UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I

2. naloga: Linearno programiranje

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, oktober 2022

1 Uvod

Pri linearnem programiranju oziroma optimizaciji iščemo ekstremno vrednosti t.i stroškovne funkcije, ob različnih linearnih pogojih. Ti so predstavljeni v obliki enačb ali neenačb. Stroškovno funkcijo lahko zapišemo kot

$$\zeta = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_i c_i x_i = ekstrem, \tag{1}$$

kjer so x_i iskane vrednosti. Pogoje oziroma vezi zapišemo kot

$$\mathrm{A}\mathbf{x} \left\{ \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} \right\} \mathbf{b}, \tag{2}$$

kjer je A matrika koeficientov. Pri linearnem programiranju mora še veljati

$$x_i \geq 0, \quad \forall i. \tag{3}$$

Za iskanje ekstrema stroškovne funkcije sem uprabil metodo *scipy.optimize.linprog* (*Python*). Pri metodi je potrebno zapisati vse pogoje v obliki $a_i x_i \leq b_i$, zato vse enačbe, ki imajo obraten neenačaj pomnožimo z -1. Pri izračunih jedilnikov sem uporabil vsa živila iz podanega seznama. Matriko podatkov sem normiral na gram.

2 Minimizacija kalorij

Najprej nas zanima jedilnik, ki bo minimiziral kalorije obroka. Stroškovno funkcijo lahko zapišemo po enačbi 1

$$\zeta = \sum_i c_{i,kal} x_i = ekstrem$$

, kjer vsota teče po $i \in \{0, ..., 48\}$, x_i predstavlja maso i-tega živila in $c_{i,kal}$ količino kalorij i-tega živila. Najprej sem uporabil naslednje vezi

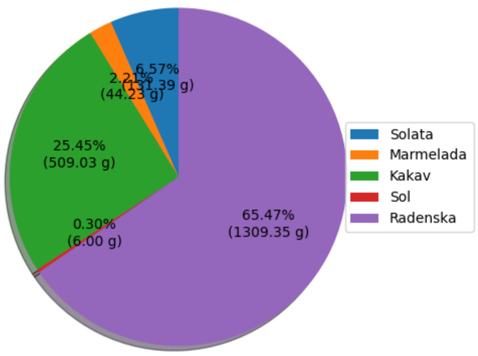
$$\begin{aligned} \sum_i x_i a_{i,fat} &\geq 70 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,OH} &\geq 310 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,prot} &\geq 50 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,Ca} &\geq 1 \text{ g}, \\ \sum_i x_i a_{i,Fe} &\geq 18 \text{ mg}, \\ \sum_i x_i &\leq 2 \text{ kg}, \end{aligned}$$

kjer so $a_{i,j}$ deleži hranil j v i-tem živilu. Pri izračunu obroka dobim nesmiselen rezultat, saj bi morali v tem primeru pojesti več kot pol kilograma soli. V ta namen sem se odločil najprej omejiti količino soli

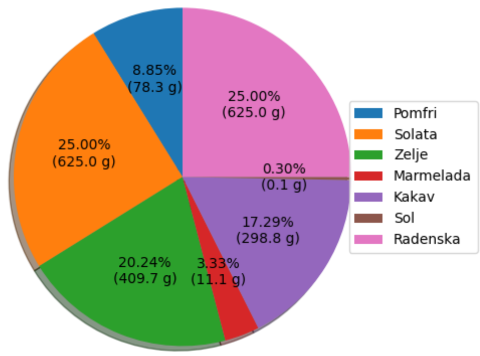
$$x_{sol} \leq 6 \text{ g}, \tag{4}$$

iz česar sem dobil obrok, ki je prikazano na sliki 1(a). V tem primeru moramo popiti več kot 1 liter radenske, kar mogoče ni tako problematično, kot pojesti 1 kg ene vrste hrane. V ta namen sem se odločil omejiti velikost ene sestavine obroka na pol kilograma

