2(0,1). Tudi residuali 2(1,1) se zmanjšajo na vrednosti v prejšnjem primeru. Pričakovana vrednost oddaljenosti od prave rešitve se poveča, saj je oddaljenost začetnih nekaj položajev od pravih položajev velika in ti povečajo povprečno razliko med filtriranim in pravim položajem.

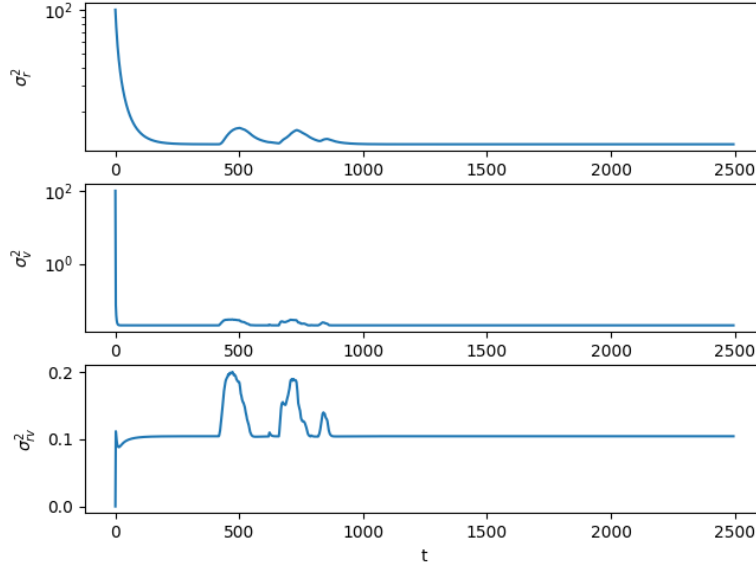


Slika 1: Rezultati filtriranja v primeru, ko upoštevam vse meritve.

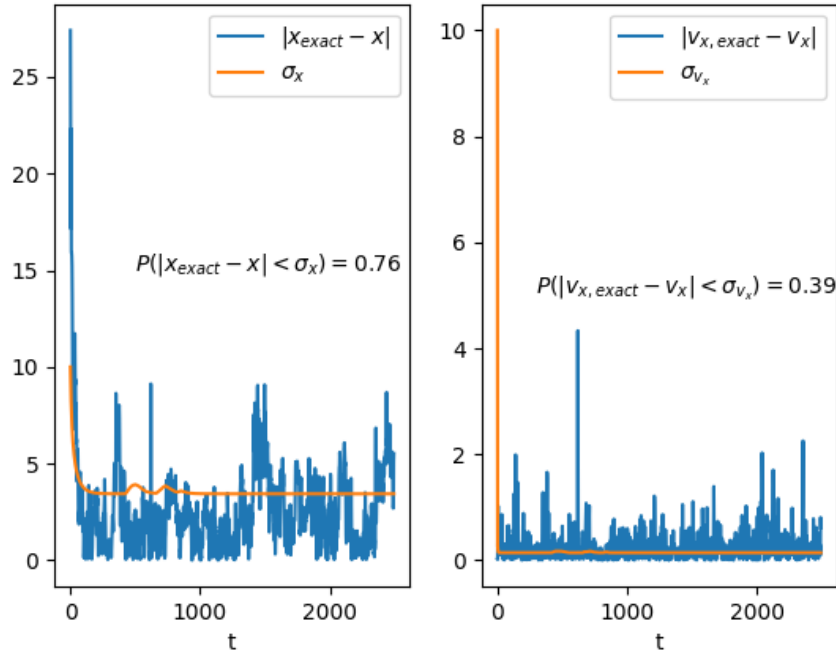


Slika 2: Rezultati filtriranja v primeru ko upoštevam vse meritve in začnem filtriranje z začetnim položajem $(x_0, y_0) = (1000, 1000)$.

Kovariance $\sigma_{x,y}$, σ_{v_x,v_y} so ničelne, zato sem v kovariančni matriki pogledal samo njene neničelne elemente. Izkaže se tudi, da je v tem primeru matrika simetrična (slika 11). Poteke neničelnih varianc prikazuje slika 3. Varianca položaja se pričakovano manjša in tako dosežem natančnost položaja na približno $\sigma_r = 3 \text{ m}$. Še hitreje pada varianca hitrosti. Kovarianca σ_{rv}^2 naraste na konstantno vrednost 0.1. Manjši skoki v variancah nastanejo pri ostrem zavijanju vozila na poti. Ker imam podane tudi pravo pot vozila sem pogledal kako dobro filtrova varianca oz. standardna deviacija zaobjame dejanska odstopanja (slika 4). V standardno deviacijo položaja pade 76 % odstopanj, kar je precej dobra ocena, ki nam jo poda filter. V primeru hitrosti pa samo 40 %, kar pomeni, da filter podaja malo podcenjeno varianco.



Slika 3: Časovna odvisnost varianc in kovarianc, $\sigma_r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$, $\sigma_v^2 = \sigma_v, x^2 + \sigma_v, y^2$.



