

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I  
**4. naloga: Populacijski modeli**

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, november 2022

# 1 Epidemija

## 1.1 Osnovni model

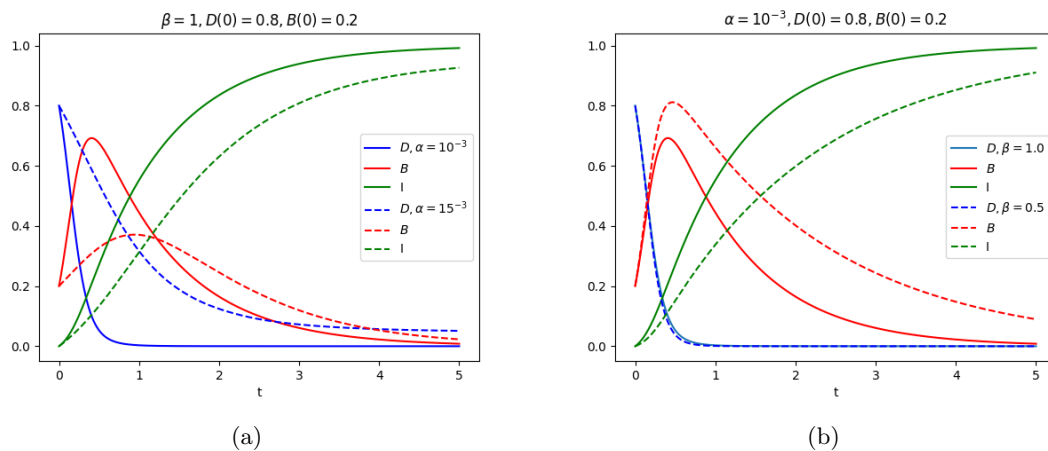
Populacijo razdelimo na tri razrede: (D) zdravi in dovzetni, (B) bolni in (I) imuni. V modelu epidemije se ohranja število ljudi. V osnovnem modelu veljajo enačbe

$$\dot{D} = -\alpha DB, \quad (1)$$

$$\dot{B} = \alpha DB - \beta B, \quad (2)$$

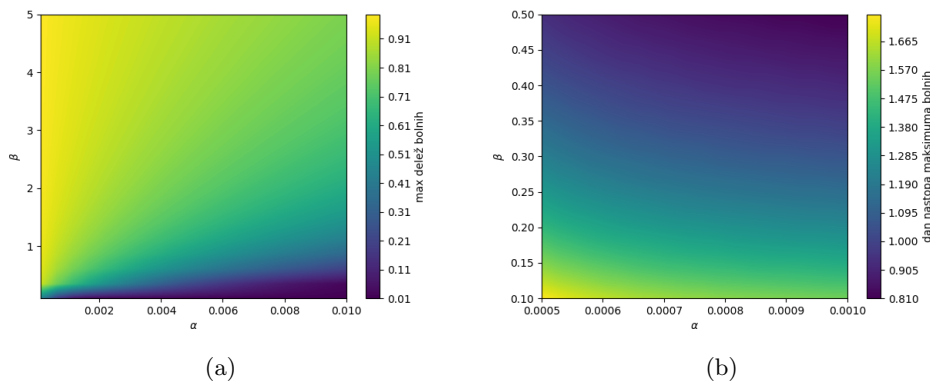
$$\dot{I} = \beta B. \quad (3)$$

Pri osnovnem modelu lahko spreminjamo parametra  $\alpha, \beta$ , ki predstavljata nalezljivost iz parameter prebolezlosti okužbe (slika 1) in začetne vrednosti razredov. Za velikost populacije sem vzel  $10^4$  ljudi, v grafih sem pa vse izrazil z deleži populacije. Vidim lahko, da z večanjem parametra  $\alpha$  je bolezen bolj nalezljiva in okuži večji delež populacije. Z večanjem parametra  $\beta$  populacija hitreje preboli bolezen in se manjši delež okuži.



Slika 1: a) Potek epidemije pri dveh različnih parametrih  $\alpha$ . b) Potek epidemije pri dveh različnih parametrih  $\beta$ .