$$x_i \leq 0.5 \text{ kg}, \ \forall i. \tag{5}$$

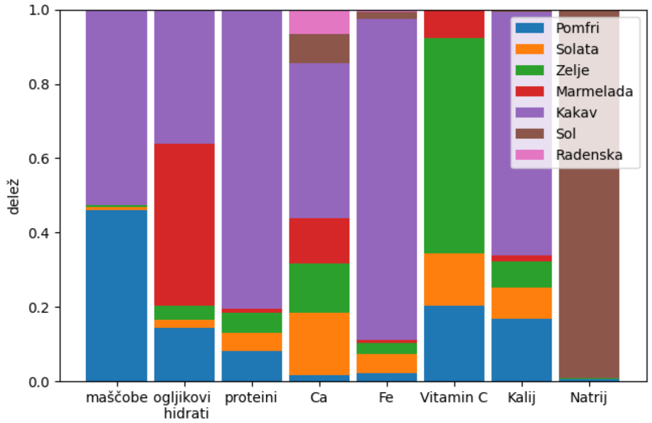


(a)



(b)

Slika 1: Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. a) Dodatna omejitev soli na 6 g. b)Dodatna omejitev soli in največje mase posameznega živila.



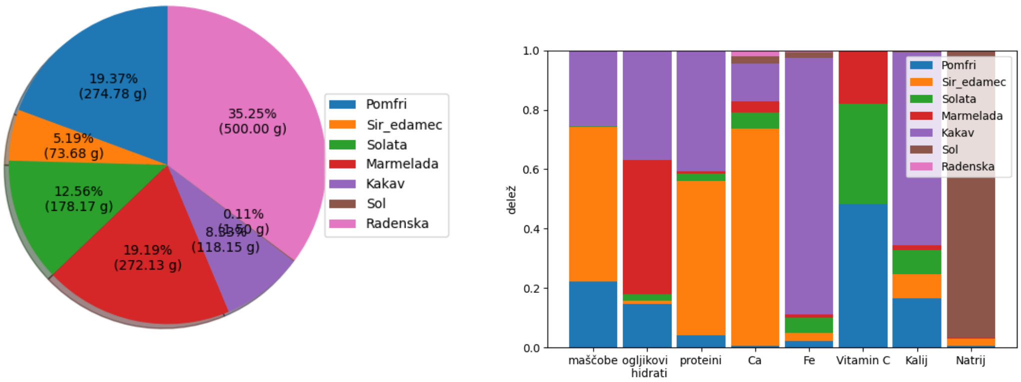
(a)

Slika 2: Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

Dobljeni obrok prikazuje slika 1(b). Vidim lahko, da je obrok vsebuje več živil in je bolj uravnotežen. Zanimivo je tudi pogledati kako hranila v posameznih živilih prispevajo k upoštevanju željenih zahtev (slika 2). Vidim lahko, da kakav predstavlja velik delež v skoraj vseh hranilih. Pričakovano dobim večino natrija iz soli. Sedaj lahko upoštevam še dodatne zahteve

$$\begin{aligned}\sum_i x_i a_{i,vitamin\ C} &\leq 60 \text{ mg},\\ \sum_i x_i a_{i,K} &\leq 3.5 \text{ g},\\ \sum_i x_i a_{i,Na} &\leq 2.4 \text{ g},\\ \sum_i x_i a_{i,Na} &\geq 0.5 \text{ g}.\end{aligned}$$

Dobljeni dnevni obrok (slika 3) je precej podoben obroku na sliki 1(b). V obroku je namesto zelja sir Edamec, ki veliko prispeva k dnevni dozi kalcija, proteinov in maščob (3(b)).



(a) (b)

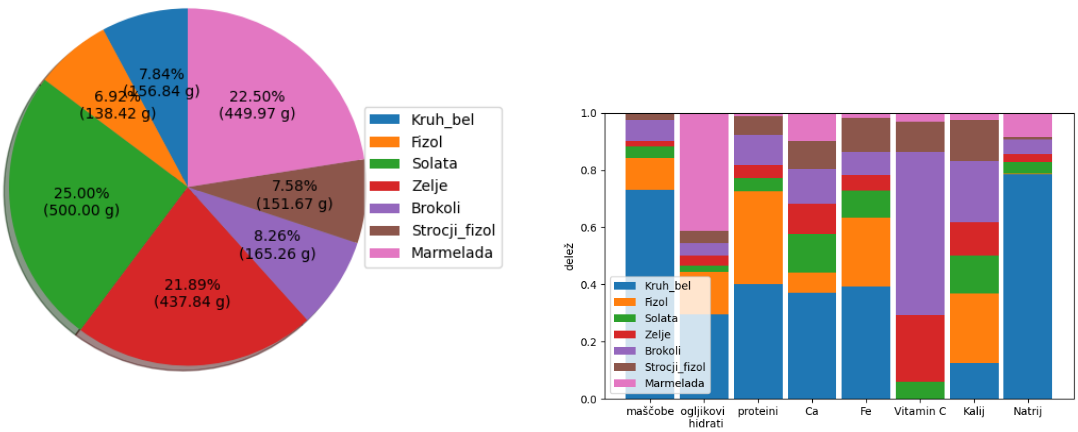
Slika 3: a)Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. b)Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