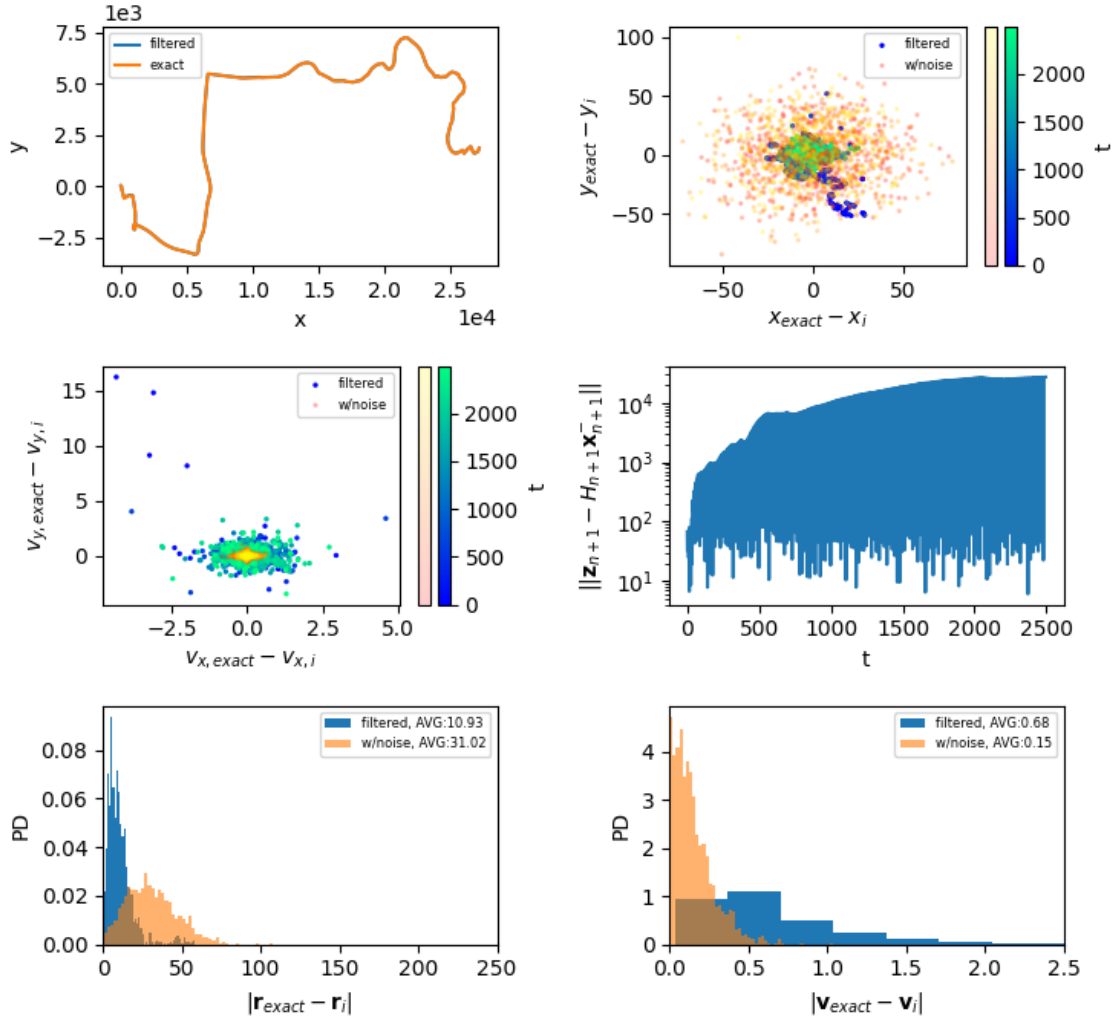
Slika 4: Odstopanja x-komponent filtriranih rezultatov od pravih in standardni odklon položaja ter hitrosti.

1.2 Z redkejšim vzorčenjem

Zanima me kako dobro filter rekonstruira pot, če mu podam samo vsako deseto meritev položaja in vsako peto meritev hitrosti. Katere meritve so na voljo v n -tem koraku določim z matriko H_n . Če želim npr. samo meritev hitrosti bo matrika oblike

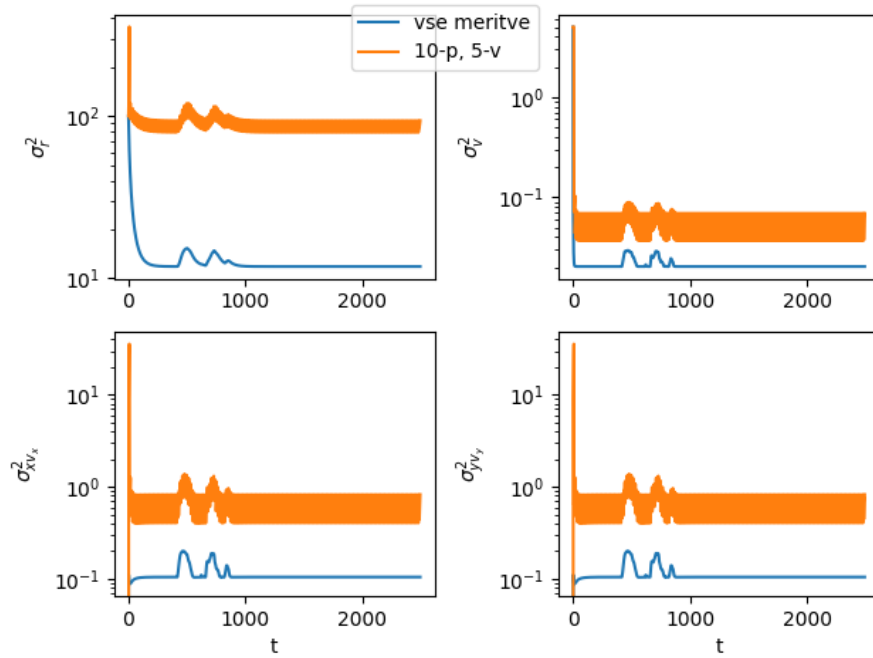
$$H_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Rezultate filtriranja prikazujejo slike 5,6,7. Pričakovano dobim slabše rezultate. Odstopanja položaja postanejo večja, pričakovana vrednost odstopanja se poveča za približno tri krat (slika 5(2,0)). Prav tako se poslabšajo hitrosti, pričakovana vrednost odstopanja hitrosti od pravih hitrosti se poveča za približno tretjino (slika 5(2,1)). Residuali se s časom povečujejo, na mestih kjer dobimo podatek o meritvi pa strmo padejo, zato dobimo tako krivuljo kot na sliki 5(1,1). Variance in kovariance se pričakovano povečajo. Ko

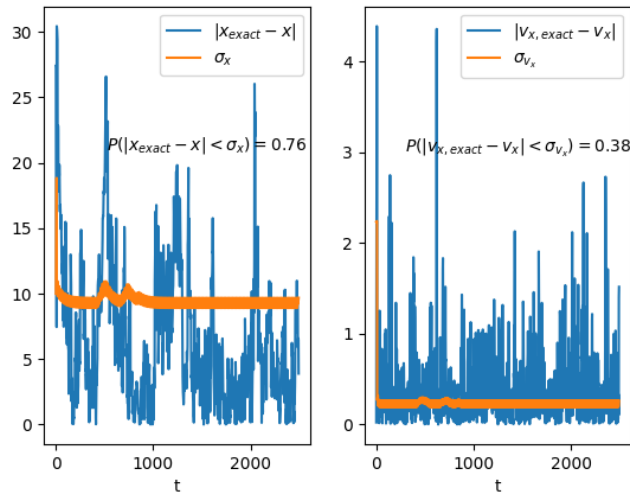


Slika 5: Rezultati filtriranja v primeru, ko vsako deseto meritev položaja in vsako peto meritev hitrosti.

nimamo simetričnega vzorčenja se potem tudi kovarianci med hitrostjo in položajem malce razlikujeta sliki 6, 11. Variance in kovariance začnejo nihati okrog povprečne vrednosti. Odstopanja x komponent vektorja stanja in standardne odklone prikazuje slika 7.