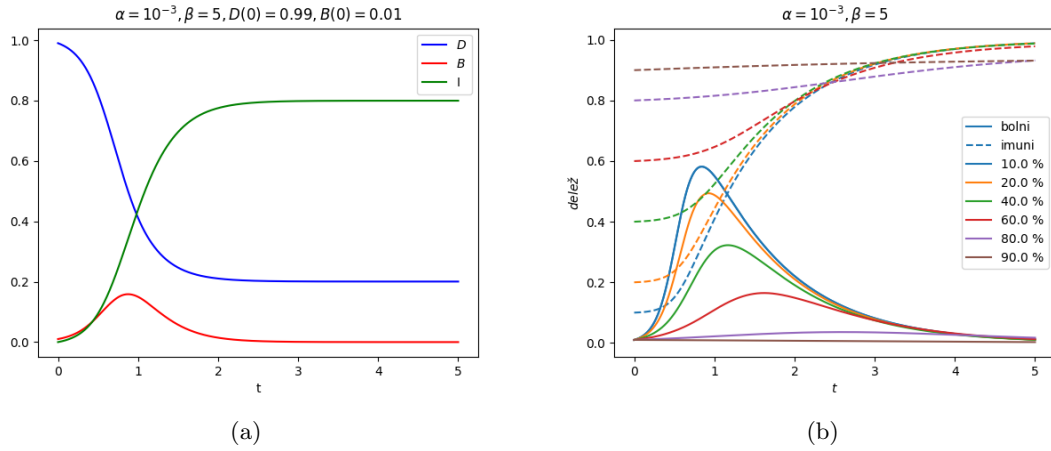
Pri epidemiji nas zanima maksimalno število obolelih in čas nastopa maksimuma. Pogledal sem največje število obolelih in čas nastopa maksimuma v odvisnosti od parametrov  $\alpha$  in  $\beta$  (slika 2). Delež zdravih je 80%, delež bolnih pa 20%. Vidim lahko, da parameter  $\alpha$  močno vpliva na delež populacije, ki bo zbolel. Na čas nastopa maksimuma obolelih pa vpliva predvsem parameter  $\beta$ , ki določa hitrost prebolevanja bolezni (barve na sliki 2(b) se predvsem spreminjajo v smeri parametra  $\beta$ ).



Slika 2: a) Maksimalni delež bolne populacije v odvisnosti od parametrov  $\alpha$  in  $\beta$ . b) Čas nastopa maksimuma bolne populacije v odvisnosti od parametrov  $\alpha$  in  $\beta$

Če zelo povečam parameter  $\beta$ , bo trajanje bolezni pri posamezniku majhno, kar bo pomenilo, da bo v tem

času okužil malo ljudi in majhen delež populacije bo zbolel (3(a)). S cepljenjem lahko zelo vplivamo na potek epidemije v populaciji. Kako delež cepljenih vpliva na delež ljudi, ki zbolijo prikazuje slika 3(b). Vidim lahko, da se vrh bolnih v populaciji približno prepolovi ob 50% deležu cepljenih. Cepivo malo vpliva tudi na čas nastopa maksimuma bolnih in sicer se ta povečuje z deležom cepljenih.



Slika 3: a)Potek epidemije pri hitrem prekuževanju ljudi.. b)Vpliv cepljenja na potek epidemije.

## 1.2 Model s stadiji

Izboljšan model epidemije lahko naredimo tako, da dodamo skupine v populaciji bolnih. Kužnost v bolnih ni konstantna in potek bolezni je sestavljen iz več različnih faz. Omejil se bom na 3 faze. Najprej je bolni v okužen, a ne širi epidemije (inkubacijska doba,  $B_{ink}$ ). Potem gre fazo, ko je močno kužen in bolezen doseže vrh ( $B_k$ ). V naslednji fazi pa se kužnost manjša in oseba je v izolaciji ( $B_{izol}$ ). Na spreminjanje zdravih bodo sedaj vplivali močno bolni, ki so zelo nalezljivi in ljudje v inkubacijski dobi. Tisti ki so v začetni fazi okužbe, ne nalezejo zdravih ljudi. Tak model lahko opišem s sistemom enačb