3 Minimizacija maščob

Dnevni jedilnik v primeru, da želimo minimizirati maščobe, dobim tako, da omejim dnevne kalorije in opustim pogoj o maščobah. Stroškovna funkcija in vez, namesto vezi o maščobah, sta tako

$$\zeta = \sum_i c_{i,fat} x_i = ekstrem, \qquad \sum_i x_i a_{i,kcal} \geq 2000 \text{ kcal}. \tag{6}$$

Dnevni jedilnik je v tem primeru (slika 4(a)) sestavljen iz veliko zelenjave (solata, zelje, brokoli, stročji fižol, fižol), ki predstavlja približno 65 % mase dnevnega jedilnika. Čeprav je dnevna količina kruha relativno majhna (približno 7 % mase celotnega jedilnika) lahko vidim (slika 4(b)), da veliko prispeva k zagotavljanju dnevne količine maščob, kalcija, železa, proteinov in natrija. Večinski prispevek vitamina C je od brokolija.



(a) (b)

Slika 4: a)Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. b)Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

4 Minimizacija cene

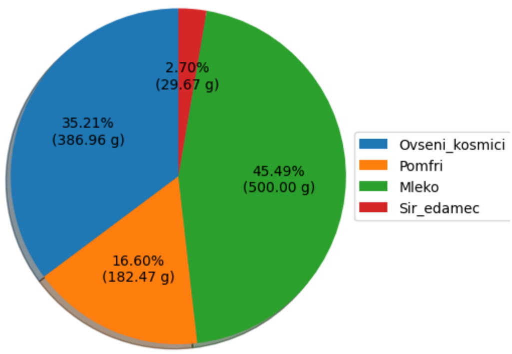
Pri nakupu živil igra pomembno vlogo tudi cena. Če želimo minimizirati ceno, potem k vezem v poglavju 2 dodamo vez

$$\sum_i x_i a_{i,kcal} \geq 2000, \tag{7}$$

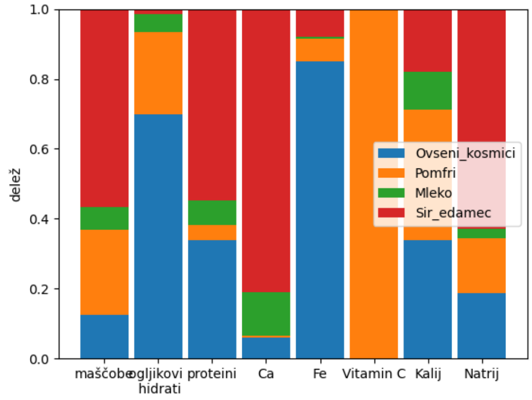
stroškovna funkcija je v tem primeru

$$\zeta = \sum_i c_{i,cena} x_i = ekstrem, \tag{8}$$

kjer je $c_{i,cena}$ cena i-tega živila na gram in x_i masa i-tega živila. Najcenejši jedilnik (slika 5(a)), ki izpolnjuje željene zahteve, je večinoma sestavljen iz ovsenih kosmičev in mleka. Težava teh dveh sestavin je, da ne vsebujeta vitamina C in vsebujeta malo kalcija (5(b)). V ta namen potrebujemo še pomfri, ki nam da vitamin C. Večinski del maščob in kalcija dobimo iz Edamca, čeprav predstavlja samo 2.7 % mase celotnega jedilnika. Cena jedilnika je 1.32 €.



