

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO

MODELSKA ANALIZA I

12. naloga: Metoda maksimalne entropije in linearna napoved

Žiga Šinigoj, 28222025

Ljubljana, januar 2023

1 Uvod

Če je signal periodičen ga lahko dobro napovem z linearno napovedjo. Če nimam na voljo signala na vhodu sistema, lahko signal ob naslednjem času izračunam kot

$$S_n = - \sum_{k=1}^p a_k S_{n-k} , \quad (1)$$

kjer p (red modela) predstavlja število predhodnih signalov, ki jih z različno utežjo a_k uporabim, da napovem novo vrednost. Vse kar potrebujem so koeficienti a_k , Te dobim iz minimizacije kvadrata napake ϵ , ki predstavlja odstopanje napovedanega signala od signala, ki ga dobim če upoštevam tudi vhodni signal v sistem. Ob predpostavki, da je signal stacionaren, dobim z minimizacijo kvadrata napake Yule-Walkerjev sistem enačb za koeficiente a_k

$$R(i) = - \sum_{k=1}^p a_k R(i-k) , \quad i = 1, \dots, p \quad (2)$$

matrika sistema enačb je Toeplitzova. $R(i)$ je avtokorelacija signala, definirana kot

$$R(k) = \frac{1}{N-k} \sum_n S_n S_{n-k} \quad (3)$$

Definicija avtokorelacije močno vpliva na napoved in rezultate metode. V nekaterih primerih je mogoče avtokorelacijo utežiti z faktorjem $1/N$. Napako potem dobim kot

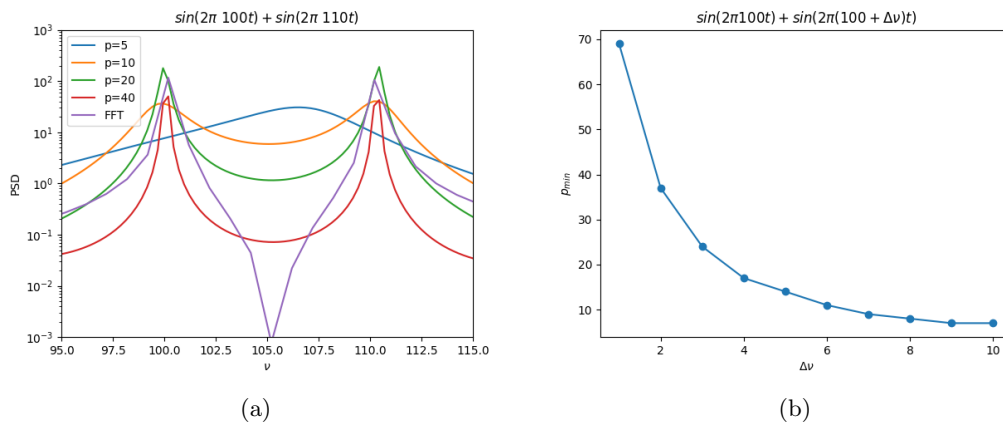
$$\epsilon_{min} = R(0) + \sum_{k=1}^p a_k R(k) . \quad (4)$$

Frekvenčni spekter signala dobim kot

$$P(\omega) = \frac{\epsilon_{min}}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i\omega t}|^2} \quad (5)$$

2 Ločljivost MEM

Ločljivost metode sem preveril tako, da sem vzel vsoto dveh sinusnih signalov, katerih razliko frekvenc med njima sem manjšal in gledal pri katerem redu modela lahko določim dva vrha. Če sta signala zamaknjena za $10Hz$ (slika 1b), potem je pri majhnih p nenatančno določen spekter. Odvisnost reda modela od razlike frekvenc med signaloma prikazuje slika 1a. Pri opazovanju zlitja dveh vrhov v enega s prostim očesom lahko trdim, da nisem opazil dveh vrhov pri razliki manjši od $2Hz$, čeprav jih je Pythonova metoda našla.



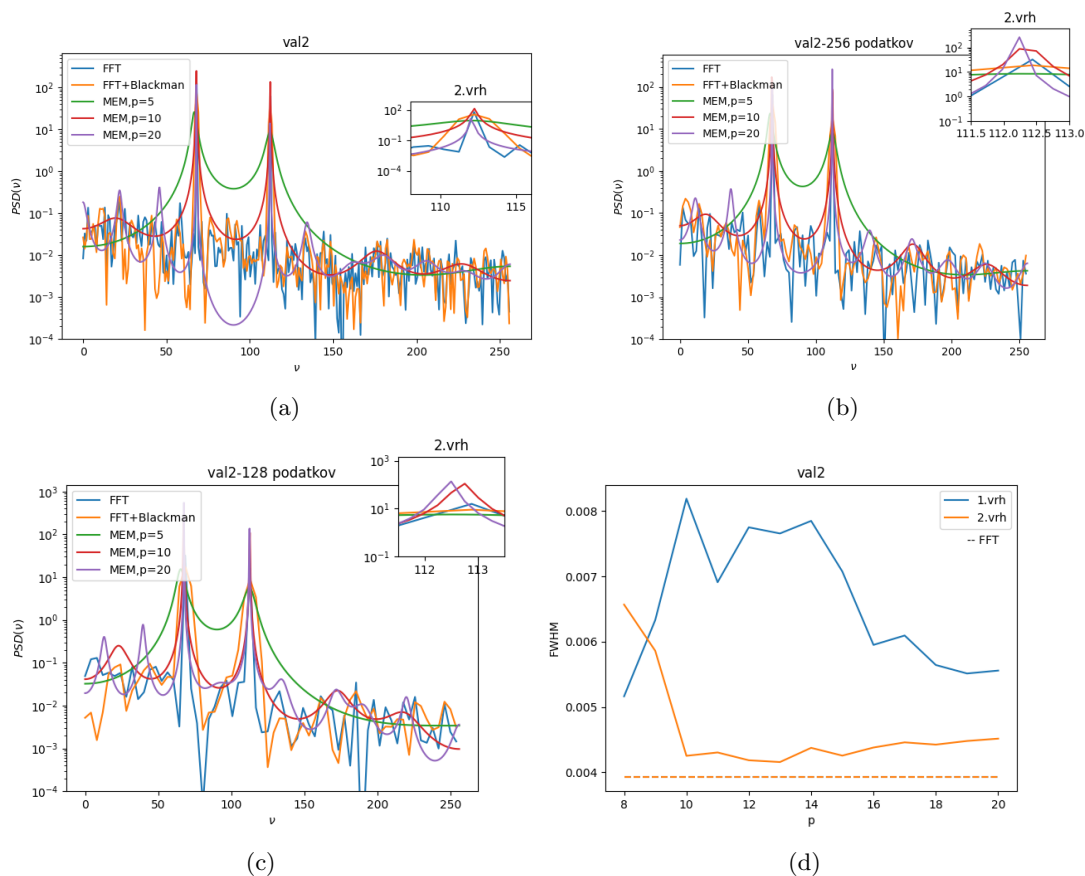
Slika 1: a) Frekvenčni spekter sinusnega signala z dvema frekvencama. b) Najmanjši red modela pri katerem zaznam dva vrha v odvisnosti od frekvenčne razlike med njima. Vrhove sem določil s pomočjo funkcije `scipy.signal.find_peaks`.