$$\dot{D} = -\alpha_1 D B_k - \beta_1 B_{izol} D, \quad (4)$$

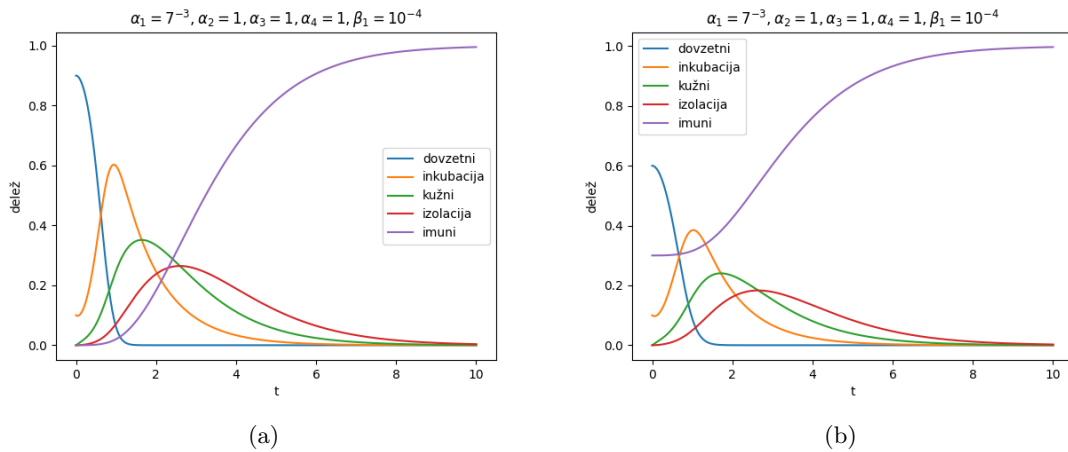
$$\dot{B}_{ink} = \alpha_1 D B_k + \beta_1 B_{izol} D - \alpha_2 B_{ink}, \quad (5)$$

$$\dot{B}_k = \alpha_2 B_{ink} - \alpha_3 B_k, \quad (6)$$

$$\dot{B}_{izol} = \alpha_3 B_k - \alpha_4 B_{izol}, \quad (7)$$

$$\dot{I} = \alpha_4 B_{izol}. \quad (8)$$

Smiselno je, da je  $\beta_1 \ll \alpha_1$ , saj ljudje v izolaciji okužijo veliko manj ljudi kot zelo kužni. Potek epidemije (slika 4) je prikazan v primeru, ko populacija ni cepljena in ob 30% precepljenosti. Vpliv cepljenja zmanjša vse 3 stadije bolnih. Največji vpliv ima cepljenje na fazo inkubacije oziroma na to, da posameznik zboli.



Slika 4: a)Potek epidemije pri necepljeni populaciji. b)Potek epidemije pri 30% precepljenosti.

### 1.3 Model z zakasnitvijo

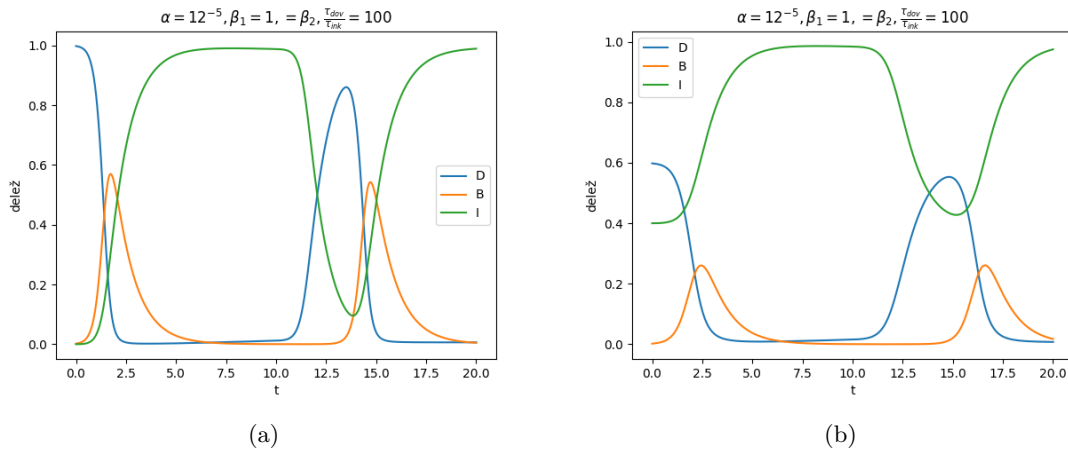
Drugi način izboljšave osnovnega model je model z zakasnitvijo, kjer upoštevam, da postane posameznik po določenem času spet dovzeten za okužbo ( $\tau_d$ ). Upoštevam tudi to, da se bolezen pri bolnem začne širiti po določenem času (inkubacijska doba,  $\tau_i$ ). Model opišejo enačbe