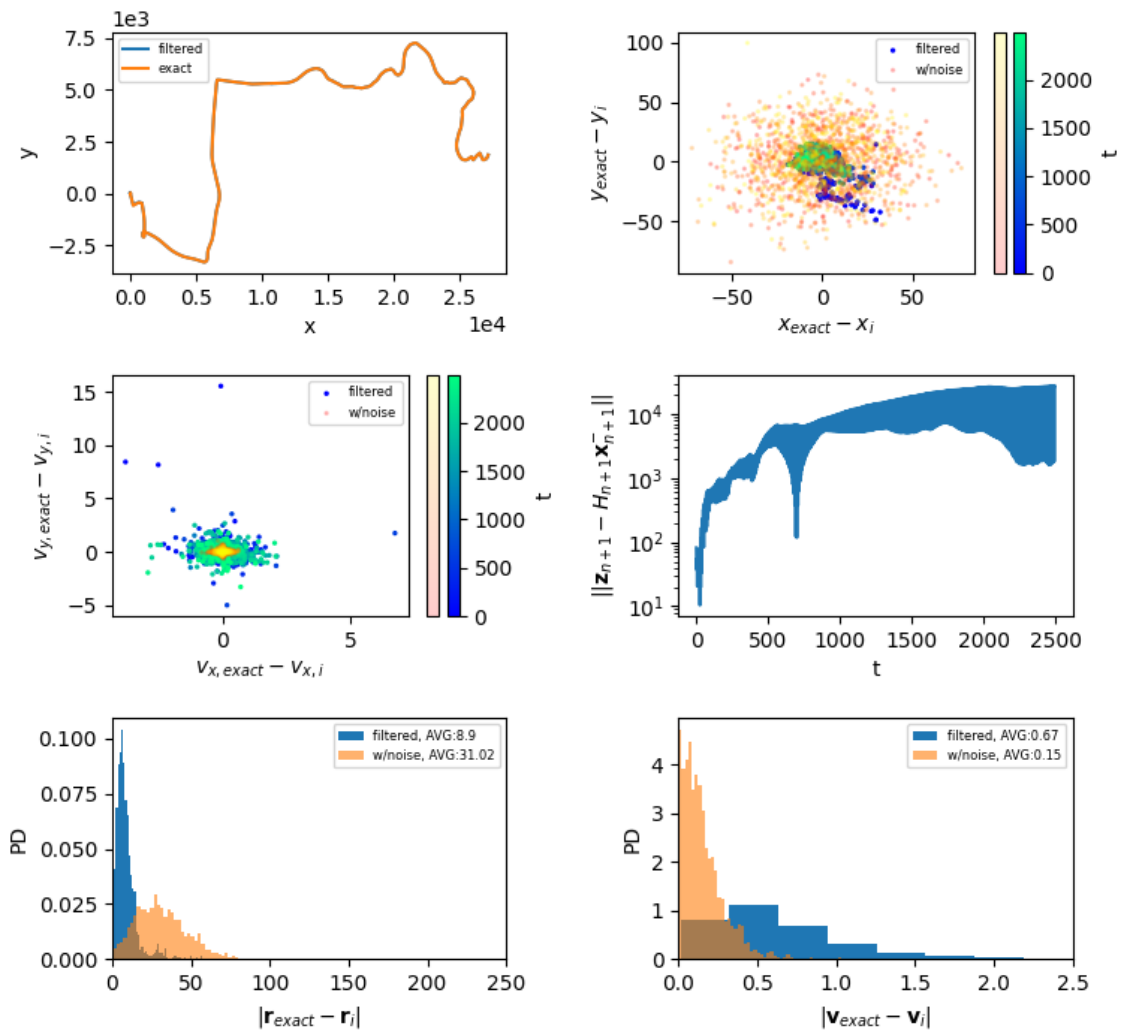
Slika 6: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate redkejšega vzorčenja.



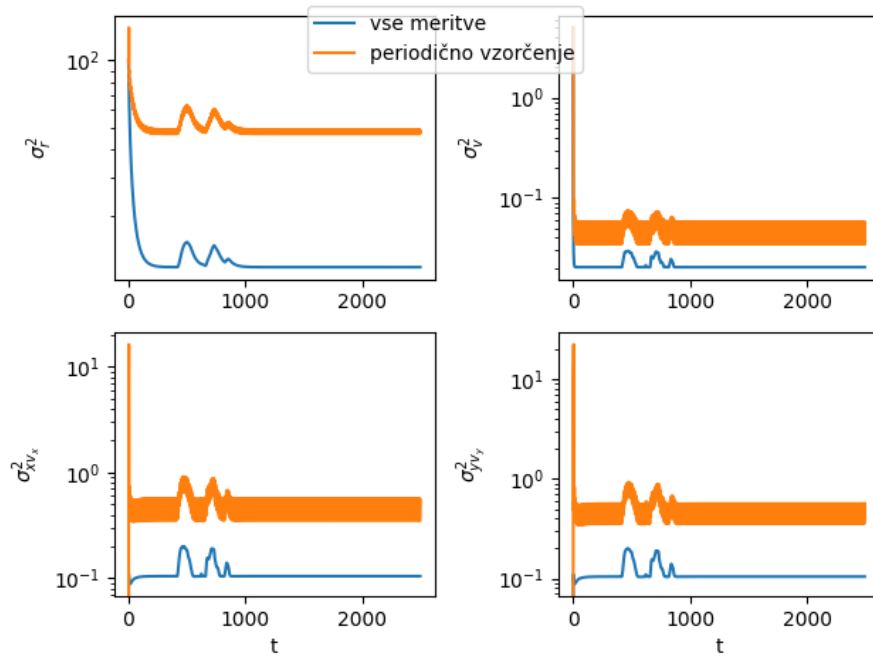
Slika 7: Odstopanja x-komponent filtriranih rezultatov od pravih in standardni odklon položaja ter hitrosti.

1.3 S periodičnim vzorčenjem

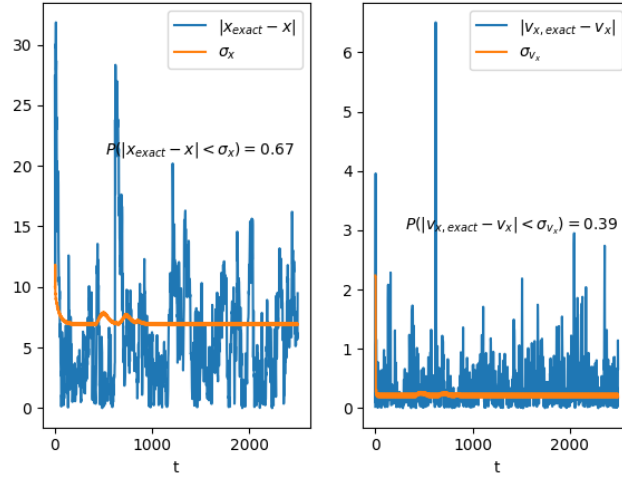
Zanimalo me je kako dobro lahko rekonstruiram pot, če lahko v vsakem koraku dobim samo meritev ene količine v periodičnem vrstnem redu. V n -tem koraku dobim meritev x položaja, v $n+1$ meritev y položaja, v $n+2$ v_x meritev in v $n+3$ meritev v_y . Ker imam periodičen pogoj dobim v $n+4$ spet x -meritev. Rezultati filtriranja so prikazani na slikah 8, 9, 10. Kljub temu, da je povprečna vrednost residualov (slika 8(1,1)) večja kot v primeru redkejšega vzorčenja, dobim boljše rezultate. V desetih korakih dobim v primeru redkejšega vzorčenja 4 vzorce, v primeru periodičnega vzorčenja pa 10 vzorcev, kar izboljša rekonstrukcijo poti. Pričakovana vrednost odstopanja razdalje je manjša, odstopanje hitrosti pa približno enako kot v primeru redkejšega vzorčenja. Variance in kovariance so manjše kot v primeru redkejšega vzorčenja (slika 9), tudi nihanja varianc okrog povprečne vrednosti se zmanjšajo, ko se zmanjša varianca. Odstopanja x komponent vektorja stanja in standardne odklone prikazuje slika 10. Kovariančne matrike na koncu poti za vse tri primere vzorčenja prikazuje slika 11