3 Frekvenčni spektri

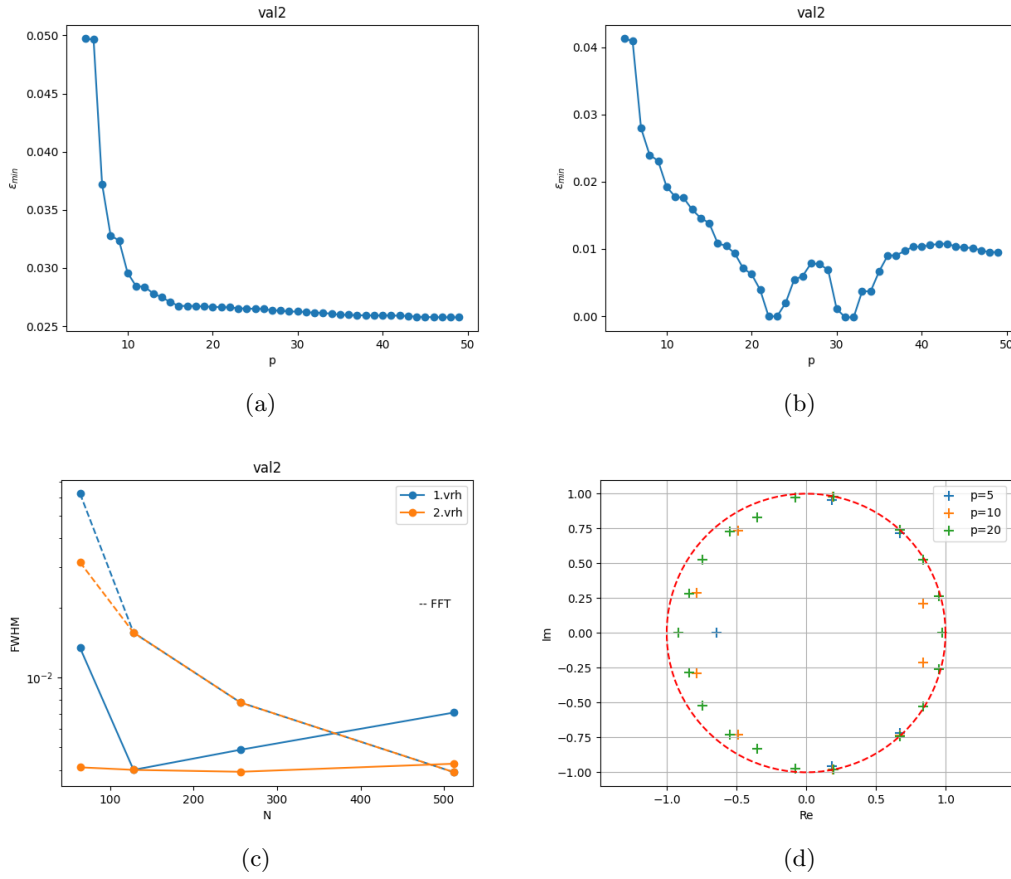
Za določanje širine vrhov v spektru sem uporabil funkcijo *scipy.signal.peak_widths*. Kot sem omenil že zgoraj je mogoče avtokorelacijsko funkcijo utežiti z faktorjem $1/N$. V tem primeru postane model bistveno bolj stabilen za velike p in načeloma ne divergira. Potek napake za tak model prikazuje slika 3a. Napaka strogo pada s parametrom p . Ta model je manj natančen kot če uporabim faktor $1/(N - k)$ pred avtokorelacijo. V tem primeru napaka nima tako lepe odvisnosti, ampak lahko ima tudi lokalne minimume. Za velike parametre p pa začne model divergirati. Vseeno lahko ob pravih vrednosti parametra p dosežem bistveno večjo natančnost. Frekvenčni spektri niso tako občutljivi na položaje ničel v kompleksni ravnini kot je napoved modela. Če je kakšen pol modela bil izven enotske krožnice sem ga slikal zrcalno čez enotsko krožnico. Zgleda, da če tako slikam pol je metoda bolj nestabilna, vendar pri manjših redih dosežem večjo natančnost, kot če pol slikam na enotsko krožnico. Na nekaterih grafih je približan N -ti vrh, ki je označen od leve proti desni.

3.1 Signal Val2

Spekter signala Val2 prikazujejo slike 2a,b,c, kjer sem vzel različno dolžino signala (manj podatkov). Zmanjšanje podatkov precej vpliva na širino vrhov FFT transformacije. Z manjšanjem vzorca se manjša tudi natančnost. Ob povečanju 2.vrhu (od leve proti desni) lahko opazim, da za velike p se vrh malce odmakne od ostalih napovedanih vrhov pri dani frekvenci. Mogoče je že red $p = 20$ prevelik. Okno Blackman pri FFT pričakovano razširi vrh. Spreminjanje širine vrhov v odvisnosti od reda filtra prikazuje slika 2d. Ob dovolj velikih redih modela lahko MEM metoda bolj izostri vrh kot FFT. V tem primeru sem vzel enako število točk spektra. Prednost MEM je ta, da lahko generiram poljubno število točk frekvenčnega spektra in s tem lahko bistveno zmanjšam širino vrhov. Odvisnost širine vrhov od števila podatkov prikazuje slika 3c. Vidim lahko, da ima MEM majhno odvisnosti od števila podatkov, kar je velika prednost pred FFT, ki je precej odvisna. Slika 2d prikazuje pole modela.