$$\dot{D} = -\alpha DB(t - \tau_i) + \beta_1 B(t - \tau_d) , \quad (9)$$

$$\dot{B} = \alpha DB(t - \tau_i) - \beta_2 B , \quad (10)$$

$$\dot{I} = \beta_2 B - \beta_1 B(t - \tau_d) . \quad (11)$$

Rešiti je potrebno sistem diferencialnih enačb z zamikom. Za reševanje sem uporabil knjižnico iz Python-a *ddeint* in istoimensko metodo. Smiselno je, da je čas  $\tau_d \gg \tau_i$ , saj ponavadi imunost po okužbi traja veliko več časa kot inkubacijska doba okužbe. Iz poteka epidemije okužbe lahko opazim periodično ponavljanje okužb v populaciji (slika 5). Vpliv cepljenja prav tako zmanjša delež bolnih v populaciji. Model bi se dalo izboljšati tako, da bi upošteval še manjšanje učinkovitosti cepiva s časom.



Slika 5: a) Potek epidemije pri necepljeni populaciji,  $B(0) = 1\%$ . b) Potek epidemije pri 40% precepljenosti,  $B(0) = 1\%$ .

## 2 Zajci in lisice (model Lotka-Volterra)

Model Lotka-Volterra opišemo z naslednjim setom diferencialnih enačb

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta ZL , \quad (12)$$

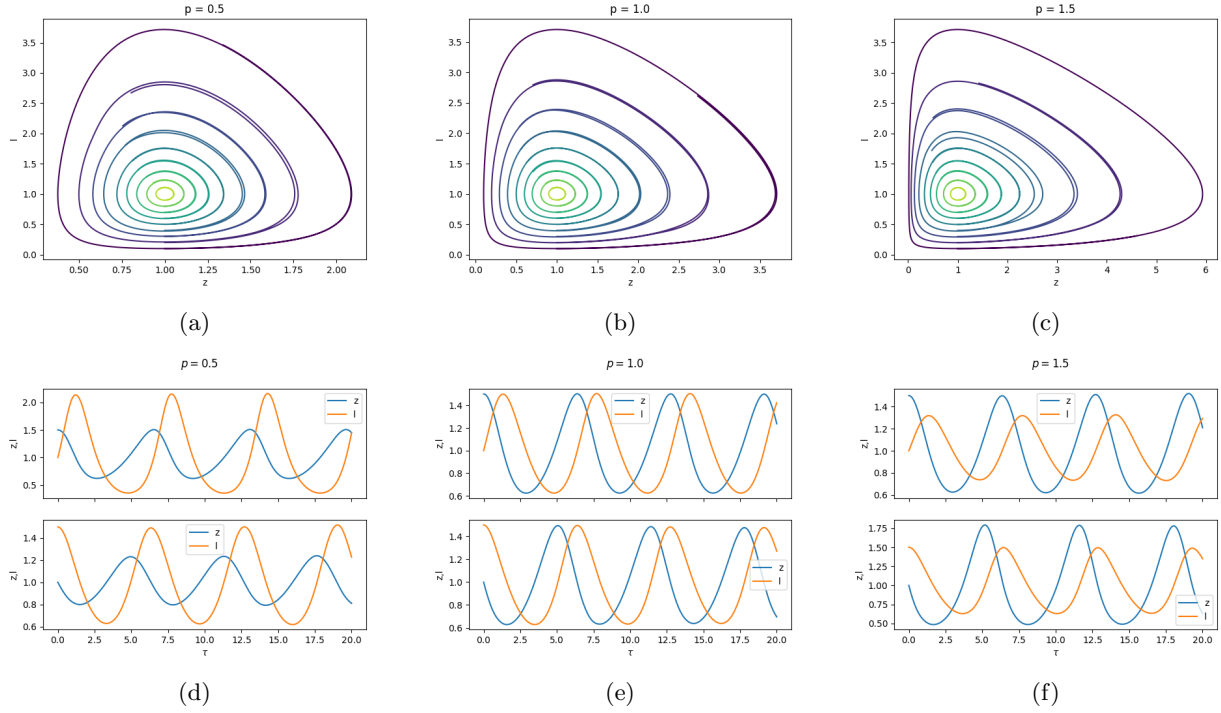
$$\dot{L} = -\gamma L + \delta ZL , \quad (13)$$