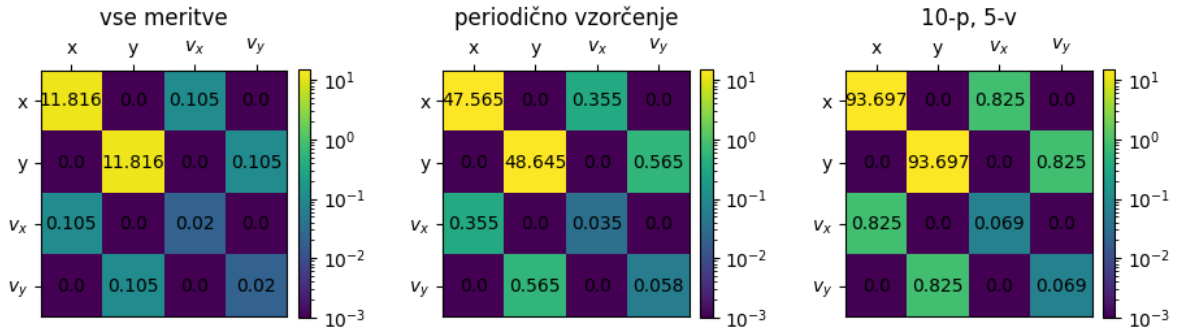
Slika 8: Rezultati filtriranja v primeru periodičnega vzorčenja.



Slika 9: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate periodičnega vzorčenja.



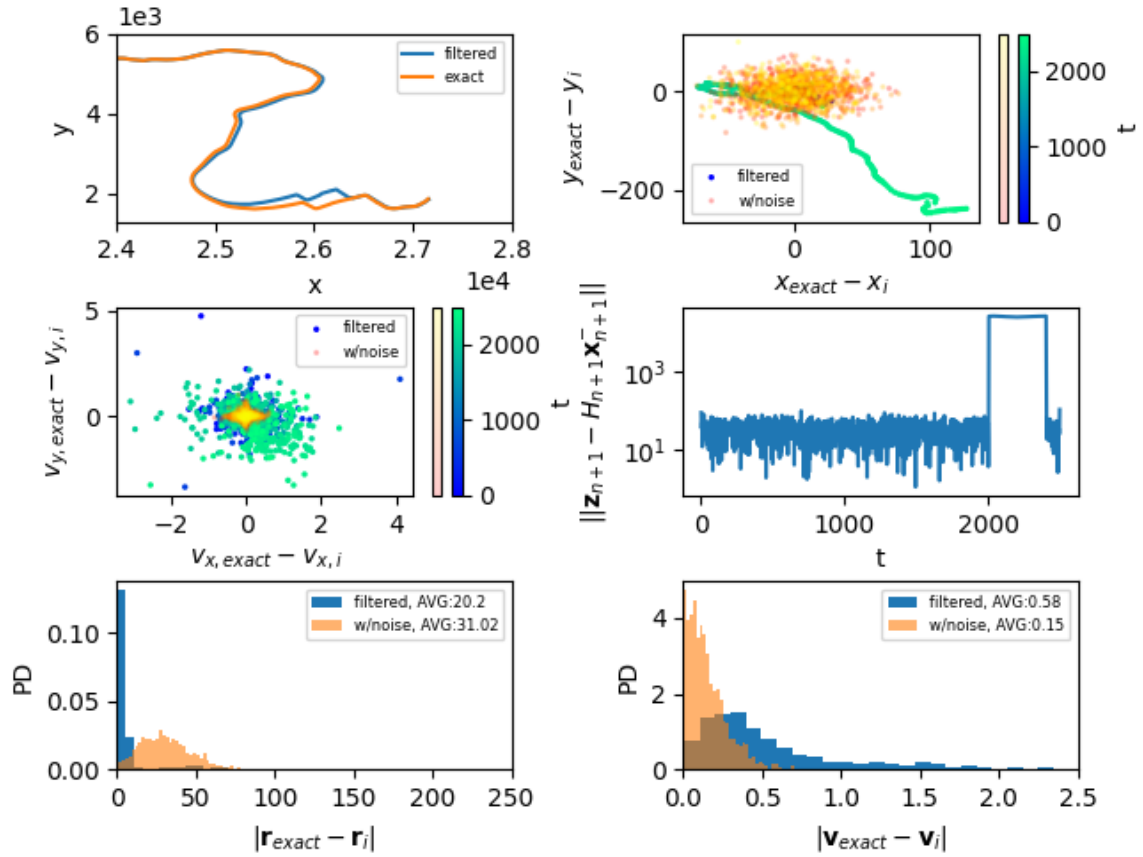
Slika 10: Odstopanja x-komponent filtriranih rezultatov od pravih in standardni odklon položaja ter hitrosti.



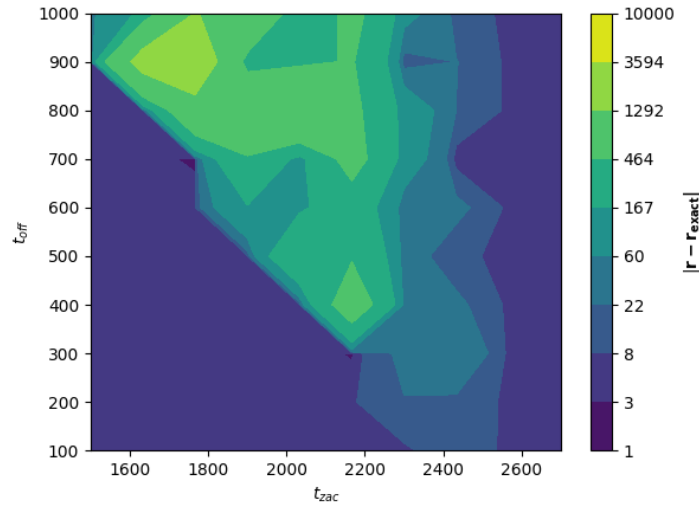
Slika 11: Kovariančne matrice ob na koncu poti za vse tri primere vzorčenja.