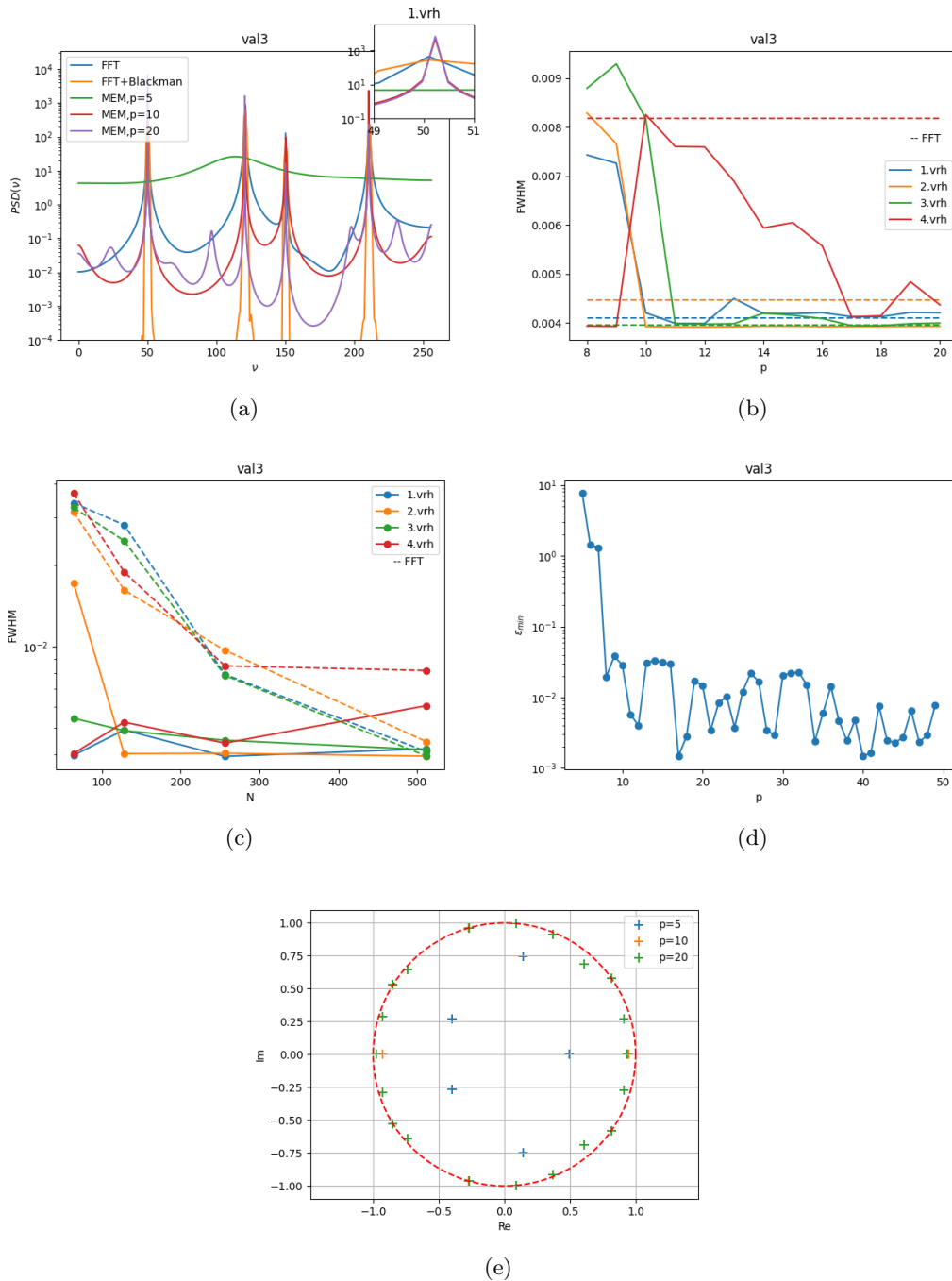
Slika 2: a),b),c) Frekvenčni spekter signala pri različnem številu podatkov. d) FWHM vrhov v odvisnosti od reda modela- p pri enakem številu točk spektra.



Slika 3: a) Napaka modela v odvisnosti od reda modela v primeru ko je faktor avtokorelacije $1/N$. b) Napaka modela v odvisnosti od reda modela v primeru ko je faktor avtokorelacije $1/(N - k)$. c) FWHM v odvisnosti od števila podatkov signala. d) Poli modela.

3.2 Signal Val3

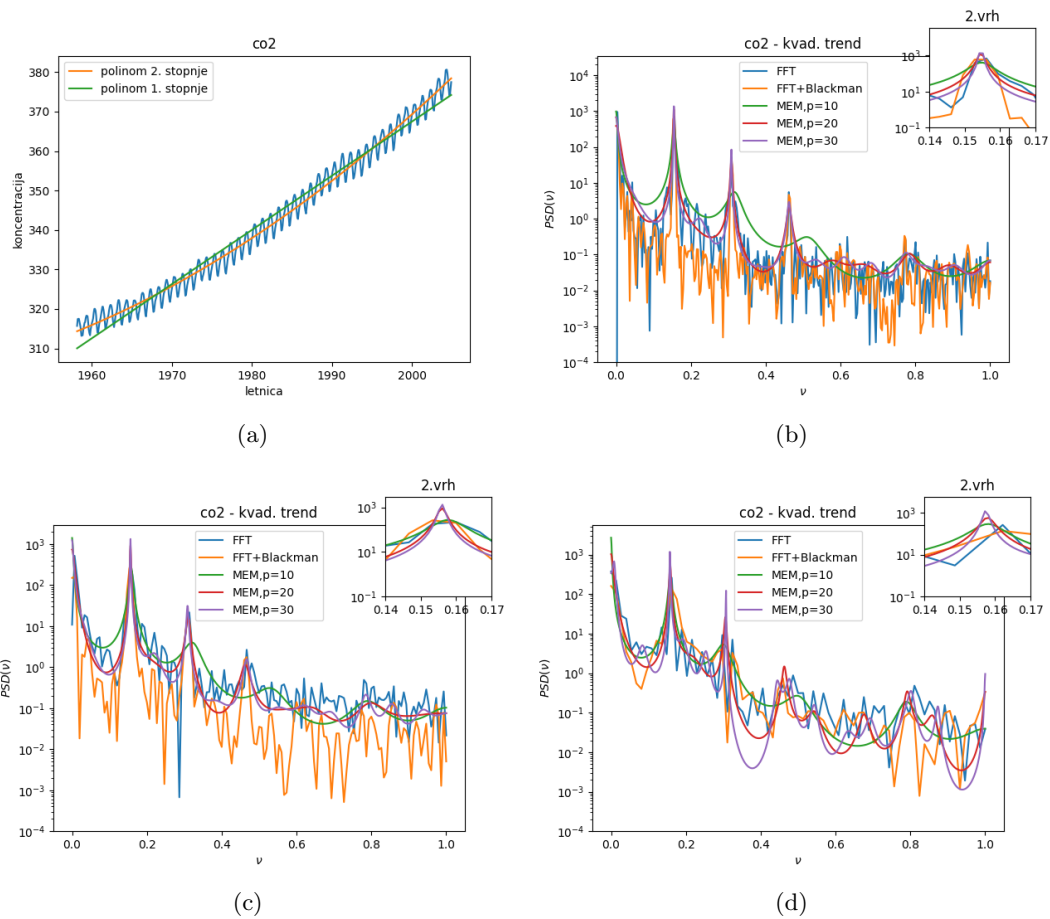
Spekter signala Val3 prikazujejo slika 4a. Odvisnost FWHM od reda modela in števila podatkov prikazujeta sliki 4b,c. Če bi povečal število točk spektra pri MEM bi dobil manjše FWHM. Zanimiva je tudi odvisnost napake modela od reda (slika 4d). Precej je odvisna od reda modela in ni kakšne preproste odvisnosti (sodi/lihi p). Če bi vzel faktor $1/N$ pri avtokorelaciji bi dobil bolj gladko krivuljo, ki bi imela večjo napako modela. Slika 4e prikazuje pole modela.