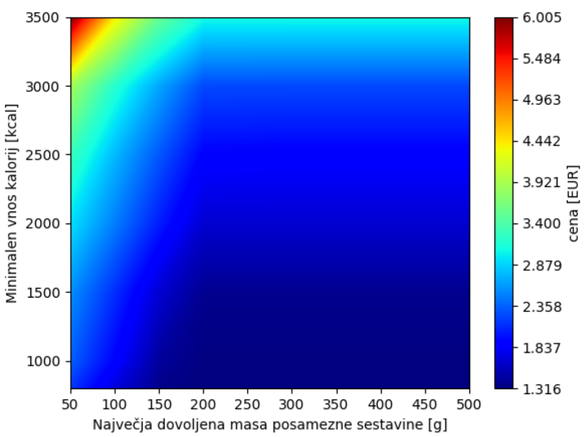
(a)



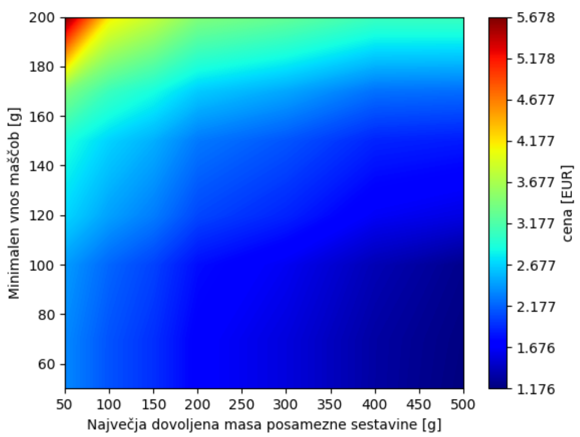
(b)

Slika 5: a)Prikaz deleža posameznih živil, ki jih moramo dnevno zaužiti. b)Hranilni prispevki posameznih živil k celotnemu obroku.

Zanimivo je pogledati tudi kako se spreminja cena jedilnika, če spreminjamo največjo dovoljeno maso posamezne sestavine, minimalno vrednost kalorij in maščob. Cena jedilnika se veča z večanjem minimalnega vnosa kalorij in maščob, kar je pričakovano (slika 6). Večja kot je zahtevana količina, več hrane potrebujem. Pričakovano se tudi cena veča z nižanjem največje dovoljene mase posamezne sestavine. Nižja kot je največja dovoljena masa, več jedi potrebujem, da sestavim jedilnik, kar pomeni vključevanje dražjih jedi v jedilnik. Iz grafov je razvidno, da se cena, pri manjšanju največje dovoljene mase, manj spreminja v primeru, ko spreminjamo vnos kalorij. V večjem delu prostora se spremeni za okrog 1 €, potem pa strmo narase.



(a)



(b)

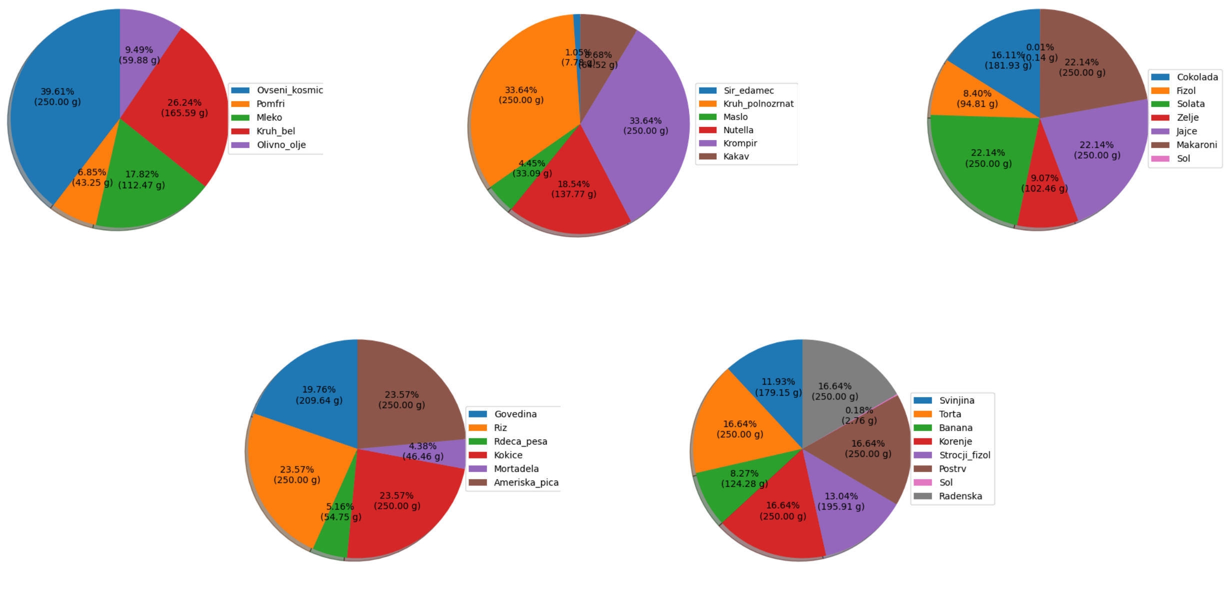
Slika 6: a)Minimizirana cena jedilnika. a)V odvisnosti od minimalnega vnosa hranil in največje dovoljene mase posamezne sestavine. b)V odvisnosti od minimalnega vnosa maščob in največje dovoljene mase posamezne sestavine.