, kjer je  $Z$  populacija zajcev in  $L$  populacija lisic. Na povečevanje populacije zajcev vpliva rodnost  $\alpha$ , na zmanjševanje pa interakcije z lisicami  $\beta$ . Na povečevanje populacije lisic vpliva interakcija z zajci  $\delta$ , ki predstavlja njihov vir hrane, na zmanjševanje pa vpliva poginjanje lisic  $\gamma$ . Model lahko z uvedbo parametrov  $l = (\beta/\alpha)L$ ,  $z = (\delta/\gamma)Z$ ,  $\tau = t\sqrt{\alpha\gamma}$  prepišem v brezdimenzijsko obliko

$$\dot{z} = pz(1 - l) , \quad (14)$$

$$\dot{l} = l/p(z - 1) , \quad (15)$$

, kjer je  $p = \sqrt{\alpha/\gamma}$  edini prost parameter poleg začetnih pogojev. Parameter  $p$  je funkcija rodnosti zajcev in umrljivosti lisic. Fazni diagrami (6) prikazujejo spreminjanje števila zajcev in lisic. Opazim lahko, da so vse rešitve periodične, torej bo ob danih začetnih pogojih, ki so večji od 0 za zajce in lisice, populacija stabilna (ne bo prišlo do izumrtja ene od vrst). Iz slike 6 lahko opazim, da je pri parametru  $p = 1$  populacija zajcev in lisic enaka, kar je smiselno, glede na definicijo parametra  $p$ . Ko je  $p < 1$  je populacija lisic večja in obratno, ko je  $p > 1$ . Pri dovolj majhnih oz. velikih vrednostih parametra  $p$ , bi nadvladala ena od vrst in bi povzročila izumrtje druge.



Slika 6: a)b)c)Fazni diagrami pri različnih vrednosti parametra  $p$ . d)e)f) Časovni potek populacije zajcev in lisic pri različnih začetnih pogojih in različnem parametru  $p$ .

## 2.1 Stacionarne točke

Zanima dogajanje v okolici točk, kjer velja  $\dot{z} = 0$  in  $\dot{l} = 0$ . Iz zgornjih enačb sledi, da je to v točkah (0,0) in (1,1). V točki (0,0) lahko za majhne vrednosti  $z$  in  $l$  zapišem približek zgornjih enačb kot

$$\dot{z} = pz, \quad (16)$$

$$\dot{l} = -l/p, \quad (17)$$

$$(18)$$

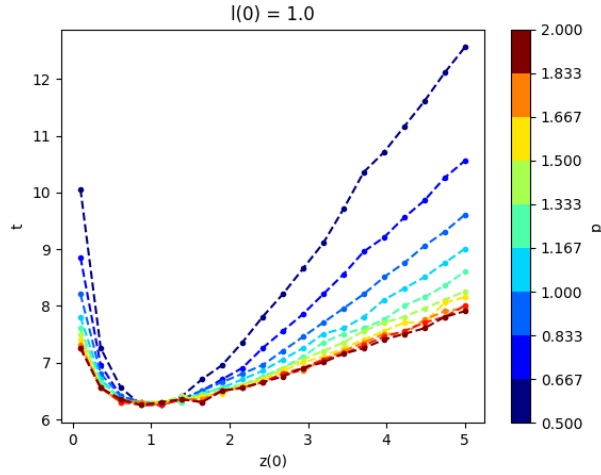
kar da eksponentni rešitvi  $z(\tau) = z(0)e^{p\tau}$  in  $l(\tau) = l(0)e^{-\tau/p}$ , kar pomeni da imamo v tej točki sedlo. V točki (1,1) lahko naredim transformacijo  $z \rightarrow z + 1$  in  $l \rightarrow l + 1$  in zanemarim člen  $x$  v oklepaju  $(x+1)$  ter dobim