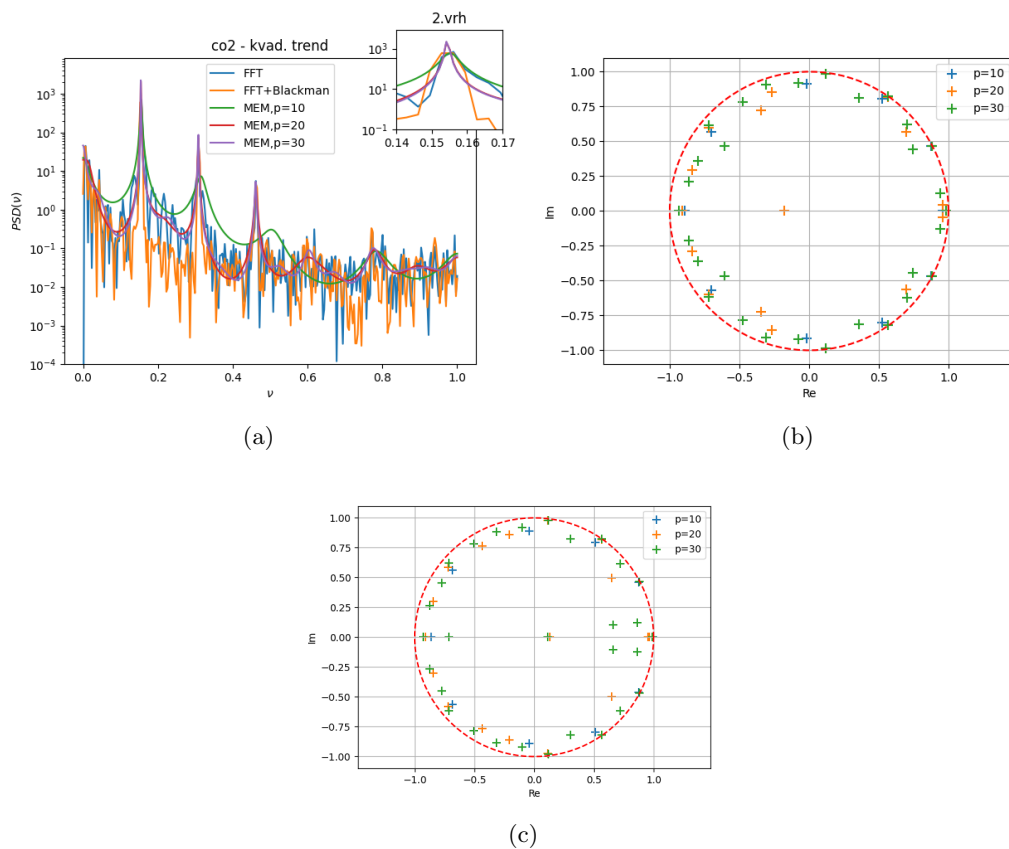
Slika 4: a) Frekvenčni spekter signala. b) FWHM vrhov v odvisnosti od reda modela- p pri enakem številu točk spektra. c) FWHM v odvisnosti od števila podatkov signala. d) Napaka modela v odvisnosti od parametra p . e) Poli modela.

3.3 Koncentracija CO_2

Pri koncentraciji je dobro najprej odšteti trend. Prilagajal sem linearno in kvadratno krivuljo na podatke (slika 5a) in nato odštel krivulji od podatkov. Spekter pri odštetem linearnem trendu prikazuje slike 5b,c,d, kjer sem zmanjševal število podatkov. Zmanjševanje števila podatkov se bolj pozna na FFT kot pa na MEM, kjer sem vedno risal 1000 točk spektra. Pri manjšem številu podatkov se začnejo vrhovi metod razmikati med sabo. Spekter pri odštetem kvadratnem trendu prikazuje slika 6a, kjer je razvidna razlika med odštetim linearnim trendom. Višina prvega vrha (od leve proti desni) se bistveno razlikuje. Pole modela z odštetim linearnim ali kvadratnim trendom prikazujeta sliki 6c,b.



Slika 5: a) Koncentracija CO_2 in prilagajanje linearne in kvadratne krivulje. b) Frekvenčni spekter koncentracije z odštetim LINEARNIM trendom (napaka na grafu). c) Frekvenčni spekter koncentracije z odštetim LINEARNIM trendom (napaka na grafu) pri polovičnem številu podatkov. d) Frekvenčni spekter koncentracije z odštetim LINEARNIM trendom (napaka na grafu) pri četrtini podatkov.