5 Pet dnevni jedilnik

Sestavil sem pet dnevni jedilnik, pri katerem želim minimizirati ceno. Ideja je, da ne jemo vsak dan enake hrane. Hrana se lahko ponovi na 5 dni. Hrano, ki je v dnevnem jedilniku, sem izločil iz možnega nabora do konca pet dnevnega intervala. Ker se je izkazalo, da z vsemi pogoji (vezmi) ne obstaja pet dnevni jedilnik, sem malo omilil pogoje oziroma vezi (razen pri maščobah)

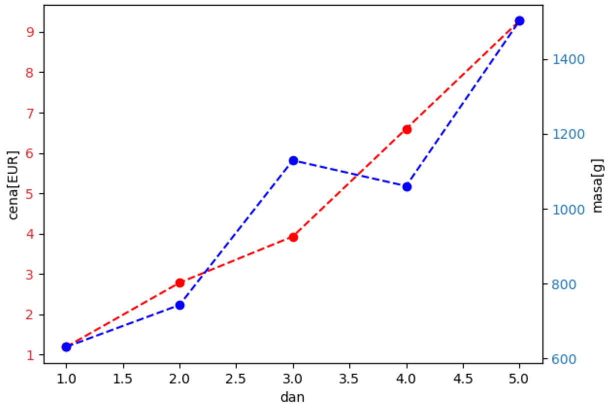
$$
\begin{aligned}
\sum_i x_i a_{i,fat} &\geq 90 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,OH} &\geq 200 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,prot} &\geq 20 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,Ca} &\geq 0.5 \text{ g}, \\
\sum_i x_i a_{i,Fe} &\geq 18 \text{ mg}, \\
\sum_i x_i &\leq 2 \text{ kg}, \\
x_{sol} &\leq 6 \text{ g}, \\
x_i &\leq 250 \text{ g}, \ \forall i.
\end{aligned}
$$

Pri pet dnevnem jedilniku (slika (7)) v prvem dnevu ustvarim najcenejši jedilnik. Ker so potem te sestavine izločene iz izbora bo naslednji jedilnik vedno dražji. V kasnejših dneh se potem pojavljajo tudi dražje jedi. S časom se veča tudi raznolikost jedilnika. Ker jedi, ki ostajajo niso optimalne za kreacijo jedilnika pod takimi pogoji, jih potrebujem več, da zadostim pogojem (vezem).



Slika 7: Pet dnevni jedilnik. Dnevni jedilniki so bili ustvarjeni od leve proti desni.

Zanimivo je pogledati tudi evolucijo cene in maso jedilnika s časom (slika (8)). Cena pričakovano narašča s časom, saj najcenejše jedi vedno izločim iz možnega izbora za naslenji jedilnik. Zanimivo je, da se prav tako veča masa celotnega dnevnega jedilnika. V petih dneh se cena jedilnika poveča za približno 9 krat prav tako moramo zadnji dan pojesti skoraj 1 kg več hrane, da dobimo potrebne snovi.



(a)

Slika 8: Evolucija cene in mase dnevnega jedilnika, če minimiziram ceno in izločim že uporabljene jedi.

6 Zaključek

Linearno programiranje je relativno preprost koncept, ki pa je zelo uporaben. Z njim lahko minimiziramo ali maksimiziramo željene količine ob danih pogojih. Pri tem je potrebno paziti, da ne omejimo sistema preveč, saj se lahko zgodi, da za dane zahteve ni rešitve.