1.4 Ob izgubi signala

Zanimivo je tudi pogledati kako dobro filter rekonstruira pot, če se vmes izgubi signal. V ta namen sem odstranil meritve v intervalu $t \in [2000, 2400]$. Približan konec poti (slika 12(0,0)) prikazuje kako se poveča odstopanje od prave poti, ko izgubimo signal. Kljub temu da ni signala 400s in samo nekaj 100s pred koncem poti, filter dobro ujame pravo pot, ko se signal vrne. Obdobje, ko ni signala dobro prikazujejo residuali, saj tam vrednosti močno poskočijo (slika 12(1,1)). Kar je pomembno pri potovanju je, da pridemo na željeno mesto. To, da lahko mogoče opravimo daljšo pot, ali se vmes izgubimo je manjšega pomena, če na koncu pridemo do željene destinacije. V ta namen sem pogledal odstopanja končnega položaja od pravega v odvisnosti od časa, ko izgubimo signal in velikosti intervala, ko ni signala. Odvisnost za določeno območje prikazuje slika 13. Zanimivo je, da če izgubimo signal približno 100 s pred koncem poti, pridemo na pravi cilj.



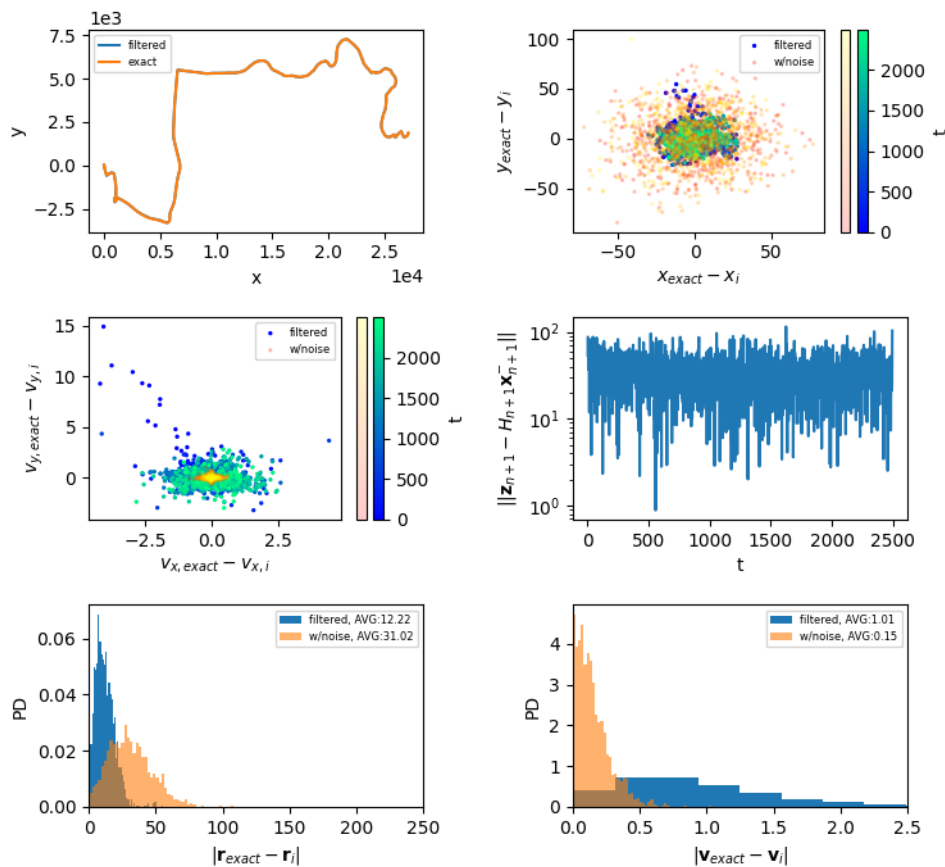
Slika 12: Rezultati filtriranja v primeru, ko izgubimo signal v časovnem intervalu $t \in [2000, 2400]$.



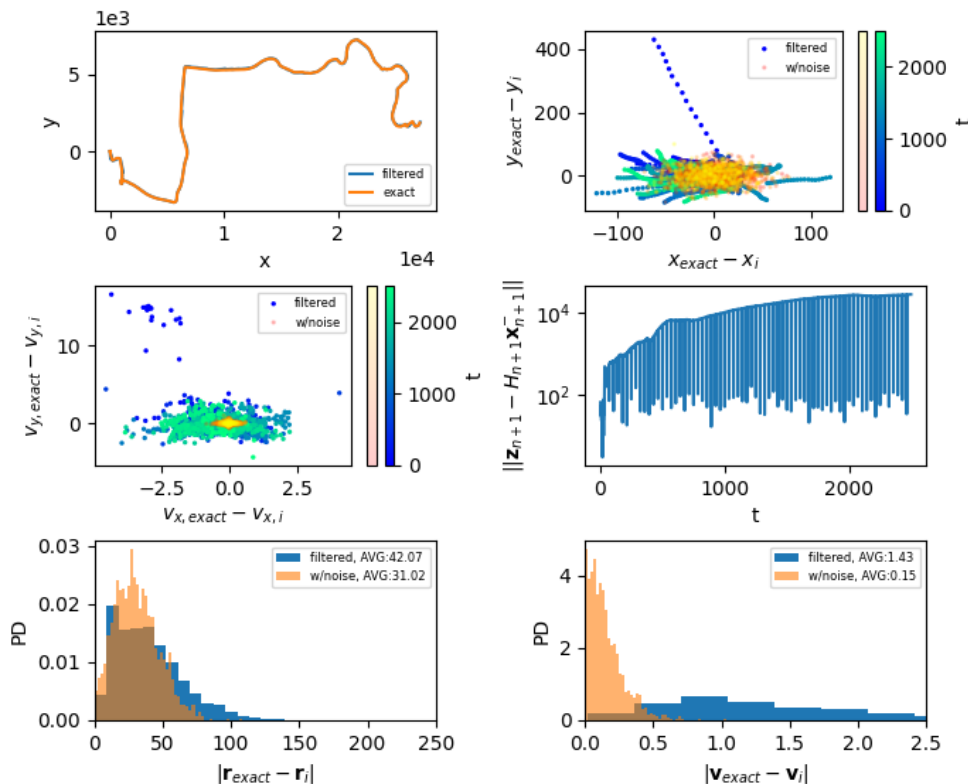
Slika 13: Razdalja med končnim položajem rekonstruirane in prave poti v odvisnosti od začetnega časa izgube signala t_{zac} in trajanja izgube signala t_{off} .