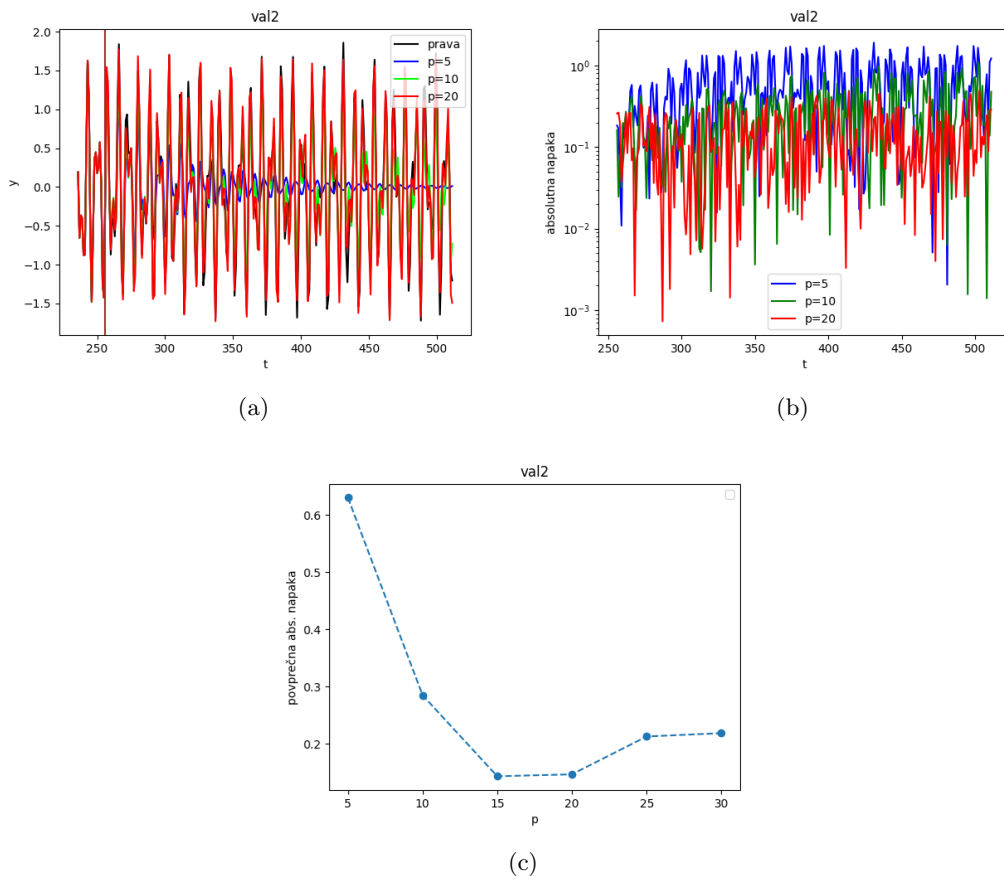
Slika 6: a) Frekvenčni spekter koncentracije z odštetim kvadratnim trendom. b) Poli modela, kjer koncentraciji CO_2 odštejem kvadratni trend. c) Poli modela, kjer koncentraciji CO_2 odštejem linearni trend.

4 Linearna napoved signalov

Pri napovedi signalov pa je zelo pomembno, kje se nahajajo ničle na kompleksni ravnini. Pri implementaciji sem upošteval zrcaljenje ničel izven enotske krožnice. Popravljanje ničel izven enotske krožnice in računanje znova koeficiente lahko tudi pokvari rezultate napovedi, sploh če ničle ne veliko odstopajo od enotske krožnice. Boljše rezultate napovedi sem dobil, če sem ničlo z absolutno vrednostjo npr. 1.0001 pustil pri miru, kot pa če sem popravljal in znova računal koeficiente. V ta namen sem dodal pogoj, da ob absolutni vrednosti večji od 1.001 slikam zrcalno ničlo, v nasprotnem primeru pa je ne spreminjam. Napoved je zelo občutljiva na vrednosti koeficientov a_k . Če bi utežil avtokorelacijo z $1/N$ je model bolj stabilen in lahko poljubno dodajam rede modela. V primeru utežitve z $1/(N-k)$ pa pri določenem redu model začne divergirati. Zgleda kot da obstaja optimalen p , ki da najmanjšo napako za določeno napoved signala.

4.1 Signal Val2

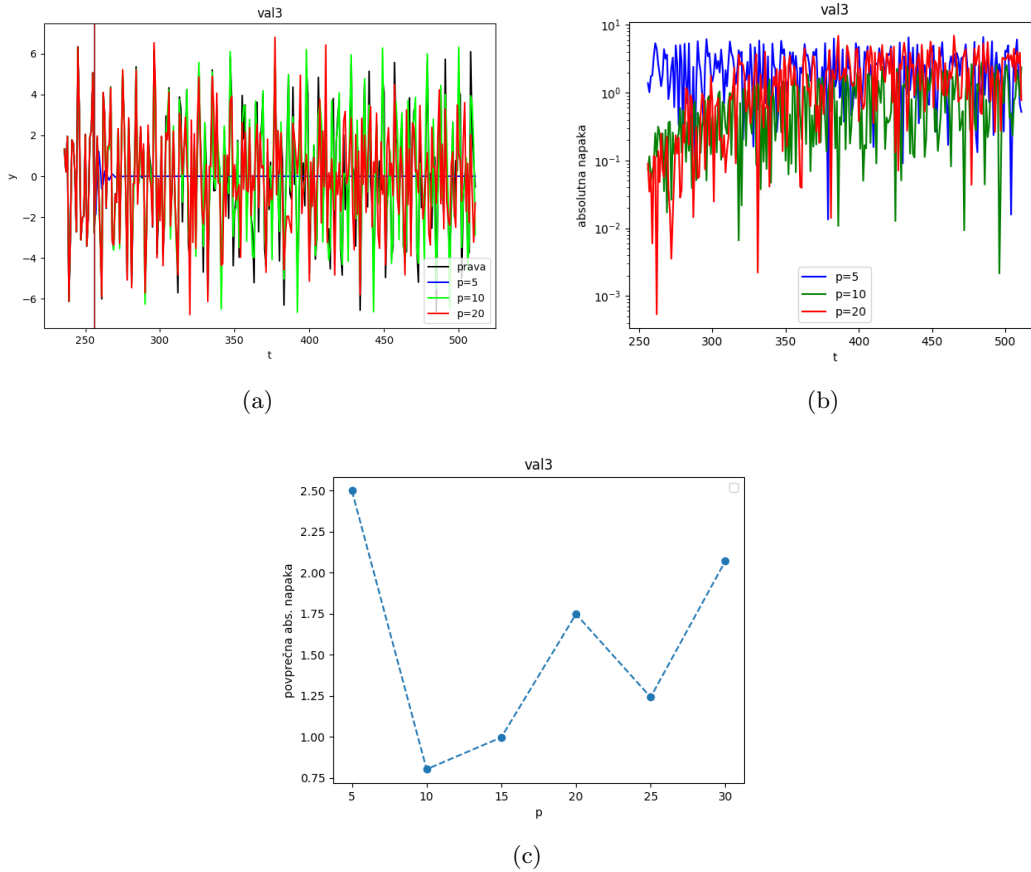
Napoved signala Val2 prikazuje slika 7a. Odstopanja od modela prikazuje slika 7b. Pri analizi povprečne napake modela v odvisnosti od reda modela (slika 7c) je v danem območju dosežena največja natančnost, če je red modela med $15 \leq p \leq 20$.



Slika 7: a) Linearna napoved pri različnem redu modela. b) Absolutna napaka napovedi pri različnih vrednostih p . c) Povprečna napaka modela v odvisnosti od parametra p .