$$\dot{z} = -pl, \quad (19)$$

$$\dot{l} = -z/p. \quad (20)$$

$$(21)$$

Enačbi odvajam še enkrat po času in vstavim eno v drugo. Iz tega dobim enačbo za kroženje  $\ddot{x} = -x$ , kjer je  $x = z, l$ . V faznem diagramu imamo za majhne vrednosti  $z$  in  $l$  kroge okrog stacionarne točke (1,1). To je mogoče tudi razvidno iz oblik časovnega razvoja zajcev in lisic pri parametru  $p = 1$ , saj imamo skoraj pravilno obliko sinusa. Zanimivo je pogledati tudi obhodne čase v odvisnosti od začetnih populacij (slika 7). Na periodo vplivajo začetni pogoji in tudi vrednosti parametra  $p$ . V bližini stacionarne točke (1,1) je perioda najmanjša, kar je smiselno in tudi sovпада s faznimi diagrami.



Slika 7: Obhodni časi v odvisnosti od začetne populacije zajcev pri različnih vrednostih parametra  $p$ .

### 3 Model laserja

Populacijski model laserja opiše sistem diferencialnih enačb

$$\dot{f} = -\alpha f + B_1 a f, \quad (22)$$

$$\dot{a} = -\beta a - B_2 a f + R, \quad (23)$$

, kjer  $-\alpha f$  opisuje spontane izgube fotonov,  $-\beta a$  opisuje spontane razpade atomov in  $R$  opisuje črpanje. Ob predpostavki, da je interakcija atomov s fotoni simetrična ( $B_1 = B_2 = B$ ) in z uvedbo spremenljivk  $A = (\beta/\alpha)a$ ,  $F = (B/\beta)f$ ,  $\tau = t\sqrt{\alpha\beta}$  lahko sistem prepišem v brezdimenzijsko obliko

$$\dot{F} = \frac{F}{p}(A - 1), \quad (24)$$

$$\dot{A} = r - pA(F + 1), \quad (25)$$

kjer sta sedaj dva prosta parametra  $p = \sqrt{\beta/\alpha}$  in  $r = BR/\sqrt{\alpha^3\beta}$ . Parameter  $p$  predstavlja spontane izgube, parameter  $r$  pa moč črpanja. Za stacionarne točke zahtevam

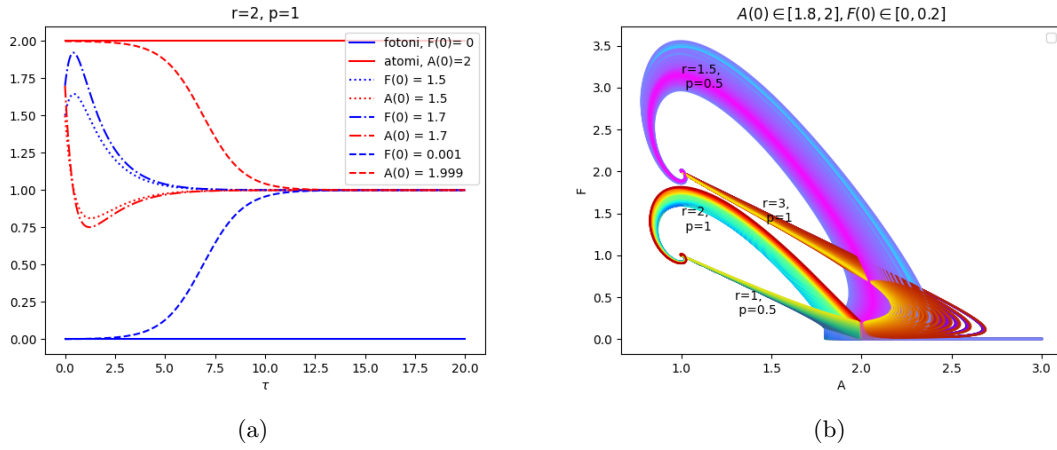
$$0 = \frac{F}{p}(A - 1), \quad (26)$$

$$0 = r - pA(F + 1), \quad (27)$$

iz česar sledita 2 stacionarni točki  $(r/p, 0)$  in  $(1, r/p-1)$ . Smiselne stacionarne rešitve dobimo, ko je  $r > p$  oziroma je moč črpanja večja od spontaniz izgub. V nasprotnem primeru laser ne sveti.