1.5 Brez meritev hitrosti

V primeru ko nimam podanih meritev hitrosti sem pogledal rekonstrukcijo poti, če imam podane pospeške in lokacije in če imam podane pospeške in vsako dvajseto meritev lokacije. Modelsko nedoločeno hitrosti sem povečal na $\sigma_v = 10 \text{ m/s}$. Rezultate prikazujejo slike 14, 15. V primeru ko imam podane vse meritve lokacije Kalmanov filter dobro rekonstruira pot. Veliko bolje kot če imam podane samo meritve lokacije. Pričakovana vrednost odstopanja filtriranega položaja od pravega položaja je skoraj trikrat boljše s filtriranjem (slika 14(1,0)). Modelske hitrosti precej odstopajo od pravih, nekoliko bolj kot same zašumljene meritve. V



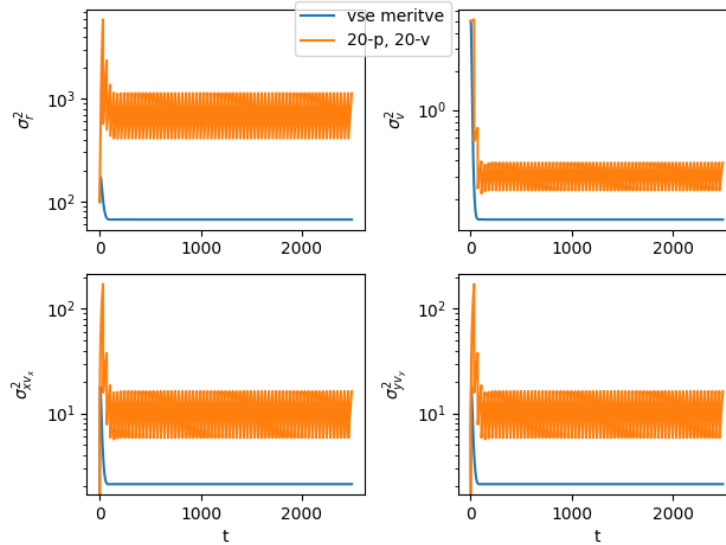
Slika 14: Rezultati filtriranja v primeru, ko imam podane meritve o lokacijah in pospeških.



Slika 15: Rezultati filtriranja v primeru, ko imam podane meritve o pospeških in vsako dvajseto meritev o lokaciji.

skrajnem primeru, ko imam podano vsako dvajseto meritev lokacije se natančnost precej poslabša. V tem primeru se lepo vidi zmanjšanje residualov v primeru ko dobimo dvajseto meritev lokacije (slika 15(1,1)).

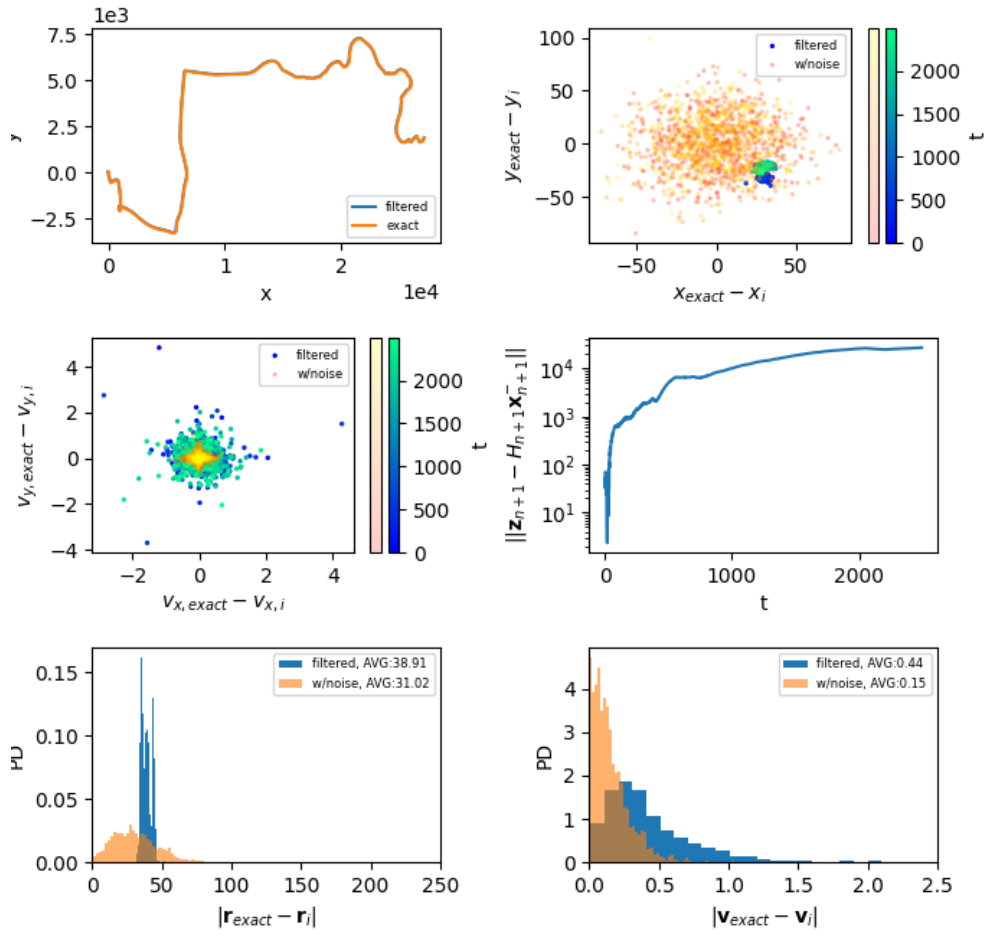
Pričakovana vrednost razlike razdalj (slika 15(2,0)) je večja kot če imam podane vse meritve lokacije. V tem primeru postane Kalmanov filter nekoliko slabši od dejanskih meritev, v primeru da imam podane vse zašumljene meritve lokacije, kar je precej impresivno. Če bi vzel vsako 10 meritev lokacije bi še vedno dobil boljšo rekonstrukcijo poti kot če imam samo zašumljene podatke lokacije. Variance in kovariance v primeru ko imam podane samo meritve o lokacijah in pospeških in ko imam podane pospeške in vsako dvajseto meritev lokacije prikazuje slika 16.