4.2 Signal Val3

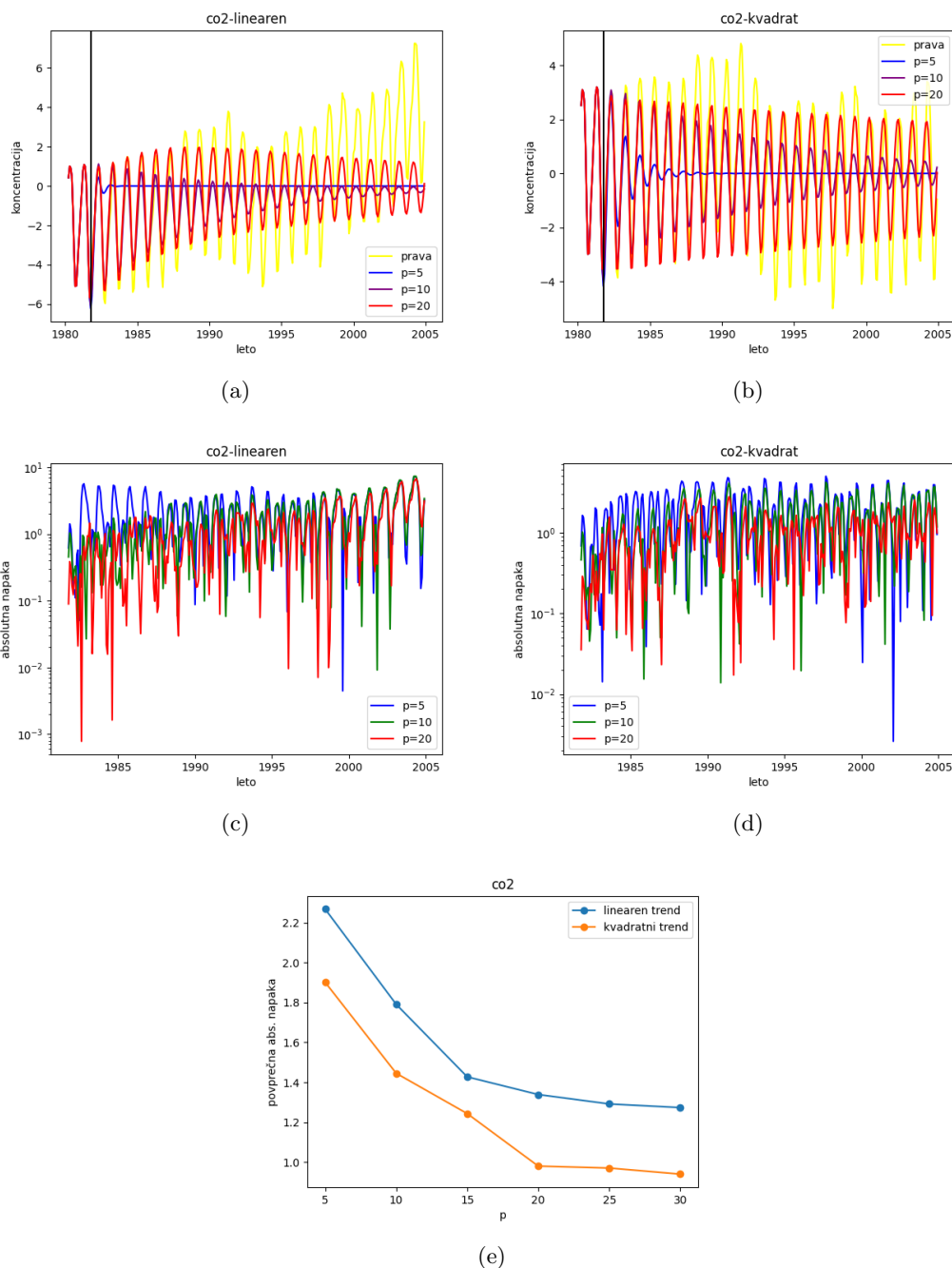
Napoved signala Val2 prikazuje slika 8a. Napoved je precej slabša kot pri signalu Val2. Model pri $p = 20$ dobro sledi do časa $t = 300$ nato začne precej odstopati. Boljše kot model $p = 20$ sledi model reda 10. Odstopanja od modela prikazuje slika 8b. Pri analizi povprečne napake modela v odvisnosti od reda modela (slika 8c) je v danem območju dosežena največja natančnost, če je red modela med $8 \leq p \leq 15$.



Slika 8: a) Linearna napoved pri različnem redu modela. b) Absolutna napaka napovedi pri različnih vrednostih p . c) Povprečna napaka modela v odvisnosti od parametra p .

4.3 Koncentracija CO_2

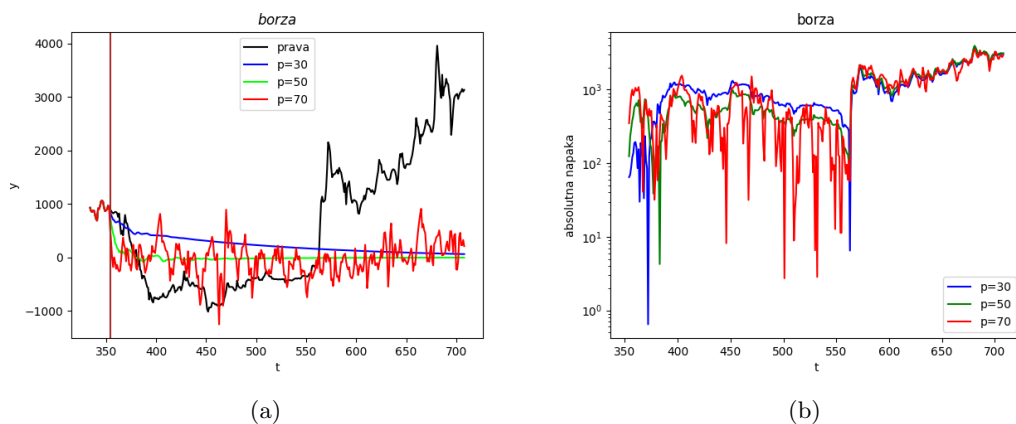
Pri napovedi CO_2 sem uporabil oba odšteta trenda (linearen in kvadraten), napoved prikazujeta sliki 9a,b. Pričakovano je napoved boljša v primeru ko odštejem kvadraten trend. Bolj natančna analiza signalov pove, da pri manjših p bolje napove periodo signala model, kjer odštejem linearen trend. Pri kvadratnem modelu se za majhne p s časom povečuje fazna razlika med pravim in napovedanim signalom. Odstopanja od pravih signalov prikazujeta sliki 9c,d. Povprečna absolutna napaka obeh modelov (slika 9e) ima strogo padajočo odvisnost od reda modela v danem območju.