#### 3.1 Točka $(r/p, 0)$

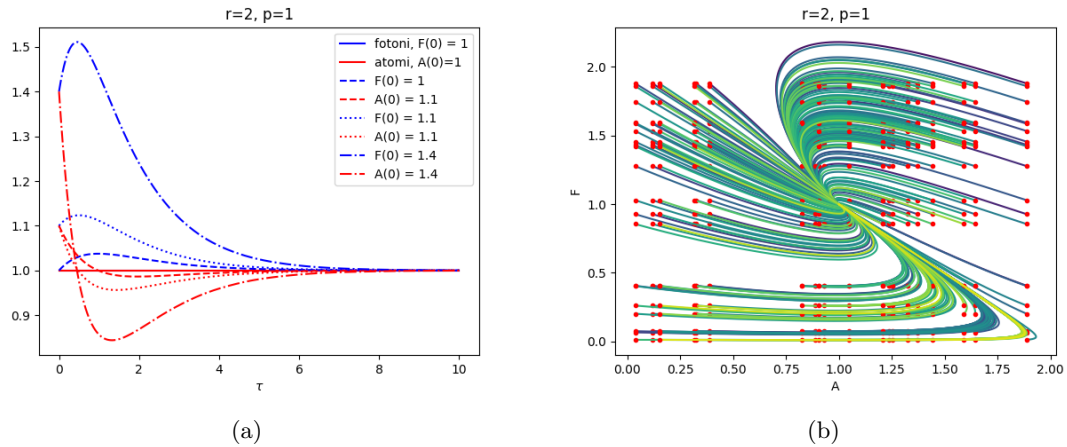
V primeru, ko začnemo v stacionarni točki  $(A(0), F(0)) = (r/p, 0)$  ne proizvedemo fotonov. Če pa se malo oddaljimo od stacionarne točke, se sistem prestavi v novo stacionarno točko (8), ki je odvisna od parametrov  $r$  in  $p$  (8(b)).



Slika 8: a) Časovni razvoj populacije fotonov in atomov pri različnih začetnih pogojih. b) Nova stacionarna točka sistema v odvisnosti od vrednosti parametrov  $r$  in  $p$  pri enaki množici začetnih pogojev.

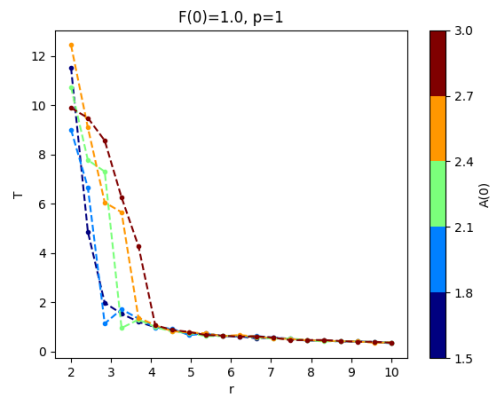
### 3.2 Točka $(1, \frac{r}{p}-1)$

V tem primeru gre za stabilno točko, vse začetne vrednosti vodijo k stacionarni točki sistema  $(1, \frac{r}{p}-1)$  (slika 9). Narisal sem samo fazni diagram za eno stacionarno točko. Začetne vrednosti so bile izbrane naključno. Takšnih stacionarnih točk je neskončno.



Slika 9: a) Časovni razvoj populacije fotonov in atomov pri različnih začetnih pogojih. b) Fazni diagram in stacionarna točka sistema pri danih vrednosti  $r$  in  $p$ . Rdeče pike predstavljajo naključno izbrane začetne pogoje.

Zanimivo je tudi pogledati periode nihajnih časov v odvisnosti od parametra  $r$  (slika 10). Z večanjem parametra  $r$  se manjšajo periode in večajo frekvence oscilacij.



Slika 10: Periode oscilacij v odvisnosti od parametra  $r$  pri različnem začetnem pogoju  $A(0)$ .

## 4 Zaključek

V nalogi sem obravnaval preprostejše modele epidemije in modela Lotka-Volterra ter model laserja. Pri vseh nalogah je mogoče pogledati veliko različnih primerov, ki se porodijo pri različnih vrednosti parametrov. Sam sem jih pogledal samo nekaj. Z modeli sistemov diferencialnih enačb 1. reda lahko relativno dobro opišemo realne sisteme in iz njih izvemo morebitne posebnosti (stacionarne točke) in zakonitosti.