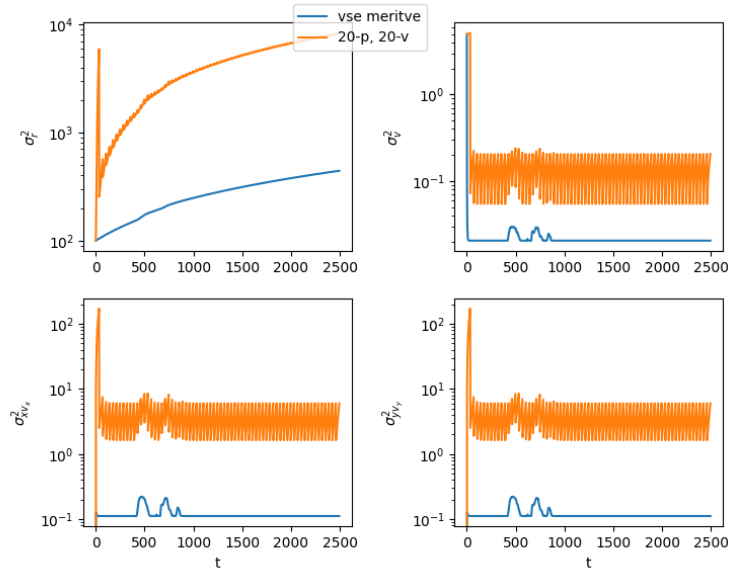
Slika 16: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate v primeru ko imam podano vsako dvajseto meritev lokacije. Modra krivulja predstavlja rezultate ko imam podane vse meritve lokacije. V obeh primerih imam podane pospeške.

1.6 Brez meritev lokacije

Bistveno bolj natančna je rekonstrukcija poti v primeru ko nimam podanih hitrosti. V primeru ko nimam podanih lokacij so rezultati precej slabši. Tudi tukaj sem pogledal primer ko imam vsako dvajseto meritev hitrosti, vendar so rezultati zelo slabi, zato sem narisal samo časovno odvisnost varianc 18. V primeru, ko imam podane samo meritve hitrosti in pospeške 17, Kalmanov filter ne izboljša odstopanj s časom. Pričakovana razlika razdalj (slika 17(2,0)) je okrog 40 m. Residuali s časom naraščajo in vsaka 20 meritev hitrosti na njih ne bistveno vpliva, tako kot v prejšnjem primeru. Zanimivo je, da se s filtriranjem ne približujem pravi rešitvi, ampak ostajam na približno konstantni oddaljenosti od nje (slika 17(0,1)). Časovno odvisnost varianc in kovarianc prikazuje slika 18. Kovariančni elementi in varianca hitrosti hitro padejo na neko povprečno vrednost in okrog nje krožijo. Varianca položaja se s časom veča.



Slika 17: Rezultati filtriranja v primeru, ko imam podane meritve o pospeških in hitrostih.



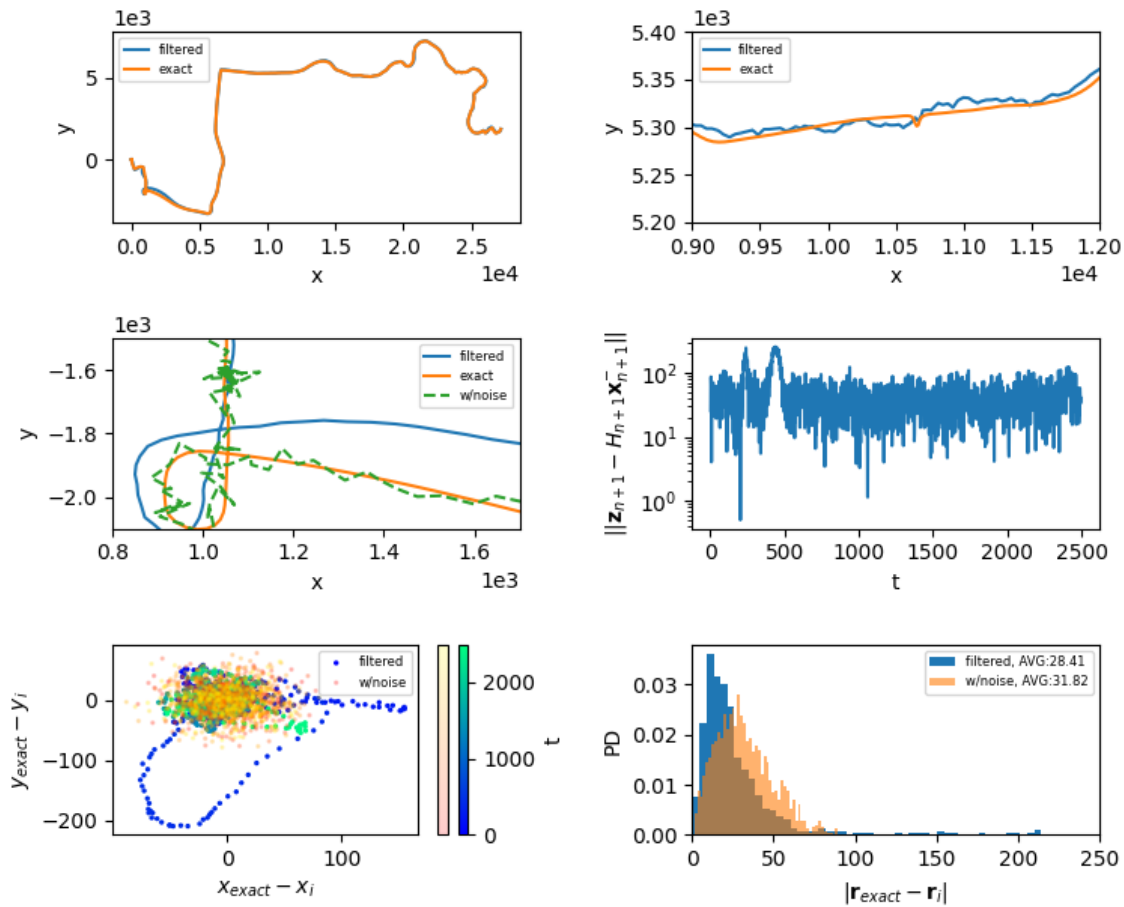
Slika 18: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate v primeru ko imam podano vsako dvajseto meritev hitrosti. Modra krivulja predstavlja rezultate ko imam podane vse meritve hitrosti. V obeh primerih imam podane pospeške.

1.7 S pretvorbo pospeška

V bolj realnem modelu podaja akcelermeter tangencialno in radialno komponento pospeška. Ker je postopek opisan že v navodilih bom podal samo relevantne podatke. Kontrolni vektor je sedaj definiran preko linearne preslikave $\mathbf{c}_n = B_n \mathbf{u}_n$, kjer je

$$\mathbf{u}_n = (a_{t,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{r,n} \frac{\Delta t^2}{2}, a_{t,n} \Delta t, a_{r,n} \Delta t)^T. \quad (7)$$

Sprememba matrik B_n in Q_n je podana v navodilih naloge. Rezultat filtriranja prikazujeta sliki 19 in 20. Rezultati filtriranja so malo boljši kot surovi podatki. Pričakovana razlika razdalj (slika 19(2,1)) je malo manjša. Iz residualov lahko vidim, da imam 2 skoka. Eden izmed njih je tudi zaradi odstopanj, ki sem jih prikazal na sliki 19(1,0). V primeru ostrih ovinkov Kalmanov filter slabo reproducira pravilno pot. V primeru ko je pot približno ravna pa se dobro približa pravi vrednosti (slika 19(0,1)). Časovno odvisnost varianc in kovarianc prikazuje slika 20. Variance so precej večje v primeru bolj realnega modela. Kot lahko