Slika 9: a) Linearna napoved koncentracije z odštetim linearnim trendom. b) Linearna napoved koncentracije z odštetim kvadratnim trendom. c) Absolutna odstopanja pri različnih redih modela (linearen trend). d) Absolutna odstopanja pri različnih redih modela (kvadratni trend). Povprečna absolutna odstopanja v odvisnosti od reda modela.

4.4 Borza

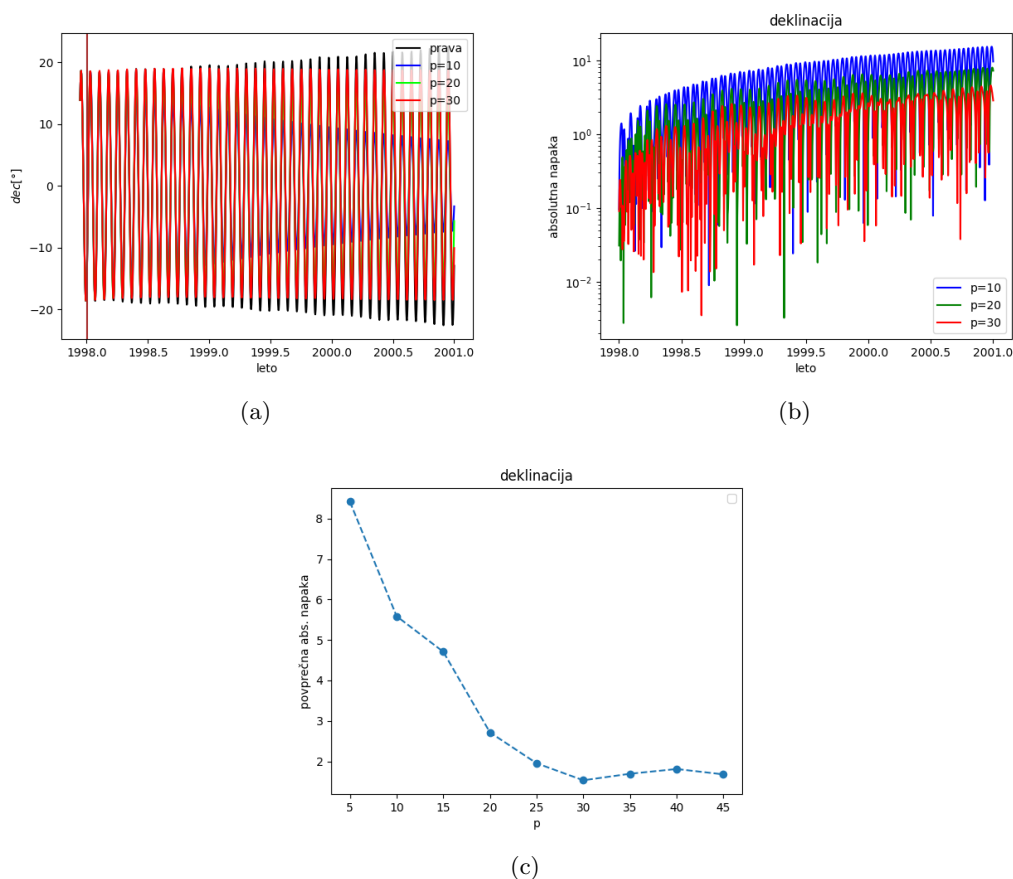
Napoved borze je zelo slaba. Ker v signalu ni nobenih periodičnih vzorcev, model slabo napove gibanje. Tudi če spreminjam začetek napovedi še vedno ni izboljšav. Napoved in odstopanja prikazujeta sliki 10a,b.



Slika 10: a) Napoved borznega gibanja. b) Absolutna odstopanja napovedi.

4.5 Lunine efemeride

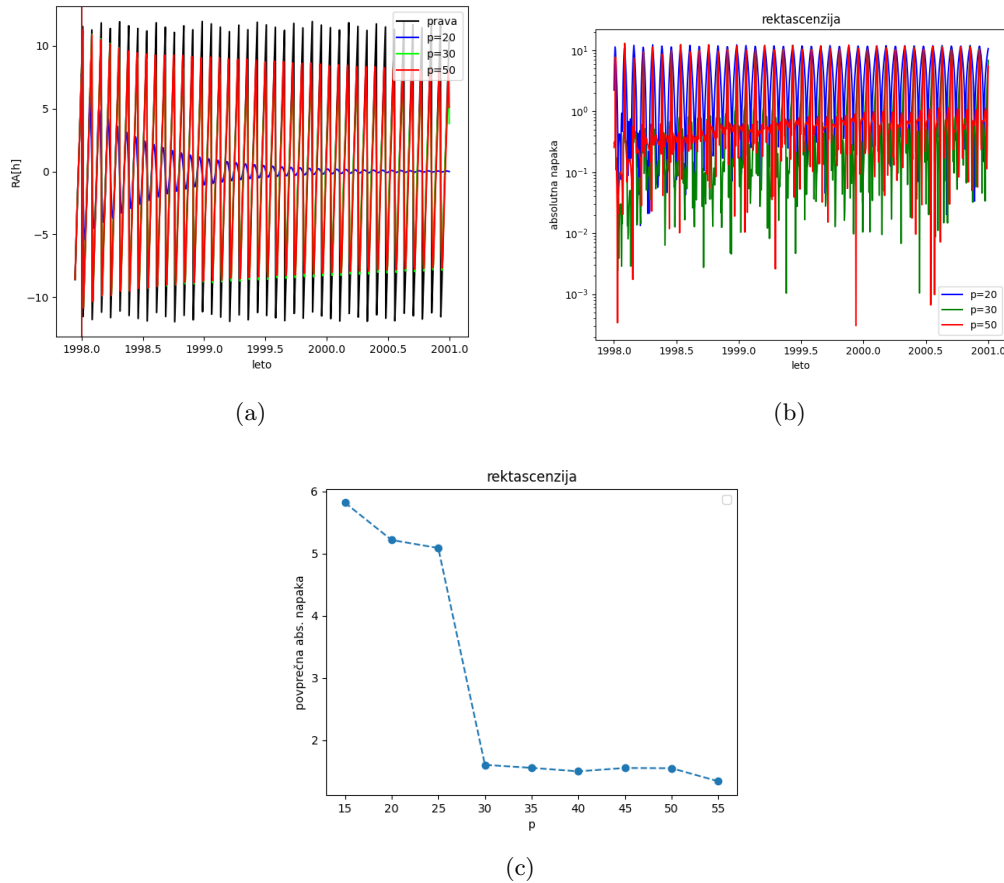
Pri napovedi luninih efemerid so rezultati nekoliko boljši, saj imamo periodično gibanje. Napoved deklinacije je precej dobra in že majhen red model ($p = 30$) zelo dobro napove deklinacijo. Povprečna absolutna napaka modela ima padajočo odvisnost, ki doseže platno natančnosti pri $p = 30$, vsaj za opazovano območje.



Slika 11: a) Napoved deklinacije. b) Absolutna odstopanja od pravih vrednosti. c) Povprečna absolutna napaka v odvisnosti od reda modela.

Napoved rektascenzije je nekoliko slabša kot napoved deklinacije. Čeprav na grafu napovedi (slika 12a) zglada, da dobro napovem gibanje, se pojavijo velika odstopanja ob določenih časih (slika 12b). Linearen model dobro napove frekvence, vendar mislim da pride do nekega konstantnega faznega zamika med pravim in napovedanim signalom, kar da špice v grafu absolutnih napak. Povprečna absolutna napaka modela (slika

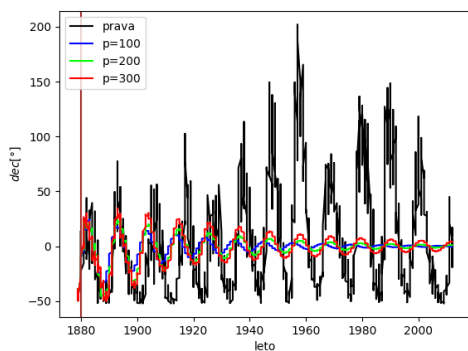
12c) ima padajočo odvisnost, ki doseže platno natančnosti pri $p = 30$, vsaj za opazovano območje.



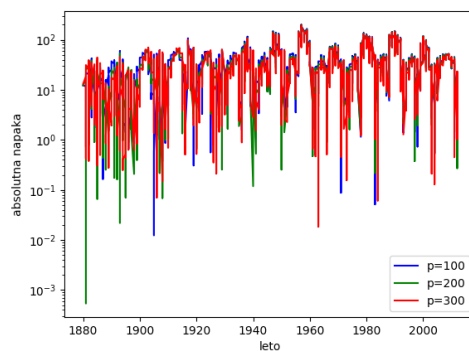
Slika 12: a) Napoved rektascenzije. b) Absolutna odstopanja od pravih vrednosti. c) Povprečna absolutna napaka v odvisnosti od reda modela.

4.6 Wolfovo število

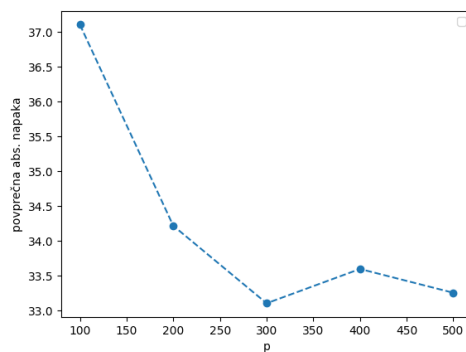
Pri napovedi Wolfovega števila je moj algoritem odpovedal. Ker imam opravka z veliko točkami, ki opišejo eno "periodo" signala je potrebno za napoved vzeti velik red filtra. V tem primeru začne model divergirati. Poskusil sem tudi slikati zunanje pole na enotsko krožnico in spremeniti kriterij za premestitev pola, vendar to ni pomagalo. Za napoved sem nato uporabil funkcijo *aryule* iz paketa Spectrum, ki reši sistem enačb, kjer je matrika Toeplitzova, rekurzivno. Metoda je bolj stabilna kot moja in rezultati napovedi so prikazani na sliki 13a,b,c. Dobro lahko napovem samo periodo signala.



(a)



(b)

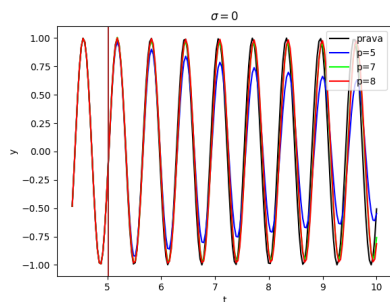


(c)

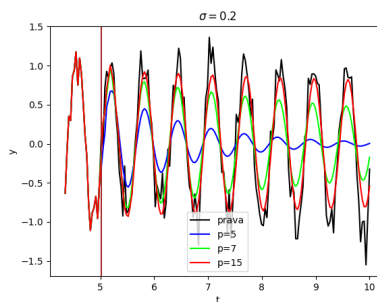
Slika 13: a) Napoved Wolfovega števila. b) Odstopanja od pravih vrednosti. c) Povprečna absolutna napaka v odvisnosti od reda modela.

4.7 Vpliv šuma na napoved

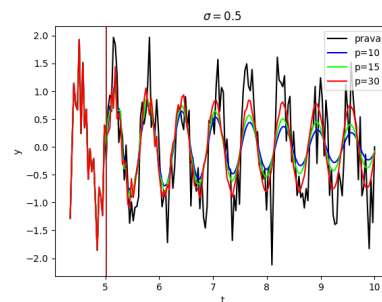
Pogledal sem kako dobro lahko napovem sinusni signal, če mu dodajam gaussovski šum različnih varianc (slika 14a,b,c). Z večanjem šuma je potrebno za dobro napoved večati tudi red modela.



(a)



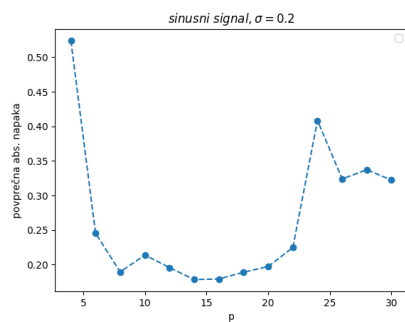
(b)



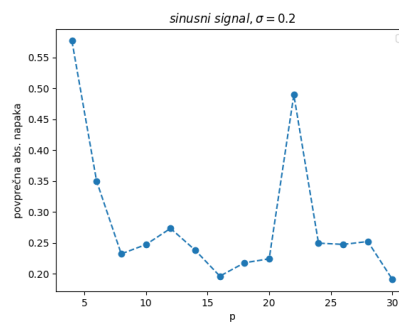
(c)

Slika 14: Napoved sinusnega signala ob različnih zašumljenostih.

Povprečno absolutna napaka modela v odvisnosti reda p prikazujeta sliki 15a,b, kjer v enem primeru slikam zunanje pole na enotsko krožnico, v drugem pa zrcalno.



(a)



(b)

Slika 15: a) Povprečna absolutna napaka modela v odvisnosti od reda modela pri čemer zunanje pole slikam na enotsko krožnico. b) Povprečna absolutna napaka modela v odvisnosti od reda modela pri čemer zunanje pole zrcalim prek enotske krožnice.