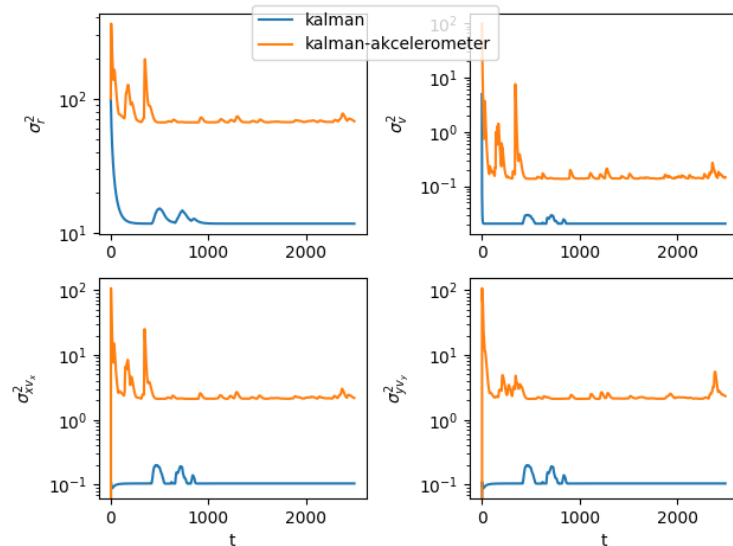


Slika 19: Rezultati filtriranja v primeru, ko upoštevam vse meritve.

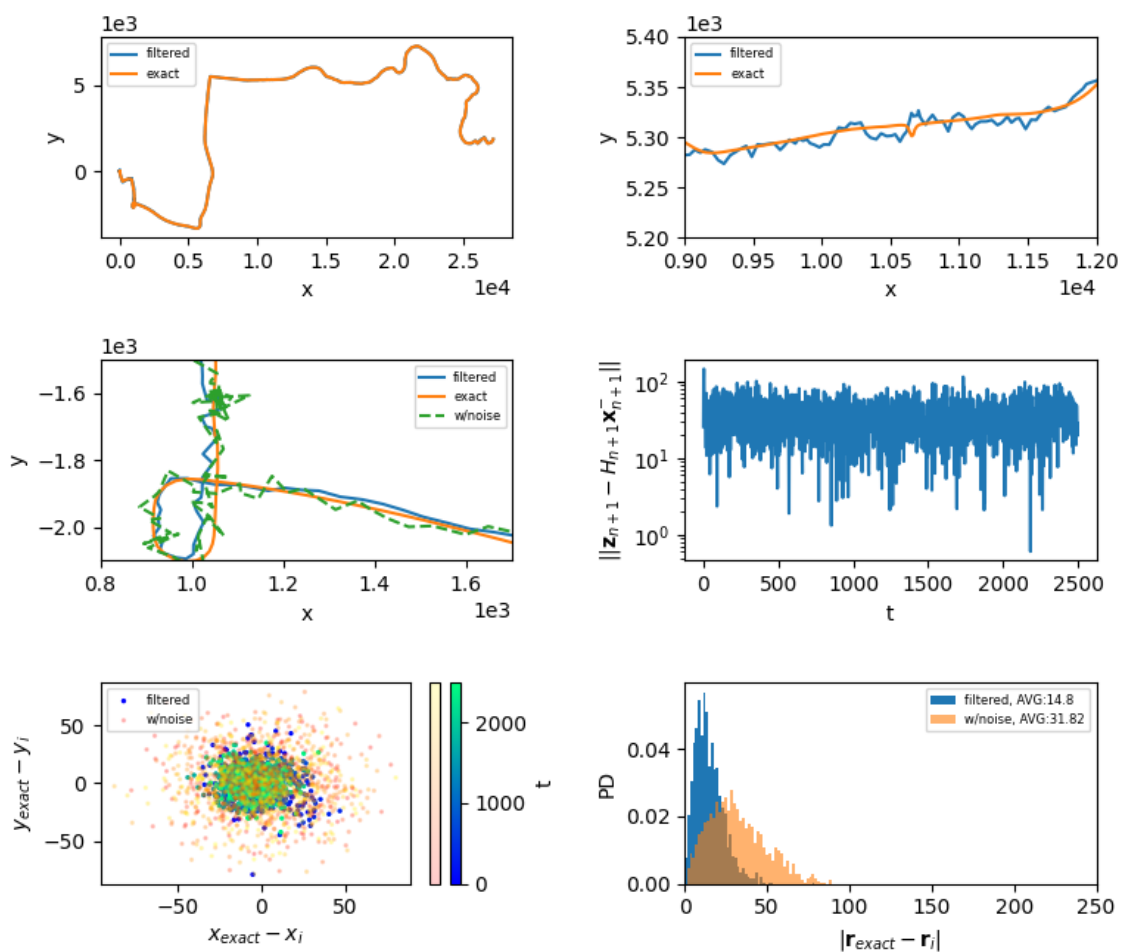
vidim iz rezultatov, model slabo opiše prave vrednosti v ovinkih. To pomeni, da ko je velik radialni pospešek je filtriranje nenatančno. Stvar lahko izboljšam tako, da v ovinku bolj upoštevam meritve in na ravni bolj upoštevam model. To sem naredil tako, da sem dodal utež k inovaciji. Če bo utež velika v ovinkih bo filter bolj upošteval meritve in tako se lahko bolj približam pravilnim lokacijam. Posodobljen vektor stanja v naslednjem koraku je

$$\mathbf{x}_{n+1}^+ = \mathbf{x}_{n+1}^- + (1 + e^{\frac{a_{r,n}}{a_{r,max}}}) K_{n+1} (\mathbf{z}_{n+1} - H_{n+1} \mathbf{x}_{n+1}^-) \quad (8)$$

Rezultati filtriranja so prikazani na sliki 21. Rezultati so bistveno boljši. Kljub temu, da sem malo pokvaril rezultat na ravni, je utež bistveno izboljšala rekonstrukcijo v ovinkih. V residualih so tako izginile špice (slika 21(1,1)). Pričakovana razlika razdalj med pravo in lokacijo pridobljeno s filtrom se je približno prepolovila v primerjavi z zgornjim modelom.



Slika 20: Časovna odvisnost neničelnih elementov kovariančne matrike. Oranžna krivulja podaja rezultate v primeru ko imam opravlja z realnim akcelermetrom. Modra krivulja predstavlja rezultate originalnega Kalmanovega filtra z vsemi podanimi meritvami.



Slika 21: Rezultati filtriranja v primeru, ko upoštevam vse meritve in dodam utež k inovaciji.